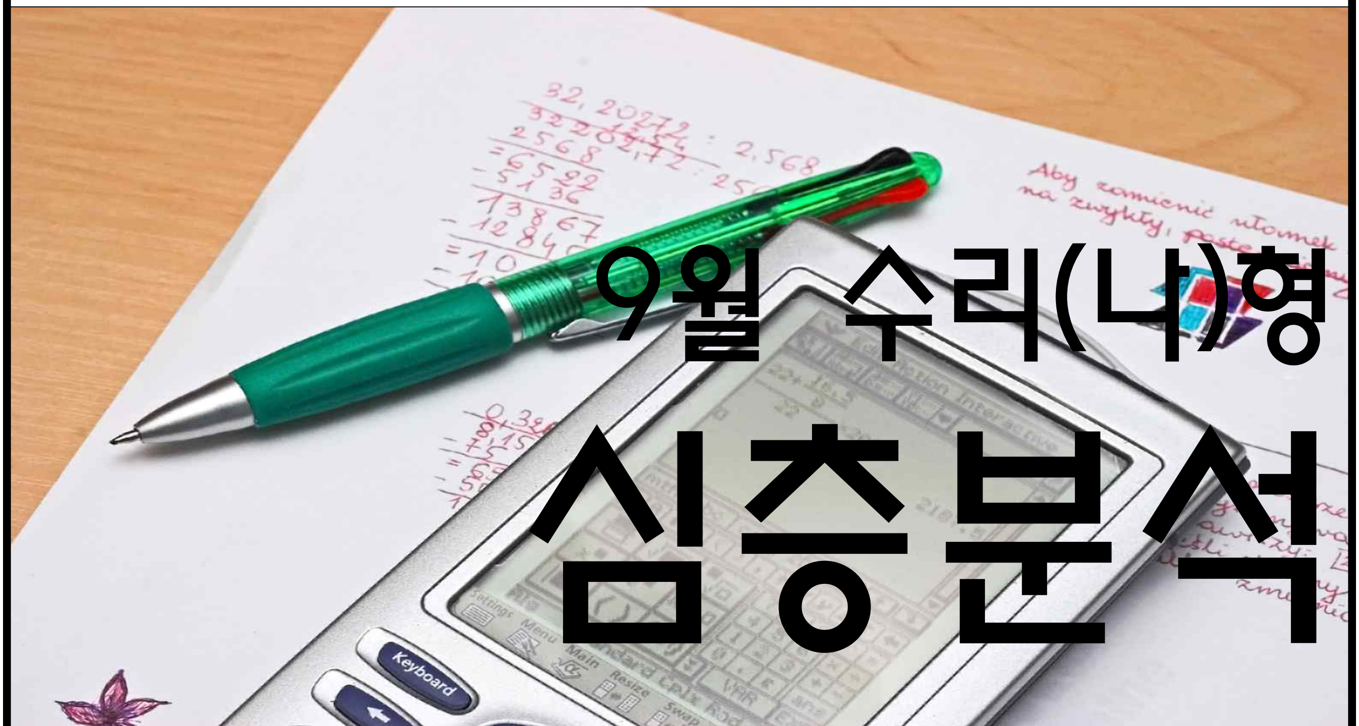


9월 수리(나)형

심층분석

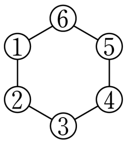
by MediVa

9월 모의고사 14번 문항 분석

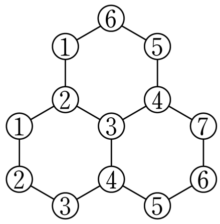
14. 다음 [단계]에 따라 정육각형이 인접해 있는 모양의 도형에 자연수를 적는다.

> [단계 1] 〈그림 1〉과 같이 한 개의 정육각형을 그리고,각 꼭짓점에 자연수를 1부터 차례로 적는다.
>
> [단계 2] 〈그림 1〉의 아래에 2개의 정육각형을 그리고,새로 생긴 각 꼭짓점에 자연수를 1부터 차례로 적어서 〈그림 2〉를 얻는다.
>
> ⋮
>
> [단계 n] 〈그림 $n-1$〉의 아래에 n개의 정육각형을 그리고,새로 생긴 각 꼭짓점에 자연수를 1부터 차례로 적어서 〈그림 n〉을 얻는다.

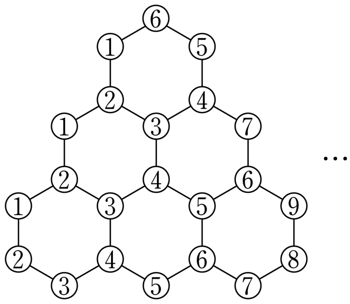
〈그림 6〉에 적혀있는 모든 수의 합은? [4점]



<그림 1>



<그림 2>



<그림 3>

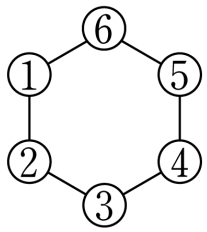
① 338 ② 349 ③ 360 ④ 371 ⑤ 382

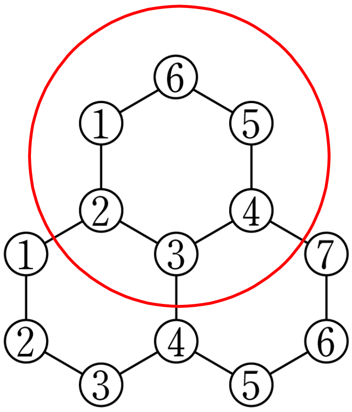
발견적 추론 문제로, 수열 단원에서 자주 나오는 유형 중에 하나이다. 문제에 주어진 정육각형의 모양의 수열에 대한 규칙성을 빨리 파악하는 것이 관건이다.

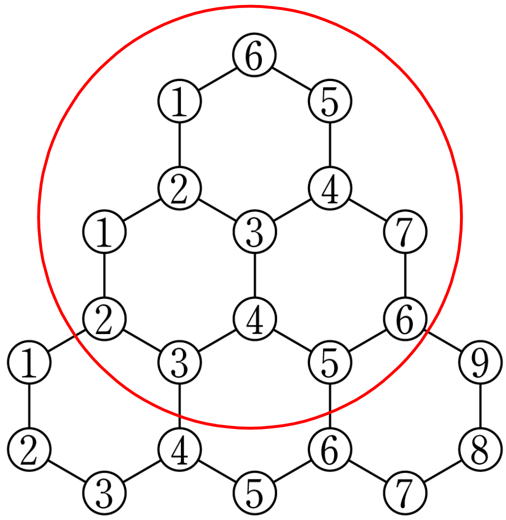
꼼꼼한 문제풀이

수열 단원에서는 얼핏 보기에 교과서에서 다루지 않는 것처럼 보이는 수열 문제가 한 두 문제씩 나오는데, 문제에 있는 수열을 쪼개거나 변형하면 교과서에서 배운 수열로 바꾸어 계산할 수 있게 된다. 수열을 변형하는 것은 많은 문제를 풀어보면서 감각을 기르는 것이 요구된다.

이 문제의 규칙은 비교적 쉽게 파악할 수 있다. 수열의 규칙에 대한 설명부터 읽기보다 예시로 들어 준 그림을 보고 잘 이해가 되지 않는 부분에 대해 설명을 참고해가면서 읽는 쪽이 더 효과적이다.







<그림 1> <그림 2> <그림 3>

문제에서 요구하는 것은 <그림 6> 즉, 6번째 수열의 총합이므로, 수열이 어떻게 구성되어 가고 있는지 그림을 통해서 빨리 확인해야 한다. 그림을 보고, 설명을 읽으면 그림 아래에 육각형을 그려 가면서 수열을 추가하는 것을 확인할 수 있다. <그림 1> → <그림 2>로 가면서 추가되는 수열을 보면 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7임을 볼 수 있고, <그림 2> → <그림 3> 으로 가면서 추가되는 수열을 보면 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 임을 알 수 있다. 그러면 다음에 추가되는 수열은 1 ~ 11 까지의 자연수(그림 4), 그 다음에는 1~ 13(그림 5), 그 다음에는 1~15가 추가될 것이라고 추론할 수 있다.

따라서 이 그림에 있는 수열의 총합은 계차수열을 이룬다고 할 수 있다. 문제에서는 그림 6의 수열의 합을 구하기만 하면 되므로 직접 수열의 합을 구하는 것도 좋지만 여기서는 계차수열의 일반항을 구하여 해결하는 방법을 쓰겠다.

그림 n에 있는 숫자의 총합을 a_n이라고 하면 계차는 $b_n = a_{n+1} - a_n$이 된다.

b_1 : 1 ~ 7까지의 자연수의 합

b_2 : 1 ~ 9까지의 자연수의 합

이러한 규칙을 따라 갈 때, 계차수열에서 더해지는 수들은 점점 2개씩 늘어나며, 더하는 수들은 모두 공차가 1인 등차수열을 이루고 있으므로 등차수열의 합 공식을 사용하자.

등차수열의 합 공식은 2가지가 있는데, **처음 항과 끝 항의 합을 이용**하는 $S = \dfrac{n(a+l)}{2}$을 사용하자.

b_1 의 처음항과 끝항의 합은 8, b_2는 10, b_3는 12로 등차가 2씩 증가할 것이므로 $a+l$을 n으로 나타내면 $2n+6$**이 될 것**이다. (2씩 증가하므로 공차가 2이고, 초항이 8이므로 $2n+6$이 된다.)

또한 **항의 개수 역시 2개씩 증가**하며, 처음 계차에서의 항의 개수가 7이므로 $2n+5$로 쓸 수 있다.

따라서 $b_n = \dfrac{(2n+6)(2n+5)}{2}$가 된다.

그러므로 $a_6 = a_1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{5} \frac{(2k+6)(2k+5)}{2}$로 계산할 수 있다. 이를 전개하여 계산하면,

$$a_6 = (1+2+\cdots+6) + \sum_{k=1}^{5}(2k^2+11k+15) = 35 + 2\times\frac{5\times6\times11}{6} + 11\times\frac{5\times6}{2} + 15\times5$$

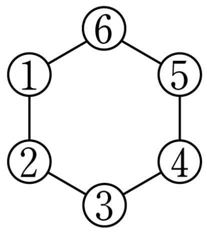
= 35 + 110 + 165 + 75

= 385

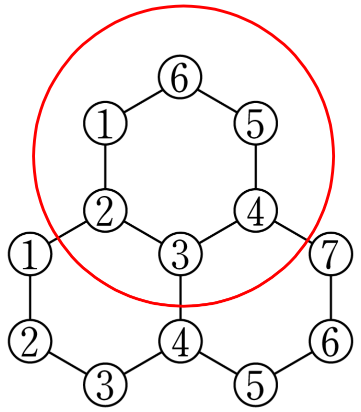
따라서 답은 385이다.

→ 답 : 385

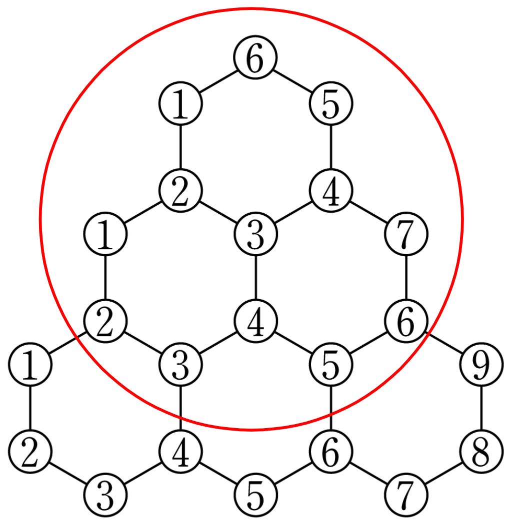
요약



<그림 1>



<그림 2>



<그림 3>

그림 n에 있는 숫자의 총합을 a_n이라고 하면 계차는 $b_n = a_{n+1} - a_n$로 나타낼 수 있다.

계차는 등차수열의 합 형태를 이루고 있으므로 $S = \frac{n(a+l)}{2}$를 이용

항의 개수 : 공차가 2로 증가, 처음 항 7 → $2n+5$

처음항과 마지막항의 합 : 공차가 2로 증가, 처음 항 8 → $2n+6$

계차수열의 합 공식을 이용하여 a_6을 구함

〈답〉 ⑤

〈해설〉 점 B에서의 접선의 기울기는 $f'(3) = -6$

$\overline{AD} : \overline{DB} = 3 : 1$ 이므로 $\overline{BD} = k(k>0)$라 하면 $\overline{AD} = 3k$

직선 BC의 기울기는 $\frac{\overline{CD}}{-k} = -6$이므로

$\overline{CD} = 6k$

또, 직선 AC의 기울기는 $\frac{6k}{3k} = 2$

따라서, $f'(a) = -3a^2 + 8a - 3$에서

$-3a^2 + 8a - 3 = 2,\ 3a^2 - 8a + 5 = 0$

∴ 모든 a값들의 곱은 $\frac{5}{3}$

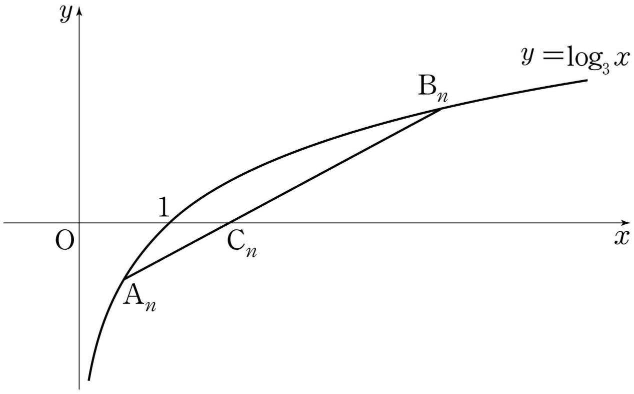
9월 모의고사 15번 문항 분석

15. 2 이상의 자연수 n에 대하여 함수 $y=\log_3 x$의 그래프 위의 x좌표가 $\frac{1}{n}$인 점을 A_n이라 하자. 그래프 위의 점 B_n과 x축 위의 점 C_n이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 점 C_n은 선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$과 x축의 교점이다.
> (나) $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{C}_n} : \overline{\mathrm{C}_n\mathrm{B}_n} = 1 : 2$

점 C_n의 x좌표를 x_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n^2}$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{5}{6}$ ⑤ 1



로그함수의 그래프와 점화식을 응용한 문제였다. 도형의 성질을 활용하여 식을 빠르게 세우는 것이 문제의 포인트였다. 얼핏 보면 문제가 복잡해 보일 수 있지만, 그래프를 읽는 기본적인 방법과 내분의 의미를 알고 있다면 그리 어려운 문제는 아니었다.

Warming Up

문제풀이를 하기 앞서서, 그래프를 읽는 기본적인 독해법을 확인해보자.

> **[1 - 2] 다음 표현을 문제풀이에 어떻게 사용할 수 있는지 설명해 보시오.**
>
> 1. 점 $\mathrm{A}(a,\ b)$가 $y=f(x)$ 곡선 위에 있다.
> 2. 점 $A(a,\ b)$는 $y=f(x)$와 x축의 교점이다.

즉, 이 표현을 통해서 어떤 식을 만들어 낼 수 있는지 말하라는 것이다.

개념 재확인

그래프만 보면 울렁거리는 사람을 위한 시가 하나 있다.

서 시

수능(修能)날까지 하늘을 우러러 / 한 점 그래프가 없기를
/ 시험지에 이는 바람에도 / 나는 괴로워했다. //
대입(大入)을 노래하는 마음으로 / 모든 죽어가는 것을 사랑해야지
/ 그리고 나에게 주어진 문제를 / 풀어가야겠다. //
오늘 아침에도 그래프가 나왔다.

안타깝지만, 여러분이 보게 될 수능에도 그래프가 나올 것이다. 내가 확신한다.

이 문제를 위해서 그래프를 읽는 기본 원칙을 한 번 살펴보도록 하자. 아주 간단하지만 막상 문제를 풀 때 생각나지 않을 수 있는 표현들이다.

1. 점 $\mathrm{A}(a,\ b)$가 $y=f(x)$ 곡선 위에 있다.

아주아주 쉬운 내용이지만, 이 말을 간과해서 문제를 놓치는 경우가 **의외로** 많다.

점 $\mathrm{A}(a,\ b)$가 $y=f(x)$ 곡선 위에 있다. ➡ 곡선 $y=f(x)$가 점 $\mathrm{A}(a,\ b)$를 지난다.
➡ 점 $\mathrm{A}(a,\ b)$를 $y=f(x)$에 대입한다. ➡ $b=f(a)$

이 내용을 언급하는 이유는, 어려워서가 아니라 '너무 쉬워서' 이 내용을 간과하는 경우가 많기 때문이다. 그래프를 보고 식을 세울 때, 뭔가 결론이 나지 않는다면 그래프에 나온 단서를 모두 이용하지 않은 경우일 수 있는데, 많은 경우에 이 문장을 빠뜨려서 식 하나가 부족하게 되는 것이다.

2. 점 $A(a,\ b)$는 $y=f(x)$와 x축의 교점이다.

역시 어렵지 않은 내용이지만, 문제에서 맞닥뜨렸을 때 생각이 나지 않을 수 있다.

점 $A(a,\ b)$는 $y=f(x)$와 x축의 교점이다. ➡ $b=0,\ f(a)=0$

굳이 설명할 필요도 없는 내용이지만, 이렇게까지 언급하는 이유는 정신없이 문제를 풀다 보면 간과할 수 있기 때문이라는 점을 다시 한 번 강조한다.

이제 문제풀이로 들어가 보도록 하자.

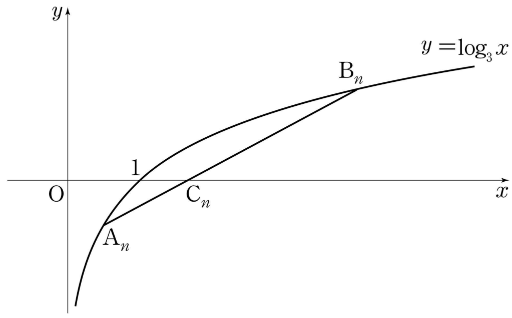
꼼꼼한 문제풀이

위에서 간단히 그래프를 읽는 방법에 대해서 다뤘는데, 이를 이용해서 문제를 다시 읽어 보도록 하자.

2 이상의 자연수 n에 대하여 함수 $y=\log_3 x$의 ① 그래프 위의 x좌표가 $\frac{1}{n}$인 점을 A_n이라 하자. ② 그래프 위의 점 B_n과 ③ x축 위의 점 C_n이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) ④ 점 C_n은 선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$과 x축의 교점이다.

(나) ⑤ $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{C}_n} : \overline{\mathrm{C}_n\mathrm{B}_n} = 1 : 2$



점 C_n의 x좌표를 x_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n^2}$의 값은?

