지은이의 말

"수학은 정직하게 공부하는 자만이 결국 승리를 쟁취하는 과목입니다."
이 책의 모토입니다. 논리적인 단어인 '수학'과 감정적인 단어인 '정직'이 서로 어울리지 않는 조합으로 느껴지나요? 속세에는 수학 문제를 풀기 위한 온갖 편법들이 난무합니다. 편법을 쓰면 생각을 덜 하고도 문제가 쉽게 풀리고, 수학에 진절머리가 난 학생들에게는 이런 편법이 마법과도 같이 다가옵니다. 그러나 수학은 생각 하는 학문입니다. 수학을 정복하기 위해서는 결국에는 정직하게 공부해야만 합니다.

수학을 정직하게 공부한다는 것은 무슨 뜻일까요? 바로 모든 문제를 1논리적으로 2교과과정 내의 지식으로 푸는 것입니다. 정직하게 공부한다는 것은 가장 정통한 방법으로 공부하는 것입니다.
정말 어렵습니다. 이렇게 공부를 하는 동안 '이 방향이 맞나..' 라는 의구심이 계속 들 것이고, 풀이를 보면 '내가 시험장에서 이렇게 까지 할 수 있을까?' 란 생각을 계속 하게 될 겁니다. 실제로 수험생 중에 수학을 제대로 공부하려는 학생들은 2%도 되지 않습니다. 그리고 그 2%의 학생 중 끝까지 열심히 한 학생들이 상위 1%안에 들어 수학에서 100점 을 받죠.

수학을 어렵게 공부해서 얻는 것이 무엇일까요? 수학은 어렵게 수련하여 마침내 단련된 여러분을 배신하지 않습니다. 여러분은 시험이 쉽든 어렵든 언제나 안정적으로 1등급을 쟁취할 수 있는 실력을 갖추게 됩니다. 이것이 모든 수험생들이 원하는 바가 아닐까요? 수능까지의 기간은 긴 것 같으면서도, 막상 실력이 올랐나 싶을 때면 시험은 어느새 목전에 닥쳐있습니다. 그렇기에 수능에서는 선택과 집중을 제대로 한 사람만이 마지막에 빛을 볼 수 있습니다.

저희는 이 책이 기존의 어느 책보다도 진보적인 명작이라고 감히 자부합니다.
한국교육과정평가원에서 나온 수능 출제 매뉴얼, 수능 학습 방법 안내서 및 수능과 관련된 모든 논문 자료, 교사용 지도서, 교육과정 해설서 와 7종의 교과서를 모두 비교 분석하여 책을 집필한 경우는 '수학의 명작' 시리즈가 유일한 것 같습니다. 1994년도부터 출제된 모든 평가원 기출문제들을 철저히 분석하여 다각도에서 풀이를 개발하며, 그 중 가장 필연적인 풀이를 본서를 통해 여러분에게 선사 해드리려 합니다.

하지만 아무리 이 책이 전국에서 가장 좋은 책이라 한들, 여러분이 열심히 함께 해주지 못한다면 반쪽짜리 명작에 불과합니다. 이제 여러분이 따라줄 일만 남았습니다. 여러분의 가슴 속 뜨거운 열정을 진심으로 응원합니다.

누구를 위한 책인가?

이 책은 수능 수학영역에서 만점을 받기 원하는 모두를 위한 책입니다. 여러분의 끈기와 노력만 있다면 이 책을 통해 누구나 수학영역 만점을 받을 수 있습니다. 가능합니다.

하지만 이 책의 권장 학습 대상은 존재합니다. 이 책은 개념 학습을 적어도 한 번은 하고 온 학생들을 독자로 가정합니다. 개념 학습을 제대로 하지 않았다면 교과서를 최소 한번은 보고 와야 합니다. 평소에 모의고사에서 3등급 이상을 받았다면 괜찮지 않을까 합니다.

그럼 본인은 4등급 이하인데 책을 볼 수 없을까요? 볼 수 있습니다. 하지만 고난의 길을 걸을 준비는 하고 와야겠습니다. 책을 보는 속도도 현저하게 떨어질 것이고 중간에 책을 집어 던지고 싶을 수도 있습니다. '내가 이 문제를 굳이 이렇게까지 풀어야 되나' 하는 부분도 남들보다 더욱 많을 것이고, 한 번 봐서는 이해되지 않는 부분이 대부분일 수도 있습니다.

그럼 본인이 1등급이라고 해서 얻어갈 것이 없는 책인가? 절대 그렇지 않습니다. 여러분은 지금까지 잘못된 방법으로 공부를 했을 확률이 매우 높습니다. 아마 Stage 0 만 읽어보아도 많은 분들이 그동안 얼마나 잘못 된 방법으로 공부를 해왔는지 느낄 겁니다. 책을 계속 보다 보면 지금까지 여러분이 알던 것은 빙산의 일각이었다는 것을 알게 될 것입니다.
여러분의 목표는 1등급이 아니라 안정적인 100점을 맞는 것입니다. 수능이 어떻게 나와도 안정적인 점수를 받기 위한 비법은 간단합니다. 아주 정직하고 끈기 있게 공부하는 것, 그 뿐입니다.
본인이 수학실력이 조금 된다고 해서 건성으로 책을 볼 거면 차라리 빨리 책을 덮는 것을 추천합니다. 그럴 바에는 본인이 좋다고 생각 하는 원래의 공부 방법으로 밀고 나가세요. 그것이 성적 향상에 도움이 더 될 테니까요.

여러분의 현재 등급대가 어찌됐던 겸손한 자세로 책의 모든 부분을 곱씹을 만큼 열심히 본다면 여러분은 남부럽지 않은 수학실력을 가지게 될 것입니다. 다시 한 번 강조를 하지만 수학영역은 뜨거운 열정과 많은 노력을 요구합니다. 그리고 본인이 얻게 되는 보상은 결국 노력을 저버리지 않을 것임을 명심하세요.

이 책이 “명작(名作)” 인 이유

1. 내용 서술이 어느 책보다도 자세합니다.

학생의 공부 편의를 위하여 시중에서 여러 권의 교과서를 구해 비교 · 분석했습니다. 수능에서 강조되는 단원, 학생들이 어려워하는 단원은 특히 더욱 자세히 서술하였고, 수능에 나오지 않는 부분들은 과감히 축소시켰습니다. 또한 가독성을 높이기 위해 개념서나 참고서의 양식에서 탈피해 마치 책을 읽는 듯한 느낌을 주었습니다. 그동안 많은 학생들은 관찰하며 학생들이 어떤 부분을 어려워하는지 분석했습니다. 문제를 해결하는 알고리즘이 책 곳곳에 숨어 있으며, 학생들이 어려워하거나 헷갈려 하는 부분, 많이 실수하는 부분은 반복적으로 표기하여 강조했습니다.

2. 단원을 Topic으로 나누었습니다.

책의 구성단위가 ‘Topic(토픽)’으로 되어있습니다. 수능에는 문제들이 패턴화되어 출제됩니다.
따라서 교과서의 단원을 그대로 따르는 것보다 수능 문제가 출제되는 방향에 맞추어 공부하는 것이 올바른 방법입니다. 자주 출제되는 영역이나 중요한 이론을 묶어 하나의 토픽으로 분류하였고, 각 토픽별로 문제를 푸는 알고리즘과 논리의 흐름을 습득하도록 합니다.

3. 기출문제와 개념을 유기적으로 연결시켜주는 최초의 책입니다.

‘배운 개념을 사용해서 문제를 풀어라.’ 많이들 들어보셨지만, 막상 배운 개념을 문제에 곧바로 적용해 보라고 하면 난감한게 현실입니다. 이러한 개념과 문제 사이의 괴리감을 해결하기 위해 이 책에는 평가원 기출문제를 대부분의 예제(EXAMPLE)로 활용하였고, 그 토픽에서 배운 내용들로 문제를 분석하였습니다. 각 토픽 마지막에는 토픽에서 배운 내용을 직접 적용해볼 수 있는 VIP 문항을 수록하였습니다.

4. 기출문제뿐만이 아닙니다.

기출문제를 완벽하게 분석한 이들을 위해, 수능 100점을 넘어선 실력을 갖추고 싶은 이들을 위해 고난도 자작 문제를 책 곳곳에 심었습니다. 또한 Stage 02에는 여러분의 상상을 초월할 최고난도 문제들이 실려 있습니다. 이 중 수능 21, 30번에 버금가는 문제, 혹은 그 이상의 난도를 자랑하는 문제 또한 많습니다. Stage 01에서 연습한 내용을 완벽하게 소화시켜줄 문제들이 여러분들을 기다리고 있습니다.

책의 구성과 학습방법

미적분Ⅰ은 총 3개의 Stage(0~2) 와 14개의 Topic으로 구성되어있습니다.
Stage 00은 수학공부의 갈피를 잡아주는 부분입니다. 본격적인 내용은 Stage 01부터 시작하며, Stage 01은 본문과 VIP문제로 구성됩니다. 본문에는 개념설명과 EXAMPLE 문제가 있습니다.

1. Stage 1 – 본문

– **개념설명** : 교과서에 있는 모든 내용을 수능의 형태에 알맞게 재구성 하였습니다. 서술의 논리적 흐름을 강조하였으며, 이해하기 쉽도록 서술하였습니다. 한 개념을 설명한 다음에는 개념 이해를 위한 예제(EXAMPLE)를 넣었고, 곳곳에 내용을 압축하여 보여주는 정의, 정리, 알고리즘과 같은 박스를 실었습니다.

