2013 이해원 모의고사 4회 해설

by 동엽(ndy0118)

이 모의고사에 대한 해설지가 제공되지 않아서, 조금이나마 도움이 되고자 해설을 작성해봅니다. 문제에 대한 접근법과 풀이, 그리고 몇몇 문항에 대한 제 의견을 써놓았으니 참고하시되, 더 좋은 풀이가 있다면 댓글 혹은 답글로 첨가해주시면 감사하겠습니다.

1~5 생략.

6. [중복조합에 관한 문제]
$a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq a_4$ 인 경우에서, $a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 = a_4$ 인 경우를 제외시켜 주면 된다. $\therefore {}_4H_5 - {}_3H_5 = 35$

7. 생략

8. [삼각함수의 덧셈정리]
$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-1)(x-2) = 0$
문제 조건에서 $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \beta < \gamma < \frac{\pi}{2}$ 이므로, $\tan\alpha < \tan\beta < \tan\gamma$.
즉, $\tan\alpha = -1, \tan\beta = 1, \tan\gamma = 2$
$\Rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{4}, \beta = \frac{\pi}{4}$ 임을 알 수 있으므로, $\tan(\alpha + 2\beta + \gamma) = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \gamma\right)$
따라서 $\frac{1 + \tan\gamma}{1 - \tan\gamma} = -3$

9. [확률밀도함수의 정의 + 함수의 점대칭]
$g(x) + g(2-x) = 0$ 에서, $g(x)$ 가 $(1,0)$ 대칭인 함수이다.
따라서 $\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 \{g(x) + a\}dx = 2a = 1 \therefore a = \frac{1}{2}$

10. [공간도형 - 구]
구와 xy평면의 교선은 중심이 원점이고 반지름이 4인 원이다.

구하는 값은 결국 $\frac{1}{2}\overline{PQ}(\overline{AP}+\overline{BP})$ 의 최댓값을 구하는 문제이다.

$\angle PAB=\theta$ 라 두면, $\overline{AP}+\overline{BP}=8\cos\theta+8\sin\theta=8\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})$ 이다.

즉 $\triangle PAB$ 가 직각삼각형일 때, $\overline{AP}+\overline{BP}$ 의 값이 최대가 되고

$\overline{PQ}$ 의 길이는 항상 6으로 일정하다.

(P, Q, 구의 중심, P와 교선의 중심을 연결했을 때 P가 아닌 다른 지름의 끝을 지나는 삼각형 단면을 생각하자.)

따라서 $\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8\sqrt{2}=24\sqrt{2}$

11. [이차곡선 - 쌍곡선]

x축의 양의 방향에 있는 초점을 F, 나머지 하나의 초점을 F'라 두자.

그러면 $\overline{QF}=\overline{PF'}$ 이고(원점대칭), 주어진 조건과 쌍곡선의 정의를 이용하면

$\overline{PF'}=8$, $\overline{PF}=6$ 임을 알 수 있고 중선 정리를 통해 $F(5,0)$ 임을 알 수 있다.

$\therefore 1+p=25$, $p=24$

12. [잉여류 + 이항분포]

주사위 눈 1~6을 각각 3으로 나눈 나머지에 따라 분류해보면

1,4 2,5 3,6 으로 나눌 수 있고, 각각 묶인 두 수의 합은 3의 배수가 된다.

따라서 주사위 A, B의 두 눈은 세 묶음 중 하나의 묶음에서, 각각 다른 두 수가 나오면 된다.

$$\therefore P(E)=\frac{2\times2\times3}{36}=\frac{1}{3}$$.

12회의 독립시행을 하였으므로, 확률변수 X는 이항분포 $B\left(12,\frac{1}{3}\right)$을 따른다.

$$\therefore V(X)=12\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{3} \quad \Rightarrow 11$$

13. [무리방정식 + 그래프를 통한 해석]

여기서 하나의 팁을 주자면, 근호 전체를 치환하자.

$\sqrt{f(x)-mx+3}=t$ 로 치환하면, $t\geq 0$ 임을 통해 무연근을 걸러낼 수 있고 계산도 간단해진다.