① 그래프 위의 x좌표가 $\frac{1}{n}$인 점을 A_n → $A_n\left(\frac{1}{n},\ f\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ → $A_n\left(\frac{1}{n},\ \log_3\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

② 그래프 위의 점 B_n → $B_n=(a,\ b)$라고 하면 $f(a)=b$

③ x축 위의 점 C_n → $C_n(c,\ 0)$

이렇게 기본적인 내용을 정리해 보고, 보기 (가), (나)를 살펴보도록 하자.

(가) 점 C_n은 선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$과 x축의 교점이다.

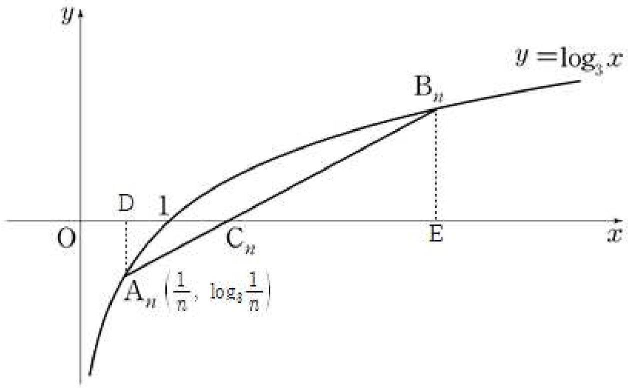
그림을 보면 간단하게 알 수 있지만, C_n은 선분 A_nB_n의 내분점이다. 이 내용을 (나)와 결합해 보자.

(나) $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{C}_n} : \overline{\mathrm{C}_n\mathrm{B}_n} = 1 : 2$

(나)의 표현이 무엇을 의미하는가? C_n은 선분 A_nB_n의 내분점이라고 하였다. (나)는 C_n이 A_n과 B_n을 **1:2로 내분하는 점이라는 사실을 말해주고 있다**. 이 문제에서 많이 헤맨 사람은 아마 $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{C}_n} : \overline{\mathrm{C}_n\mathrm{B}_n} = 1 : 2$를 이용하기 위하여 $\overline{A_nC_n}$을 구하고 $\overline{C_nB_n}$을 구하여 비례식에 대입했을 확률이 높다. 그런 경우 계산식이 지나치게 복잡해져서 답을 구하기 매우 어렵게 된다.

내분점이라는 사실을 통해서 우리는 다음과 같은 내용들을 확인할 수 있다.

① $A_nC_n : C_nB_n = 1:2$ (길이의 비가 1:2)
② $A_nD : B_nE = 1:2$ (높이의 비가 1:2)
③ $DC_n : C_nE = 1:2$ (밑변의 비가 1:2)



이 내용을 빠르게 알아내야 한다.

길이의 비가 높이나 밑변의 비로 바뀔 수 있다는 것은, 식을 아주 쉽게 만들 수 있다는 것을 말해준다. 높이의 비인 $A_nD = 0-\log_3\frac{1}{n} = \log_3 n$으로 쉽게 구할 수 있으며, B_nE는 그 값의 2배이므로 $B_nE = 2\log_3 n$이 된다. 그러므로 B_n의 y좌표가 $2\log_3 n$이 되는 것이다.

또, C_n의 x좌표는 문제에서 x_n이라고 하였으므로, $DC_n = x_n - \frac{1}{n}$이고, $C_nE = 2DC_n = 2x_n - \frac{2}{n}$이 된다. 여기서 중요한 것은 E의 x좌표를 $2x_n - \frac{2}{n}$으로 쓰면 안 된다는 것이다. 자세히 보자. C_nE의 길이가 $2x_n - \frac{2}{n}$이다. 그렇기 때문에 E의 x좌표는 C_n의 x좌표인 x_n에 C_nE의 길이를 더한 $3x_n - \frac{2}{n}$이 되어야 한다. 만약 E의 x좌표를 $2x_n - \frac{2}{n}$이라고 풀면 오답이 나오게 된다.

자, 그러면 이제 모든 점의 좌표를 x_n과 n을 이용하여 나타내었는데, 이제 해야 할 것은 무엇일까?

그래프 위의 점 B_n

간단해 보이는 이 문장이 이 문제의 마무리를 위한 중요한 조건이 된다. 즉 $B_n\left(3x_n - \frac{1}{n},\ 2\log_3 n\right)$으로 나타낼 수 있는 B_n이라는 점은 $y = \log_3 x$ 위의 점이므로, $2\log_3 n = \log_3\left(3x_n - \frac{1}{n}\right)$가 되는 것이다. 이것이 이 문제의 해결로 갈 수 있는 방정식이다.

이제 할 것은 로그방정식을 푸는 것이다. $2\log_3 n = \log_3 n^2$이므로,
$n^2 = 3x_n - \frac{1}{n}$이 되고 $x_n = \frac{1}{3}\left(n^2 + \frac{1}{n}\right)$이다.

구해야 하는 것은 $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n^2}$이므로, 이 값은 $\frac{1}{3}$이 된다.

→ 정답 ① $\frac{1}{3}$

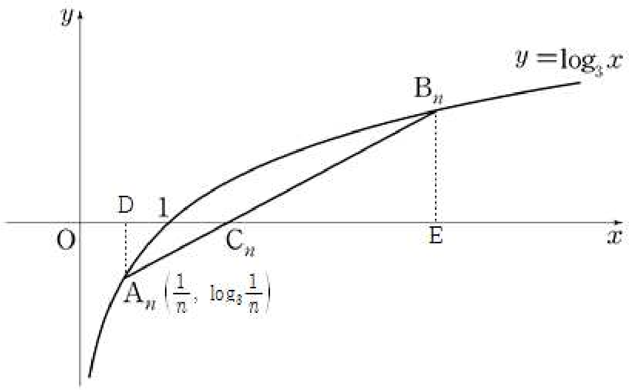
요약

15. 2 이상의 자연수 n에 대하여 ① 함수 $y=\log_3 x$의 그래프 위의 x좌표가 $\frac{1}{n}$인 점을 A_n이라 하자. ② 그래프 위의 점 B_n과 x축 위의 점 C_n이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) ③ 점 C_n은 선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$과 x축의 교점이다.
(나) ④ $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{C}_n} : \overline{\mathrm{C}_n\mathrm{B}_n} = 1 : 2$

점 ③ C_n의 x좌표를 x_n이라 할 때, ⑤ $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n^2}$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{5}{6}$ ⑤ 1



① A_n의 좌표를 표시한다. →
② B_n이 그래프 위의 점이라는 사실을 확인해 두고, 이를 이용해서 식을 세울 수 있다는 것을 알아야 한다.
→ ③ C_n의 x좌표를 x_n이라고 정하고, y좌표는 0이라고 정한다.
→ ④ C_n이 선분 A_nB_n의 내분점임을 이용하여 $A_nD : B_nE = 1:2$(그래프 수정함), $DC_n : C_nE = 1:2$로 식을 세운다.
→ B_n이 그래프 위의 점이라는 사실을 이용하여 식을 푼다.
→ ⑤ 극한값을 구한다.

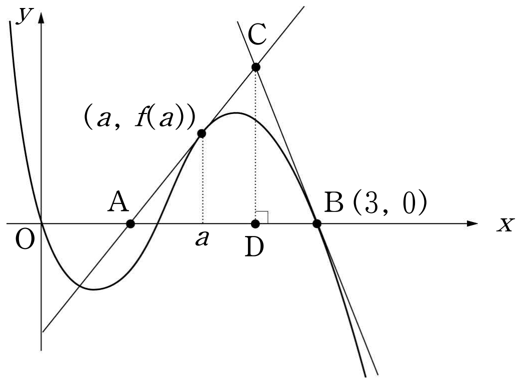
Tip

이 문제에서 빠르게 알아야 할 것은 $A_nC_n : C_nB_n$=1:2 라는 비례식을 그대로 이용하지 말고, 그것이 밑변의 길이의 비, 높이의 길이의 비로 바뀔 수 있다는 사실이다. 그렇지 않고 길이를 그대로 비례식에 대입하여 식을 풀면 상당히 복잡한 식이 등장할 수 있고, 그 과정에서 실수를 할 가능성이 높아진다. 예전 교육청 기출문제 중에도 내분점에 대한 이해를 묻는 문제가 하나 있으니 풀어 보도록 하자.

관련 기출문제

교육청 기출문제

그림과 같이 삼차함수 $f(x)=-x^3+4x^2-3x$ 의 그래프 위의 점 $(a, f(a))$에서 기울기가 양의 값인 접선을 그어 x축과 만나는 점을 A, 점 B$(3, 0)$에서 접선을 그어 두 접선이 만나는 점을 C, 점 C에서 x축에 수선을 그어 만나는 점을 D라 하고 $\overline{\mathrm{AD}} : \overline{\mathrm{DB}} = 3:1$일 때, a의 값들의 곱은?



① $\frac{1}{3}$　　② $\frac{2}{3}$　　③ 1　　④ $\frac{4}{3}$　　⑤ $\frac{5}{3}$

〈답〉 ⑤

〈해설〉 점 B에서의 접선의 기울기는 $f'(3)=-6$

$\overline{\mathrm{AD}} : \overline{\mathrm{DB}} = 3:1$ 이므로 $\overline{\mathrm{BD}}=k(k>0)$라 하면 $\overline{\mathrm{AD}}=3k$

직선 BC의 기울기는 $\frac{\overline{\mathrm{CD}}}{-k}=-6$이므로

$\overline{\mathrm{CD}}=6k$

또, 직선 AC의 기울기는 $\frac{6k}{3k}=2$

따라서, $f'(a)=-3a^2+8a-3$에서

$-3a^2+8a-3=2,\ 3a^2-8a+5=0$

$\therefore$ 모든 a값들의 곱은 $\frac{5}{3}$

9월 모의고사 16번 문항 분석

16. 역행렬이 존재하는 두 이차정사각행렬 A, B가

$$(A+B)(A^{-1}+B^{-1})=4E$$

를 만족시킨다. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. $A^{-1}+B^{-1}$의 역행렬이 존재한다.

ㄴ. $A=E$이면 $B=E$이다.

ㄷ. $AB=\frac{1}{2}E$이면 $A^2+B^2=E$이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

모처럼 나온 행렬의 성질 문제인데, 6월에 비해서는 약간 응용되어서 나온 느낌이다. 최근 수능과 모의고사에서 이러한 유형의 문제가 잘 등장하지 않아서 상대적으로 어렵게 느껴졌을 수 있는데, 이런 유형의 문제를 해결하는 방법들을 평소에 정리해 두고 있다면 생각보다 쉽게 풀렸을 것 같다.

Warming Up

문제풀이에 앞서서 개념 복습 겸 간단한 문제들을 풀어 보도록 하자.

[1~6] 다음 명제의 참과 거짓을 판별하시오.

여기 나오는 행렬들은 모두 이차정사각행렬이고, E는 단위행렬이다.

1. $AB=E$이면 A의 역행렬은 B이다.
2. $AB=E$이면 $BA=E$이다.
3. $A^2=O$이면 $A=O$이다.
4. $A^2=O$이면 A의 역행렬이 존재하지 않는다.
5. 명제 $A^2-2AB+B^2=(A-B)^2$은 항상 성립한다.
6. 명제 $A^2-2A+E=(A-E)^2$은 항상 성립한다.

여기 있는 문제는 16번 문제를 풀기 위해서 모두 간단히 풀 수 있어야 하는 문제들이다.

개념 재확인

이제 수능이 며칠 남지 않았다. 이제 조금 있으면 대학생이 된다는 마음에 설레기도 하겠지만, 이번 시험의 점수를 보면서 땅이 꺼져라 한숨 쉬는 경우가 더 많을 것 같다.

하지만 한숨이나 쉬고 있기에 수능까지 남은 시간이 아깝다. 남은 기간 동안 하루에 1점씩만 올린다고 해도 올해 대학 합격은 문제가 없을 것이다. 문제는 하루에 1점을 올리기가 그렇게 어렵다는 사실이겠지만.

이 문제는 4점짜리 문제다. 4점이라는 점수는 수능에서 어마어마한 점수이다. 이미 닳고 닳은 수험생 생활에서 수능 점수 1점이 얼마나 중요한지는 몸으로 깨달았을 터, 4점은 말 할 것도 없다.

사설이 길었는데, 4점짜리 문제 치고는 생각보다 답이 쉽게 나올 수 있는 문제였다고 생각한다. 어렵게 느껴졌을 수도 있지만 기출문제를 제대로 공부해 왔다면 크게 새로운 내용이 나온 문제는 아니었다.

먼저 Warming Up 문제를 하나하나 살펴보도록 하자.

1. $AB=E$이면 A의 역행렬은 B이다. → 참

답은 "참"이다. 이런 의문을 가질 사람이 있을 수 있다.

"어? 교과서에서 $AX=XA=E$인 행렬 X가 행렬 A의 역행렬이라고 했는데, 여기서는 $AB=E$라고만 나왔으니까 알 수 없는 것 아닌가요?"

좋은 지적이다. 사실 이 명제를 정확히 증명하는 것은 고교수학을 벗어나는 것이다. 여기서는 간단히만 증명하려고 넘어가려는데(정확한 증명이 아니라는 말이다), 증명 울렁증이 있으면 휘리릭 넘어가 주자.

<간단한 증명>
$LA=E$, $AR=E$인 행렬 L과 R을 생각해 보자. $L=R$이면, $AB=E$이면 $BA=E$라는 명제가 성립한다고 할 수 있다. 이것은 다음과 같은 조작을 통해 증명이 가능하다.
$L=LE=L(AR)=(LA)R=ER=R$, $\therefore L=R$

이 증명은 수능에 별로 도움 되는 증명은 아니니까 몰라도 되지만 **결과는 반드시 알아 두자.**

2. $AB=E$이면 $BA=E$이다. → 참

1번을 증명했으니까 2번은 자연스럽게 나온다. $AB=E$이면 $A^{-1}=B$이고 $B^{-1}=A$이다. 따라서 $BA=BB^{-1}=E$가 된다.

이 경우는 매우 중요하다. 행렬에서 교환법칙은 대체적으로 성립하지 않는데, 이 경우는 성립하는 경우이기 때문이다. **이 결과도 반드시 알아 두도록 하자.**

3. $A^2=O$이면 $A=O$이다. → 거짓

이건 많이 봤을 것 같다. 그렇지 않았다면 행렬 공부를 제대로 안했다고밖에 할 수가 없다.

a가 실수라면 $a^2=0$이면 누가 뭐래도 $a=0$이다. 하지만 행렬에서는 '영인자'라는 것이 존재하기 때문에 $A^2=O$이라도, $A=O$이 아닐 수도 있는 것이다.

<반례 찾을 때 자주 나오는 행렬>

① $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

② $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

행렬의 성질에서 반례가 여러 가지가 있지만, 반례의 대부분은 이 녀석들이다. 이 경우도 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 같은 녀석은 영행렬이 아니면서도 제곱하면 영행렬이 되는 반례가 된다. 반례를 생각할 때 이 행렬들을 1순위로 두고 생각하면 생각보다 반례가 빨리 발견될 수 있다.

4. $A^2=O$이면 A의 역행렬이 존재하지 않는다. → 참

이것도 공부를 열심히 했다면 한 번쯤은 봤거나 생각해봤어야 할 내용이다. 역행렬이 존재하지 않는 것을 증명하기 위해서는 **"역행렬이 존재한다고 가정"**하고 그게 말이 안 되는 것을 보여 주면 된다.

그래서 A^{-1}가 존재한다고 생각해 보자. 그러면 양 변에 A^{-1}를 곱할 수가 있는데, 그러면 식이 $A=O$이 된다. 그런데 영행렬은 역행렬이 존재하지 않는다. 따라서 역행렬이 존재한다는 가정 자체가 말이 안되는 것이다. 그러므로 A의 역행렬은 존재하지 않게 되는 것이다. 이 스킬은 꽤나 유용하니 알아 두기를 바란다.

5. 명제 $A^2-2AB+B^2=(A-B)^2$은 항상 성립한다. → 거짓

딱 봐도 틀리게 생겼다. 행렬에서는 곱셈에 대한 교환법칙이 성립하지 않는다고 귀에 못이 박히도록 들었을 것이다. 대놓고 틀린 보기다.

주의할 것은 교환법칙이 성립하지 않는다는 말은 **"항상 성립하지 않는다는 말"이 아니다.** 성립할 수도 있고 그렇지 않을 수도 있다는 말이다.

6. 명제 $A^2-2A+E=(A-E)^2$은 항상 성립한다. → 참

바로 요런 녀석들이 있기 때문에 그런 것이다. 아까 역행렬도 교환법칙이 성립한다고 했는데, 단위행렬도 교환법칙이 성립하는 대표적인 예 중에 하나다. $AE=EA=A$이기 때문이다. 그래서 5번은 틀리지만 6번은 맞게 된다는 사실.

이제 본격적으로 문제풀이를 시작해 보도록 하자.

꼼꼼한 문제풀이

위에서 개념을 다시 잡고 왔으니 이제 본격적으로 문제풀이를 시작해 보도록 하자. 행렬의 성질 문제를 해결할 때 중요한 것은 각종 행렬의 성질을 암기하기보다, 문제에서 주어진 실마리를 가지고 차근차근 해결해 가는 것이다.

먼저 보기를 살펴보자. ㄱ, ㄴ, ㄷ이 있는 것을 확인할 수 있다. **수능 문제에서는 대체적으로 ㄱ번 보기는 쉽게 해결할 수 있도록 "예시"에 해당하는 것을 준다.** 특히나 각종 성질을 발견해야 하는 문제에서는 더더욱 그러하다.

〈수능 출제 매뉴얼의 예시 문항〉

두 이차정사각행렬 A와 B에 대하여

$$AB+A=E,\ AB+BA=A+B$$

일 때, 〈보기〉에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

ㄱ. 행렬 A가 역행렬을 갖는다.
ㄴ. $AB=BA$
ㄷ. 행렬 B가 역행렬을 갖는다.

→

두 이차정사각행렬 A와 B에 대하여

$$AB+A=E,\ AB+BA=A+B$$

일 때, 〈보기〉에서 옳은 것을 모두 고른 것은?
(단, E는 단위행렬이다.)

ㄱ. 행렬 A의 역행렬은 $B+E$이다.
ㄴ. $AB=BA$
ㄷ. 행렬 B가 역행렬을 갖는다.

평가원의 코멘트 : 문항 초안을 해결하기 위해서는 <보기>에서 먼저 $AB+A=E$을 이용하여 ㄱ이 참임을 설명하고, 이를 이용하여 ㄴ이 참임을 증명해야 한다. (중략) 그러나 검토 교사의 검토 결과 기이 참이 된다는 것을 쉽게 알았지만 $AB+A=E$만을 이용하여 ㄴ이 참이 된다는 것은 알아차리지 못하였다. (중략) 그래서 <보기>에서 'ㄱ'을 다소 수정하여 '행렬 A의 역행렬은 $B+E$이다.' 와 같이 제시하였다. 이렇게 할 경우 $A(B+E)=AB+A$라는 사실, $(B+E)A=BA+A$라는 사실, $A(B+E)=(B+E)A=E$라는 사실을 이용하라는 것을 암시하게 되어 문항 초안에 비해 최종 문항이 다소 쉬워질 수 있다 (후략)

내가 한 말이 아니고 평가원에서 예전에 냈던 수능 출제 매뉴얼의 일부다. 괜히 ㄱ, ㄴ, ㄷ 순으로 풀라는 것이 아니고, 평가원에서 그렇게 풀 수 있도록 문제를 내고 있는 것이기 때문에 그런 것이다.