– **EXAMPLE 문제** : 교과서 예제, 평가원 기출문제가 주를 이룹니다. 난이도는 문제마다 다르며, 개념 설명과 유기적으로 연결되어 있습니다. 개념을 충분히 숙지하려면 모든 예제 문제를 완벽하게 풀 수 있을 때까지 반복하여 연습해야 합니다.

– **EXAMPLE 분석** : 배운 개념이 실제로 문제 속에 어떻게 적용되었는지 유기적으로 보여줍니다. 일반 해설보다는 훨씬 자세하며 개념 설명과 연결되어 있다고 생각해도 무방합니다. 처음 문제를 봤을 때 자신이 구사한 풀이와 비교해 봅시다.
또한, 단순한 해설이 아니고 본문 내용이니 문제를 풀었다고 하더라도 반드시 보고 넘어가야 합니다.

이제 본문에 등장하는 박스 속 용어를 알아봅시다.

– **정의** : 어떤 개념이나 용어의 뜻을 명확하게 정한 문장. 수학의 가장 밑바닥이다.

– **성질** : 정의나 정리로부터 파생되는 대상의 특징

– **정리** : 증명된 명제 중에서 기본이 되는 것이나 앞으로 여러 가지 성질을 증명할 때 활용 되는 것. 정리로 표현된 것 역시 반드시 정의나 성질을 이용하여 증명할 수 있어야 하며, 암기 하고 있어야 한다.

– **따름정리(COROLLARY)** : 정리나 성질로부터 파생된, 정리보다는 덜 중요한 내용이다. 반드시 알고 있어야 하는 것은 아니지만 문제를 풀 때 도움을 줄 수 있는 선에서 수록하였으며, 따름정리를 암기하려면 증명까지 같이 숙지해 두어야 한다.

– Mini Lecture : 학생들이 많이 하는 실수나 자주 쓰이는 스킬을 정리해 둔 부분이다. 꼭 체크하고 넘어가자.

– **알고리즘(ALGORITHM)** : 여러 가지 성질들과 정리가 연계되는 방식이 이미 유형화된 문제들이나, 특별히 머릿속에 도식화하여 정리했으면 하는 부분들을 묶어서 나타낸 박스이다.

– Caution! : 말 그대로 학생들이 많이 실수하는 부분이나, 주의해야할 내용을 적어놓은 박스이다.

2. Stage 1 – VIP

Very Important Problems의 약자로 무조건 풀고 가야 하는 기출문제들과 일부 자작 문제들로 구성이 되어 있습니다. 연습문제 정도로 생각하면 됩니다. VIP 문제를 풀기 전에 개념이 이미 탄탄하게 학습되어 있어야 하며, EXAMPLE 문제를 완벽히 풀 줄 알아야 합니다. VIP 문제의 해설은 해설지에서 찾아볼 수 있습니다.

3. Stage 2 - 자작 문제

Stage 2에서는 Stage 1에서 했던 내용들을 적용시키고, 수학적 사고력을 신장시킬 수 있도록 연습하는 문제들을 수록해놓았습니다. 고난도 자작 문항, 단원 통합 고난도 기출 등 문제들을 엄선하여 앞서 Topic들에서 배웠던 내용들을 어떻게 새로운 문제들에 적용시킬 수 있는지 배워 가시면 됩니다. 그리고 모든 문제의 해설마다 이 문제에서 얻어갔으면.. 하는 내용이 담겨있기 때문에, 만약 문제를 풀어냈더라도 해설을 꼭 봐주시면 감사하겠습니다.

Topic 13. 최고난도 기출과 활용

이 Topic에서는 이과 기출문제이지만, 현재의 미적분1의 내용으로 풀 수 있는 고난도 기출 문제, 또 만약 풀 수 없다면 좋은 아이디어만 뽑아서 내용만 미적분1에 맞춘 기출변형 문제가 포함되어 있습니다. 간혹 있는 '지적 유희 문제'는 미적분1의 내용으로 풀 수는 있으나 출제되지 않는 스타일의 기출문제를 의미합니다. 그 이유는 해설을 통해서 확인할 수 있습니다.

Topic 14. Special Exercise

이것은 기출문항의 트렌드에 맞춰서 저자들이 직접 출제한 문항, 리듬농구 모의평가에 수록되었었던 문항 중 우수한 문항만을 뽑아서 만든 Topic입니다. 정말 어려운 문제가 있을 수도 있고, 한 문제지만 논리의 호흡이 정말 긴 문제가 있을 수도 있습니다. 이 Topic을 풀기 전에 우선 Stage 1과 Stage 2의 Topic 13을 완벽하게 체화하는 것을 강력하게 권고합니다. 또, 간혹 있는 '지적 유희 문제'는 미적분1의 내용으로 풀 수는 있으나 정말 어렵고 수능스럽지 않기 때문에, 심장이 약하신 분이나 노약자분들은 푸는 것을 삼가야 할 문제입니다. 모든 문제의 해설에 문항 comment를 추가하였으며, 마찬가지로 문제를 풀었더라도 꼭 읽고 넘어가시면 좋겠습니다.

Exercise를 포함한 본 교재의 모든 문제들에서 난이도에 대한 선입견을 갖는 것을 막기 위해 배점은 삭제하였으며, Stage 02에 실린 문제들의 순서는 단원과 무관합니다.

이 책을 학습하는 방법을 알아보겠습니다.

– 책을 처음 보시는 분들을 위해 –

Stage 01을 풀기 전에 꼭 Stage 00을 2회 정도 정독하시기 바랍니다. Stage 01의 각 Topic에서 본문을 한 번 읽었다고 곧바로 VIP 문제로 넘어가지 말고, 본문과 EXAMPLE 문제를 반복하여 숙지한 후에 넘어가시기 바랍니다. 특히 익숙하지 않은 Topic일수록 한 Topic을 여러 번 반복하는 것이 중요합니다. 하지만 처음 봤을 때 모든 것을 다 이해하고 넘어가는 것은 불가능하므로, 해당 Topic에 있는 내용을 90% 정도 숙달하면 다음 Topic으로 넘어가세요.

– Stage 01을 1회독한 후 –

Stage 01을 위에 설명한 방법대로 1회독을 마쳤다면 Stage 02로 가지 말고 Stage 01을 많게는 네 번까지 반복하여 보시기 바랍니다. Stage 02의 Topic 13에는 평가원 기출문제 중 미적분1 범위에 맞추어 변형한 고난도 기출문제들이 실려 있고, Topic 14에는 역대 기출문제들보다도 어려울 수 있는 새로운 문제들이 실려 있습니다.

하지만 여러분이 기출문제를 완벽히 풀 수 없다면 새로운 문제들을 푸는 것은 아무런 의미가 없습니다. Stage 01까지 완벽히 소화를 한 분들만 Stage 02, 특히 Topic 14를 보기 바랍니다. 어떤 시중의 문제보다도 기출문제를 학습하는 것이 우선입니다. 1등급을 받기 위해서 Topic 14를 꼭 풀어야 하는 것도 아니며, 수능 전까지 Topic 14를 꼭 보고 시험장에 들어가야 하는 것도 아닙니다. 다시 한 번 강조하지만, 기출문제를 완벽하게 학습하는 게 항상 우선입니다. 또한 Stage 00은 수학 공부법의 기초이므로 내용을 잊어버릴 때쯤이면 다시 읽어주도록 합시다.

– 저자와 소통할 수 있는 커뮤니티 –

학생은 오탈자 제보, 정오표 확인 및 책에 대한 여러 가지 Q&A 를 Laplace Club 이라는 네이버 카페에 들어와서 할 수 있습니다. 주소는 cafe.naver.com/laplaceclub 입니다.

Laplace Club
cafe.naver.com/laplaceclub

저자와 바로 피드백을 주고 받을 수 있는
Laplace Club QR 코드

cafe.naver.com/laplaceclub

“

목차

”

Stage. 0 선택과 집중

Stage. 1 건축의 시작

Stage. 2 수학을 완성하다

정리를 하면, 우리가 개념공부를 할 때에는 현재 배우고 있는 내용이 정의인지, 성질인지, 정리인지를 구별하고, 그것이 어떤 개념으로부터 파생되었는지를 알고 넘어가야 합니다. 앞으로 각 Topic을 공부할 때 이런 부분을 잘 유의해서 공부하시기 바랍니다.

실제로 교과서에서 제시하고 있는 '내용 자체'는 별로 많지 않습니다. 그 내용만큼은 이 책에 모두 나와 있으며 A4용지 몇 장에 완벽하게 요약할 수 있을 정도로 충분히 암기를 해야 합니다. 당연히 암기에는 이해가 선행되어야 하겠죠. 만약 어떤 개념이나 내용이 잘 이해되지 않는다면, 일단 외우고 넘어 갔다가 다시 돌아오는 것이 좋습니다. 나중에 다시 보면 더 큰 맥락에서 저절로 이해가 되는 경우가 많기 때문입니다.

이 책은 위와 같이 막막하게만 느껴지는 논리적으로 공부하는 과정을 쉽게 할 수 있도록 도와줄 것입니다.

5. 해석의 중요성과 풀이의 필연성

이제까지 논리적으로 공부를 하는 법을 알아보았습니다. 그런데 공부를 하다보면 한 문제에 논리적으로 가능한 풀이가 여러 가지인 경우가 존재합니다. 주로 여러 개념이 복합적으로 얽혀있는 고난도 문제들이 그렇습니다. 이럴 땐 어떤 풀이를 선택하는 게 맞을까요?

이 부분은 사실 사람마다 의견이 갈릴 수 있습니다. 물론 평가원이 의도한 풀이가 있을 것입니다. 하지만, 문제는 평가원은 완벽한 풀이를 공개하지 않는다는 것입니다. 가끔씩 논문에 몇 문제에 대한 풀이법을 기재하는 것이 전부입니다.

