3월 교육청 모의고사 이과 14번 문제로 극대 극소에 대해 얘기해보려 합니다.
문제를 풀기 위해서는 분수함수 미분이 들어가서 미적분 II가 들어가지만, 문제를 푸는 과정이 아닌 미적분 I에서의 극대-극소 개념을 리뷰하는 자료이기 때문에 문과-이과 상관없이 읽을 수 있습니다.

문제) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$이고, $0 \le x < 2$일 때 $f(x)=\dfrac{(x-a)^2}{x+1}$인 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 극댓값을 갖는다. 구간 $[0,2)$에서 극솟값을 갖도록 하는 모든 정수 a의 값의 곱은?

CHECK1. $x=2$에서 함수 $f(x)$는 연속이다??

$f(x+2)=f(x)$에서 $f(2)=f(0)$이므로 (?)
$\lim\limits_{x\to2-}\dfrac{(x-a)^2}{x+1}=\lim\limits_{x\to2-}f(x)=f(2)=f(0)=\dfrac{(0-a)^2}{0+1}=a^2$ 로 a값을 하나 구했다는 글을 보았는데;;;

이 문제에서 $f(x)$가 연속함수라는 말이 어디에도 없는데,
왜 $x=2$에서 $f(x)$가 연속이도록 하는 조건을 썼을까요...?

만약 이런 풀이과정이 있었다면 문제집을 기계적으로 풀고 있지 않았는지 생각해보고 반성을 꼭 하셔야 합니다.

하지만 ‘나는 $x=0$에서 극댓값을 가진다길래... 주기가 2인 함수이니까 $x=2$에서도 극댓값을 가질 것이고, 극댓값이 존재하면 연속이니까(?) 연속조건을 쓴거에요.’ 라고 한 학생이 있었는데,

이 학생은 최소한 문제를 기계적으로 풀진 않았지만
애석하게도 극대와 극소에 관한 교과서적 공부가 덜 되어 있었습니다...

CHECK2. 극대, 극소에 대하여 제대로 알고 있는가?

$f(x)$가 모든 실수 x에서 연속함수인지에 대한 정보가 나와 있지 않습니다. 이런 상황에서
‘$0 \le x < 2$일 때 $f(x)=\dfrac{(x-a)^2}{x+1}$가 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.’는 조건 만으로 항상 옳다고 알 수 있는 것들을 모두 골라보세요.
(단, 설명의 편의상 $\lim\limits_{x\to0+}f'(x)\neq0$, $\lim\limits_{x\to0-}f'(x)\neq0$이라고 합시다.)

ㄱ. $x=0$을 포함하는 어떤 열린 구간에 속하는 모든 x에 대하여 $f(x)\le f(0)$이다.
ㄴ. $\lim\limits_{x\to0+}f'(x)<0$
ㄷ. $\lim\limits_{x\to0-}f'(x)>0$

정답은, ㄱ과 ㄴ입니다. ㄷ은 알 수 없습니다.

몇몇 학생들은 ‘극값의 판정은 $f'(x)$의 부호의 변화 유무가 중요한 건데, ㄱ만 맞고 ㄴ이 틀릴 수 있냐’ 는 의문을 표할 수 있습니다.

만약 자신이 저런 생각을 했다면,

① 개정 전 교육과정을 이수한 장수생 이거나
② 극대와 극소의 개념을 제대로 공부하지 않은 수험생   중 하나에 반드시 포함된다고 보시면 됩니다.

Q. ㄱ은 왜 옳은가?

미래로 미적분I 교과서 120page를 보면, 극대는 다음과 같이 정의되어있습니다.

> $x=a$을 포함하는 어떤 열린 구간에 속하는 모든 x에 대하여 $f(x) \le f(a)$이면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극대가 된다고 하고,
> 그 때의 함숫값 $f(a)$를 극댓값이라고 한다.

네. 교과서에서 극대의 정의를 저렇게 했으니, $x=a=0$에서 극대가 된다면 자연스럽게 ㄱ이 성립할 수밖에 없네요.

Q. ㄴ은 왜 옳은가?

1. 해석학적
(상위권 공부용 - 추천하지만, 이해가 안되면 2.로 이해 하고 PASS하도록 합시다. ㄷ이 더 중요하니까요.)

문제상 $f(x)$는 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$입니다.
만약 $\lim\limits_{x\to 0+} f'(x)>0$이라면, 매우 작은 어떤 양수 α와 $0<t<\alpha$인 모든 t에 대하여 $f(t)>f(0)$인 α가 존재할 수 밖에 없습니다. 이는
'$x=a$을 포함하는 <u>어떤 열린 구간</u>에 속하는 모든 x에 대하여 $f(x) \le f(a)$'
를 만족하는 '<u>어떤 열린 구간</u>'이 존재하지 않는다는 말이죠.
즉, 극대일 수 없으므로 초기 가정이었던 $\lim\limits_{x\to 0+} f'(x)>0$이 틀리고 $\lim\limits_{x\to 0+} f'(x)<0$이 옳습니다.

