2013학년도 대학수학능력시험 대비
자유전자 모의평가 정답 및 해설

• 수리 영역 •

수리 가형 정답

1	④	2	①	3	③	4	②	5	⑤
6	③	7	④	8	①	9	⑤	10	④
11	①	12	①	13	③	14	⑤	15	③
16	②	17	②	18	④	19	②	20	⑤
21	④	22	21	23	17	24	120	25	11
26	50	27	7	28	22	29	45	30	37

해 설

1. [출제의도] 행렬의 성질을 이용하여 행렬의 합과 차 계산하기

A의 모든 성분의 합은 8이고, $A-B=2E$이므로 행렬 $A^2-AB=A(A-B)$의 모든 성분의 합은 16이다.

2. [출제의도] 배각공식과 삼각함수의 성질 이용하기

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = \frac{1}{3}$에서 $\cos^2\theta = \frac{2}{3}$이다.

$\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$이므로 $\tan^2\theta = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$이다.

3. [출제의도] 일차변환 이해하기

일차변환 $f : (x, y) \to (ax - y, x + 2y)$에 의하여 점 $(2, 1)$은 점 $(2a-1, 4)$로 옮겨지므로 $a = 2$, $b = 4$이다. 따라서 $a + b = 6$이다.

4. [출제의도] 정적분의 성질 이해하기

$\int_a^{2a} f(x)dx = \int_b^{2a} f(x)dx + \int_a^b f(x)dx = 6 - 2 = 4$이다.

5. [출제의도] 분수방정식 해결하기

주어진 방정식의 좌변을 통분하면

$$\frac{x^2 - x + 3}{x^3 - 1} = \frac{2x + 1}{x^3 - 1}$$

$x^2 - 3x + 2 = 0$, $x = -1$ or 2

그런데 $x = -1$은 무연근이므로 $x = 2$이다.

6. [출제의도] 극한의 성질을 이용하여 연속함수구하기

연속의 정의에 의해 $\lim_{x \to +0} f(x) = \lim_{x \to -0} f(x) = f(0)$이다.

$$\lim_{x \to +0} f(x) = \lim_{x \to +0} \frac{e^{ax} - 1}{\ln(x+1)} = \lim_{x \to +0} \frac{e^{ax} - 1}{x} \frac{x}{\ln(x+1)} = a$$

$$\lim_{x \to -0} f(x) = \lim_{x \to -0} \frac{\sin^2 bx}{1 - \cos x} = \lim_{x \to -0} \frac{\sin^2 bx(1 + \cos x)}{\sin^2 x} = 2b^2$$

$f(0) = 4 - a$

$a = 2b^2 = 4 - a$이고 b는 양수이므로 $a = 2$, $b = 1$이다. 따라서 $a + b = 3$이다.

7. [출제의도] 원순열의 수 구하기

작은 원과 정사각형을 칠하는 색을 선택하고 색칠하는 경우의 수는 ${}_6C_2 \times 2! = 30$이다.

나머지 4개의 영역을 4개의 색으로 색칠하는 경우의 수는 $\frac{4!}{4} = 6$이다.

따라서 구하는 경우의 수는 $30 \times 6 = 180$이다.

8. [출제의도] 모비율을 이용하여 표본비율 구하기

어느 모의고사 응시자 중 수리가형 선택자의 비율을 p라 하면 $p = 0.2$이다.

따라서 한 시험장에서 응시자 100명을 임의추출 했을 때 수리가형 응시자의 표본비율 $\hat{p}$은 정규분포 $N(0.2, (0.04)^2)$을 따른다. 그러므로 표본비율 $\hat{p}$이 0.24 이하일 확률은

$P(\hat{p} \le 0.24) = P(Z \le 1) = 0.5 + 0.3413 = 0.8413$이다.

9. [출제의도] 지수함수의 성질을 이용하고 지수방정식 해결하기

점 A의 좌표를 $(t, 4^t)$라 하면 점 C의 좌표는 $(t+1, 2^{t+1})$이다. 두 점의 y좌표 차는 정사각형의 한 변의 길이인 1이므로 $4^t - 2^{t+1} = 1$이다. $2^t = k$라 하면 $k^2 - 2k - 1 = 0$, $k = 1 + \sqrt{2}$ ($\because k > 0$)이다.