따라서 우리는 어떤 풀이가 더 **필연**적인지를 분석하고 선택해야 합니다.

여기서 풀이가 필연적이란 것은 무슨 뜻일까요? 필연성의 사전적인 의미는 "사물의 관련이나 일의 결과가 반드시 그렇게 될 수밖에 없음"입니다. 수학영역에서 필연성 있는 풀이란 교과과정에 근거한 당위성이 있는 풀이, 충분히 여러분이 생각해낼 수 있는 풀이 정도로 치환할 수 있겠습니다.

가장 이상적인 것은 여러분이 기출문제를 직접 분석하면서 많이 나오는 방법과 풀이들을 익혀 여러분만의 필연성을 찾는 것입니다. 하지만 현실적으로 혼자서 교과서와 기출문제집 한권을 들고서 모든 기출문제를 분석하는 것은 굉장히 어렵습니다. 게다가 기출문제집마다 풀이가 천차만별일 뿐더러 책마다 풀이를 보면 일관성이 없는 경우가 많아 혼란을 줍니다.

따라서 Stage 01에는 각 토픽별로 핵심이 되는 중요한 기출문제들과 필연성 있는 해설 및 분석을 달아두었습니다. 물론 여러 가지 풀이가 존재하는 문제들이 있지만, 그 중에서도 필연성이 더 높다고 판단되는 풀이를 토픽에 맞게 제시하였습니다. 여러분이 처음 풀이를 보았을 때 납득이 되지 않는다면, 여러분의 실력은 아직 부족한 것입니다. 풀이가 어느 정도 필연적이라고 느끼려면 일단 다음이 전제되어야 합니다.

1. 머릿속에 탑재된 정확한 개념
2. 문제의 정확한 해석

일단 우리가 논리적으로 공부하는 방법에 대해서 배웠으니 1번은 어느 정도 해결한 것 같습니다. 그럼 2번에 대해서 한 번 알아봅시다. 문제를 해석한다는 건 어떤 것을 의미할까요? 그냥 문제를 읽고 이해를 할 수 있으면 끝 아닌가요?

일단 문제 해석의 중요성에 대해서 강조하기 위해서 다음 말부터 하고 들어가겠습니다.

"문제를 제대로 해석해내는 것이 수학 실력의 70% 이상을 좌지우지한다."

신기하지 않나요? 여러분이 문제를 제대로 해석만 할 줄 알면 사실 여러분은 어느 정도 실력이 있다는 뜻입니다. 아쉽게도 대부분 학생들은 이를 제대로 못합니다. 여기서 해석이란 단순이 읽고 이해하는 것에 그치지 않습니다. 어떤 조건을 어떻게 활용해야 하는지에 대한 이해까지 포함됩니다. 보통 문재를 해석하는 과정을 '**조건을 분해한 후 재결합한다.**'라고 말합니다.

문제를 일단 해석하려면 일상용어로 쓰인 문제의 설명을 수학적 표현으로 바꾸는 능력이 필요합니다. 우리가 배운 개념과 정리가 수학적 표현으로 바꾸는 과정에서 주로 이용됩니다. 여기까지가 문제를 해석하는 **첫 번째 단계인 조건을 분해하는 것**입니다. 조건을 다 분해했다면, 혹은 더 이상 분해할 만한 상황이 아니라면 **두 번째 단계는 조건들을 재결합 하는 것**입니다. 대부분 고난도 문제는 두 번째 단계에서 많이 막힙니다. 재결합을 제대로 해야 새로운 수학적 사실을 알아낼 수 있고 이를 통해서 새롭게 문제를 돌파할 수 있습니다. 한 문제를 풀 때 조건 분해와 재결합을 여러 번 해야 할 수도 있습니다.

그렇다면 비교적 쉬운 기출문제로 문제를 제대로 해석하는 방법(분해와 재결합)을 알아봅시다. 여기 있는 문제들을 꼭 혼자 생각해본 다음 본문을 읽어나가세요. 아직은 이런 문제들을 못 풀어도 괜찮습니다.

함수 $f(x)=x^3-(a+2)x^2+ax$에 대하여 곡선 $y=f(x)$위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 y절편을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 개구간 $(0,\ 5)$에서 증가할 때, a의 최솟값을 구하시오.

이 문제의 경우 문제에 쓰인 말을 <u>그대로</u> 수학적 표현으로 옮기기만 하면 재결합은 쉽게 할 수 있습니다.

"함수 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 방정식 - 조건 1"이 등장했으니 접선의 방정식을 구해봅시다. 접선의 방정식 공식을 사용하기 위해 $f'(x)$를 구하면 $f'(x)=3x^2-2(a+2)x+a$ 입니다. 따라서 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 방정식은 다음과 같습니다.

$$\begin{aligned} y &= (3t^2-2(a+2)t+a)(x-t)+t^3-(a+2)t^2+at \\ &= (3t^2-2(a+2)t+a)x-2t^3+(a+2)t^2 \end{aligned}$$

접선의 y절편이 $g(t)$이므로 $x=0,\ y=g(t)$를 대입하면 $g(t)$가 나옵니다.

$\therefore\ g(t)=-2t^3+(a+2)t^2$

여기까지가 **문제의 조건을 수학적 표현으로 바꾼 것**입니다.

문제에서

"함수 $g(t)$가 개구간 $(0,\ 5)$에서 증가한다. – 조건 2"

라고 했습니다. 그럼 이로부터 새로운 수학적 사실을 도출해내기 위해서 우리가 지금까지 알고 있는 사실들을 재결합하는 과정이 필요합니다.

일단 우리는 $g(t)$라는 함수를 구했습니다. $(g(t)=-2t^3+(a+2)t^2)$ 함수 $g(t)$가 열린 구간 $(0,\ 5)$에서 증가하는데, $g(t)$는 해당 구간에서 미분가능하므로 $g'(t)\geq 0$ 인지만 확인하면 됩니다.

$$g'(t)=-6t^2+2(a+2)t=-2t(3t-(a+2))$$

에서 $g'(t)$가 개구간 $(0,\ 5)$에서 0 이상의 값을 가지려면

$$\frac{a+2}{3}\geq 5 \Leftrightarrow a\geq 13$$

이면 충분함을 알 수 있습니다.

여기까지 문제의 상황을 알맞게 바꾼 수학적 표현을 다른 조건과 결합하여 새로운 수학적 사실 $\frac{a+2}{3}\geq 5$ 를 도출했습니다. 이 과정이 바로 **조건을 재결합 하는 것**입니다.

두 번째 문제로 한 번 더 연습해봅시다.

> 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 $f(3)=0$이고,
>
> $$\int_0^{2013} f(x)dx=\int_3^{2013} f(x)dx$$
>
> 를 만족시킨다. 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 S일 때, $30S$의 값을 구하시오.

일단 문제에 $f(x)$에 대한 조건이 주어져 있습니다. 이를 수학적 표현으로 바꾸면

이차함수 $f(x)=x^2+ax+b$라 둘 수 있고, $f(3)=0$ 이라 했으니

$$f(3)=9+3a+b=0 \Rightarrow 3a+b=-9 \ \cdots\cdots \ \boxed{ㄱ}$$

를 구할 수 있습니다. 그다음 조건인

$$\int_0^{2013} f(x)dx=\int_3^{2013} f(x)dx$$

는 도대체 어떻게 해석할지 고민해보아야 합니다.

이럴 때 제대로 된 해석을 하기 위해서는 충분한 개념학습이 필요합니다. Topic 9의 정적분의 성질을 제대로 공부 했다면 저 식을 어떻게 손봐야할지 감이 올 겁니다.

우변의 정적분을 좌변으로 이항해주면 정적분의 성질에 의하여

$$\int_0^{2013} f(x)\,dx-\int_3^{2013} f(x)dx=\int_0^{2013} f(x)\,dx+\int_{2013}^{3} f(x)\,dx$$

$$\therefore \int_0^3 f(x)\,dx=0$$

그럼 아까 우리가 구한 조건인 $f(x)=x^2+ax+b$ 에다가 정적분을 씌우면

$$\int_0^3 f(x)\,dx=\int_0^3 (x^2+ax+b)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}ax^2+bx\right]_0^3$$

$$=9+\frac{9}{2}a+3b=0 \cdots\cdots \boxed{ㄴ}$$

이 나옵니다.

아하! 그럼 이제 a와 b에 관한 식 두 개가 나왔으니 a와 b의 값을 구할 수 있습니다.[3)]
여기까지가 문제의 해석이라고 볼 수 있습니다. 나머지는 단순한 계산입니다.

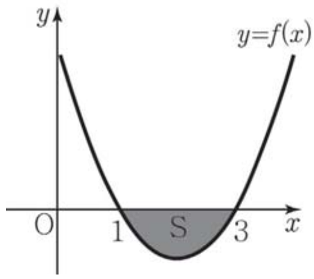
$3a+b=-9 \quad \cdots\cdots \boxed{ㄱ}$

$3a+2b=-6 \quad \cdots\cdots \boxed{ㄴ}$

따라서 $\boxed{ㄴ}-\boxed{ㄱ}$을 해주면, $b=3$을 얻고, $a=-4$임도 알 수 있게 됩니다.

$\therefore \ f(x)=x^2-4x+3$

그런데 문제에서 구하라는 것은 함수 $f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이입니다.
앞의 조건을 재결합하는 과정에서 $f(x)=(x-1)(x-3)$임을 알았으니 넓이를 구하면 다음과 같습니다.