아차 싶은 학생들은 아직 안 늦었으니까 너무 걱정하지는 말자.

먼저 보기 ㄱ부터 살펴보도록 하자.

ㄱ. $A^{-1}+B^{-1}$의 역행렬이 존재한다.

ㄱ번 보기에서 **"역행렬이 존재한다"**라는 표현이 나온다. 역행렬이 존재하는지 확인하는 방법은 크게 두 가지가 있다.

① **행렬의 원소가 주어진 경우** : $D \neq 0$ 임을 확인한다. ② **행렬의 원소가 주어지지 않은 경우** 이차정사각행렬 A의 역행렬 존재 여부를 확인하기 위해서는 $AX=E$ 형태를 확인

이 문제는 ② 형태를 따르고 있다. 문제에서 역행렬 존재 여부를 확인해야 할 행렬은 "$A^{-1}+B^{-1}$"이다. 그러면 $(A^{-1}+B^{-1})\cdot X=E$의 식이 있는가를 봐야 하는데, ㄱ번 보기답게 쉽게 $(A+B)(A^{-1}+B^{-1})=4E$라고 문제에 있는 식에 그대로 그 형태가 있다. 식을 변형하면 $\frac{1}{4}(A+B)(A^{-1}+B^{-1})=E$가 되므로, $A^{-1}+B^{-1}$의 역행렬은 $\frac{1}{4}(A+B)$가 되겠다. 따라서 역행렬이 존재한다. 앞에서 풀었던 문제는 ㄱ번 보기를 위한 것이었다.

→ 참

ㄴ. $A=E$이면 $B=E$이다.

$A=E$이면 $B=E$이냐고 물어봤는데, 이렇게 특정 행렬을 직접 주는 경우 그대로 대입한 다음 식이 어떻게 변하는지 확인해야 한다.

문제 보기에 $A=E$를 대입해 보자.
$(E+B)(E+B^{-1})=4E$
식을 전개하면 $E+B^{-1}+B+E=4E$가 된다.
정리하면 $B+B^{-1}=2E$가 된다. 양변에 B를 곱하여 역행렬을 없애 보자.
$B^2+E=2B$ → $B^2-2B+E=O$가 된다.

이 식은 무엇을 의미하는가? 식을 보고 자연스럽게 $(B-E)^2=O$을 생각할 수 있다. 이 식은 수리영역을 공부하다 보면 많이 봤을 식인데, 아주 쉬운 다음 두 문제를 풀어 보자.

1. $(b-1)^2=0$ 일 때, b는?
2. $(B-E)^2=O$ 일 때, B는?

1번의 답은 쉽게 구할 수 있을 것이다. $b=1$이다. 그러나 2번의 답을 $B=E$라고 답한다면, 행렬 공부를 제대로 하지 않은 것이다. **행렬에서 "나눗셈은 없다." 대신, 역행렬이 있을 뿐이다.** 이 문제에서 $B-E$의 역행렬은 존재하지 않는다. 그러므로 $B-E$로 "약분"한다는 것은 불가능하다. 그러므로 여기서 **B는 구할 수가 없다.**

다시 문제로 돌아가면 $B=E$라는 ㄴ번의 보기는 틀렸다. 이 문제에서는 알 수가 없다. 확인을 위해서 반례를 들려면 $A^2=O$이 되는 행렬 중(위에 써 둔 것) 하나를 $B-E$로 삼으면 되겠다.

→ 거짓

ㄷ. $AB=\frac{1}{2}E$이면 $A^2+B^2=E$이다.

이번에는 $AB=\frac{1}{2}E$이면 이라고 나왔는데, 여기서 많은 것을 얻어 가야 한다. ㄱ번 보기가 기억이 나는가? 기억에서 $A^{-1}+B^{-1}$의 역행렬이 있는지 검사할 때 $AX=E$ 형태가 있는지를 확인했다. 이 보기는 반대로 $AX=E$ 형태를 주었는데 거꾸로 $A^{-1}=2B$, $B^{-1}=2A$임을 알 수 있어야 한다. ㄷ번 보기에서 막혔다면 이 내용에서 막혔을 확률이 높다. 아마 이 문제를 어렵게 생각한 사람들은 ㄷ번 보기를 제대로 이해하지 못하고 복잡하게 식만 계산하다가 막혔을 확률이 높다.

이 사실을 발견했다면 문제는 너무나도 쉽게 풀린다.

$(A+B)(A^{-1}+B^{-1})=4E$에서, 보기 싫은 역행렬들을 제거하면

$(A+B)(2B+2A)=4E$가 된다.

식을 전개하면 $2AB+2A^2+2B^2+2BA=4E$인데, 여기서 $AB=BA$라는 사실은 앞에서 다룬 바 있다.

따라서 $AB=BA=\frac{1}{2}E$이고 이 식을 대입하면 $E+2A^2+2B^2+E=4E$, 따라서 $A^2+B^2=E$가 된다.

→ 참

요약

16. 역행렬이 존재하는 두 이차정사각행렬 A, B가

① $(A+B)(A^{-1}+B^{-1})=4E$

를 만족시킨다. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. ② $A^{-1}+B^{-1}$의 역행렬이 존재한다.

ㄴ. ③ $A=E$이면 $B=E$이다.

ㄷ. ④ $AB=\frac{1}{2}E$이면 $A^2+B^2=E$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

① $AB=E$이면, $B=A^{-1}$라는 사실을 빠르게 확인. 여기서 막히면 그냥 문제 틀리는 것.

→ ② 바로 그 내용을 묻고 있는 보기가 ㄱ번. 잘 몰랐어도 ㄱ번에서 힌트를 얻어서 갔으면 해결책이 나왔을 수도

→ ③ 보기 ㄱ과는 큰 관련이 없지만, 행렬의 곱셈에 대한 교환법칙에 대한 보기. 눈치가 빨라야 하고, 틀렸다는 사실을 직관적으로 확인할 수 있어야 한다.

→ ④ 4점을 가르는 보기. 의외로 ㄱ번을 제대로 풀었다면 쉽게 계산이 되는 보기인데, 헤매다 보면 끝없는 미궁으로 빠졌을 수 있는 보기.

Tip

이 문제는 출제의도를 빨리 캐치하면 손쉽게 4점을 얻어갈 수 있지만, 아무 생각 없이 계산만 하고 있으면 시간만 잡아먹는 문제였다. 문제를 풀다가 너무 복잡해져간다 싶으면 풀이를 다시 한 번 점검해 보고, 시간 안배를 위해서 다른 문제를 풀었다가 나중에 다시 와서 푸는 것이 좋다.

9월 모의고사 18번 문항 분석

18. 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가

$$g(x)=\int\{x^2+f(x)\}dx,\quad f(x)g(x)=-2x^4+8x^3$$

을 만족시킬 때, $g(1)$의 값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

문제의 조건을 세심히 살피지 않는다면 계산이 너무나도 복잡해져서 패망할 수 있는 문제였다. 차분히 조건 하나하나를 살피고 적분 문제를 다루는 기본방법대로 가면 무난히 풀 수 있지만, 대충 보고 넘어가면 미궁으로 빠질 수도 있는 문제였다. 문제 자체가 새로운 것을 묻고 있지는 않다.

꼼꼼한 문제풀이

4점짜리이지만 유형 자체는 그리 새로운 유형이라고 볼 수 없다. 다만 중요한 조건 하나를 잘 보이지 않게 숨겨놓은 것이 이 문제에서 건질 포인트라고 할 수 있다.

간단한 질문을 하나 하겠다.

이차식과 이차식을 곱하면 몇차식이 되는가?

별 거리낌 없이 사차식이라고 말했다면 이 문제를 틀릴 이유가 없다. 만약 이 질문에 제대로 답했는데도 불구하고 문제를 틀렸다면 문제의 조건을 소홀히 한 것이다.

4점짜리치고는 문제가 짧은 만큼, 조건 하나하나를 꼼꼼하게 살펴 볼 필요가 있겠다.

① 이차함수 $f(x)$
② $g(x)=\int\{x^2+f(x)\}dx$
③ $f(x)g(x)=-2x^4+8x^3$

무엇 하나 간과해서는 안 될 조건들이다. 이 문제를 틀렸거나 푸는데 지나치게 많은 시간이 거렸다면 조건 ①을 늦게 발견하지 않았나 생각을 해 보아야 한다. 이 문제를 푸는데 있어서 가장 중요한 조건 중 하나인데, 보통 지문의 처음은 휘리릭 넘기는 습관 때문에 넘어갔다면 이 실수로 인해서 4점을 날려버린 것이나 다름이 없다.

다항함수에서 차수가 나오면 문제는 다항함수 식으로 구하는 문제로 귀결될 가능성이 높다. 특히 다항식의 차수가 3차 이하라면 더더욱 그렇다. 다항함수는 차수가 결정되는 순간 $f(x)=ax^2+bx+c$와 같이 식을 세워 놓고 미지수를 구하는 식으로 문제를 풀 수 있기 때문에, 다항함수가 나왔을 때 차수를 확인하는 것은 매우 중요한 과정이다.

이차함수라고 나왔기 때문에 $f(x)=ax^2+bx+c$라고 써 두자. 물론 $a\neq 0$이다.

다음으로 부정적분이 나왔는데, 여기서도 간단히 퀴즈를 하나 내겠다. 워밍업으로 묻기에는 쉬운 문제들이라 일부러 풀이 중간에 묻는다.

1. 명제 < $\int x^2dx=\frac{1}{3}x^3$이다.> 의 진위를 판별하여라.
2. 명제 < $\int_0^x t^2dt=\frac{1}{3}x^3$이다.> 의 진위를 판별하여라.

눈치 빠른 사람들은 알겠지만 **1번은 거짓, 2번은 참이다.** 1번이 거짓인 이유는 부정적분에는 "적분상수"를 반드시 붙여주어야 하기 때문이다. 즉 $\underline{\int x^2dx=\frac{1}{3}x^3+C}$인 것이다. 2번은 정적분이기 때문에 적분상수가 사라지게 되는 것이다.

아주 간단한 내용이지만 신나게 적분 계산을 하다 보면 적분상수는 어느샌가 안드로메다에 가 있고, 제 점수 역시 안드로메다행 열차를 타고 있을 확률이 높다. 부정적분은 수능에서 자주 등장하지 않은 내용인데, 이번에 특별히 등장하여 자신의 존재를 뽐내었으니, 우리는 모두 **부정적분에 주목할 필요**가 있다. 다시 한 번 말하지만 **부정적분에는 꼭 적분상수를 붙여야 한다**.

다시 문제로 돌아가자. $g(x)=\int\{x^2+f(x)\}dx$라고 하였는데, $f(x)=ax^2+bx+c$라고 하였기 때문에, 그대로 대입하면 $g(x)=\int\{(a+1)x^2+bx+c\}dx$이고 부정적분을 계산하면

$g(x)=\frac{1}{3}(a+1)x^3+\frac{1}{2}bx^2+cx+K$ (보통 C를 쓰지만 소문자 c와 헷갈릴 것을 염려하여 K를 사용했다.)

여기서 퀴즈 하나 더. 워밍업이 없다뿐이지 문제 푸는 것은 똑같다고 원망하지 말 것.

$g(x)=\frac{1}{3}(a+1)x^3+\frac{1}{2}bx^2+cx$는 3차식이다. (O / X)

여기서 답을 O로 했으면, 이 문제를 틀렸을 확률이 높다. 단순히 x^3이 있다고 해서 3차식이 아니다. $a\neq -1$이라는 조건이 따라붙어야 한다. 계수가 0이 되는 경우도 문제에 언급이 되어 있지 않으면 반드시 고려해 주어야 한다.

내가 이렇게 퀴즈를 내고 있는 이유는 이 내용들이 문제 풀이에 아주 중요하게 작용하였기 때문이다.

이제 세 번째 식, $f(x)g(x) = -2x^4+8x^3$으로 가 보도록 하자. 이 식을 **어떻게 처리하느냐가 문제의 포인트**다.

앞에서 $g(x)$를 구해 뒀으니, $f(x)$와 $g(x)$ 자리에 구해진 식을 넣어 보도록 하자.

$$f(x)g(x) = (ax^2+bx+c)\left\{\frac{(a+1)}{3}x^3+\frac{1}{2}bx^2+cx+K\right\} = -2x^4+8x^3$$

자, 여기서 4점의 주인이 갈린다. 왼쪽 식을 그대로 전개하여 오른쪽 식과 계수비교를 하려고 덤비는 순간 멘붕이 몰려올 것이다. 식 계산이 빠른 사람이면 그래도 괜찮겠지만, 정신없는 시험에서 저 긴 식을 전개하다가 보면 실수를 할 가능성이 높다. 계수비교를 할 때 하나라도 값이 잘못되면 완전 다른 계수가 나오는데, 이 항등식은 문자도 a, b, c, K의 4개나 있어 전개도 짜증날 뿐더러 방정식 풀기도 녹록치 않을 것이다.

자, 여기서 다시 앞에서 내가 물어봤던 퀴즈로 돌아가 보자. 언뜻 보기에 $g(x)$는 3차식이다. 그리고 $f(x)$는 2차식이다. 그러면 $f(x)g(x)$는 5차식이 되어야 할 것이다. **그런데 우변은 4차식이다.** 그러면 뭔가 잘못된 것이다.

여기서 $a=-1$이라는 결론을 도출해 내야 한다. <u>$g(x)$는 생긴 것은 3차식처럼 생겼지만 실제로는 2차식인 것이었다</u>. 이 사실을 발견하는 순간 계산은 매우 간단해진다.

$a=-1$를 대입하고 식을 다시 정리해 보자.

$$f(x)g(x) = (-x^2+bx+c)\left(\frac{1}{2}bx^2+cx+K\right) = -2x^4+8x^3$$

오오! 차수가 낮아지면서 식 계산이 상당히 간편해졌다. 여기서 당장 최고차항의 계수를 비교하면 $b=4$라고 결론을 내릴 수 있다. $b=4$를 대입하고 식을 다시 정리하면

$$(-x^2+4x+c)(2x^2+cx+K) = -2x^4+8x^3$$

여기서 계수비교를 하도록 하자. 식을 모두 전개하기보다 높은 차수부터 하나하나 살펴보자.

좌변에서 3차항은 $-1\times c+4\times 2 = 8-c$이고, 우변에서는 8이다. 따라서 $c=0$

그러면 식이 $(-x^2+4x)(2x^2+K) = -2x^4+8x^3$이 된다. 우변을 $-x^2+4x$를 인수로 갖도록 정리하면 $-2x^3(x-4) = 2x^2(-x^2+4x)$이 되므로 자연스럽게 $2x^2+K = 2x^2$이 되어서 $K=0$이 된다. 그러면 a, b, c, K의 모든 계수가 구해졌으니 $g(x)$를 구할 수 있다.

b, c, K를 $g(x) = \frac{1}{2}bx^2+cx+K$대입하면 $g(x) = 2x^2$이 된다. 따라서 $g(1)=2$

→ 답 : ②

요약

18. ① 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가

② $g(x) = \int \{x^2+f(x)\}dx$, ③ $f(x)g(x) = -2x^4+8x^3$

을 만족시킬 때, $g(1)$의 값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

①에서 $f(x)=ax^2+bx+c$라고 식을 세워 둠

→ ② 적분상수에 주의하여 $g(x)$의 식을 구함

→ ③ 좌우변의 차수를 살펴보고 $g(x)$의 차수를 결정

→ 계수비교를 통한 $g(x)$ 구하기

→ $g(1)$

9월 모의고사 20번 문항 분석

20. 어느 공장에서 생산하는 제품의 무게는 모평균이 m, 모표준편차가 $\frac{1}{2}$인 정규분포를 따른다고 한다. 이 공장에서 생산한 제품 중에서 25개를 임의추출하여 신뢰도 95%로 추정한 모평균 m에 대한 신뢰구간이 $[a,\ b]$일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le c) = 0.95$를 만족시키는 c를 $a,\ b$로 나타낸 것은? (단, 확률변수 Z는 표준정규분포를 따른다.) [4점]

① $3(b-a)$　　② $\frac{7}{2}(b-a)$　　③ $4(b-a)$

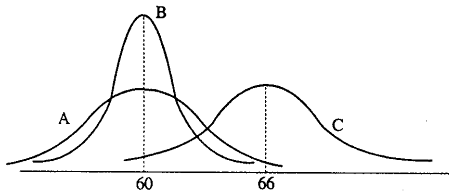
④ $\frac{9}{2}(b-a)$　　⑤ $5(b-a)$

통상적으로 나오는 통계적 추정 문제이지만, 문제 풀이과정에서 개념에 대한 정확한 이해가 요구되어 다소 허를 찌른 문제였다고 할 수 있다. 통계 단원은 대부분 비슷한 유형으로 나오는데, 간혹 통계적 개념을 문제화하는 경우도 있으므로, 개념에 대한 확실한 이해가 필요하다고 생각된다.

Warming Up

통계 단원은 문제가 어렵지 않지만 개념 이해가 쉽지 않으므로 개념에 관한 문제를 통해 개념을 정리하고 문제 풀이에 들어가 보자.

1. 3학년 재학생 수가 각각 500명인 같은 지역 세 고등학교 (A, B, C) 3학년 학생의 수학 성적 분포가 각각 정규분포를 이루고 아래 그림과 같을 때, 다음 〈보기〉 중 옳은 것을 모두 고른 것은? [3점]



< 보 기 >

ㄱ. 성적이 우수한 학생들이 B 고등학교 보다 A 고등학교에 더 많이 있다.
ㄴ. B 고등학교 학생들은 평균적으로 A 고등학교 학생들 보다 성적이 더 우수하다.
ㄷ. C 고등학교 학생들 보다 B 고등학교 학생들의 성적이 더 고른 편이다.

2. 정규분포 $N(m,\ \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 임의추출한 크기가 n인 표본의 표본평균을 $\overline{X}$라고 할 때, 모평균 m에 대한 신뢰구간을 신뢰도 95%로 추정하시오. (단, $P(0 \leqq Z \leqq a) = 0.475$, $P(0 \leqq Z \leqq a) = 0.495$)

3. 신뢰도가 커질수록 신뢰구간은 (커지 / 작아지) 고, n이 작아질수록 신뢰구간은 (커진 / 작아진) 다.