점 A의 y좌표는 $4^t = k^2$이므로 구하는 값은 $k^2 = (1 + \sqrt{2})^2 = 2\sqrt{2} + 3$이다.

10. [출제의도] 분수부등식과 함수의 그래프 사이의 관계를 이해하기

부등식 $\frac{f(x)}{x} + \frac{x}{f(x)} \le 2$의 좌변을 통분하고 우변을 이항하면 $\frac{(f(x) - x)^2}{xf(x)} \le 0$이다.

Ⅰ) $xf(x) > 0$

$xf(x) > 0$일 때 $x > 2$ 또는 $x < -2$이다.

부등식 $\frac{(f(x) - x)^2}{xf(x)} \le 0$은 $xf(x) \ne 0$인 x에 대해 $(f(x) - x)^2 \le 0$와 같다. 따라서 구하는 x는 두 함수 $y = f(x)$, $y = x$의 교점의 x좌표이므로 $x = 3$ or -3이다.

Ⅱ) $xf(x) < 0$

$xf(x) < 0$일 때 $-2 < x < 2$이다.

부등식 $\frac{(f(x) - x)^2}{xf(x)} \le 0$은 $xf(x) \ne 0$인 x에 대해 $(f(x) - x)^2 \ge 0$와 같다. 따라서 $-2 < x < 2$인 x는 주어진 부등식을 만족한다. 단, $x = 0$은 무연근이므로 근이 아니다. 그러므로 $x = -1$, 1이다.

Ⅰ), Ⅱ)에서 정수 x의 개수는 -3, -1, 1, 3로 4개다.

11. [출제의도] 지수를 이용하여 실생활 문제 해결하기

활성화 에너지가 E_0인 화학반응이 $3T_0$의 온도에서 일어날 때 반응속도상수 k_1는 $k_1 = AB^{-\frac{E_0}{3RT_0}}$이다.

활성화 에너지가 $2E_0$인 화학반응이 $4T_0$의 온도에서 일어날 때 반응속도상수 k_2는 $k_2 = AB^{-\frac{E_0}{2RT_0}}$이다.

따라서 $\log_B \frac{k_1}{k_2} = \log_B B^{\frac{E_0}{6RT_0}} = \frac{E_0}{6RT_0}$이다.

12. [출제의도] 회전변환과 닮음변환의 성질을 이용하여 도형과 관련된 문제 해결하기

점 B의 좌표는 $(1, \sqrt{3})$이고, 점 C의 좌표는 $(-1, \sqrt{3})$이다. 두 선분 AB, BC는 수직이므로 삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3} = \sqrt{3}$이다.

13. [출제의도] 점과 점사이의 거리를 이용하여 곡선의 길이 구하기

$\overline{OP} = \sqrt{t^2 + \{f'(t)\}^2} = \sqrt{t^2 + t + 1}$이므로 $\{f'(t)\}^2 = t + 1$이다. 구하는 곡선의 길이를 l이라 하면

$$l = \int_2^7 \sqrt{1 + \{f'(t)\}^2}\, dx = \int_2^7 \sqrt{t + 2}\, dx = \left[\frac{2}{3}(t+2)^{\frac{3}{2}}\right]_2^7$$

$$= \frac{2}{3}(27 - 9) = \frac{38}{3}$$

이다.

14. [출제의도] 도형의 성질을 이용하여 무한등비급수 구하기

$\angle A_1OC_1 = \frac{\pi}{6}$이므로 S_1은

$S_1 = \frac{1}{2} \times 2^2 \times \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} \times 2 \times 1 \times \sin\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}$이다.

한편 OA_2의 길이는 OB_2의 길이와 같고, $\overline{OB_2} = \overline{OC_1}\cos\frac{\pi}{3} = 1$이므로 $\overline{OA_1} : \overline{OA_2} = 2 : 1$이다. 따라서 $S_1 : S_2 = 4 : 1$이고, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{9}\pi - \frac{2}{3}$$이다.

$S_n = T_n$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}(S_n + T_n)$의 값은

$$\sum_{n=1}^{\infty}(S_n + T_n) = \left(\frac{4}{9}\pi - \frac{2}{3}\right) \times 2 = \frac{8}{9}\pi - \frac{4}{3}$$이다.