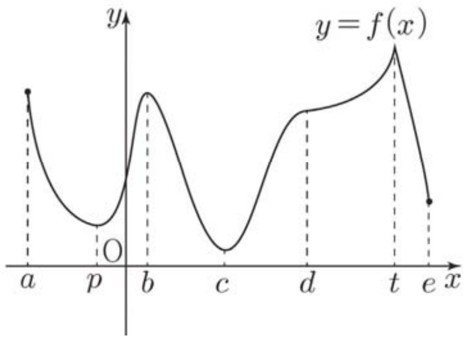
$$S=\int_1^3 |f(x)|\,dx=\int_1^3 -f(x)\,dx$$

$$=\int_1^3 (-x^2+4x-3)\,dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2-3x\right]_1^3=\frac{4}{3}$$

마지막으로 최고난도 문제를 한번 살펴보겠습니다. 이 문제는 상당히 어려우므로 대부분 이걸 처음 보는 학생들은 이해가 안 갈 수도 있습니다. 그냥 건너 뛰셔도 무방합니다.

3) 이 과정이 조건을 재결합하는 과정입니다.

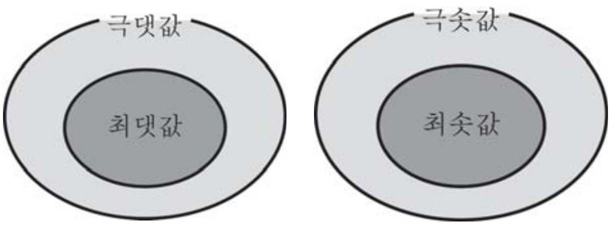
다음과 같은 함수 $y=f(x)$는 $a \le x \le e$에서 정의되어 있을 때, 극댓값과 극솟값은 각각 몇 개일까요?



정답은
'$x=a,\ b,\ t$에서 함수 $y=f(x)$가 극댓값을 갖고
$x=p,\ c,\ e$에서 함수 $y=f(x)$가 극솟값을 갖는다.'
여서 극댓값과 극솟값은 모두 세 개씩이 됩니다.

추가로 $f(t)$는 이 함수의 최댓값이고, $f(c)$는 이 함수의 최솟값이 되는데,
이렇듯이 모든 최댓값과 최솟값은 각각 극댓값과 극솟값의 부분집합이 됨을 확인할 수 있습니다.
따라서 우리는 나중에 문제에서 '최댓값을 구하시오.' 또는 '최솟값을 구하시오.'
라는 문제를 만났을 때, '극댓값 중 가장 큰 것을 구하시오.' 또는 '극솟값 중 가장 작은 것을 구하시오.'라고 바꿔서 풀 수도 있는 것입니다.

집합으로 보면 다음과 같은 관계를 가지고 있습니다.



최댓값은 극댓값이라는 집합의 부분집합이고,
최솟값은 극솟값이라는 집합의 부분집합입니다.

극대와 극소를 다시 한 번 정의하면 다음과 같습니다.

정의

극댓값과 극솟값

함수 $y=f(x)$가 $x=a$에서 극댓값을 갖는다.

$\Leftrightarrow$ $x=a$를 포함하는 **어떤 열린 구간** 내의 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \le f(a)$를 만족시킨다.

함수 $y=f(x)$가 $x=a$에서 극솟값을 갖는다.

$\Leftrightarrow$ $x=a$를 포함하는 **어떤 열린 구간** 내의 모든 실수 x에 대하여
$f(x) \ge f(a)$를 만족시킨다.

그리고 이 때 극대점과 극소점을 합쳐서 **극점**이라 하고, 극댓값과 극솟값을 합쳐서 **극값**이라 합니다.

그런데! 만약 함수 $y=f(x)$가 $x=a$에서 극값을 가지고 미분가능하다면,
각각 $x=a$를 포함하는 열린 구간에서

$$f(x) \le f(a) \text{ 또는 } f(x) \ge f(a)$$

를 만족하므로 최대최소와 미분계수에 의하여

$$f'(a)=0$$

임을 알 수 있습니다. 따라서 다음과 같은 정리를 알게 됩니다.[43)]

THEOREM

극값과 미분계수

함수 $y=f(x)$가 $x=a$에서 극값을 가지고, 미분가능하면

$f'(a)=0$ 이다.

극값과 미분계수의 정리를 이용하여 다음 기출문제를 한번 풀어봅시다.

EXAMPLE 15 [2015 수능]

두 다항함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

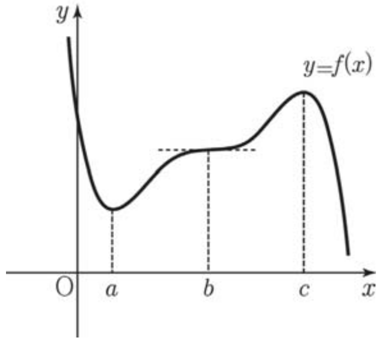
$$g(x)=(x^3+2)f(x)$$

를 만족시킨다. $g(x)$가 $x=1$에서 극솟값 24를 가질 때,
$f(1)-f'(1)$의 값을 구하시오.

43) 이는 사실 앞의 최대최소에서 살펴본 정리와 거의 차이가 없습니다.

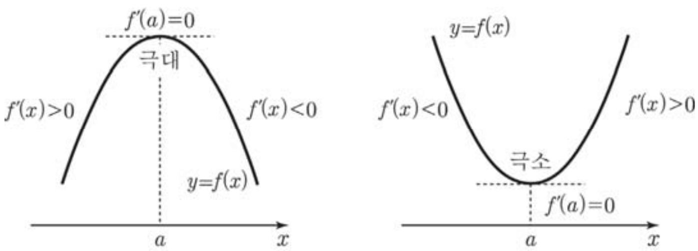
* EXAMPLE 16 분석)

$x < a$ 일 때 $f'(x) < 0$ 라는 것은 $x < a$ 에서 함수 $f(x)$ 가 감소한다는 뜻,
$a < x < b$일 때 $f'(x) > 0$ 라는 것은 $a < x < b$에서 함수 $f(x)$ 가 증가한다는 뜻,
$b < x < c$ 일 때 $f'(x) > 0$라는 것은 $b < x < c$ 에서 함수 $f(x)$ 가 증가한다는 뜻,
$x > c$ 일 때 $f'(x) < 0$ 라는 것은 $x > c$ 에서 함수 $f(x)$ 가 감소한다는 뜻입니다.
이를 토대로 개략적인 $f(x)$ 의 모양을 완성해보면 다음과 같습니다.



따라서 $x = a$를 포함하는 어떤 열린 구간을 적당히 잡아 $f(a)$ 가 최솟값이 되도록 만들 수 있고, $x = c$ 를 포함하는 어떤 열린 구간을 적당히 잡아 $f(c)$ 가 최댓값이 되도록 만들 수 있으므로 $x = a$에서 극소이고 $x = c$ 에서 극대임을 알 수 있습니다. 그러나, $x = b$ 를 포함하는 어떤 열린 구간을 잡아도 절대로 $f(b)$ 가 최댓값이거나 최솟값이 되도록 만들 수 없죠?

이 예제에서 추론할 수 있듯이 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 <u>$f'(x) = 0$인 x 가 연속적이지 않으면서</u> $x = a$ 에서 극값을 가지면 $x = a$ 의 좌우에서 함수의 증가와 감소가 바뀌게 됩니다. 따라서 도함수 $f'(x)$ 의 부호가 변하게 되는데, 그래프를 통하여 알아보면 다음과 같습니다.



따라서 우리는 상수함수가 아닌 다항함수 $f(x)$ 의 극대와 극소를 다음과 같이 판정하기로 합니다.

5. 그래프 알고리즘

이제 우리는 함수의 그래프를 그리기 위한 준비과정을 모두 거쳤습니다.
이제부터 본격적으로 다항함수의 그래프를 어떻게 그리는지 한번 알아보겠습니다.
교과서에서는 다항함수를 그리기 위해서 **증감표** 라는 개념을 도입하고 있습니다.

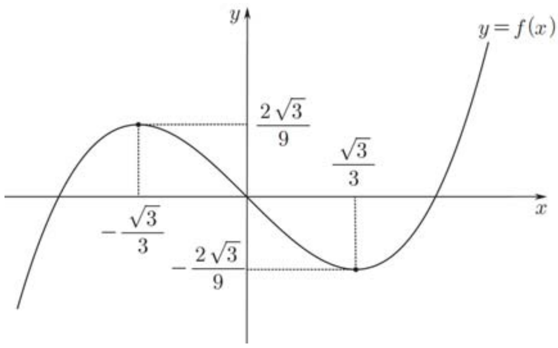
쉬운 함수부터 시작해봅시다.
삼차함수 $f(x)=x^3-x$ 의 그래프의 개형을 추론해 볼까요?
그래프를 그리기 위해 가장 먼저 해야 되는 과정은 함수를 **미분**하는 것입니다.

$$f'(x)=3x^2-1=3\left(x+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(x-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

이므로 이를 바탕으로 증감표를 작성해보면,

x의 범위	$x<-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}<x<\frac{\sqrt{3}}{3}$	$x=\frac{\sqrt{3}}{3}$	$x>\frac{\sqrt{3}}{3}$
$f(x)$		$\frac{2\sqrt{3}}{9}$		$-\frac{2\sqrt{3}}{9}$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$의 모양	↗	·	↘	·	↗

입니다. 증감표로부터 우리는 함수의 그래프의 **특성**들을 파악 할 수 있지요. 표에 나타난 그래프의 특성들을 바탕으로 그래프를 다음과 같이 매끄럽게 그리면 됩니다.
(우리는 미술을 하는 것이 아닙니다. 너무 예쁘게 그릴 필요는 없습니다.)