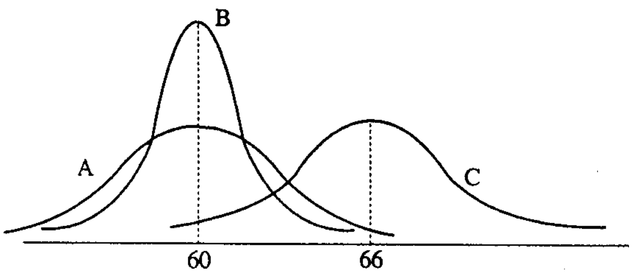
개념 재확인

통계는 공부하다 보면 매번 비슷한 유형의 문제가 나오기 때문에 정규분포 공식만 알고 통계 단원에 임하는 경우가 있는데, 그러다가 가끔 개념을 묻는 문제가 나오면 속절없이 털리고 만다. 대부분은 익숙한 유형의 문제가 나오지만 이번 모의고사처럼 살짝만 응용한 문제가 나와도 상당히 까다로울 수 있는 만큼 개념을 다시 한 번 정리해 보도록 하자.

1. 평균, 표준편차의 의미

평균은 한 집단의 전체적인 특징을 나타내는 지표이다. 한 집단의 성적 평균이 높다는 것은 그 집단이 전반적으로 성적이 좋다고 해석할 수 있다. 반면에 표준편차는 산포도로서, 집단의 원소들 사이에 얼마나 차이가 있는지를 나타내는 지표라고 할 수 있다.

이 문제는 97년도 수능 기출 문제인데, 평균과 표준편차에 대한 기본 개념을 묻고 있다.



위 그래프에서 평균을 살펴보기는 어렵지 않다. **종 모양의 곡선 중간에 대칭축으로 있는 값이 바로 평균**이다. 그러면 표준편차는 어떻게 확인할까? 표준편차가 크다는 것은 값들 사이에 차이가 크다는 것이고, 그것은 평균에서 멀어진 값들이 많다는 것을 의미한다. 따라서 **표준편차가 크면 곡선이 편평**해진다. 이를 통해 보기 하나하나 판단해 보도록 하자.

ㄱ. 성적이 우수한 학생들이 B 고등학교 보다 A 고등학교에 더 많이 있다. → 참

먼저 그래프를 보면 A와 B 고등학교의 평균은 서로 같다. 그렇다면 표준편차가 서로 다르다는 것인데, B 고등학교의 곡선이 더 가파르므로 B 고등학교 학생들의 성적이 더 고르다고 할 수 있다. 평균이 같은데 B 고등학교는 많은 학생들의 성적이 평균에 가깝고, A 고등학교는 편차가 크다는 것은 성적이 양극화되어서 잘하는 사람과 못하는 사람의 차이가 크다는 것을 의미한다. 따라서 A 고등학교 성적이 우수한 학생들이 많다고 할 수 있다.

ㄴ. B 고등학교 학생들은 평균적으로 A 고등학교 학생들 보다 성적이 더 우수하다. → 거짓

평균이 서로 같기 때문에 평균적으로 성적은 같다고 볼 수 있다. 참고로 개개인에 대한 비교는 이 데이터로만은 알 수 없다. 제일 좋은 성적을 가진 사람이 어느 학교에 있는지는 이 통계를 통해 알 수 없다.

ㄷ. C 고등학교 학생들 보다 B 고등학교 학생들의 성적이 더 고른 편이다. → 참

C 고등학교의 성적 곡선을 보면 B 고등학교보다 편평함을 알 수 있다. 이는 표준편차가 크다는 것으로, B 고등학교 학생들의 성적이 더 고른 편이라 할 수 있다.

2. 모평균의 추정

보통 공식만 외우는데, 개념 학습이니만큼 유도 과정을 살짝 살펴보도록 하자.

일단 '표본평균'이라는 것이 무엇을 의미하는지 알아야 한다. 표본이라는 것은 전체 집단에서 뽑아 낸 일부를 말하는데, 뽑을 때 여러 개를 뽑을 수 있다. 이를테면, 100명이 있는 집단에서 5명을 뽑아 냈다면, 뽑힌 5명이 표본이 되는 것이다. 표본은 보통 큰 집단의 데이터를 추정하기 위해서 뽑는데, 이 경우를 전체 학생의 키의 평균을 알고 싶다고 하자. 그 키의 평균을 추정하기 위해서 뽑힌 5명의 키의 평균을 가지고 추정을 하는데, 이 때 뽑힌 5명의 평균이 **표본평균**인 것이다.

그러면 신뢰도 95%로 추정한다는 것은 무엇을 의미하는가? 그에 대해 자세히 설명하면 글이 길어지니, 핵심이 되는 식을 통해서 효율적으로 살펴보도록 하자.

$$P(\ |\ \overline{X}-m\ |<k\frac{\sigma}{\sqrt{n}})=0.95$$

이 식이 표본평균을 구하는 가장 핵심이 되는 식이다. 이 말은 표본평균과 모평균의 차이가 $k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$보다 작을 가능성이 $\frac{\alpha}{100}$라는 것을 의미한다. 절댓값을 정리하면

$$P(\overline{X}\ -k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ \ <\ \ m\ \ <\ \ \overline{X}\ +k\frac{\sigma}{\sqrt{n}})=\frac{\alpha}{100}$$

이 식이 나오고, 이것이 바로 모평균을 추정하는 식이다.

이 유도과정을 확인하면, 문제에서 제시한 $P(0\leqq Z\leqq a)=0.475$를 어떻게 써야 할지를 알 수 있다.
$P(0\leqq Z\leqq a)=0.475$는 $P(|Z|\leqq a)=0.95$를 의미하므로, 이때의 a가 신뢰도 95%로 모평균을 추정할 때의 k가 되는 것이다. 그러므로 모평균의 신뢰구간은 $\left[\overline{X}-a\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{X}+a\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$가 된다.

3. 신뢰구간

신뢰구간과 다른 요소와의 관계는 논리적으로 생각하면 수식을 외우지 않고도 확인할 수 있다. 우리가 표본을 뽑는 것은 모평균을 추정하기 위한 것인데, 만약 표본을 뽑아 놨더니 "학급의 키 평균은 0cm부터 500cm 사이에 있다" 라는 결과가 나온다면 이는 사실이겠지만 아무짝에도 쓸모없는 결과일 것이다. 따라서 신뢰도가 높아지면 높아질수록 신뢰구간은 커질 것이다.

표본은 아무래도 표본의 수가 증가하면 증가할수록 더 정확한 데이터가 될 것이다. 그러면 표본의 수가 줄어들면 덜 정확한 데이터가 될 것이므로, 신뢰구간은 커질 것이다. 즉 ,신뢰도가 커질수록 신뢰구간은 (**커지** / 작아지) 고, n이 작아질수록 신뢰구간은 (**커진** / 작아진) 다.

꼼꼼한 문제풀이

어려운 이야기를 꽤 길게 쓴 이유는 이 문제가 평소에 잘 묻지 않던 모평균의 추정에 대한 개념을 다루고 있기 때문이다. 문제를 읽어보고 주된 포인트를 정리하면 다음과 같다.

어느 공장에서 생산하는 제품의 무게는 모평균이 m, 모표준편차가 $\frac{1}{2}$인 정규분포를 따른다고 한다.

→ $N\left(m, \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$

이 공장에서 생산한 제품 중에서 25개를 임의추출하여

→ $n=25$

여기까지는 보통 통계 문제에서 쉽게 확인할 수 있는 내용들이다. 하지만 다음 내용은 보통 보던 문제와는 조금 다르다.

신뢰도 95%로 추정한 모평균 m에 대한 신뢰구간이 $[a, b]$일 때, $\mathrm{P}(|Z| \leq c)=0.95$를 만족시키는 c를 a, b로 나타낸 것은? (단, 확률변수 Z는 표준정규분포를 따른다.)

보통 $\mathrm{P}(|Z| \leq 1.96)=0.95$을 주고, 모평균을 구하라는 문제가 나오는데, 이 문제는 그게 반대가 되었다. 신뢰구간을 문자로 주고, 1.96에 해당하는 값을 그 **문자로 나타내도록 하고 있는 것**이다.

그래서 이 문제를 풀기 위해서는 표본평균으로부터 모평균을 유도하는 과정이 어떤 식에서 나왔는지를 알고 있어야 한다. 그렇지 않고 $\overline{X}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \overline{X}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 만 외우고 있으면 이 문제를 풀 수가 없다.

앞에서 $P(\ |\ \overline{X}-m\ |<k\frac{\sigma}{\sqrt{n}})=0.95$는 표본평균과 모평균의 차이가 $k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$보다 작을 가능성이 $\frac{\alpha}{100}$라는 것을 의미한다고 하였고, 이 식으로부터 $P(\overline{X}-k\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < m < \overline{X}+k\frac{\sigma}{\sqrt{n}})=\frac{\alpha}{100}$라는 식을 유도하여 신뢰구간을 구하는 것이다.

같은 내용을 이 문제에 적용해 보도록 하자. 이 문제에서 c는 k에 해당한다. 그리고 이를 통해서 구해진 모평균의 신뢰도 95%의 신뢰구간은 $\left[\overline{X}-k\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{X}+k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$이고, 이는 $[a, b]$에 해당한다.

따라서 $b-a=2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=2c\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$이 되는 것이며, 이 때 $n=25$, $\sigma=\frac{1}{2}$이므로, $b-a=\frac{c}{5}$, 따라서 $c=5(b-a)$이다.

9월 모의고사 21번 문항 분석

21. 좌표평면에서 두 함수

$$f(x)=6x^3-x, \quad g(x)=|x-a|$$

의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 모든 실수 a의 값의 합은? [4점]

① $-\frac{11}{18}$　② $-\frac{5}{9}$　③ $-\frac{1}{2}$　④ $-\frac{4}{9}$　⑤ $-\frac{7}{18}$

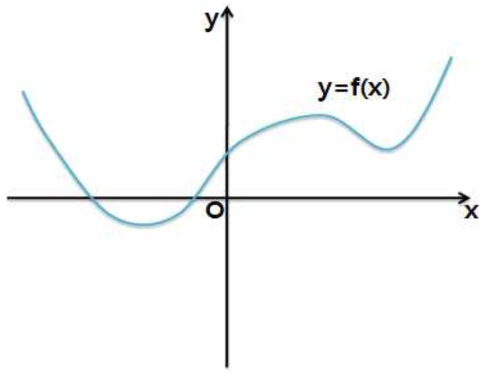
이 문제는 미적분 유형 중에서 가장 어려웠다고 생각되는 문제이다. 방정식과 미분 문제는 그래프를 정확히 해석할 수 있어야 하므로 어려운 편인데, 이 문제 역시 그래프를 심층적으로 이해할 수 있어야 했던 문제로 정형화된 유형에만 익숙해져 온 학생이라면 해결하기 쉽지 않을 수 있다. 이 문제를 통해서 미분법의 주요 내용들을 다시 한 번 확인하고 그래프 문제를 전반적으로 다시 다뤄 볼 필요가 있을 것 같다.

Warming Up

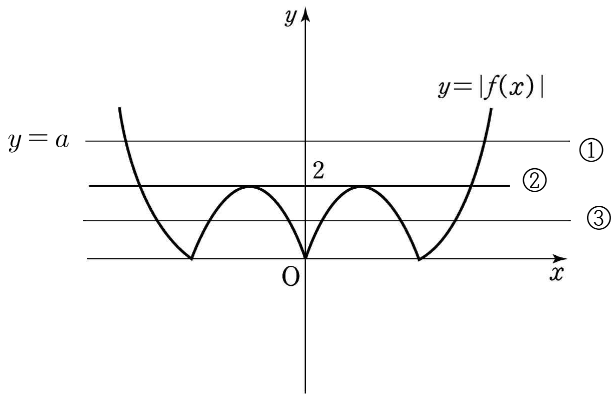
이 문제는 그래프를 자유자재로 다룰 수 있어야 풀 수 있는 문제이기 때문에 그래프에 대한 기본적인 내용들을 다시 한 번 점검해 볼 필요가 있을 것 같다.

1. $y=f(x)$의 그래프가 아래와 같다.

이 그래프를 이용하여, (1) $y=|f(x)|$와 (2) $y=f(|x|)$의 그래프를 그리시오.



2. 오른쪽 그래프를 이용하여 , $|f(x)|=1$, $|f(x)|=2$, $|f(x)|=3$의 해의 개수를 구하고, 왜 그렇게 생각하였는지 ①, ②, ③ 중에 하나로 답하시오.



개념 재확인

Warming Up 문제는 어렵지 않지만, 중요한 내용을 담고 있기 때문에 천천히, 차분히, 세심하게 읽어 보도록 하자.

1. 절댓값 기호가 들어간 함수의 그래프 그리기

고1 때 해봤겠지만, 할 때마다 헷갈리는 내용 중에 하나이다. 이번에 절댓값 기호가 들어간 함수의 그래프를 그리는 것이 나왔으므로, 복습해 보도록 하자.

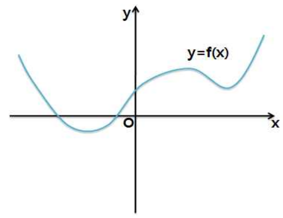
절댓값 기호가 들어간 함수의 그래프 그리기

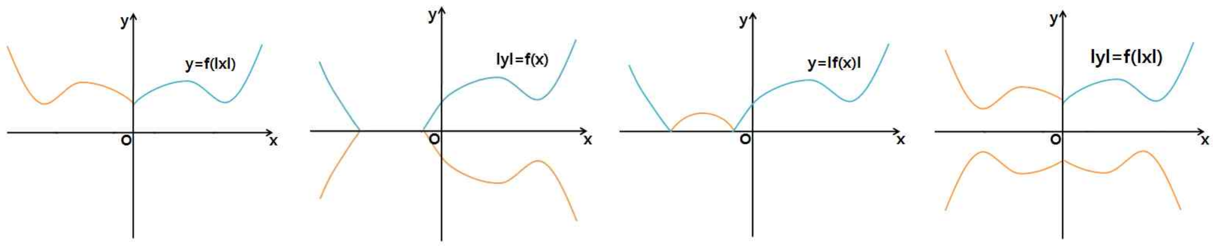
① $y=f(|x|)$ ➡ $x\geq 0$인 $y=f(x)$를 그린 후 y축에 대하여 대칭으로 그린다.

② $|y|=f(x)$ ➡ $y\geq 0$인 $y=f(x)$를 그린 후 x축에 대하여 대칭으로 그린다.

③ $y=|f(x)|$ ➡ x축 아래 부분을 접어 올린다.

④ $|y|=f(|x|)$ ➡ 제1사분면을 그린 후 나머지 사분면은 제1사분면을 대칭이동하여 그린다.





특히 ③, ④에 대해서 알아 두는 것이 좋다. ③번은 수능에도 자주 나오는 그래프 그리는 방법이며, 함수에 절댓값이 씌워지면 이것저것 고려할 것이 많아져서 어려워지기 때문에 그래프 그리는 법은 반드시 알아야 한다. ④번은 정사각형이나 마름모 같은 도형을 그려줄 때 가끔 사용되기 때문에 알아 두는 것이 좋다.

절댓값 기호를 푸는 원칙은 항상 절**댓값 기호 안이 0보다 크거나 같은지, 0보다 작은지를 따지는 것**부터 시작된다. (0은 대부분이 경우 어느 쪽에 붙여도 큰 문제는 없다) 마찬가지로 절댓값 기호가 붙은 함수의 그래프를 그릴 때도, 절댓값 기호 안이 0이 되는 지점을 반드시 찾아 주어야 한다.

이런 방식으로 그래프를 그릴 때 중요한 것은 $y=f(|x|)$의 경우, 모든 x에 절댓값이 붙은 것으로 $y=f(x)$의 그래프를 그린 후에 한번에 대칭이동 시키는 식으로 그릴 수 있지만, $y=x^2+|x|+1$과 같이, 절댓값 기호가 일부 x에만 붙어 있는 경우는 $x\geq 0$, $x<0$으로 경우를 쪼개서 그려 주어야 한다는 사실을 잊지 말자.

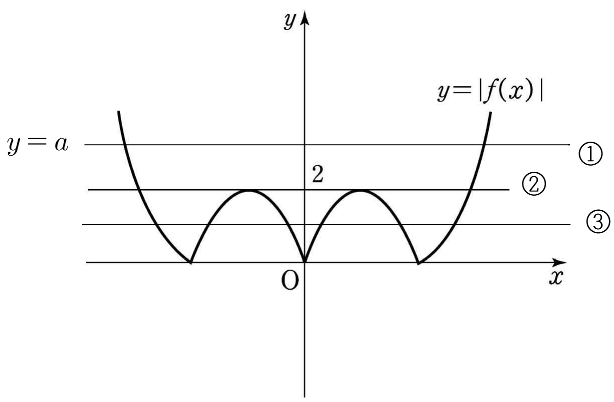
2. 방정식과 그래프

절댓값 기호가 그래프와 연관하여 나오는 문제는 대부분이 방정식과도 문제가 연관된 경우가 많다. 우리는 여기서 방정식과 그래프를 연결하는 중요한 명제 하나를 알고 가야 한다.

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 점 $(a,\ b)$에서 만난다. $\Leftrightarrow$ $f(a)=g(a)=b$

그래프		방정식
$y=f(x)$, $y=g(x)$	➡	$f(x)=g(x)$
두 곡선이 점 A에서 만난다. 두 곡선의 교점의 개수가 n개이다.		점 A의 x좌표가 방정식의 해이다. 방정식을 만족하는 실근의 개수는 n이다.

웬만한 고난도 문제에서는 빠지지 않고 등장하는 관계이며, 이 내용을 모르면 손을 댈 수가 없는 문제가 매우 많다.



이 그래프를 확인해 보자. 이 그래프는 많은 것을 알려 주고 있다. (x축에 평행한 직선이 여러 개인 것은 $y=a$를 **이동**시키면서 생각할 수 있다는 것을 보여준다.)

$y=|f(x)|$의 그래프와 $y=a$의 그래프의 교점의 개수는 a의 값에 따라서 달라지고 있다. 문자가 여러 개 나와서 헷갈릴 수 있으니 차분히 생각해 보아야 한다. ①은 a가 2보다 큰 경우를 나타내고 있다. 이때 $y=|f(x)|$와 $y=a$의 그래프는 두 점에서 만나며, $|f(x)|=a$의 해의 개수는 2개가 된다. $a=2$인 경우는 ②번이며, 이 경우는 접하고 있기 때문에 방정식이 해의 개수는 4개이며. ③의 경우는 $0<a<2$인 경우로, 6개의 점에서 만나고 있기 때문에 해의 개수가 6개가 된다.

이렇게 a의 값에 따라서 방정식의 해의 개수가 변한다. a의 값에 따라서 그래프가 이동하기 때문에, a는 대부분 그래프를 그릴 수 있는 중요한 점들이 된다. **직선이라면 y절편이나 기울기가 될 수 있고, 원이라면 중심** 등이 될 수가 있을 것이다. 이 때, **해의 개수가 변하는 점들은 문제에서 중요한 점이 될 것**이다. 이 점들은 주로 **접점**이 되는 경우가 많다, 문제에서 "이 방정식의 해의 개수를 $f(a)$라고 정의할 때" 라고 해의 개수를 함수로 정의한다면, 반드시 이 점들을 확인할 필요가 있다.

이제 문제풀이로 가 보도록 하자.

꼼꼼한 문제풀이

문제에서 묻는 것은 아래와 같다.