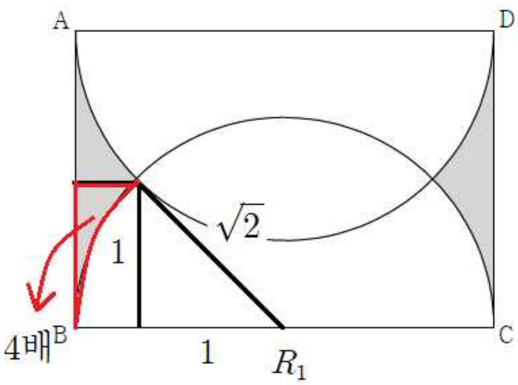
정리하면 $f(x)=mx+1$ 임을 알 수 있고 그래프를 그려 비교해보면

실근의 개수가 세 개이려면 $y=mx+1$ 이 $(-2,0)$ 또는 $(2,0)$ 을 지나야 한다.

각각의 기울기는 $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ 이다. 따라서 답은 $-\frac{1}{4}$

14. [무한등비급수]
무한등비급수 문제를 풀 때는
 1) 초항을 계산한다.
 2) 만들어지는 배경을 통해 '닮음비'를 구하고, '개수의 비'가 늘어나는 지 확인한다.
의 과정을 거친다.
즉 초항을 구하기 힘들게 약간의 계산을 요하는 문제, 혹은 닮음비를 구하기 어렵게 꼬아내는 문제가 출제된다.
14번 문제는 후자의 경우이다.

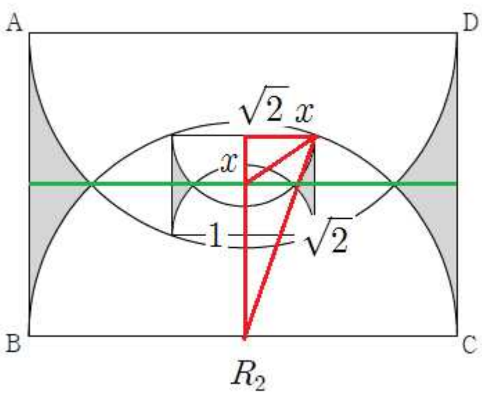
1) S_1 구하기.



옆의 그림에서,

$$S_1 = 4\times\left\{\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1+\sqrt{2})\times 1-\frac{1}{2}\times(\sqrt{2})^2\times\frac{\pi}{4}\right\}$$
$$= 4\sqrt{2}-\pi-2$$

2) 닮음비 구하기.
개수는 계속 하나로 일정하고, 도형 R_n 이 얻어지는 배경은 바로 '직사각형'이다.



옆의 그림과 같이, 원래 직사각형이 세로와 가로의 비율이 $1:\sqrt{2}$ 임을 이용해서 직각삼각형 하나를 생각할 수 있다.

$(x+1)^2+(\sqrt{2}\,x)^2=(\sqrt{2})^2$

$3x^2+2x-1=0$

$\therefore x=\frac{1}{3}$

길이가 $\frac{1}{3}$ 배 되므로 넓이는 $\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$ 배.

$$\therefore \frac{4\sqrt{2}-\pi-2}{1-\frac{1}{9}} = \frac{36\sqrt{2}-9\pi-18}{8} \quad \Rightarrow a=36,\ b=-9,\ c=-18$$

$$\therefore a+b+c=9$$

15. [행렬 확답형 ㄱㄴㄷ 문제]

(가)에서 $A(A+E)=E$ 따라서 ㄱ은 참.

$(A^2)^{-1}=(A^{-1})^2$ 임을 이용.

$$\begin{aligned}(A+E)^2 &= A^2+2A+E \\ &= A+2E\end{aligned}$$ 따라서 ㄴ은 참.

마찬가지로, $$\begin{aligned}(A^3)^{-1} &= (A^{-1})^3 \\ &= (A+2E)(A+E) \\ &= A^2+3A+2E=2A+3E\end{aligned}$$

따라서 $A^{-1}+(A^{-1})^2+(A^{-1})^3=4A+6E$.

(나) 조건에 의해서, 모든 성분의 합은 $4\times7+6\times2=40$. 따라서 ㄷ은 참.

∴ ㄱ,ㄴ,ㄷ

* 위의 문제는 $A^2+A-E=O$ 라는 이차식을 이용한 식의 조작형태로도 풀린다.