(위의 함수는 원점을 지나는 것이 너무 잘 보여서 지나도록 그려주었습니다.)

그런데..
매번 증감표를 그리는 것은 매우 귀찮습니다. 어차피 여러분이 안 그릴 것 같습니다. 시험시간에 이러한 증감표를 그리고 있기는 싫으니 우리는 증감표의 축소판인 **부호표**만을 이용하여 그래프를 그려보도록 하겠습니다.

함수 $f(x)=x^3-x$ 에 대하여

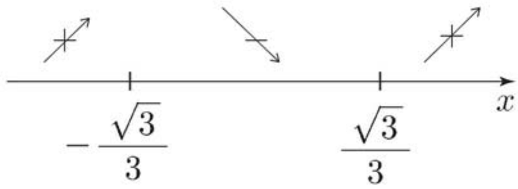
도함수 $f'(x)=3x^2-1=3\left(x+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(x-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 는 x 가 엄~청 커지면 ∞ 를 향해 점점 커집니다.

$(\lim_{x\to\infty} f'(x)=\infty)$ 그렇기 때문에 $x>\frac{\sqrt{3}}{3}$ 일 때, $f'(x)>0$ 임을 쉽게 알 수 있습니다.

또한 $f'(x)$ 의 부호는 두 인수 $\left(x+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $\left(x-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$에 의하여 결정됩니다.

그런데 $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 에서 $\left(x-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$의 부호가 변하고, $x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 에서 $\left(x+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$의 부호가 변하므로 $f'(x)$ 의 부호 변화는 $+\ \ -\ \ +$ 가 됩니다. 이를 수직선에 나타내보면,

과 같이 쓸 수 있습니다. 도함수가 양수이면 함수가 증가하고, 도함수가 음수이면 함수가 감소하므로 다음과 같이 표 위에 화살표로 함수의 개형을 대강 나타내봅니다.

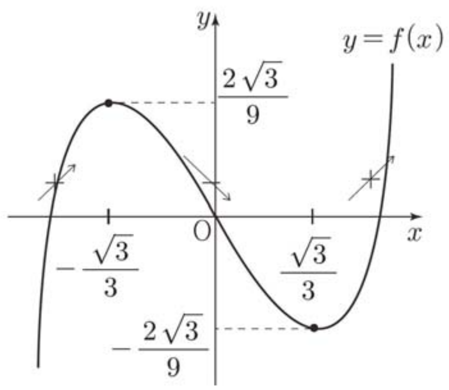


이렇게 수직선 위에 도함수의 부호만을 표시한 것을 **부호표**라고 합니다.

이제 함수 $f'(x)=0$ 인 x 에서의 함숫값을 조사하여 찍고, 그 위에 함수를 그립니다.

$f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{9}$, $f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{2\sqrt{3}}{9}$

이므로



짠! 하고 위와 같이 매끄럽게 함수를 이어주면 됩니다.

위의 함수는 원점을 지나는 것이 너무 당연하게 보여서 특별히 찍어주었습니다.

어렵지 않죠? 우리는 이제부터 모든 함수를 위와 같은 방식으로 그리도록 연습할 것입니다. 그리고 이렇게 개형을 그리는 방법을 '부호표를 이용한 그래프 그리기'라고 이름붙이겠습니다. 알고리즘을 제시해줘야겠죠?

알고리즘

함수의 부호표를 이용한 개형그리기

(1) 도함수 $f'(x)$를 구한다.
(2) $f'(x)=0$를 만족하는 x의 값을 구한다.
(3) $f'(x)$의 부호 변화를 수직선에 나타내준다.
(4) 함수의 증감을 부호 위에 선으로 표시한다.
(5) $f'(a)=0$인 a에 대하여 $f(a)$의 값을 구하고 점을 찍는다.
(6) 함수 $y=f(x)$가 지나는 특정점이 보인다면 그 점을 찍는다. (원점, y절편, x절편 등) (선택)
(7) 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그린다.

이 알고리즘을 '반드시' 이용하여 앞의 방법과 같이 밑의 함수의 그래프들을 그려보세요.
(내가 혹여 다른 방법을 알고 있더라도, 도구의 통일화를 위하여 반드시 연습하세요.)

(1) $f(x)=x^3-6x^2+2$

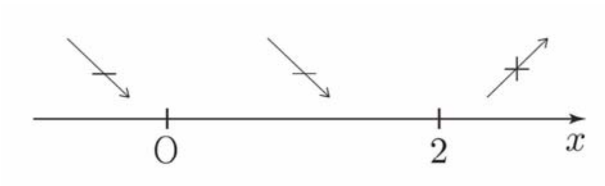
(2) $f(x)=\dfrac{1}{4}x^4+x^3$

(3) $f(x)=-x^3-3x^2+1$

(4) $f(x)=3x^5-5x^3-1$

특강. 도함수의 부호 변화를 파악하는 Tip

도함수의 부호 변화를 쉽게 파악할 수 있을까요?
당연히 있습니다.
예를 들어 $f'(x)=x^2(x-2)$ 일 때,
x가 엄~청 커질 때 $f'(x)$는 양수이고$\left(\lim_{x\to\infty} f'(x)>0\right)$,
$x=2$에서 $(x-2)$의 부호가 바뀌고
$x=0$에서 x^2의 부호는 바뀌지 않으므로 다음과 같이 부호표를 그릴 수 있습니다..



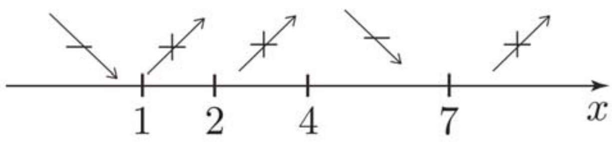
그런데 잘 생각해보면 x^2, $(x-3)^4$과 같이 **차수가 짝수인 인수가 0이 되는 x에서는 부호가 변하지 않고,**
$(x-2)$, x^3과 같이 **차수가 홀수인 인수가 0이 되는 x에서는 부호가 변한다는 것을 알 수 있습니다.**

그래서 우리는 이제부터 부호 변화를 표시할 때 다음과 같은 방법을 사용하기로 합시다.

THEOREM

부호 변화를 표현하는 방법 – 부호표
(1) 짝수차수의 인수가 0이 되는 x에서는 부호가 변하지 않는다.
(2) 홀수차수의 인수가 0이 되는 x에서는 부호가 변한다.

예를 들어 어떤 다항함수의 도함수 $f'(x)$가
$$f'(x)=(x-1)^3(x-2)^2(x-4)^3(x-7)$$
이라 주어졌습니다.
이 함수는 $x=2$일 때 짝수 차수의 인수인 $(x-2)^2$을 인수로 가지므로 $x=2$에서 부호가 변하지 않지요?
$x>7$에서 양수이므로 부호만 번갈아 표시해주다가 $x=2$에서는 부호를 똑같이 표시해주면 됩니다.



이렇게 하면 아무리 복잡한 함수라도 부호 변화를 표시할 자신이 생기지요?
다음 연습문제들을 풀어보면서 그래프 그리기 연습을 한다면 여러분은 그래프 그리기에 통달할 것입니다.

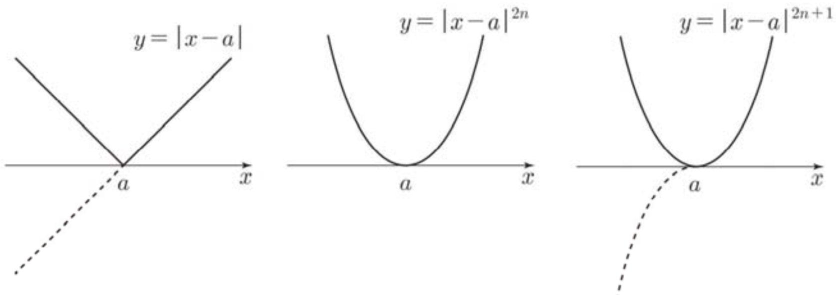
따름정리(Corollary)

다항함수 $f(x)$에 대하여 $|f(x)|$가 미분가능하면 $f(a)=0$을 만족하는 모든 실근 a에 대해 $f'(a)=0$이다. 즉 $f(x)$가 항상 $(x-a)^2$을 인수로 갖는다.

위의 정리를 이용하여 풀게 됩니다. 아니 어떻게...?

문제를 해결하기 전에 이와 관련된 정리 하나를 배운 후에 다시 문제풀이로 돌아오도록 하겠습니다. 우선 배우려는 상황을 직관적으로 이해해보겠습니다.

세 그래프 $y=|x-a|$, $y=|x-a|^{2n}$, $y=|x-a|^{2n+1}$는 다음과 같습니다.
(단, n은 자연수)



그러면 미분가능하지 않아 보이는 개형은 $y=|x-a|$ 뿐이라는 것을 알 수 있습니다.

이렇게 직관적으로 얻어낸 어떤 것을 증명하는 것이 바로 수학의 목표 중 하나입니다.
(약하게 말하고 있지만 **반드시 따라하세요.**)

어떤 미분가능한함수 $f(x)$에 대하여 $f(a)=0$일 때, 함수 $y=|f(x)|$가 $x=a$에서 미분가능할 조건은 무엇일까요?

$x=a$에서 함수 $y=|f(x)|$가 미분가능하기 위해서는 다음의 두 극한값이 같아야 합니다.

$$\lim_{x\to a+}\frac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a},\quad \lim_{x\to a-}\frac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a}$$

그런데 이 극한값을 구하기 위해서는 $x=a$의 근방에서의 $f(x)$의 부호를 알아야 합니다.
따라서 다음과 같은 네 가지 경우로 분류할 수 있습니다.