① $f(x)=6x^3-x,\quad g(x)=\vert x-a\vert$ 의 그래프가 ② 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 ③ 모든 실수 a의 값의 합

그래프가 '서로 다른 두 점'에서 만난다는 것은 $6x^3-x=|x-a|$의 해가 2개라는 것으로도 생각할 수 있다. 그러면 우리는 문제풀이를 위한 두 가지 전략을 세울 수 있을 것이다.

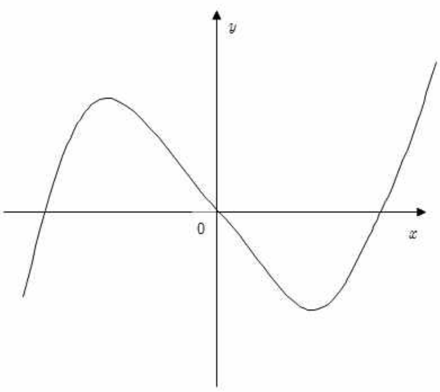
1. 그래프를 그리고, a를 바꾸어 가면서 교점의 개수를 확인하는 방법
2. 방정식을 세우고, 절댓값 기호를 풀고 방정식의 해의 개수를 조사하는 방법

절댓값 기호가 있는 문제에서는 1번의 방법이 효과적인 경우가 많기 때문에, 1번 방법으로 풀어 볼 것이다.

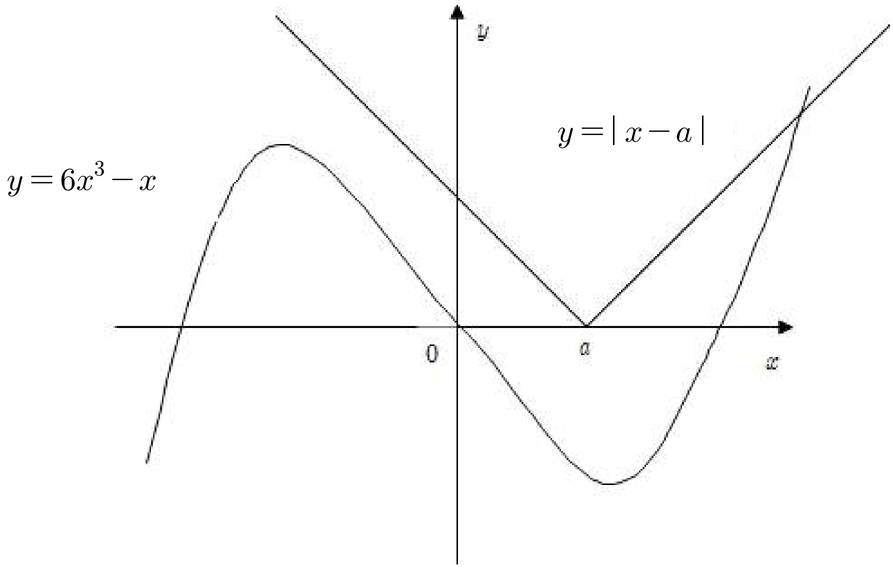
>> 그래프를 이용한 풀이

그래프를 이용한 풀이는 **"해의 개수"를 확인할 때 매우 유용**하다. 많은 경우 우리는 그래프의 정확한 해를 구하지 못하고 해의 개수만 구할 수 있다. 이를테면 $x=\log_2 x$ 같은 방정식에서 우리는 고등학교 과정에서 해를 구할 수 없다. 그렇기 때문에 그래프를 그리고 해를 구하는 것이다. 그래프를 그리는 경우, 정의역이나 공역에 범위가 있는 것도 쉽게 고려할 수 있어서 매우 편리하다.

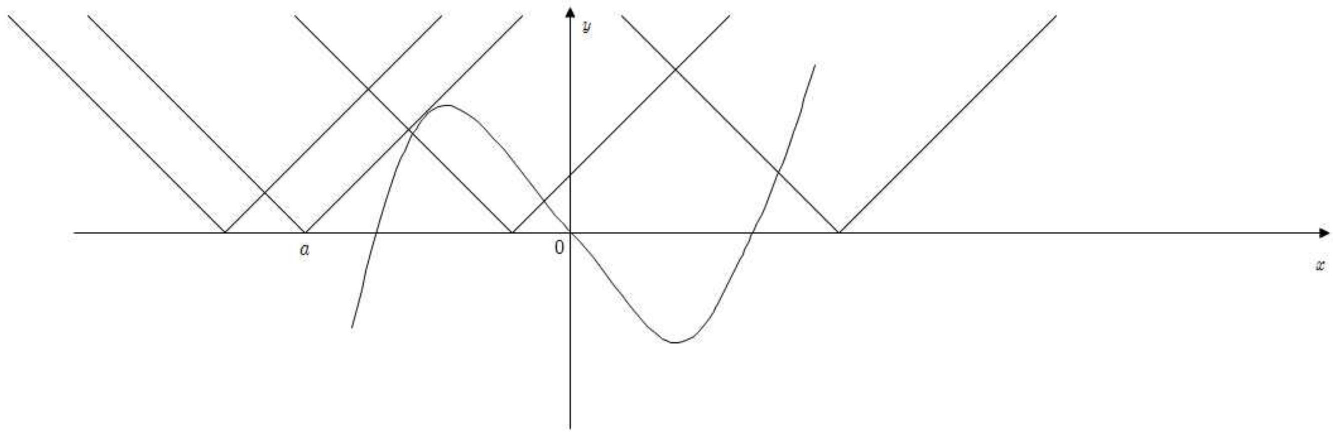
그러면 먼저 $f(x)=6x^3-x$의 그래프를 그려 보도록 하자. 극점을 구하기 전에 간단히 식을 인수분해하면 $f(x)=x(6x^2-1)$로, $x=0,\ x=\pm\sqrt{\dfrac{1}{6}}$ 으로 x축과 만나는 세 개의 점을 쉽게 찾을 수 있기 때문에, 이를 통해서 그래프의 개형을 그리고, 그 다음에 필요에 따라서 극대점이나 극소점을 찾는 것이 좋을 것 같다. 물론 문제에 따라서 x축과의 교점을 찾지 않고 바로 극점을 구해서 가는 경우도 있는데, 이 경우 교점을 찾는 것은 그 점이 의미가 있어서기보다는 **그래프가 대략적으로 어떻게 생겼는지를 확인하기 위해서**이다. 그래프는 오른쪽처럼 생겼으며, 교점은 표시하지 않았고, 원점은 표시했다.



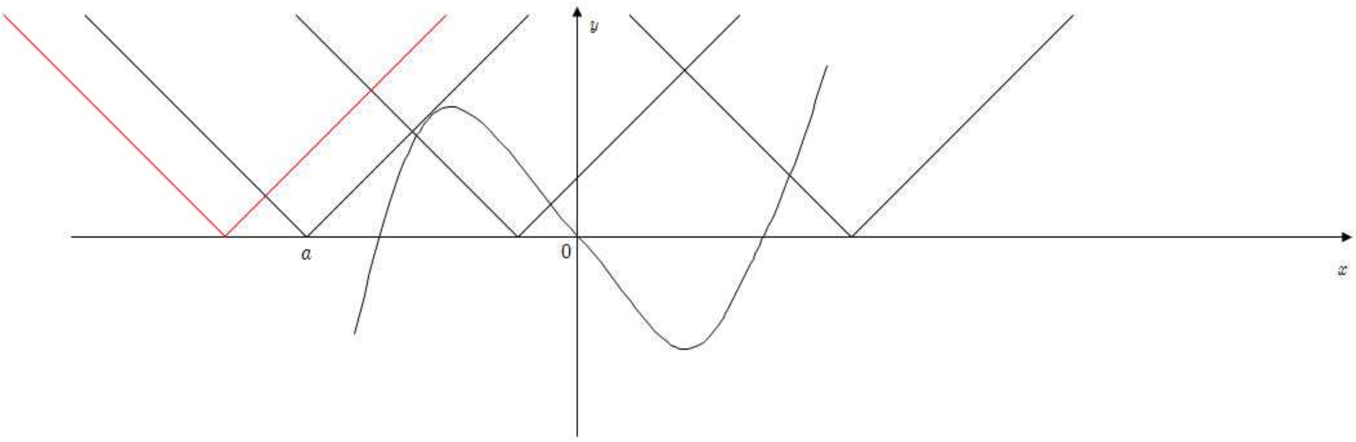
개형을 찾은 다음에, $g(x)=|x-a|$의 그래프를 그려 보도록 하자. 앞에서 절댓값 기호가 있는 그래프를 그리는 방법을 소개했는데, $y=|x-a|$와 같은 경우는 $x=a$를 기준으로 그래프가 꺾인 쐐기 모양의 형태라고 개형을 알아 두는 것이 좋다. 앞에서 그린 $f(x)=x(6x^2-1)$의 개형과 함께 표시하면 아래와 같다.

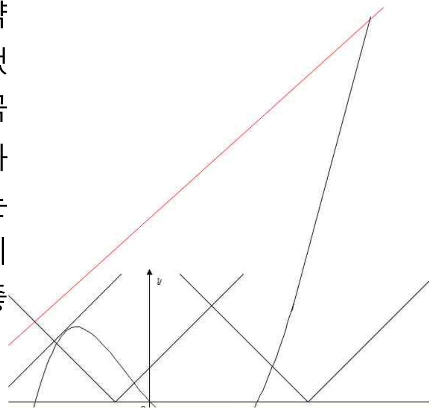


그래프를 확인하였으니 a를 바꾸어 가면서 교점의 개수를 확인해 보도록 하자. **이 때 주의할 것은** $y=6x^3-1$ **은 곡선이기 때문에, 직선과 곡선의 접점에 대해서도 생각해 보아야 한다는 점이다.** 그래프를 간단히 그리는 것은 좋지만, 반드시 의미 있는 점들은 제대로 나타낼 수 있도록 생각을 하고 그려야 하는 것이 중요하다.



그래프 개형은 사람마다 다르게 그릴 수 있지만, 중요한 것은 개형은 “이해를 돕기 위한 보조자료” 이며, 우리는 개형에서 의미를 갖는 점을 항상 생각하고 있어야 한다. a를 이동시키다 보면 위 경우처럼 교점이 바뀌는 것을 볼 수 있는데, 이런 문제에 익숙하지 않은 학생이라면 여기서 심각한 실수를 할 수 있다.





이 상황에서 빨간색 그래프와 곡선의 교점의 개수는 몇 개인가? 여기서 만약 “0개”라고 말했다면, 내가 우려한 그 상황에 해당한다. 개형은 앞에서도 말했지만 이해를 돕기 위한 수단일 뿐이다. 우리는 이 문제에서 나오고 있는 곡선이 $+\infty$, $-\infty$쪽으로 무한히 뻗어나간다는 것을 알아야 한다. 다시 말하면 빨간색의 경우는 오른쪽과 같이 그래프를 “끝까지” 그렸을 때 언젠가는 만나게 된다는 것이다. 이런 의미 없는 그래프를 그리기 위해서 지면을 낭비하는 것은 의미 있는 행동이 아니며, 평소 문제풀이 시 주의를 하는 것이 좋다.

아무튼 다시 위로 돌아가면 빨간색 경우는 그래프가 한 점에 만나는 것을 알 수가 있으며, 바로 그 오른쪽의 접하는 경우부터 두 점에서 만나는 것을 확인할 수 있을 것이다. 이 문제는 단순히 교점 확인 문제가 아니고 a값을 구해서 더해야 하는 문제이므로 우리는 개형을 통해서 $y=|x-a|$의 그래프의 오른쪽 부분, 즉 $y=x-a$가 곡선과 접하는 접점을 구하고, 이를 통해서 a를 구하는 식으로 문제를 풀어가야 한다는 것을 알 수 있었다.

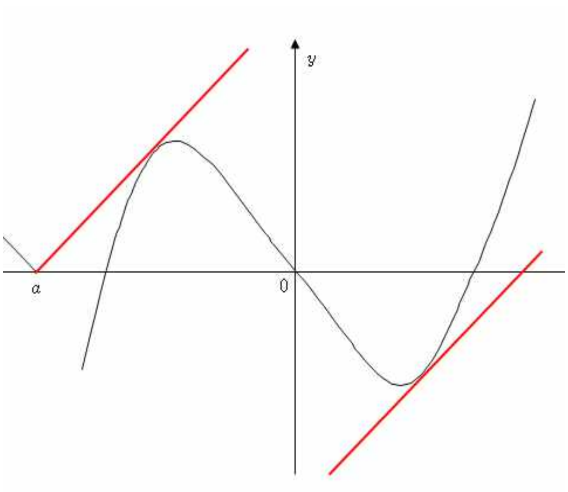
그러면 접점을 구해야 하는데, $y=x-a$의 그래프에서 직선의 기울기는 1이므로, $y=6x^3-x$을 미분한 다음, 기울기가 1이 되는 점을 찾으면 될 것이다.

따라서 미분을 하면 $y=18x^2-1$이 나오며 이 값이 1이 되어야 하므로

$$18x^2-1=1 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x=\pm\frac{1}{3}$$

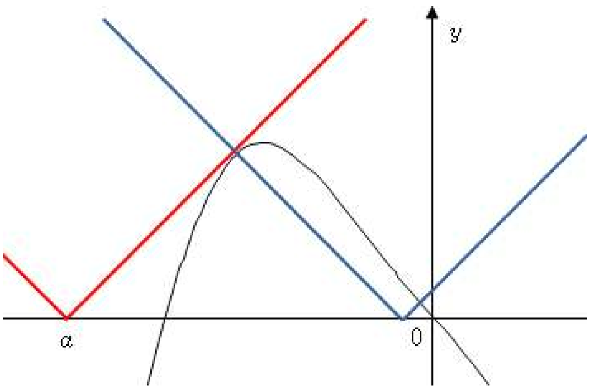
으로 접점의 x좌표는 $\pm\frac{1}{3}$이라는 것을 알 수 있다.

여기서 의문이 들 것이다. 앞에서 그린 개형을 보니 접점의 x좌표는 $-\frac{1}{3}$이 되어야 할 것인데, 왜 우리는 $+\frac{1}{3}$이라는 것까지 얻었을까?



그 이유는 왼쪽 그림을 보면서 생각하면 알 수 있다. 우리가 접점을 구할 때 $f'(x)=1$로, 접선의 기울기가 1인 지점을 모두 찾았다. 이 때 우리가 생각하는 함수가 절댓값 기호가 있는 함수라는 사실은 고려되지 않았다. 그렇기 때문에 당연히 답으로 나오는 것은 왼쪽처럼 두 가지가 나오는 것이며 그 중에서 우리가 취해야 할 것은 음수인 $x=-\frac{1}{3}$이다. 이것은 a의 값이 아니고 교점의 x좌표이기 때문에, $f(x)=6x^3-x$에 대입하여 교점의 좌표인 $\left(-\frac{1}{3},\ \frac{1}{9}\right)$를 구하고, 이 점을 $y=|x-a|$의 그래프가 지나기 때문에 대입하여 a를 구하면

$$\frac{1}{9}=\left|-\frac{1}{3}-a\right| \Rightarrow \frac{1}{9}=\left|\frac{1}{3}+a\right| \Rightarrow \frac{1}{3}+a=\pm\frac{1}{9} \Rightarrow a=-\frac{4}{9},\ -\frac{2}{9}$$



가 되는 것이다. 이것도 값이 2개가 나오는데, 그것은 왼쪽 그림처럼 빨간색과 파란색의 두 가지 경우가 나오기 때문으로 우리는 빨간색 경우만 생각해야 하기 때문에 $a=-\frac{4}{9}$가 옳은 a이다.

이 문제는 출제자가 의도한 것인지는 몰라도, 여기까지만 구해서 $a=-\frac{4}{9}$라고 답을 골라도 맞게 된다. 약간 이상하게 생각했을 사람들은 a를 모두 더하라고 문제에서 나왔는데, 막상 구해진 답은 1개 뿐이라는 게 이상할 수 있었을 것이다. 사실 a는 2개가 나오며, 답이 $a=-\frac{4}{9}$인 것은 나머지 $a=0$이었기 때문이다. $a=0$인 점은 개형만 생각해서는 쉽게 생각하기가 어려운데 어떻게 구해야 하는 것일까?

이 답은 지금까지의 풀이과정을 다시 생각해보면 구할 수 있다. 우리가 지금까지 구한 것은 $y=|x-a|$와 곡선의 **"오른쪽" 부분이 접하는 경우**다. 하지만, 그것은 대충 개형으로 그린 것으로부터 생각한 것이기 때문에 우리는 **"왼쪽" 부분**에 대해서도 생각해 볼 필요가 있겠다. 즉, $f'(x)=-1$인 경우도 생각을 해 보아야 하는 것이다.

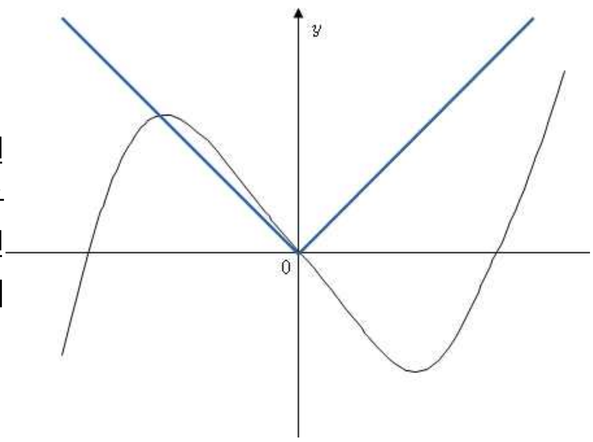
사실 시험장에서 여기까지 생각했어야 올바른 풀이다. 답만 맞았다고 좋아할 것이 아니다.

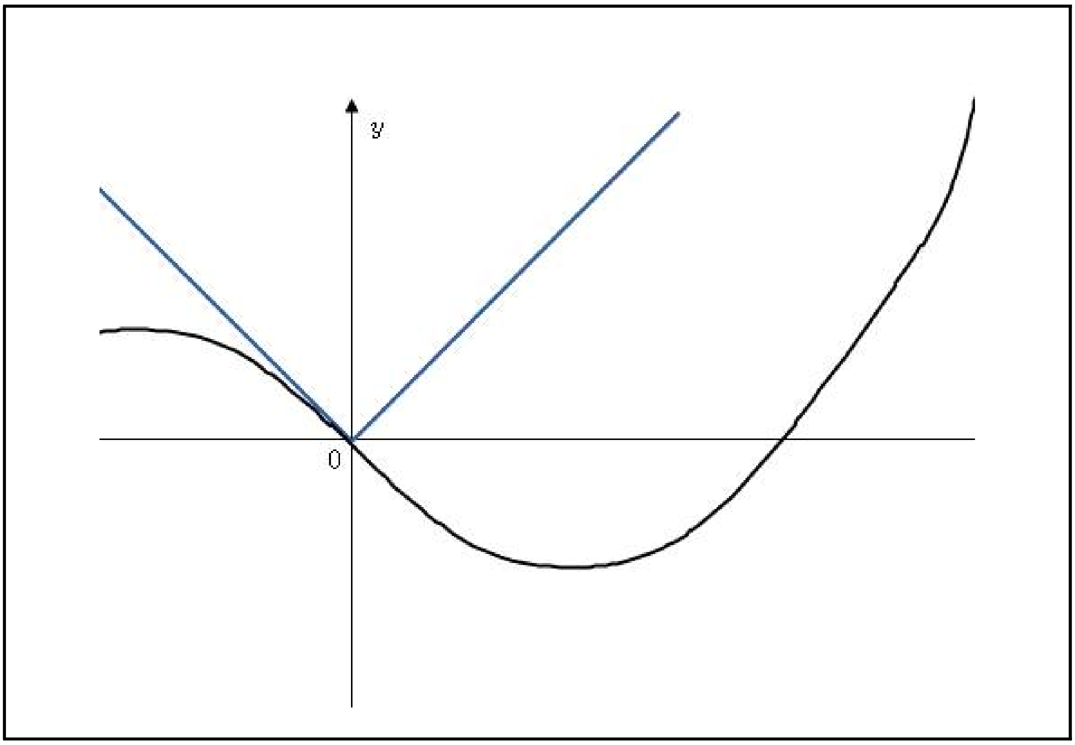
다시 문제로 돌아가 $f'(x)=-1$인 점을 확인해 보도록 하자.