16. [공간도형]

각각의 모선을 x축과 평행하게끔 쭉 끄집어내어 만들어지는 게 두 평면이다.

그렇게 보면 점 P 에서 각각의 평면까지의 거리는 점 P 의 yz평면으로의 정사영된 점과 각각의 모선까지의 수직거리와 같다.

각각 계산하면 $\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{3}{2\sqrt{2}}$ $\quad \therefore \frac{3}{8}$

(x축이 위로 가게끔 축의 위치를 바꾸어주면, 더 보기 쉬울 것이다.)

17. [빈칸 채워 넣기 → 문맥 파악]

(가) 밑의 전개 내용을 보면, 두 식을 나눠보라고 했다.

직접 나눠보면 $\frac{a_{n+1}-1}{a_{n+1}+2}=\frac{a_n-1}{4a_n+8}=\frac{1}{4}\times\frac{a_n-1}{a_n+2}$ 이 된다.

따라서 $b_n=\frac{a_n-1}{a_n+2}$ 이라 두면, $\{b_n\}$이 초항이 $\frac{1}{4}$이고, 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열임

을 알 수 있다. $\therefore$ (가) $a_n - 1$, (나) $\left(\frac{1}{4}\right)^n$ $a_4 = \frac{258}{255}$ 이므로, 계산하면 21.

18. [새로운 함수의 정의 + 사차함수 개형]

함수 $h(x)$의 이계도함수가 존재한다고 했으므로, 각각의 경계에서 따져보면

$f(-1) = f(1) = 1,\ f'(-1) = 1,\ f'(1) = -1$

$f''(-1) = f''(1) = 0$

을 만족하는 사차함수 $f(x)$ 를 찾으면 된다.

위의 조건들을 종합해서 개형 추론을 해보면,

$f(x)$의 최고차항의 계수는 양수이고 $f(x)$는 우함수이며 $x = -1, 1$ 에서 변곡점을 갖는다는 것을 알 수 있다.

$f(x) = 1$ 을 만족하는 또 다른 하나의 양 근을 k 라 두면,

$f(x) - 1 = A(x^2 - 1)(x^2 - k^2)\quad A > 0$

각각을 미분해서 위의 조건을 만족하게끔 A, k 를 결정.

$f'(x) = A\left\{4x^3 - 2(k^2 + 1)x\right\}$

$f''(x) = A\left\{12x^2 - 2(k^2 + 1)\right\}$

$f'(1) = A(-2k^2 + 2) = -1 \qquad \therefore k = \sqrt{5},\ A = \frac{1}{8}$

$f''(1) = A(-2k^2 + 10) = 0$

$\int_0^2 h(x)dx = \int_0^1 \{f(x) - 1\}dx +$ (사다리꼴 넓이) 이므로, 계산하면

$= \frac{2}{5} + \frac{3}{2} = \frac{19}{10}$

$\therefore 40\int_0^2 h(x)dx = 76$.

19. [식 세우기 + 미분]

$f(t) = \frac{1}{2}|\cos t|\sin\left(t + \frac{\pi}{6}\right)$ 이므로, $0 \leqq t < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} \leqq t < \frac{5}{6}\pi$ 로 범위를 나눠서 미분해서 계산.

적당히 상수를 떼어내면 $f'(t)$의 부호는 각각

$\sqrt{3}\cos 2t - \sin 2t$, $-\sqrt{3}\cos 2t - \sin 2t$ 이 결정한다.

따라서 극대가 되는 t의 값은 $\tan 2t = \sqrt{3}$ 을 만족하므로, 각각의 t의 값은

$\frac{\pi}{6}, \frac{2}{3}\pi \quad \therefore \frac{5}{6}\pi$

20. [함수의 표현 + 그래프]