(1) $+ \Rightarrow a \Rightarrow +$ ($f(x)$의 부호의 변화)[61]
$x=a$를 포함하는 어떤 열린구간에서 $f(x)\geq f(a)$라는 뜻이므로 $x=a$에서 미분가능하면 최대 최소와 미분계수에 의하여 $f'(a)=0$이 됩니다. ($\because$ $|f(x)|=f(x)$)

61) 충분히 작은 양수 h에 대하여 $f(a-h) \Rightarrow f(a) \Rightarrow f(a+h)$의 부호 변화를 의미합니다.

(2) $-\ \Rightarrow\ a\ \Rightarrow\ +$ ($f(x)$의 부호의 변화)

$f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면

$$\lim_{x\to a+}\frac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a}=\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{x-a}=f'(a)$$

$$\lim_{x\to a-}\frac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a}=\lim_{x\to a-}\frac{-f(x)}{x-a}=-f'(a)$$

이므로 $f'(a)=-f'(a)\ \Rightarrow\ f'(a)=0$이어야 합니다.

그런데 여기서 추가로 $f'(a)\neq 0$이면 미분가능하지 않다는 것을 알 수 있습니다.

(3) $+\ \Rightarrow\ a\ \Rightarrow\ -$ ($f(x)$의 부호의 변화)

$f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면

$$\lim_{x\to a+}\frac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a}=\lim_{x\to a+}\frac{-f(x)}{x-a}=-f'(a)$$

$$\lim_{x\to a-}\frac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a}=\lim_{x\to a-}\frac{f(x)}{x-a}=f'(a)$$

이므로 $f'(a)=-f'(a)\ \Rightarrow\ f'(a)=0$이어야 합니다.

그런데 여기서 추가로 $f'(a)\neq 0$이면 미분가능하지 않다는 것을 알 수 있습니다.

(4) $-\ \Rightarrow\ a\ \Rightarrow\ -$ ($f(x)$의 부호의 변화)

$x=a$를 포함하는 어떤 열린 구간에서 $f(x)\le f(a)$라는 뜻이므로 $x=a$에서 미분가능하면 $f'(a)=0$이 됩니다. ($\because\ |f(x)|=-f(x)$)

따라서 (1), (2), (3), (4) 모두 $x=a$에서 함수 $y=|f(x)|$가 미분가능하려면 $f'(a)=0$이어야 함을 보여주고 있습니다.

즉, 다음과 같은 따름정리를 얻어낼 수 있습니다.

따름정리 1 (Corollary)

둘은 각각 필요충분조건입니다. (단, $f(x)$는 미분가능한 함수[62])

- $f'(a)=0$인 절댓값 함수 $y=|f(x)|$에 대하여 $f(a)=0$일 때, $x=a$에서 미분가능하다.
- $f'(a)\neq 0$인 절댓값 함수 $y=|f(x)|$에 대하여 $f(a)=0$일 때, $x=a$에서 미분가능하지 않다.

그런데 이 따름정리1을 '다항함수'에만 적용시켜보겠습니다.

인수정리의 확장에서 $f(a)=f'(a)=0$이면 $(x-a)^2$의 인수를 갖는다고 했고,

$f(a)=0$인 함수 $|f(x)|$가 $x=a$에서 미분가능할 조건은 $f'(a)=0$인 것이므로

$(x-a)^2$의 인수를 반드시 가져야 합니다. 이것은, 인수의 차수가 2이상이면 미분가능하겠지만, 차수가 1이면($x-a$의 인수만을 가지면) 미분가능하지 않다는 것도 의미합니다.

우리는 이것을 통해서 따름정리 2 를 얻을 수 있습니다.

62) 사실 우리는 $f'(x)=0$인 x가 연속적인 함수 $f(x)$에 대하여는 증명하지 않았지만(예를 들면 부호 변화가 $0\ \Rightarrow\ a\ \Rightarrow\ +$같은 함수), a에서 미분가능하려면 좌극한과 우극한이 모두 0이 되어야 미분가능 하다는 것은 모두 증명한 셈이니, 추가로 적지 않겠습니다.

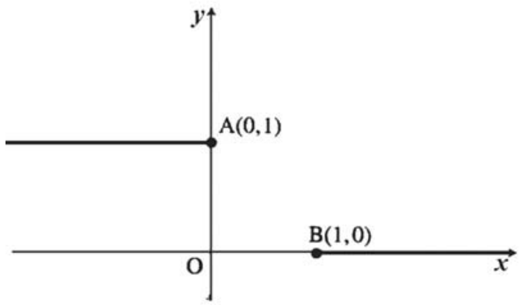
Topic 08. Very Important Problems

정답 및 해설 072pg

다음 중요 기출들을 앞에서 배운 개념들만을 이용하여 풀어보세요.

01 [1997 수능]

다음 그림은 함수 $y=1$과 함수 $y=0$의 그래프의 일부이다. 두 점 $\mathrm{A}(0,\ 1)$, $\mathrm{B}(1,\ 0)$ 사이를 $0 \le x \le 1$에서 정의된 함수 $y=ax^3+bx^2+cx+1$ 의 그래프를 이용하여 연결하였다. 이렇게 연결된 그래프 전체를 나타내는 함수가 구간 $(-\infty, \infty)$에서 미분 가능 하도록 상수 a, b, c 의 값을 정할 때, $a^2+b^2+c^2$ 의 값을 구하시오.



02 [2011 06 평가원]

서로 다른 두 실수 α, β가 사차방정식 $f(x)=0$의 근일 때, 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은?

〈보 기〉

ㄱ. $f'(\alpha)=0$이면 다항식 $f(x)$는 $(x-\alpha)^2$으로 나누어떨어진다.
ㄴ. $f'(\alpha)f'(\beta)=0$이면 방정식 $f(x)=0$는 허근을 갖지 않는다.
ㄷ. $f'(\alpha)f'(\beta)>0$이면 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 네 실근을 갖는다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

03

[자작 문항]

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to 1}\frac{|f(x)|}{x-1}=f(2)$$

를 만족시킬 때, $f(3)$의 값을 구하시오.

04

[2015 수능]

다음 조건을 만족시키는 모든 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f(2)$의 최솟값은?

(가) $f(x)$의 최고차항의 계수는 1이다.
(나) $f(0)=f'(0)$
(다) $x\geq -1$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq f'(x)$이다.

① 28　② 33　③ 38　④ 43　⑤ 48

05

[자작 문항]

삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시키도록 하는 10 이하의 자연수 n의 개수는?

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)(x-3)\leq 0$이다.
(나) $x=n$에서 극댓값을 가진다.
(다) $f(n)=0$

06

[2013 06 평가원]

함수 $f(x)=x^3-3x^2-9x-1$과 실수 m에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\geq mx) \\ mx & (f(x)<mx)\end{cases}$$

라 하자. 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, m의 값은?

① -14　② -12　③ -10　④ -8　⑤ -6

07

[자작 문항]

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(0)$의 값을 구하시오.

(가) 함수 $|f(x)|$가 $x=a$에서만 <u>미분가능하지 않다</u>.
(나) $f'(1)=0$, $f(1)=f(4)$

08

[2011 수능]

최고차항의 계수가 1이고, $f(0)=3$, $f'(3)<0$인 사차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여 집합 S를

$$S=\{a \mid \text{함수 } |f(x)-t| \text{가 } x=a \text{에서 } \underline{\text{미분가능하지 않다}}.\}$$

라 하고, 집합 S의 원소의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t=3$과 $t=19$에서만 불연속일 때, $f(-2)$의 값을 구하시오.

09

[자작 문항]

서로 다른 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x^2) \le g(x) \le f(x)$$

를 만족시킬 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보 기〉

ㄱ. $f(0)=g(0)$
ㄴ. $\lim_{x\to1}\dfrac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$
ㄷ. $g'(0)=g'(1)=0$
ㄹ. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모두 삼차함수인 $f(x)$, $g(x)$가 존재한다.

10

[2010 06 평가원]

사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\dfrac{f'(5)}{f'(3)}$의 값을 구하시오.

(가) 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극값을 갖는다.
(나) 함수 $|f(x)-f(1)|$은 오직 $x=a$ $(a>2)$에서만 미분가능하지 않다.

11

[2016 수능]

다음 조건을 만족시키는 모든 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $\dfrac{f'(0)}{f(0)}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. Mm의 값은?

(가) 함수 $|f(x)|$는 $x=-1$에서만 미분가능하지 않다.
(나) 방정식 $f(x)=0$은 닫힌 구간 $[3,\ 5]$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

① $\dfrac{1}{15}$ ② $\dfrac{1}{10}$ ③ $\dfrac{2}{15}$ ④ $\dfrac{1}{6}$ ⑤ $\dfrac{1}{5}$

Topic 13. 이과 기출 씹어먹기

정답 및 해설 108pg

[2013 09 평가원 변형]
Stage 1 관련 Topic
Topic 6

1. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f'(3)=3$, $f(3)=g(3)$
> (나) 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 3$이다.

$f(4)$의 값을 구하시오.

[2009 수능]
Stage 1 관련 Topic
Topic 3, Topic 5

2. 다항함수 $f(x)$와 두 자연수 m, n이

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^m}=1,\ \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{x^{m-1}}=a,$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n}=b,\ \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x^{n-1}}=9$$

를 모두 만족시킬 때, 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은? (단, a, b는 실수이다.)