$18x^2-1=-1$

$\Rightarrow\ x=0$

이 경우 $x=0$이 나오는데, 그래프를 그려 보면 오른쪽처럼 뭔가 '접하지 않는 것'처럼 보이는 그래프가 나오는데, 그것은 우리가 **그래프의 개형**을 그렸기 때문이고, 정확히 그래프를 그린다면 제대로 된 그래프는 실제로 아래 그래프와 같이 $x=0$에서만 미세하게 접하는 경우처럼 될 것이다.





따라서 접점의 x좌표는 0, 접점을 구하면 $(0,\ 0)$이고, 이를 $y=|x-a|$에 대입하면 $a=0$이 나온다.

아마 수능에서는 이런 미세한 내용이 답을 결정하는 중요한 선지 중 하나로 나올 수 있을 것 같아 보인다. 개형에서는 확인하기가 어렵지만, **개형을 통해서 답을 구하는 과정을 생각하고, 그것을 식으로 정확히 풀면서 개형으로 확인하기 어려운 점까지 식으로 구하는 것**이 이 문제 풀이의 핵심이라고 할 수 있다.

답 : ④ $-\dfrac{4}{9}$

* 자연계열의 학생이라면 $(0,\ 0)$이 변곡점이라는 것을 알 수 있을 것이다. 즉, $f''(x)=36x$로 $x=0$에서 그래프의 볼록성이 바뀌므로 $x<0$에서는 위로 볼록, $x>0$에서는 아래로 볼록이 되어서 위 그림처럼 접하게 되는 것을 좀 더 쉽게 확인할 수 있을 것이다.

9월 모의고사 28번 문항 분석

28. 첫째항이 10인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n < a_{n+1}, \quad \sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)^2 = 2\left(1-\frac{1}{9^n}\right)$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구하시오. [4점]

식이 복잡해 보이지만, 시그마와 일반항 사이의 관계를 파악하여 식을 구해야 한다는 사실을 파악하고, 점화식을 능숙하게 다룰 수 있다면 푸는 데 큰 어려움을 요구하는 문제는 아니었다. 4점이라 어렵게 느껴졌을 수 있지만, 수열을 다루는 방법을 알고 있다면 생각보다 쉽게 풀릴 수 있는 문제였다.

Warming Up

수열 문제가 나왔는데, 간단히 수열의 성질과 점화식에 대해서 기출문제로 복습을 하고 문제풀이로 들어가도록 하자.

1. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n = n^2 + 2^n$일 때, $a_1 + a_5$의 값은? [2010 평가원 9월]

2. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 3$이고 $a_{n+1} - a_n = 4n - 3$일 때, a_{10}의 값을 구하시오. [2008 평가원 6월]

3. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. (단, $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n < \cdots$이다.)
$a_1 = 1,\ a_2 = 3, (S_{n+1} - S_{n-1})^2 = 4a_n a_{n+1} + 4\,(n = 2, 3, 4, \cdots)$일 때, a_{20}의 값을 구하여라. [2005 9월 평가원]

기출 문제 중에서 이 문제와 관련있는 문제들을 모아 봤다. 모두 수열과 점화식의 기본 내용들을 이해할 수 있어야 풀 수 있는 문제이니만큼 풀어 보고 넘어가도록 하자.

개념 재확인

$\sum$는 무서운 기호이다. 다른 기호보다 덩치도 커서 보는 순간 위압감을 주는데 $\int$와 양대산맥을 이루는 '수학 울렁증 유발인자'라고 할 수 있다.

그러나 고등학교 과정에서는 시그마를 정확히 이해하고, 몇 가지 공식만 외워 두면 되기 때문에, 너무 겁 먹을 필요는 없는 기호이다. $\int$도 생각보다 착한 기호이지만.

기출문제 수가 많은데, 하나하나 풀어 볼 가치가 있는 문제들이다.

1. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n = n^2 + 2^n$일 때, $a_1 + a_5$의 값은?

간단한 문제이지만, 이 문제에서 실수하면 안 되는 것이 있어서 하나 정리하고 넘어가고자 한다.

합과 일반항의 관계
$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$이라 할 때,
$a_1 = S_1$
$a_n = S_n - S_{n-1}$ (단, n은 2 이상의 자연수)

합에서 일반항을 구할 때, 주의할 점은 초항을 구할 때는 S_n에 바로 대입해야 한다는 것이다. $S_n - S_{n-1}$을 통해서 구할 때, $n=1$을 대입하면 $S_1 - S_0$이라는 말이 되지 않는 연산을 하는 것이므로 그런 것이다.

이 문제는 간단하지만, 이 내용을 간과하면 쉽게 틀릴 수 있는 문제이다. 올바른 풀이는 다음과 같다.

$a_1 = S_1$이므로 $a_1 = 1 + 2 = 3$이다.
$a_5 = S_5 - S_4$이므로 $a_5 = (25+32) - (16+16) = 25$이다.
$\therefore\ a_1 + a_5 = 3 + 25 = 28$ **정답**

만약 이렇게 풀면 틀린 답이 나오게 된다.

$S_n - S_{n-1} = (n^2 + 2^n) - \{(n-1)^2 + 2^{n-1}\} = 2n - 1 + 2^{n-1} = a_n$이다.
여기에 $n=1$을 대입하면 $a_1 = 2$가 되고, $n=5$를 대입하면 $a_5 = 25$가 나오므로 $a_1 + a_5 = 27$이다.

이것은 $a_1 = S_1$이라는 사실을 간과하고 $S_n - S_{n-1}$에 대입했기 때문에 발생한 결과로, 혹시 이렇게 풀고 있었다면 주의하도록 하자.

2. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1=3$이고 $a_{n+1}-a_n=4n-3$일 때, a_{10}의 값을 구하시오.

간단한 계차수열 문제로, 계차수열의 점화식 표현을 다시 한 번 떠올리라는 의미에서 가져와 봤다.

$a_{n+1}-a_n=4n-3$은 $a_{n+1}=a_n+f(n)$에서 $f(n)=4n-3$인 꼴이다.
즉, $a_{n+1}-a_n=4n-3$이 수열 $\{a_n\}$의 계차이다.

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)=3+\sum_{k=1}^{n-1}(4k-3)=3+4\cdot\frac{(n-1)n}{2}-3(n-1)=2n^2-5n+6$$

$\therefore\ a_{10}=2\cdot10^2-5\cdot10+6=156$

3. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. (단, $a_1<a_2<a_3<\cdots<a_n<\cdots$이다.)
$a_1=1,\ a_2=3, (S_{n+1}-S_{n-1})^2=4a_n a_{n+1}+4\,(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$일 때, a_{20}의 값을 구하여라.

시그마와 관련이 있는 S_n이 나오고, $a_1<a_2<\cdots<a_n$이라는 표현이 나와서 확인해 볼 문제이다. $S_{n+1}-S_{n-1}=a_{n+1}+a_n$이라는 사실을 캐치하고 식을 정리하면 그리 어렵지는 않은 문제이다.

$S_{n-1}+(a_n+a_{n+1})=S_{n+1}$을 이용한다.

$(S_{n+1}-S_{n-1})^2=4a_n a_{n+1}+4$

$(a_n+a_{n+1})^2=4a_na_{n+1}+4$

${a_n}^2+2a_na_{n+1}+{a_{n+1}}^2=4a_na_{n+1}+4$

${a_{n+1}}^2-2a_{n+1}a_n+{a_n}^2=4$

$(a_{n+1}-a_n)^2=4$

$\therefore\ a_{n+1}-a_n=2\ (\because\ a_1<a_2<a_3<\cdots<a_n<\cdots)$

$a_{n+1}-a_n=2$는 수열 $\{a_n\}$이 이웃하는 두 항의 차이가 2로 항상 일정한 등차수열을 나타내므로

$a_n=1+2(n-1)$

$\therefore\ a_{20}=1+2(20-1)=39$

이제 기출문제 풀이로 들어가 보도록 하자.

꼼꼼한 문제풀이

문제에 있는 표현들을 다시 한 번 확인해 보도록 하자.

① 첫째항이 10인 수열 $\{a_n\}$

말 그대로 $a_1 = 10$이라는 것이다. 나중에 쓰일 것이라 생각할 수 있다.

② $a_n < a_{n+1}$

수열이 점점 커지고 있다는 것임을 보여주는데, 나중에 활용될 수 있을 것이다.

③ $\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)^2 = 2\left(1-\frac{1}{9^n}\right)$

문제풀이의 핵심이 되는 식이다. 이 식을 어떻게 다루느냐에 따라서 4점을 얻을 수 있는지 없는지가 결정될 것이다.

먼저 알아두어야 할 것은 $a_n = S_n - S_{n-1}(n \geqq 2)$를 적용하는 S_n 은 $\sum_{k=1}^{n} a_n$와 같다는 것이다.

이 문제에서는 $\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)^2 = 2\left(1-\frac{1}{9^n}\right)$이라는 복잡한 표현이 등장하고 있는데, 여기서 $\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)^2$를 어떻게 처리할지를 생각해 보자.

언뜻 $(a_{k+1}-a_k)^2$을 전개해 볼까 생각할 수 있지만, 그 다음 아무것도 할 수 없다. $\sum_{k=1}^{n} k$ 등 시그마에 대한 공식이 존재하지만 이 문제에서는 일반항을 알 수가 없기 때문에 무의미한 전개이다.

여기서 $(a_{k+1}-a_k)^2 = b_k$으로 생각하는 것이 필요하다. 이렇게 치환을 하면 $\sum_{k=1}^{n} b_k = S_n = 2\left(1-\frac{1}{9^n}\right)$라는 관계가 성립되어 $b_n = S_n - S_{n-1}(n \geqq 2)$을 이용할 수 있기 때문이다. 수열에 익숙한 사람은 치환을 하지 않고도, 이 생각을 할 수 있을 것이다.

$S_n - S_{n-1}$을 이용하여 시그마를 제거하면 $b_n = (a_{n+1}-a_n)^2 = 2\left(1-\frac{1}{9^n}\right) - 2\left(1-\frac{1}{9^{n-1}}\right)$이라는 공식이 도출되며, 우변을 계산하면

$(a_{n+1}-a_n)^2 = -\frac{2}{9^n} + \frac{2}{9^{n-1}} = \frac{2}{9^n}(-1+9) = \frac{16}{9^n}$ 이 된다.

16과 9는 모두 자연수의 제곱이므로, 좌변의 제곱을 풀기 좋은 식이 된다. 수능 문제는 이처럼 계산을 간편하게 만들어 주는 경우가 많다.

앞에서 $a_n < a_{n+1}$임을 확인했기 때문에, $a_{n+1} - a_n > 0$이 되어, $a_{n+1} - a_n = \dfrac{4}{3^n}$이 된다.

이제부터는 간단한 계차수열이다. 계차는 초항이 $\dfrac{4}{3}$이고 공비가 $\dfrac{1}{3}$인 등차수열로, 일반항을 구하는 데 문제가 없다.

계차수열의 해법은 다음과 같다.

계차수열의 해법

$$
\begin{array}{llllllll}
\text{원수열 } \{a_n\}: & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_{n-1} & a_n \quad \cdots \\
\text{계차수열 } \{b_n\}: & b_1 & b_2 & b_3 & & \cdots & b_{n-1} & \cdots \\
 & \| & \| & \| & & & \| &
\end{array}
$$

$\rightarrow a_n = a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + \cdots + (a_n - a_{n-1})$

$= a_1 + (b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{n-1})$

$=$ (원수열의 첫째항) $+$ (계차수열의 제 $(n-1)$항까지의 합)

$= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \ (n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$

경우에 따라서 계차가 일반항을 구하기 힘들면 직접 대입하는 방식을 취하기도 하지만, 대개 계차가 우리가 알고 있는 등차, 등비수열 중 하나인 경우가 많고, 이 문제도 그러하다.

계차수열의 일반항 공식 $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$을 활용하여 a_n을 구해 주자.

$a_n = 10 + \dfrac{\frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{3^{n-1}}\right)}{1 - \frac{1}{3}}$이다. 등비수열의 합 공식을 사용했다는 것을 확인하자.

식을 전개하기 전에 문제에서 $\lim_{n\to\infty} a_n$을 물어봤기 때문에 $\dfrac{1}{3^{n-1}} \to 0$으로 계산해주면 계산이 빨라질 수 있다.

계산하면 $\lim_{n\to\infty} a_n = 10 + 2 = 12$가 된다.

→ 답 : 12

요약

28. ① 첫째항이 10인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

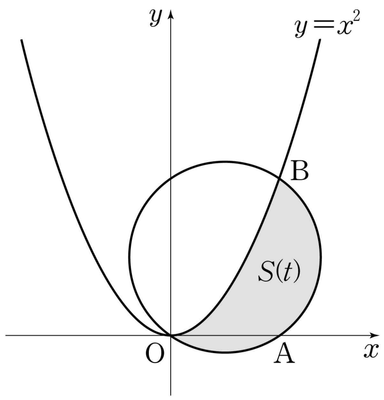
② $a_n < a_{n+1}$, ③ $\sum_{k=1}^{n} (a_{k+1} - a_k)^2 = 2\left(1 - \dfrac{1}{9^n}\right)$

을 만족시킬 때, ④ $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구하시오. [4점]

③에서 합과 일반항의 관계를 활용
→ ② 식을 정리할 때 활용
→ ① 정리한 식이 계차수열의 일반항임을 확인하고 일반항을 구할 때 활용
→ ④ 계산 중간에 극한 계산을 해서 식을 간단히 정리

9월 모의고사 29번 문항 분석

29. 그림과 같이 곡선 $y=x^2$과 양수 t에 대하여 세 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(t,\ 0)$, $\mathrm{B}(t,\ t^2)$을 지나는 원 C가 있다. 원 C의 내부와 부등식 $y \le x^2$이 나타내는 영역의 공통부분의 넓이를 $S(t)$라 할 때, $S'(1)=\dfrac{p\pi+q}{4}$이다.p^2+q^2의 값을 구하시오. (단, p, q는 정수이다.) [4점]



그 동안 거의 기본문제 수준으로 나온 미분과 적분이 모두 사용된 응용문제이다. 과거 가형에서 다뤄진 미적분 수준으로 공부를 해 왔다면 크게 어렵지 않을 문제이지만, 그 동안 쉽게 나온 것에 익숙해졌다면 당황할 수 있는 문제이다. 문제의 핵심만 파악한다면 의외로 쉽게 풀리는 문제이지만 미적분에 익숙하지 않은 응시자라면 상당히 어렵게 느껴질 수 있는 문제였다. 도형의 기본 성질도 이해해야 풀 수 있는 문제였기 때문에, 이번 기회에 원과 삼각형 등 도형의 기본적인 성질을 정리해 두도록 하자.

Warming Up

가물가물하겠지만, 중학교와 고등학교 1학년 때 배웠던 기본적인 도형의 성질을 확인해 보도록 하자.

[1-5] 다음 물음에 답하시오.

1. 삼각형의 외접원의 중심은 외심이다. 직각삼각형에서 외심은 어디에 위치하는가? (   )
2. 반원에 대한 원주각은 몇 도인가? (   )
3. 반지름의 길이가 r, 중심각이 θ(rad)인 부채꼴의 호의 길이는 얼마인가? (   )
4. 반지름의 길이가 r, 중심각이 θ(rad)인 부채꼴의 넓이는 얼마인가? (   )
5. 직각삼각형 ABC에서 $\angle C=90^\circ$ 일 때, 각 변들의 길이 관계는 어떠한가? (   )

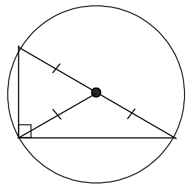
중고등학교 도형은 기본적인 공식들 정도는 알고 있어야 한다.

개념 재확인

중학교를 졸업하는 순간 중학교에서 배웠던 내용들을 모두 포맷한 학생은, 지금 다시 하드디스크 복구를 시작하도록 하자. 중학교 내용을 100% 기억해 낼 필요는 없지만, 아주 핵심이 되는 몇 가지 정리에 대해서는 알고 있어야 한다.

1. 삼각형의 외접원의 중심은 외심이다. 직각삼각형에서 외심은 어디에 위치하는가? **(빗변의 중심)**

모두들 알고 있으리라 믿지만, 그런 기대는 자주 무너지기에 오른쪽처럼 그림까지 첨부했다. 외심을 모를 학생이 많을 것 같아서 친절하게 설명도 해 줬다. (사실 외심은 삼각형의 각 변의 수직이등분선의 교점이지만, 그보다는 외접원의 중심이라는 성질이 더 많이 이용된다.)



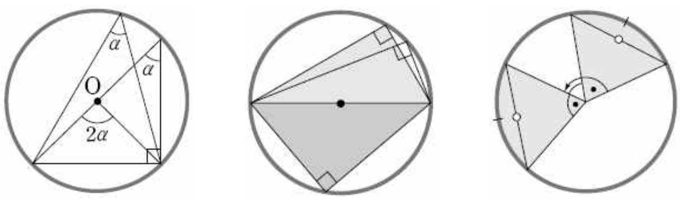
삼각형의 오심에 대해 설명할 수 있는가? 일단 오심이 뭔지는 기억이 나는가? 이 질문에 많은 학생들이 "유리수의 정의를 말해 봐라." 라는 깐깐한 수학 선생님의 질문을 듣고 짓는 표정을 지을 것 같다. **ㄱ-** ← 대략 이런 표정?

오심에 대해서 일일히 설명하지는 않을 것이다. (참고로 오심은 내심, 외심, 무게중심, 수심, 방심인데 호기심이 나면 다시 책을 뒤적여 보자) 오심이 수능에 자주 나오는 편도 아니고 안 그래도 정신없는 학생들에게 멘붕을 안겨줄 필요는 없을 것 같아서.