2. 직관적 (이해용)

$\lim\limits_{x\to 0+} f'(x)>0$일 땐 $x=0$의 오른쪽에서의 그래프가 우상향 그래프 , 즉 증가함수의 그래프를 띈다고 생각한다면 극대의 정의에 어긋남을 알 수 있겠죠?

Q. 근데 ㄷ은 왜 틀렸습니까?

ㄴ처럼 논리적으로 해석할 수 있지만, 간단한 퀴즈를 통해 반례를 들어보겠습니다.

$Q.\ g(x)=\begin{cases} -x & (x<0) \\ -x+1 & (x \ge 0) \end{cases}$일 때, $g(x)$는 $x=0$에서 극대이다. (O. X)
A : O. $x=0$을 포함하는 개구간 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$에서 $g(x)$의 최댓값은 $g(0)$이므로 $g(x)$는 $x=0$에서 극대이다. (by 극대의 정의)

네. $x=0$에서 $g(x)$는 극대가 됩니다. 하지만! $\lim\limits_{x\to 0-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0+} f'(x)=-1$로써 부호가 같습니다.
그래서 ㄷ은 항상 옳다고 얘기할 수 없습니다.

Q. 그렇다면 왜 우리는 극대와 극소를 $f'(x)$의 부호변화를 통해 판정하는 거에 익숙한가?

미래로 미적분I 교과서 122page를 보면, 극대와 극소의 판정은 다음과 같이 한다고 나와 있습니다.

> **미분가능한 함수 $f(x)$**에 대하여 $f'(0)=0$일 때. $x=0$ 좌우에서 $f'(x)$의 부호가
> ① $+$에서 $-$로 바뀌면 $f(x)$는 $x=0$에서 극대, 극댓값은 $f(0)$
> ② $-$에서 $+$로 바뀌면 $f(x)$는 $x=0$에서 극소, 극솟값은 $f(0)$

네. 교과서에 나와 있으니 우리는 익숙할 수밖에요.
그리고 여태 있었던 모든 기출에서도 항상 극대 극소의 판별은 저걸로 했을 때 무리가 없었습니다.

하지만 이 문제에서의 $f(x)$와 기출 및 교과서에서의 $f(x)$는 **차이점**이 있었습니다.

바로 $x=0$에서의 미분가능성, 엄밀하게 말하자면 **연속성**입니다.

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(0)=0$일 때. $x=0$ 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 ① $+$에서 $-$로 바뀌면 $f(x)$는 $x=0$에서 극대, 극댓값은 $f(0)$ ~~~

는

$x=a$을 포함하는 어떤 열린 구간에 속하는 모든 x에 대하여 $f(x) \le f(a)$이면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극대가 된다고 하고 ~~~

의 정의로부터 **파생된 하나의 정리**입니다.
$f(x)$가 미분가능하다는 조건이 있을 때, 정의와 동치로 사용할 수 있는 하나의 **따름정리**입니다.

하지만 이 문제의 $f(x)$는 $x=0$에서의 연속성이 보장되어있지 않기 때문에

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(0)=0$일 때. $x=0$ 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 ① $+$에서 $-$로 바뀌면 $f(x)$는 $x=0$에서 극대, 극댓값은 $f(0)$ ~~~

를 **사용해선 안되고**

$x=a$을 포함하는 어떤 열린 구간에 속하는 모든 x에 대하여 $f(x) \le f(a)$이면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극대가 된다고 하고 ~~~

를 **사용하여 문제를 해결해야합니다.**

<요약>

연속함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극대이면 $x=a$를 기준으로 좌, 우 $f'(x)$의 부호가 변화합니다.

하지만 $f(x)$가 $x=a$에서 연속하지 않고 $x=a$에서 극대이면 $x=a$를 기준으로 좌, 우 $f'(x)$의 부호는 변할 수도, 변하지 않을 수도 있고, 이런 경우 $f'(x)$의 부호는 극대의 정의를 통해 결정해야 합니다.

극대의 정의 : $x=a$을 포함하는 어떤 열린 구간에 속하는 모든 x에 대하여 $f(x) \le f(a)$이면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극대가 된다고 하고, 그 때의 함숫값 $f(a)$를 극댓값이라고 한다.

<연습문제>

다음 함수들의 $x=0$에서의 극대, 극소를 판정하시오.

$h_1(x)=\begin{cases}(x+1)^2 & (x<0)\\(x-1)^2 & (x\ge 0)\end{cases}$ $h_2(x)=\begin{cases}x-1 & (x<0)\\-x+1 & (x\ge 0)\end{cases}$ $h_3(x)=\begin{cases}x+1 & (x<0)\\-x-1 & (x\ge 0)\end{cases}$ $h_4(x)=\begin{cases}-x+1 & (x<0)\\x-1 & (x\ge 0)\end{cases}$ $h_5(x)=\begin{cases}-x-1 & (x<0)\\-x+1 & (x\ge 0)\end{cases}$

정답: 극대 / 극대 / 극대 극소 모두 아님 / 극소 / 극대

본 자료에서 수정되어야 할 부분이 있다면 오르비 쪽지 부탁드립니다.
본 자료를 활용할 시 원본이 유지되어야 합니다.