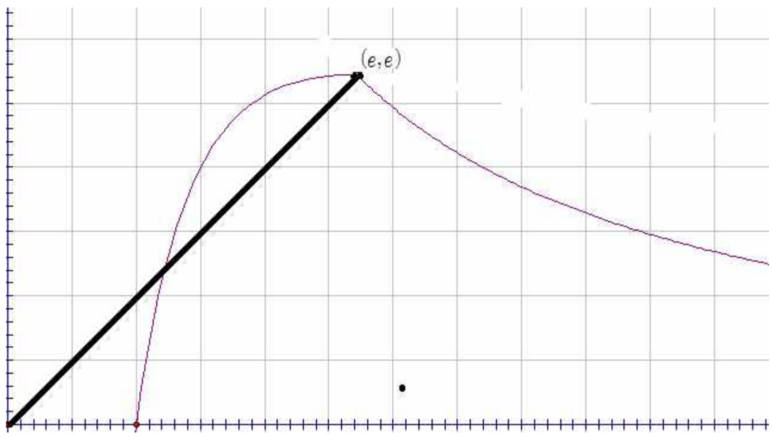
$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^2 \ln x}{x} & (x<e) \\ \dfrac{e^2}{x} & (x \geqq e) \end{cases}$$ 이다.

ㄱ. $x=e$ 기준으로 좌, 우 미분계수를 따져보자.

$$\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{\frac{1}{x}x-\ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2} \Rightarrow 0$$

$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow -1$ 서로 같지 않으므로, 미분 가능하지 않다. (거짓)

ㄴ.



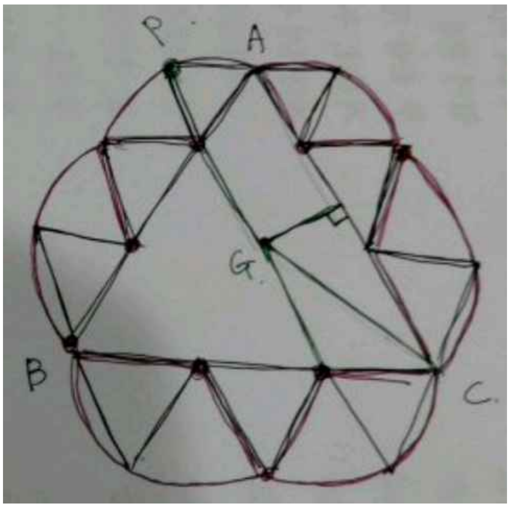
그래프는 그릴 때, $x<e$ 에서의 $f'(x)=e^2 \times \frac{1-\ln x}{x^2}$ 에서

$x=e$에서 극대이고, 위로 볼록한 개형으로 점점 접선의 기울기가 작아짐을 고려하면 교점이 2개 생김을 알 수 있다. (참)

ㄷ. $x=e$ 에서만 ㄱ과 같은 방식으로 따져주면 된다. (참)

$\therefore$ ㄴ,ㄷ

21. [벡터의 최대&최소 + 자취문제]
* 개인적으로 가장 까다로운 문제라 생각되며, 본인의 풀이가 출제자가 의도한 풀이와 다를 수 있음을 미리 밝힌다.



G를 $\triangle ABC$의 무게중심이라 하면,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BP} &= \overrightarrow{CA}\cdot\left(\overrightarrow{CP}-\overrightarrow{CB}\right)\\ &= \overrightarrow{CA}\cdot\left(\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{GP}-\overrightarrow{CB}\right)\\ &= \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{GP}\end{aligned}$$

그림에 표시된 P 일 때가 최대인데, 그 이유는 근방으로 살짝 꺾어보면 $\overline{AC}$ 와의 사잇각이 생기면서, 그 길이도 작아지기 때문이다.
(옆 그림에서 P와 G는 한 직선 상에 있다.)

* 빨간 선이 P 의 자취이다. 부채꼴들이 $\triangle ABC$ 를 에워싸고 있다.
* 세 방면으로 모두 대칭적이기 때문에 G 를 기준으로 벡터를 쪼개보았다.

따라서 $4\times 6 = 24$.

22. 등비수열 공비+초항 이용 계산.
23. 우변으로 이항한 후, 통분해주면 $(x-2)(x-6)<0$ 과 같게 됨.
24. $y^2 = 4px$ 의 기울기가 m인 접선의 방정식은 $y = mx + \dfrac{p}{m}$
25. $b_n = 5(a_{n+1}+a_n) = 5(2a_n+5)$

26. [정적분의 표현 - 무한급수로 나타내어진 식]

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f'\left(\frac{2k}{n}-1\right)\frac{4k}{n^2} &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f'\left(\frac{2k}{n}-1\right)\frac{2k}{n}\cdot\frac{2}{n}\\ &= \int_{-1}^{1}(x+1)f'(x)dx\end{aligned}$$