하지만 외심에 대해서는 알고 있을 필요가 있다. 특히, **직각삼각형의 외심**에 대해 아는 것은 매우매우 중요하다. 직각삼각형은 독특한 삼각형으로 외심이 **빗변의 중심**에 있다. 따라서 직각삼각형의 외접원의 중심을 찾으려면 직각삼각형의 빗변의 중심을 찾으면 될 것이다. 다른 건 몰라도 이 사실은 꼭 알아두도록 하자.

2. 반원에 대한 원주각은 몇 도인가? **(90도)**

원주각이라는 말이 기억나는가? 멘붕하지 말자. 그림을 보면 어렴풋이 기억이 날 테니. 덤으로 원주각의 성질도 첨부한다.

> ① 한 호에 대한 원주각의 크기는 그 호에 대한 중심각의 크기의 $\frac{1}{2}$ 이다.
>
> ② 지름에 대한 원주각의 크기는 $90°$ 이다.
>
> ③ 원에서 한 호에 대한 원주각의 크기는 모두 같다.
>
> 
>

이제 좀 기억이 나는가? 수능에서 이 성질들을 증명할 필요는 없으니 증명은 생략한다. 반원의 중심각은 180도이므로, 그것의 절반인 90도가 원주각의 크기가 된다. 이 내용을 1번과 연관시켜 생각해 보면 좋겠다.

3. 반지름의 길이가 r, 중심각이 θ(rad)인 부채꼴의 호의 길이는 얼마인가? **($r\theta$)**

수능 문제를 풀다 보면 가끔 중요한 공식들이 생각나지 않는 경우가 있는데, 자주 망각의 늪으로 빠지는 공식 중에 하나가 삼각비 공식들이다. 사인법칙·코사인법칙...... 아차 싶은가? 그건 잠깐 모를 수도 있다. 하지만 최소한 부채꼴에 대한 공식은 알아 두도록 하자. 호도법으로 각도를 쓰면 호의 길이는 $r\theta$가 되고, 60분법으로 쓰면 호의 길이는 $2\pi r \times \frac{\theta^{\circ}}{360^{\circ}}$가 된다는 것을 알아 두자. 나형에서는 60분법을 써도 상관없는 경우가 많지만, 호도법을 쓰는 것이 좋다. 호도법이 기억나지 않으면 $\pi = 180^{\circ}$ 라는 공식이라도 기억을 해 두자.

4. 반지름의 길이가 r, 중심각이 θ(rad)인 부채꼴의 넓이는 얼마인가? **($\frac{1}{2}r^2\theta$)**

호의 길이 뿐만 아니라 넓이도 기억해 두어야 한다. 뜬금없이 등장한 $\frac{1}{2}$에 당황했을지도 모르겠지만, 여러분의 교과서에 증명이 잘 되어 있기 때문에, 정신없는 수험생이라면 공식이라도 정확히 알아 두자. 원의 넓이가 πr^2이라는 것을 모르는 학생은 없으리라 믿는다.

5. 직각삼각형 ABC에서 $\angle C = 90^{\circ}$ 일 때, 각 변들의 길이 관계는 어떠한가? ($a^2 + b^2 = c^2$)

다 아는 피타고라스 정리다. 몇 천 년 동안 계속 쓰이는 중요한 정리라는 것은 새삼 말하지 않아도 알 것이라 믿는다. 불친절하게 삼각형을 그려주지 않은 이유는 각 C에 대한 대변을 c로 정의한다는 사실을 상기시켜주기 위함이다.

도형에 대한 중요한 몇 가지 정리들은 해설 말미에 첨부해 두겠다. 참고하기를 바란다.

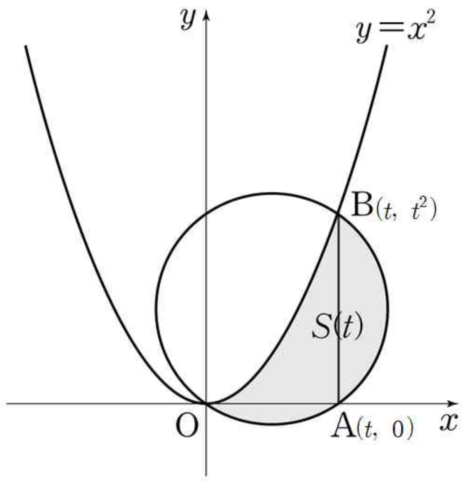
꼼꼼한 문제풀이

지금쯤 눈치챘겠지만 Warming - Up 에서 다룬 문제들은 모두 이 문제를 푸는데 이용되는 것들이다. 괜히 관련 없는 것을 다룰 이유가 없으니까.

어려워 보이는 문제지만 문제를 차근차근 읽으면서 어떻게 접근해야 할 지 생각해 보도록 하자.

그래프 문제가 나오면 먼저 해야 될 작업은 문제에서 주어진 좌표를 그래프에 표시하는 것이다. 별 것 아닌 작업이지만 문제를 풀 때는 많은 도움이 된다.

$\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(t,\ 0)$, $\mathrm{B}(t,\ t^2)$를 그래프에 표시했다. 여기서 주목할 것은 A와 B의 x좌표가 t로 같다는 것이다. **그래서 A와 B를 이으면 y축에 평행한 직선이 되는 것을 확인**할 수 있다. 이것은 문제를 푸는데 매우 중요하게 사용될 것이다.



귀찮아서 좌표를 표시하지 않으면 이 문제에서 핵심이 되는 중요한 내용을 확인하지 못하게 될 수 있다. 좌표를 표시하고 나서 해야 될 것은 문제에서 요구하는 것이 무엇인지를 보는 것이다. 딱 보아하니 그림에서 회색으로 칠해진 부분의 넓이를 구해야 될 것만 같은데, 실제로 그러하다.

원 C의 내부와 부등식 $y \le x^2$이 나타내는 영역의 공통부분의 넓이를 $S(t)$라 할 때,

$$S'(1) = \frac{p\pi + q}{4}$$

이 문제가 어렵게 느껴질 수 있는 이유는, 그 동안 도형에서 넓이에 대한 식을 세워 보는 훈련을 많이 해 보지 못했기 때문일 수 있다. 미통기가 나형으로 들어온 이후의 문제들은 대개 미적분을 단순하게만 다뤘기 때문에 도형에서 응용되는 경우를 많이 확인할 수 없었을 것이다. 이 문제는 도형에서 식을 세우고, 그 값을 미분해야 하는 것까지 포함하기 때문에 미적분에 대한 포괄적인 이해를 요구하고 있는 것이다.

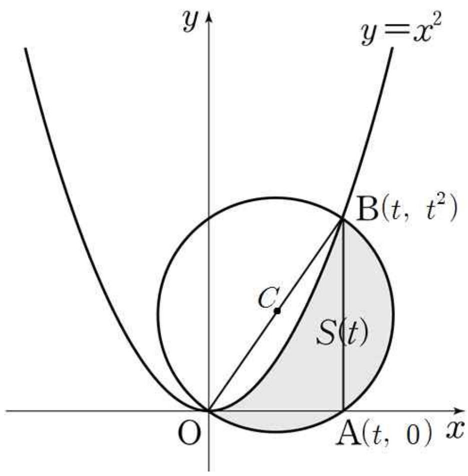
문제에서 구하라는 것은 역시나 회색 부분의 넓이인데, 회색 부분은 "원"과 "이차함수 아래"의 면적의 넓이이다. 여기에서 부등식의 영역 표현이 나오는데, 친절하게 그림으로 설명을 해 두었으니 크게 걱정할 필요는 없을 것 같다.

아무튼 회색 부분의 넓이를 구하기 위해 ① **원의 넓이** ② **이차함수 아래의 넓이** 를 구할 수 있어야 할 것 같다. 원의 넓이를 구하기 위해서 필요한 것은 **"원의 반지름"** 이고, 반지름을 구하려면 **"원의 중심"**을 구해야 할 것이다. 이차함수 아래의 넓이는 **"적분"**을 통해 구할 수 있을 것이다. 그러면 이제부터 넓이를 구해 보자.

먼저 원의 넓이를 구하기 위해서 반지름과 중심을 찾으려고 하는데, 자세히 보니 삼각형 ABO가 원에 내접하고 있다. 다시 말하면 문제의 원은 삼각형 ABO에 외접하고 있다.

그런데, 앞에서 선분 AB가 y축에 평행하다는 사실을 확인했고, x축과 y축은 서로 수직이기 때문에, $\angle OAB = 90^\circ$ 임을 확인할 수 있다. 즉, 문제의 원은 **직각삼각형의 외접원**인 것이다.

그러면 중심을 쉽게 구할 수 있다. **직각삼각형의 외접원의 중심은 "빗변의 중점"**이기 때문에.

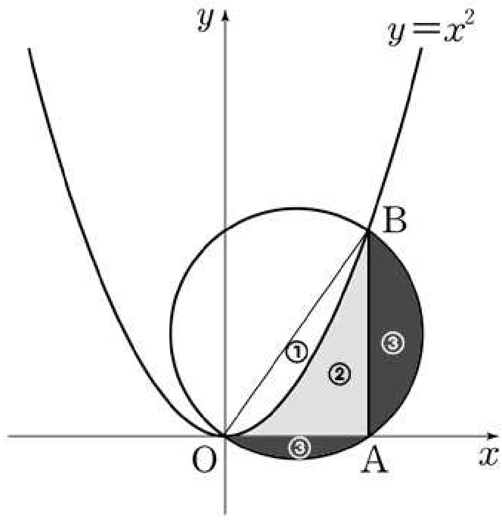


이 내용을 빠르게 알아 내어야 한다. 수능에서는 계산 위주의 문제를 지양하기 때문에 원의 방정식을 부랴부랴 구하고, 복잡하게 적분하라고 하는 문제보다도 도형의 성질을 이용해서 복잡한 계산 없이 식을 구할 수 있는 문제를 출제한다. 이 문제도 **직각삼각형을 빨리 발견하고, 빗변의 중점이 원의 중심이라는 것을 확인**만 한다면 문제는 한결 수월해진다. 원의 중심은 $C\left(\frac{1}{2}t,\ \frac{1}{2}t^2\right)$가 되겠다. 반지름은 $r=\sqrt{\left(\frac{1}{2}t\right)^2+\left(\frac{1}{2}t^2\right)^2}$ 이 되겠다.

이제부터 회색 부분의 넓이를 구하려고 하는데, 회색 부분의 넓이를 구하기 위해서 넓이를 구할 수 있는 간단한 도형들로 쪼개보자.

우리가 구해야 할 것은 회색 부분의 넓이인데, 회색 부분을 둘로 쪼개 보았다. 연한 회색 부분을 ②라고 하고 진한 회색 부분을 ③이라고 하겠다.

먼저 ③ 부분의 넓이는 반원에서 ① + ②를 빼면 된다.
그 다음 ② 부분의 넓이는 이차함수의 아래의 넓이이므로 적분을 통해서 구할 수 있다.
정리하면
③ = (반원의 넓이) - (① + ②)
② = (적분)



이제 넓이를 구하는 식을 세울 수 있다.

(반원의 넓이) = $\frac{1}{2}\pi r^2$ = $\frac{1}{2}\times\pi\left\{\left(\frac{1}{2}t\right)^2+\left(\frac{1}{2}t^2\right)^2\right\}=\left(\frac{1}{8}t^4+\frac{1}{8}t^2\right)\pi$

(① + ②) = 직각삼각형 OAB의 넓이 = $\frac{1}{2}\times t\times t^2$= $\frac{1}{2}t^3$

(②) = $\int_0^t x^2dx=\frac{1}{3}t^3$

회색 부분의 넓이는 ② + ③ 이므로,

(② + ③) = $\frac{1}{3}t^2+\left(\frac{1}{8}t^4+\frac{1}{8}t^2\right)\pi-\frac{1}{2}t^3=\left(\frac{1}{8}t^4+\frac{1}{8}t^2\right)\pi-\frac{1}{6}t^3$ = $S(t)$

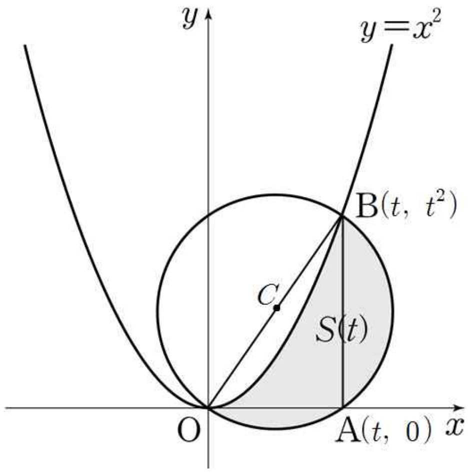
따라서 $S'(t)=\left(\frac{1}{2}t^3+\frac{1}{4}t\right)\pi-\frac{1}{2}t^2$이고 $S'(1)=\frac{3}{4}\pi-\frac{1}{2}=\frac{3\pi-2}{4}$인 것이다.

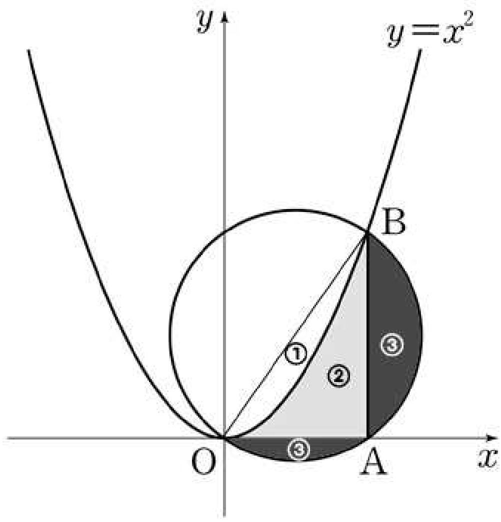
문제에서 $S'(1)=\frac{p\pi+q}{4}$(단, p, q는 정수이다.)라고 했으므로 $p=3$, $q=-2$이고

p^2+q^2의 값을 구하라고 했으므로 답은 13이다.

→ **답 13**

요약





O(0, 0), A(t, 0), B(t, t^2)을 지나는 원 C

→ 좌표를 표시하면 원의 중심이 직각삼각형 ABO의 빗변의 중점임을 알 수 있다.

→ $C\left(\frac{1}{2}t,\ \frac{1}{2}t^2\right)$, $r=\sqrt{\left(\frac{1}{2}t\right)^2+\left(\frac{1}{2}t^2\right)^2}$

③ = (반원의 넓이) - (① + ②)

② = (적분)

(반원의 넓이) = $\frac{1}{2}\pi r^2$

(① + ②) = 직각삼각형 OAB의 넓이

(②) = $\int_0^t x^2dx$

Tip

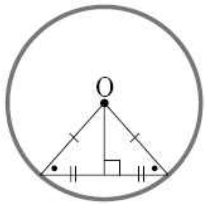
이 문제에서 빠르게 알아야 할 것은 원의 중심이 직각삼각형의 빗변의 중점이라는 점과, 넓이를 분할하여 구하는 기술이다. 마지막에 p^2+q^2을 구해야 하는 것도 실수하지 말고 구해야 한다. 가끔 정신없이 풀다 보면 $p+q$를 구하는 경우가 있는데 그러면 4점을 그냥 버리게 된다.

개념 보충

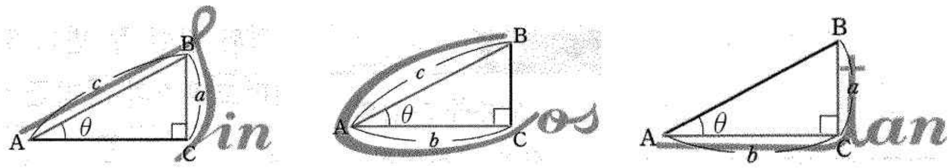
여기 정리된 공식들은 이 문제에서는 사용되지 않았지만 절대로 잊어서는 안 되는 중요한 공식들로 다시 한 번 복습하기를 바란다.

① 원의 중심과 현

① 원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 수직이등분한다.
② 현의 수직이등분선은 그 원의 중심을 지난다.



② 삼각비



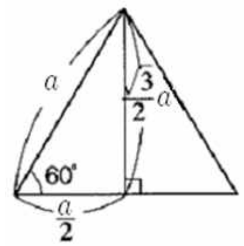
$\sin\theta = \frac{a}{c}$ $\cos\theta = \frac{b}{c}$ $\tan\theta = \frac{a}{b}\left(= \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)$

③ 정삼각형의 넓이

한 변의 길이가 a인 정삼각형에 대하여

① 높이 : $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

② 넓이 : $S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$



④ 두 점 사이의 거리

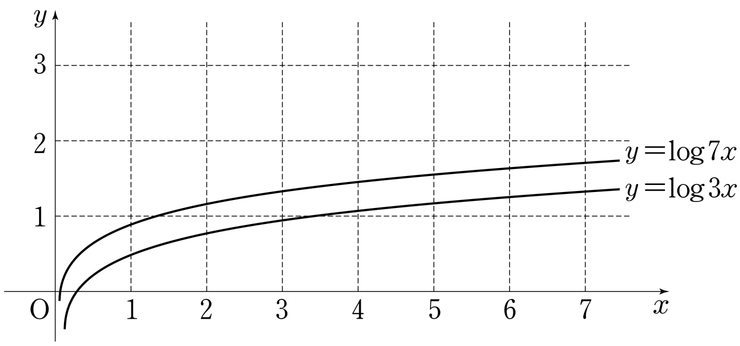
① 수직선 위의 두 점 $\mathrm{A}(a)$, $\mathrm{B}(b)$ 사이의 거리 : $\overline{\mathrm{AB}} = |b - a|$

② 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ 사이의 거리 : $\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

9월 모의고사 30번 문항 분석

30. 좌표평면에서 다음 조건을 만족시키는 정사각형 중 두 함수 $y = \log 3x$, $y = \log 7x$ 의 그래프와 모두 만나는 것의 개수를 구하시오. [4점]

> (가) 꼭짓점의 x좌표, y좌표가 모두 자연수이고 한 변의 길이가 1이다.
> (나) 꼭짓점의 x좌표는 모두 100 이하이다.



6월 모의고사도 그랬고 2012년 수능도 그랬도 30번 문제는 지수/로그함수와 관련된 추론이 자주 나오고 있다. 각각에서 묻는 것은 모두 다르지만 지수/로그함수의 그래프에 대해서 정확히 이해하고 있어야 하는 것은 공통점이라 할 수 있다. 이 문제는 30번치고는 답을 금방 도출할 수 있는 문제여서 체감난이도는 별로 높지 않았을 것이라 생각되지만, 실제 시험장에서는 시간부족으로 제대로 생각하지 못하는 등의 이유로 실수가 발생할 수 있는 문제이다.

꼼꼼한 문제풀이

발견적 추론 문제라 Warming Up 없이 바로 문제풀이로 들어가도록 하겠다. 발견적 추론이라는 유형 자체가 문제를 한 번 풀고 나면 문제의 신선도가 급락하기 때문에, 30번에서 다루는 내용에 대한 분석보다는 발견적 추론이라는 유형에 대한 일반적인 해법을 위주로 하여 풀이를 하고자 한다.