〈보 기〉

ㄱ. $m\geq n$
ㄴ. $ab\geq 9$
ㄷ. $f(x)$가 삼차함수이면 $am=bn$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

3. 다항함수 $f(x)$에 대하여 점 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식을 $y=g(x)$라 하자. 직선 $y=g(x)$가 함수 $f(x)$의 그래프와 점 $\mathrm{B}(b,\ f(b))$에서 접할 때, 함수 $h(x)$를 $h(x)=f(x)-g(x)$라 하자. 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $a \neq b$이다.)

[2007 수능 변형]

Stage 1 관련 Topic

Topic 6, Topic 7

〈보 기〉

ㄱ. $h'(b)=0$

ㄴ. 방정식 $h'(x)=0$은 3개 이상의 실근을 갖는다.

ㄷ. $x=a$에서 함수 $h(x)$는 극값을 갖는다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

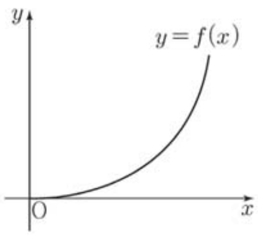
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

4. 다항함수 $y=f(x)$의 $x>0$에서의 그래프는 그림과 같다.

[2015 09 평가원 변형]

Stage 1 관련 Topic

Topic 9

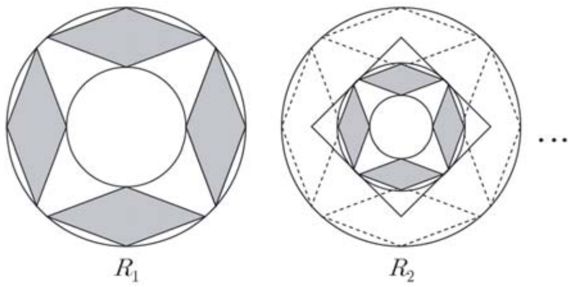


함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\displaystyle\int_{10}^{11} \frac{f(x)}{x}dx$ 값을 구하시오.

(가) 임의의 양의 실수 t에 대하여 세 점 $(0,\ 0)$, $(t,\ f(t))$, $(t+1,\ f(t+1))$을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이가 $\dfrac{1}{2}t(t+1)(t+2)$이다.

(나) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{f(x)}{x}dx=\frac{1}{2}$

47. 그림과 같이 반지름의 길이가 4인 원을 그리고, 이 원의 반지름의 길이의 $\frac{1}{2}$크기의 반지름을 가지는 동심원을 그린 후, 두 원에 동시에 일정한 간격으로 큰 원과 세 점, 작은 원과 한 점에서 만나서 내접하는 네 마름모를 그리고 R_1이라 하자. R_1의 네 마름모의 중심을 이은 정사각형을 그리고, 이 정사각형에 내접하는 원을 그린다. 이 원의 반지름의 길이의 $\frac{1}{2}$크기의 반지름을 가지는 동심원을 그린 후, 두 원에 동시에 일정한 간격으로 큰 원과 세 점, 작은 원과 한 점에서 만나서 내접하는 네 마름모를 그리고 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?



① $\frac{128\sqrt{7}}{23}$ ② $\frac{160\sqrt{7}}{23}$ ③ $\frac{192\sqrt{7}}{23}$
④ $\frac{224\sqrt{7}}{23}$ ⑤ $\frac{256\sqrt{7}}{23}$

[2015 리듬농구]
Stage 1 관련 Topic
Topic 2

48. 최고차항의 계수가 1 인 이차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, a의 최솟값을 m이라 하자. a가 최소가 되게 하는 함수 $f(x)$에 대해 $f(m)$의 값은?

(가) $f(0)=0$
(나) $x \geq a$인 모든 실수 x에 대하여 $\int_1^x f(t)\,dt \geq 0$이다.

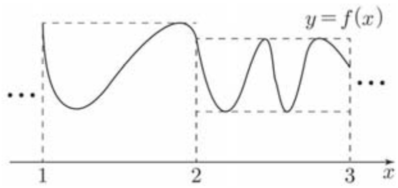
① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$
④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

[무소속]
Stage 1 관련 Topic
Topic 9, Topic 11

54. 10 이하의 자연수 n에 대하여 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> 닫힌 구간 $[n,\ n+1]$의 두 실수 $a,\ b$와 $n \le x \le n+1$인 모든 실수 x에 대하여 $f(a) \le f(x) \le f(b)$를 만족시키는 서로 다른 $a,\ b$의 개수가 각각 $n,\ n+1$이다.

예를 들어 닫힌 구간 $[1,\ 3]$에서 다음과 같이 조건을 만족시키는 함수 $y=f(x)$를 만들 수 있다.



$f'(k)=0$을 만족시키는 서로 다른 k값의 개수를 m이라 할 때, m의 최솟값을 구하시오.

[지적 유희 문제]

– 수능적이지 않은 어려운 문제입니다. 괜히 시간 뺏기기 싫으신 분은 풀지 마시고, 심심하신 분만 푸세요.

[2016 리듬농구]

Stage 1 관련 Topic
Topic 6

55. 상수함수가 아닌 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\left(\int_1^x f(t)dt\right)^2 = \{f(x)\}^3$$

일 때, $f(7)$의 값을 구하시오.

[무소속]

Stage 1 관련 Topic
Topic 6, Topic 8,
Topic 9

70. $-10 \leq a \leq 10$, $-10 \leq b \leq 10$인 두 정수 a, b에 대하여 연속함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시키도록 하는 양수 t의 개수가 단 하나 존재할 때, 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수를 구하시오.

(가) $0 < x \leq t$일 때, $f(x) = a(x^3 - 4x^2)$ 이다. (나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x) + bt = f(x+t)$이다.

[2016 리듬농구 변형]
Stage 1 관련 Topic
Topic 6

Topic 13. 분석

1.

$f'(3)=3$이면서 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) \geq 3$이라고 합니다. 그러면 우리는 도함수 $f'(x)$의 입장에서 생각해보면, $x=3$에서 $f'(x)$가 최솟값을 가지는 것이니 $f''(3)=0$(편의상 $f'(x)$의 도함수를 $f''(x)$로 쓴다고 했었죠?)임을 알 수 있습니다.

이제 $f(3)=g(3)$이라는 것을 해석해야하는데, 함수 $f(x)$와 그 역함수 $g(x)$가 왠지 $y=x$ 위에서 교점을 가질 것만 같습니다. 그래서 $f(3)=g(3)=3$임을 보이기 위해,

우선 $f(3)=g(3)=k$ (단, $k \neq 3$) 이라고 가정해보겠습니다.

그렇다면 역함수의 정의에 의하여 $f(3)=k$이고 $f(k)=3$이 되는데, 이 말인 즉 곡선 $y=f(x)$의 그래프는 두 점 $(3,\ k)$와 $(k,\ 3)$을 동시에 지난다는 말이 됩니다. 그런데 두 점 $(3,\ k)$와 $(k,\ 3)$사이의 평균변화율은

$$\frac{f(k)-f(3)}{k-3}=\frac{3-k}{k-3}=-1$$

이므로 (나) 조건의 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) \geq 3$이다라는 조건에 모순입니다.

따라서 $k \neq 3$일 때 항상 모순이므로 $f(3)=3$이 됩니다.

이제 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$라고 놓으면 $f(3)=3$, $f'(3)=3$, $f''(3)=0$으로 식 세 개 문자 세 개이니 답이 나오겠죠? $f'(x)=3x^2+2ax+b$, $f''(x)=6x+2a$이므로 $x=3$을 각각 대입하면, $a=-9$, $b=30$, $c=-33$임을 구할 수 있습니다.

$$\therefore\ f(x)=x^3-9x^2+30x-33 \quad \Rightarrow f(4)=7$$

문항 comment

그런데 우리는 여기에서만 그치지 않습니다. 우리가 아까 $f(3)=g(3)$이면 $f(3)=3$임을 알았는데, 그렇다면 원함수와 역함수는 항상 $y=x$에서 만날까요?

당연히 아닙니다. 반례는 간단하게 $y=-x^3$, $y=-x$, $y=\frac{1}{x}$같은 함수를 들 수 있죠.

그러면 어떤 경우에서 원함수와 역함수가 $y=x$ 위에서 만나는 것일까요? 정답은 바로 미분가능한 함수 $f(x)$가 증가함수이면 항상 $f(x)$와 그 역함수 $g(x)$가 $y=x$에서 교점을 가진다는 것입니다.[1] 증명은 우리가 앞서 문제풀이를 했던 방식과 동일합니다. 함수 $f(x)$와 그 역함수 $g(x)$가 $x=a$에서 교점을 가진다고 합니다. 그러면 $f(a)=g(a)$죠? 여기서 $f(a)=g(a)=b$ $(a \neq b)$라고 가정하면, 역함수의 정의에 의하여 $f(b)=a$가 됩니다. 따라서

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{a-b}{b-a}=-1$$

이 될테고, 함수 $f(x)$가 증가함수라면 $f'(x) \geq 0$이어야 하니, 증가함수라는 가정에 모순이 나오겠죠? 따라서 다음과 같은 결론을 얻습니다.