이 때, $\displaystyle\int_{-1}^{1} f'(x)dx = f(1)-f(-1) = 0$ 이므로,

$$\therefore \int_{-1}^{1} x f'(x)dx = [xf(x)]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} f(x)dx = 28.$$

27. [삼각함수로 삼각형의 변 나타내기]

$$f(\theta) = \frac{1}{2}cos\theta\sin\theta + \frac{1}{2}sin\theta - \frac{1}{2}cos\theta\sin 2\theta$$

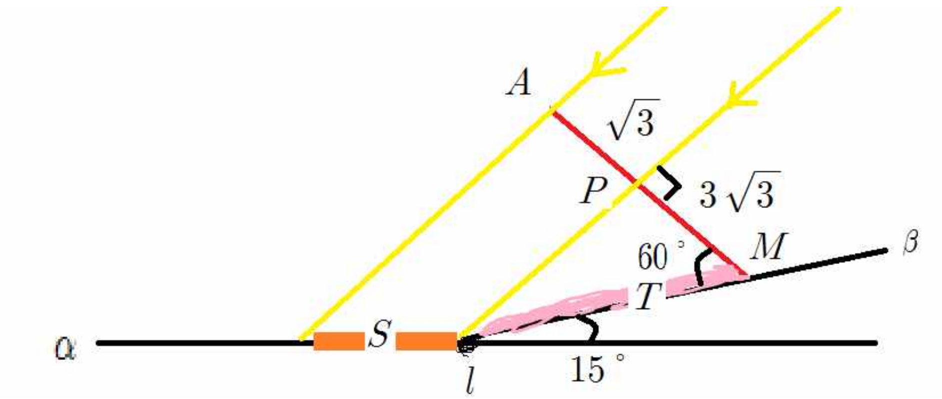
28. [회전변환과 합성변환]

$g \circ f$ 는 '원점을 기준으로 θ배 한 후 θ 만큼 회전변환' 을 나타낸다.
따라서 변환된 후의 점도 원점을 지나는 직선상에 있기 때문에
$f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}(x^2+1)$ 의 원점을 지나는 접선의 방정식을 구하자.
구해보면, $y = \pm\sqrt{3}\,x$ 이다.
이때의 접점의 좌표는 각각 $(1, \sqrt{3}), (-1, \sqrt{3})$ 이므로,
원점으로부터 접점까지의 거리는 2이다.
*문제에서 선분 OQ 가 접한다고 하였으므로 길이에 유의.
따라서 θ 의 후보들인 $\frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi, \frac{\pi}{3}+2\pi, \frac{2}{3}\pi+2\pi$ 중, 2보다 작은 $\frac{\pi}{3}$ 는 제외.

$$\therefore \frac{17}{3}\pi \Rightarrow 17.$$

29. [공간을 평면화하기 & 정사영]

문제의 조건을 다 만족하면서, 앞에서 본 모습을 그려보면 다음과 같다.



* 단 앞에서 본 모습은 선일지라도, 정사영이 되는 것은 넓이!

$S = \sqrt{2}\sqrt{3} = \sqrt{6}$ $\quad \therefore \dfrac{ST}{\sqrt{2}} = 18$
$T = 6\sqrt{3}$

30. [발견적 추론 - 직접 센다.]

$f(1)$의 경우 각각 $\left(\frac{1}{2}, 4\right), \left(4, \frac{1}{2}\right)$ 에서 만나므로 직접 세보면 $f(1) = 8$

$f(2) = 5$ (문제의 예) 이고, $f(3)$일 땐 각각 $(1,2), (2,1)$에서 만나서 $f(3) = 5$

그 이후로는 만들어지는 사각형은 안쪽에 $(0,1), (1,0), (1,1)$ 3개의 점만 포함.

따라서 $8+5+5+3\times 27 = 18+81 = 99$.

항상 지수와 로그의 밑이 1보다 큰 경우만 그려진다.

이는 수학적 귀납법으로 보일 수 있다.

$n=1 :\ a_1 = 16 > 1$

$n=k$일 때 성립가정. $a_k > 1$

$a_{k+1} = \sqrt{a_k} > 1$ 이므로, $n = k+1$일 때도 성립.

따라서 모든 자연수 n에 대하여 $a_n > 1$ 이다.