먼저, 발견적 추론이 무엇인지 아는 것이 좋겠다.

> **발견적 추론 능력**은 나열하기, 세어보기, 관찰 등을 통해 문제해결의 핵심 원리를 발견하는 능력, 유추를 통해 문제해결의 핵심 원리를 발견하는 능력을 의미한다.
> - 복잡한 상황 단순화하기
> - 상황을 단순화하거나 특수화하여 규칙성 찾아보기
> - 체계적인 정리, 열거, 관찰 등을 통하여 유사성을 유추하여 규칙성 찾아보기

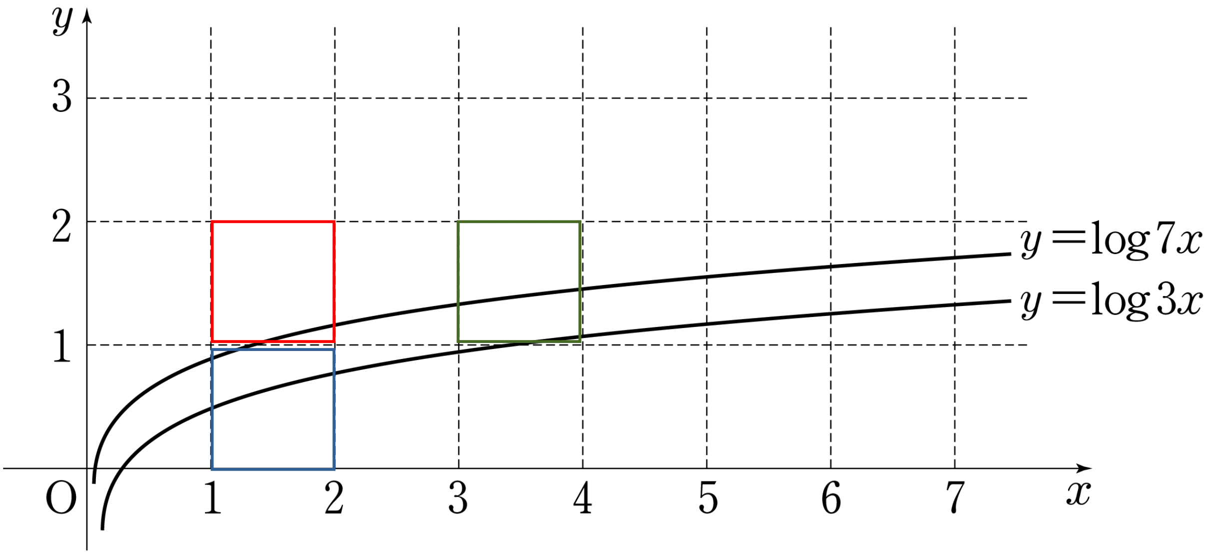
발견적 추론이라는 것은 평가원에서 정의한 용어로서, **귀납적인 방법을 통하여 규칙을 찾고 그것을 통하여 문제를 해결하는 것을 말한다**. 쉽게 말하면 "노가다를 해서 규칙을 찾아내 보라는 것" 이다. 여기서 중요한 것은 무작정 "노가다"만 해서는 안 된다는 점이다. 2012년 수능처럼 30번 한 문제에만 50분을 쓸 수 있는 여유있는 시험이라면 모를까 무작정 노가다만 해서는 답을 구하기는커녕 시간만 날릴 수 있다. 반드시 "규칙"을 찾으면서 접근해야 한다.

발견적 추론 유형은 주로 수열에서 자주 등장한 유형인데, 최근 들어서는 **지수 / 로그함수**로 그 지평이 넓어지고 있다. 이 유형은 문제가 나올 때마다 그때그때 맞는 전략을 세워서 문제를 풀어야 하기 때문에, 일반적인 해법을 만들 수는 없고 다양한 문제풀이를 통하여 적응 훈련을 하는 수밖에 없다.

문제를 읽어 보면서 노가다를 어떻게 시작할지 생각해 보자.

① 좌표평면에서 다음 조건을 만족시키는 **정사각형** 중 〈조건〉 (가) **꼭짓점의** x**좌표,** y**좌표가 모두 자연수**이고 **한 변의 길이가** 1이다. (나) **꼭짓점의** x**좌표는 모두** 100 **이하**이다. ② 함수 $y=\log 3x$, $y=\log 7x$ **의 그래프와 모두 만나는 것**의 개수

키워드가 될 만한 단어들에 밑줄을 쳐 놨다. 어떤 문제든 간에 조건을 제대로 읽는 것은 중요하지만, 발견적 추론 유형은 문제를 보자마자 해법을 생각해 내는 것이 아니기 때문에 조건을 더더욱 꼼꼼하게 읽을 필요가 있다.

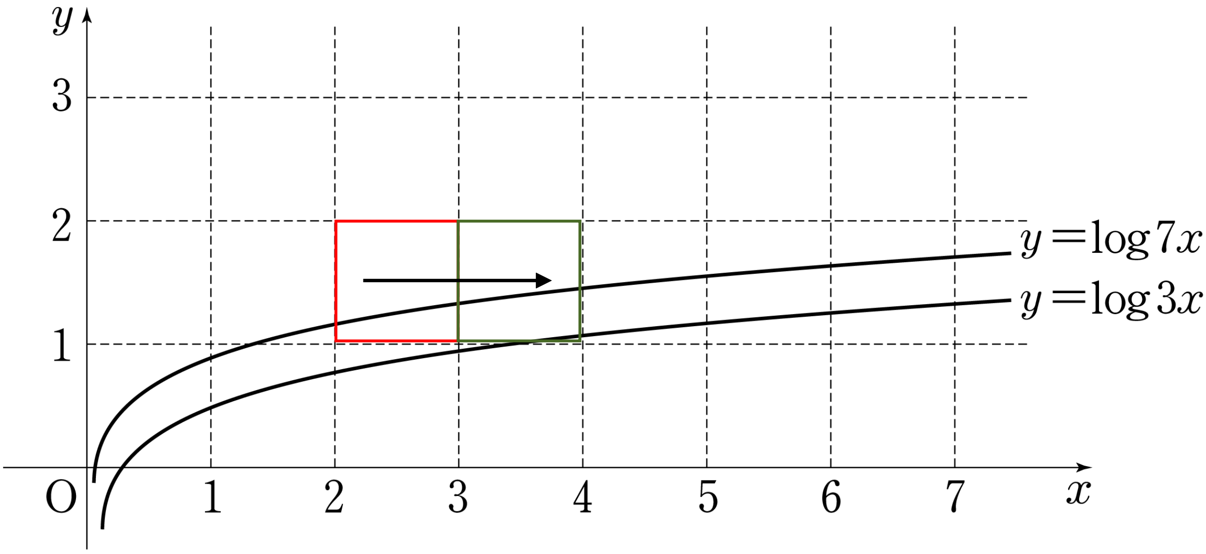


조건을 만족시키는 정사각형을 찾아야 하는데, 정사각형의 꼭짓점의 x좌표는 100 이하라고 했다. 또한 자연수이다. y좌표는 자연수라고만 했다. 그러면 가능한 꼭짓점의 x좌표는 1~100까지의 자연수뿐이다. 또한 y좌표는 1부터 시작해야 할 것이다.

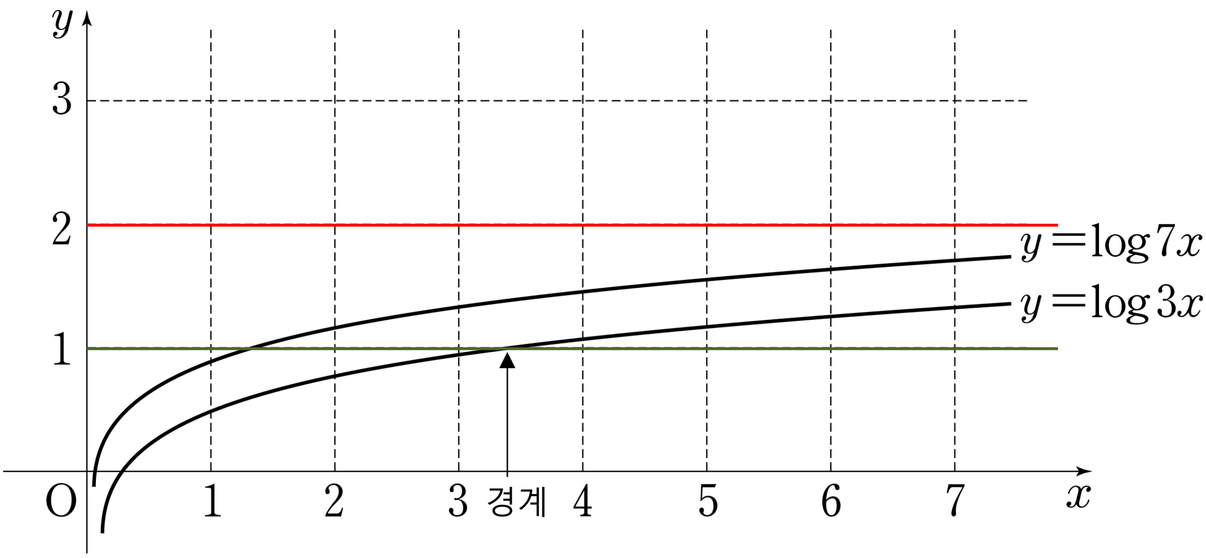
그렇기 때문에 파란색 정사각형은 y좌표가 자연수라는 조건을 만족하지 못하고 있으므로 집계 대상에서 제외된다. 빨간색 정사각형은 꼭짓점의 x, y좌표가 모두 정사각형이라는 조건은 만족시키지만, 두 로그함수의 그래프와 모두 만나고 있지는 않기 때문에 역시 집계 대상에서 제외된다.

발견적 추론이란 이렇게 주어진 조건에 맞는 것들을 찾아 가며, 어떤 것이 조건에 부합하고 어떤 것이 해당되지 않는지 확인하면서 이루어져야 한다. 발견적 추론 문제가 어려운 것은 지문의 요구 사항 자체를 이해하는 데 시간이 걸리기 때문인데, 이럴 때 **적당한 수를 넣어 보면서 직접 대입해 보는 방법**이 문제 이해에 매우 효과적이고, 출제자가 평가하고자 하는 능력이기도 한다.

조건을 모두 만족시키는 정사각형은 초록색 정사각형이다. 꼭짓점의 x, y좌표 모두 자연수이고, x좌표는 모두 100 이하이며, 로그함수 그래프 두 개와 동시에 만나고 있기 때문이다.



자, 그러면 이제 어느 경우 조건을 모두 만족시키고 어떨 때 만족이 안 되는지 살펴보자. 위에서 두 조건을 모두 만족시키는 초록색 정사각형을 찾았는데, 바로 왼쪽에 있는 빨간색 정사각형은 조건을 만족하지 않고 있다. 그리고 초록색 오른쪽에 있는 정사각형들은 이 그림에서는 모두 조건을 만족시키고 있는 것 같다.



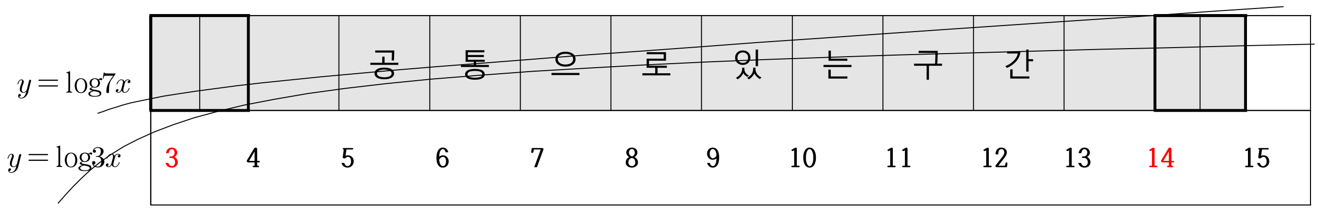
그럼 뭐가 문제가 되는지를 살펴보자. 위에서 초록색 정사각형은 이 그림의 "경계" 부위에서 만나고 있는데, 경계 부위는 <u>$y=\log 3x$의 그래프가 $y=1$을 지나가는 점</u>이다. 다시 말하면 $y=\log 3x$의 y값의 정수 부분이 바뀌고 있는 곳이란 말이다. 이 점에 착안해서 생각해보면, 정사각형의 꼭지점은 자연수만 가능하기 때문에 정사각형은 이 그림의 빨간 줄과 초록 줄 사이에서만 존재할 수 있다. 즉, y값이 정수인 부분 사이에서만 존재할 수 있는데, 그 구간에서 그래프와 모두 만나려면 <u>두 로그함수의 그래프가 모두 그 구간에 있어야 할 것</u>이다. 이 그림에서도 경계부분부터는 $y=\log 3x$와 $y=\log 7x$가 서로 같은 구간에 위치해 있다.

여기까지 발견했다면 문제의 50%는 풀린 것이다. 지금까지의 관찰에서 내린 결론은 두 로그함수가 서로 같은 구간에 있을 때, 다시 말하면 <u>**로그함수의 y좌표의 정수 부분이 서로 같은 구간에서, 그 구간에 있는 정사각형은 두 그래프와 모두 만나는 것이다**</u>.

그러면 이제 규칙을 찾았으니 문제에서 요구하는 개수를 구해야 한다. 문제를 다시 읽어보면 “꼭짓점의 x좌표는 모두 100 이하라고 하였다.” 이는 $1 \leqq x \leqq 100$을 의미하는데, 위에서 말한 구간은 y좌표이므로, $y = \log 3x$와 $y = \log 7x$가 취할 수 있는 치역의 범위는 각각 $\log 3 < y < \log 300$, $\log 7 < y < \log 700$이 되겠다. 이 때, 밑이 10인 상용로그이므로 $2 = \log 2 < \log 300 < \log 700 < \log 1000 = 3$라는 부등식이 세워져서 결과적으로 두 로그함수의 그래프는 모두 정의역에서 **치역이 0과 3 사이에서 존재하는 것**이다. 이 중 자연수는 1, 2둘 뿐이므로 구간은 $y = 1$과 $y = 2$ 사이, $y = 2$와 $y = 3$ 사이 두 개로만 쪼개면 되고, 이 구간에서 두 로그함수의 그래프가 함께 있는 범위가 어떻게 되는지를 찾으면 정사각형의 개수를 구할 수가 있다.

그럼 1과 2 사이에서 $y = \log 3x$와 $y = \log 7x$가 언제부터 서로 같이 있는지 살펴보자. 먼저 $\log 7x$는 $x = 1$와 $x = 2$ 사이에서 $y = 1$을 지나가기 때문에 1과 2 사이 구간에서는 $2 \leqq x \leqq 14$(x는 자연수)까지 가능하다. $x = 15$가 되면 $\log 105$가 되어서 2를 넘기 때문에, 14까지의 자연수가 가능한 것이다. 한 편, $\log 3x$는 $x = 4$부터 $y = 1$을 지나치기 시작하며 $x = 33$까지 1과 2 사이의 구간에 존재하기 때문에 $4 \leqq x \leqq 33$(x는 자연수)일 때 이 구간에 존재한다.

그러면 공통으로 있는 x는 4부터 14까지인데, 이 사이에서 만들 수 있는 정사각형의 개수는 어떤지 살펴보자.



공통 x는 4부터 14까지이지만 3과 4 사이에서 $y = \log 3x$의 그래프가 1~2 구간으로 넘어오기 때문에 가장 왼쪽은 정사각형을 반으로 나누어 놨다. 중요한 것은 $x = 3$을 **왼쪽 꼭짓점으로 하는 진한 정사각형도 조건을 만족시킨다는 것**이다. 3과 4사이에서 1~2 구간으로 넘어오기 때문이다. 마찬가지로 오른쪽 끝도 14와 15사이에서 $y = \log 7x$가 2~3구간으로 넘어가기 때문에 사이에 있는 14를 **왼쪽 꼭짓점으로 하는 진한 정사각형도 조건을 만족**시킨다. 따라서 왼쪽 꼭짓점의 개수를 세어서 **14-3+1=12 개의 정사각형이 조건을 만족**시킨다.

마찬가지고 2~3 사이의 구간에서도 개수를 세어 보자. $y = \log 7x$는 $x = 15$부터 이 구간에 들어가며, 정의역의 끝인 100에서도 구간 내에 있기 때문에 $15 \leqq x \leqq 100$(x는 자연수)가 이 구간이고, $y = \log 3x$는 $x = 34$부터 마찬가지로 $x = 100$까지이므로 $34 \leqq x \leqq 100$까지 2~3 구간에 들어간다. 따라서 공통구간은 $34 \leqq x \leqq 100$이고, **왼쪽 경계인 33부터, 가장 오른쪽 꼭짓점인 99**(100이 되면 오른쪽 꼭짓점이 101이 되므로 안 됨) 까지의 갯수를 세면 99-33+1 = 67이 되어서 2~3 사이의 구간에서 조건을 만족시키는 정사각형은 67개가 된다.

따라서 답은 12+67=79이다.

→ 답 : 79

Tip

이 문제에서 중요한 것은 빠르게 규칙을 찾는 것과 찾은 규칙을 바탕으로 조건을 만족하는 정사각형을 정확하게 세는 것이다. 이 문제는 로그함수의 그래프 문제이지만, 상용로그 문제로 볼 수 있다. 두 그래프와 모두 만나는 정사각형은 두 상용로그의 지표가 같아지는 부분에 있는 것이기 때문에 자릿수가 바뀌는 점을 경계하여 변화가 생기는 것이다. 이런 상용로그 문제는 최근 수능에도 나온 바 있기 때문에 관련 기출문제를 하나 싣는다.

관련 기출문제

2013년 6월 모의평가 (나)형

양수 x에 대하여 $\log x$의 가수를 $f(x)$라 할 때, $f(2x) \leqq f(x)$를 만족시키는 100보다 작은 자연수 x의 개수는?

[해설] → 문제는 전혀 달라 보이지만, 물어보고 있는 것은 큰 차이가 없던 6월 모의평가 문제였다.

예를 들어서 생각해 보자. $\log x$의 가수가 0.4 라고 하면, $\log 2x$의 가수는 $\log x + \log 2$로, 대략 0.7정도 될 것이므로 $\log 2x$의 가수가 $\log x$의 가수보다 크게 될 것이다.
하지만 $\log x$의 가수가 0.9 라고 하면 $\log 2x$의 가수는 0.9 + 0.3 = 1.2이 아니고, 정수로 올림된 1을 뺀 0.2가 될 것이다. 즉, $f(2x) \leqq f(x)$를 만족시키는 경우는 $2x$가 되면서 **자릿수가 올라가는 경우인 것**이다.

그것을 고려하면 100보다 작은 자연수 중에서 2배를 하면 자릿수가 올라가는 x는
 i) x가 한 자리의 수 : 5 ~ 9 → 5개
 ii) x가 두 자리의 수 : 50 ~ 99 → 50개
따라서 답은 55개이다.

문제는 다르지만 물어보는 내용은 상당히 유사함을 알 수 있다.