'증가함수인 원함수가 그 역함수와 교점을 가지면 $y=x$ 위에 있다.'[2]

답 : 7

1) 물론 교점이 존재한다는 전제 조건이 있어야겠죠?
2) 연속함수라는 전제조건이 있어야겠죠? (연속함수일때는 증명방식이 약간 다르나, 이 책에서는 다루지 않겠습니다.

$$\int_8^9 f(x)\,dx = 3 + \frac{1}{2}(9-3) = 6$$

$$\int_9^{10} f(x)\,dx = \frac{13}{2}$$ (규칙을 파악하셨으리라 믿습니다.)

$$\int_{10}^{11} f(x)\,dx = \frac{15}{2}$$

$$\int_{11}^{12} f(x)\,dx = 8$$

$$\therefore \int_5^{12} f(x)\,dx = 41$$

문항 comment

이 문제를 해결할 때, 함수와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 마치 삼각형의 넓이를 구하는 것처럼 해결했는데, 그 이유는 Topic 11에서 배웠습니다. 바로 모든 삼차함수는 극대점과 극소점의 중심에 대하여 대칭이라는 성질 때문이죠. 아마 그것을 떠올리지 못했다면 그냥 쌩 계산을 통해서 규칙을 파악해야 하기 때문에 굉장히 어려운 문제가 되었을 것이고, 그런 측면에서 이 문제는 좋은 문제는 아닙니다.

답 : 41

70.

풀이1) 연속의 정의

구간별로 정의된 연속함수가 나왔네요. 그럼 경계점만을 살펴보면 충분할 텐데요, 일단 조건부터 봅시다. 구간 $(0,\ t)$에서는 $f(x)$가 다항함수로 주어졌으니 항상 연속입니다. 그리고 조건 (나)는 $f(x+t)$와 $f(x)$의 관계를 설명하고 있으니, 구간을 오른쪽이나 왼쪽으로 t의 배수만큼 움직여도 여전히 함수는 연속입니다. 즉, 개구간 $(kt,\ (k+1)t)$에서는 함수가 항상 연속이라는 뜻이죠. 그럼 연속인지 아닌지 아직 알 수 없는 점이 어딘가요? 바로 $x=kt$들입니다.

$$\lim_{x\to kt-} f(x) = \lim_{x\to t-} f(x+(k-1)t) = (k-1)bt + \lim_{x\to t-} f(x) = (k-1)bt + a(t^3-4t^2)$$

$$\lim_{x\to kt+} f(x) = \lim_{x\to 0+} f(x+kt) = kbt + \lim_{x\to 0+} f(x) = kbt$$

이 두 값이 일치해야 연속이므로 조건은

$$(k-1)bt + a(t^3-4t^2) = kbt \iff at^3 - 4at^2 - bt = 0$$

입니다. 이 값은 k와 무관하므로, $at^3-4at^2-bt=0$를 만족하는 순서쌍 $(a,\ b)$와 실수 t에 대해 항상 $f(x)$는 실수 전체에서 연속이 됩니다.

위 방정식을 만족하는 양수 t의 개수가 단 하나 존재해야 합니다. $t=0$은 조건과 관련 없는 근이므로 $at^2-4at-b=0$의 양수인 근이 하나일 때를 찾으면 충분합니다. $at^2-4at=b$로 변형하여 그래프의 교점의 위치를 파악해 보겠습니다.

1) $a<0$: $at(t-4)=b$입니다. 이 그래프는 구간 $(0,\ 4)$에서 양수이므로, 양수인 근이 단 하나만 존재하려면 근의 범위가 $t \geq 4$가 되어야 합니다. 따라서 $b \leq 0$이면입니다. 이 때 경우의 수는 110가지입니다.
한편, $t=2$일 때, $b=-4a$를 만족하는 b가 존재해도 되니, $b=-4a$를 만족하는 순서쌍의 개수는 $(-1,\ 4)$, $(-2,\ 8)$로 2가지입니다.

2) $a=0$: 방정식이 $0=b$가 되는데, $b\neq 0$이면 근이 없고 $b=0$이면 모든 실수가 근이 되어 양수인 근이 단 하나 존재할 수 없습니다.

3) $a>0$: $at(t-4)=b$입니다. 이 그래프는 구간 $(0,\ 4)$에서 음수이므로, 양수인 근이 단 하나만 존재하려면 근의 범위가 $t \geq 4$가 되어야 합니다. 따라서 $b \geq 0$입니다. 이 때 경우의 수는 110가지입니다.
한편, $t=2$일 때, $b=-4a$를 만족하는 b가 존재해도 되니, $b=-4a$를 만족하는 순서쌍의 개수는 $(1,\ -4)$, $(2,\ -8)$로 2가지입니다.

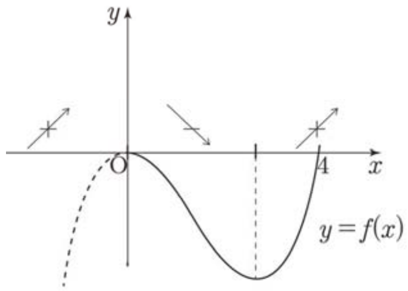
$\therefore\ 2+110+2+110=224$

풀이2) 그림을 이용한 풀이

우선 $a>0$이라 가정한 후에

$$f'(x)=3ax^2-8ax=ax(3x-8)$$

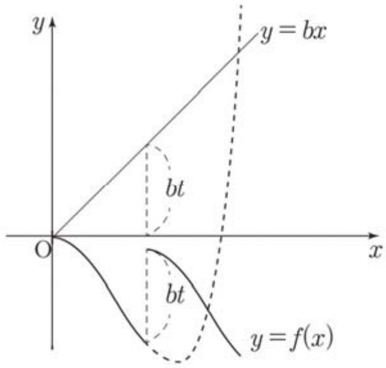
이므로 $x>0$에서 함수 $f(x)$의 개형을 그려보면 다음과 같습니다.



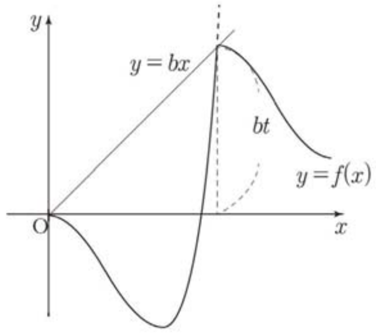
이제 $f(x)+bt=f(x+t)$라고 했으니, 함수 $f(x)$의 개형이 $t<x\leq 2t$에서 어떻게 그려질 것인지 살펴봐야 합니다. 함수 $f(x+t)$는 함수 $f(x)$에 bt만큼을 더한 것이니, t의 값을 하나하나 대입해보면서, 함수 $f(x+t)$를 추론해봅시다.

i) $b \geq 0$

만약 t의 값이 곡선 $y=a(x^3-4x^2)$과 직선 $y=bx$가 만나는 교점의 x좌표보다 작다면 함수 $f(x+t)$는 다음과 같이 그려질 것입니다.



따라서 함수 $f(x)$는 연속함수가 될 수 없습니다.
마찬가지의 논리로 t의 값이 곡선 $y=a(x^3-4x^2)$과 직선 $y=bx$가 만나는 교점의 x좌표보다 크다면 $f(x)$가 연속함수가 될 수 없습니다.
따라서 함수 $f(x)$가 연속함수가 되려면, t의 값이 곡선 $y=a(x^3-4x^2)$과 직선 $y=bx$가 만나는 교점의 x좌표가 되어야 합니다.

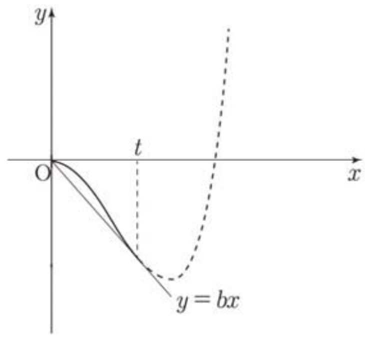


따라서 $a>0$, $b \geq 0$인 경우에서는 $y=a(x^3-4x^2)$과 직선 $y=bx$가 만나는 교점의 개수가 1개이므로 만족시키는 t의 개수도 1개입니다. 따라서 조건을 항상 만족시킵니다.

$\therefore$ $a=1\sim10$, $b=0\sim10$ $\Rightarrow$ 110개

$ii)$ $b<0$

$b>0$에서 살펴보았듯이, 함수 $f(x)$가 조건을 만족시키도록 하는 t의 개수가 단 하나 존재한다는 것은 곡선 $y=a(x^3-4x^2)$과 직선 $y=bx$가 만나는 교점의 개수가 1이라는 말과 동일합니다. 따라서 그림과 같은 상황입니다.



따라서 $x=t$에서 $y=bx$와 $y=ax^3-4ax^2$이 접하므로

$$\begin{cases} at^2(t-4)=bt \\ a(3t^2-8t)=b \end{cases}$$

를 만족시켜야 합니다. 두 식을 나눠주면,

$$\frac{t-4}{3t-8}=1 \quad \Rightarrow \quad t=2$$

이므로 다시 대입하면, $b=-4a$를 만족시키는 $a>0$, $b<0$인 순서쌍의 개수입니다.

$(1,\ -4)$, $(2,\ -8)$

뿐이므로 총 2개가 됩니다.

따라서 $a>0$일 때 만족하는 총 순서쌍의 개수는 112개이고, $a<0$일 때도 완전히 그 규칙이 같으므로 112개가 됩니다.

그런데 $a=0$이라면 만족하는 t가 무수히 많이 존재하게 되므로 조건을 만족하지 않습니다.

$\therefore$ 224

문항 comment

이 문제는 $f(x)$와 $f(x+t)$의 관계가 주기함수와 비슷하면서도 약간 다른 형태입니다. 이런 형태가 아직 기출 된 적이 없기 때문에 해석하기가 어려우셨을 수 있는데, $x=0$, 1, 2하나하나 대입해보면서 $f(x+t)$의 개형을 추론하기 위해 점을 하나하나 찍어보시면, 좀 더 조건이 와 닿으실 것 같습니다.

답 : 224