15. [출제의도] 행렬의 성질 추론하기

ㄱ. $A^2B + AB = E$의 양변에 B^{-1}을 곱하면 $B^{-1} = A^2 + A$이다. 양변의 왼쪽에 A^{-1}을 곱하면 $A^{-1}B^{-1} = A + E$이다. (참)

ㄴ. $B^{-1} = A^2 + A$에서

$A^{-1}B^{-1} = (BA)^{-1} = A + E$

$B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1} = A + E$

이다. 따라서 $AB = BA = (A + E)^{-1}$이다. (참)

ㄷ. $A^2B + AB = E$에서

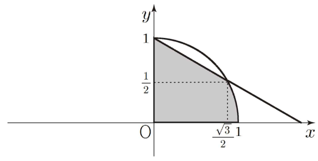
$A^{-1} = (A + E)B$, $B^{-1} = (A + E)A$이므로

$$\begin{aligned}(A^{-1} + E)(B^{-1} + E) &= A^{-1}B^{-1} + A^{-1} + B^{-1} + E \\ &= A + E + (A + E)B + (A + E)A + E \\ &= (A + E)(A + B + E) + E\end{aligned}$$

이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

16. [출제의도] 회전체의 부피 구하기



구하는 부피는 위 그림에서 사분원 $x^2 + y^2 = 1$과 직선 $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + 1$로 둘러싸인 부분을 y축 둘레로 회전시킨 회전체의 부피이다.

사분원과 직선의 교점의 좌표가 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$이므로 구하는 부피 V는

$$V = \pi\int_0^{\frac{1}{2}}(1 - y^2)dy + \pi\int_{\frac{1}{2}}^1 \{\sqrt{3}(1 - y)\}^2 dy = \frac{11}{24}\pi + \frac{\pi}{8} = \frac{7}{12}\pi$$

17. [출제의도] 논증과정 추론하기

$\frac{{}_{n+1}P_{n-k+1}}{\boxed{(가)}} = \frac{1}{k!}$이므로

$\boxed{(가)} = {}_{n+1}P_{n-k+1} \times k! = (n+1)!$이다.

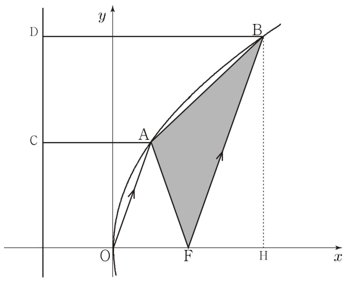
따라서 $f(n) = (n+1)!$이다.

한편 $b_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} b_k$에서 $b_n = \sum_{k=1}^{n-1} b_k$이고, 두 식을 뺀 식으로부터

$b_{n+1} - b_n = b_n$, $b_{n+1} = 2b_n$ $(n \ge 2)$이다. $b_2 = 1$이므로 2이상의 자연수 n에 대해 $b_n = 2^{n-2}$이다. 따라서 $g(n) = 2^{n-2}$이다.

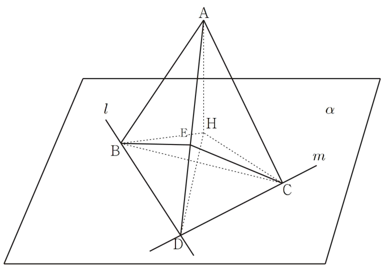
그러므로 $f(3) \times g(6) = 24 \times 16 = 384$이다.

18. **[출제의도] 포물선과 평행선의 성질을 이용하여 도형과 관련된 문제 해결하기**



그림과 같이 점 A, B에서 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하고, 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.
초점 F의 x좌표는 2이고 $\overline{\mathrm{AO}}=\overline{\mathrm{AF}}$이므로 점 A의 x좌표는 1이다. 또 준선과 원점사이의 거리가 2이므로 $\overline{\mathrm{CA}}=\overline{\mathrm{AO}}=\overline{\mathrm{AF}}=3$이다.
$\overline{\mathrm{BF}}=x$라 할 때, $\overline{\mathrm{BD}}=x$이고 $\overline{\mathrm{OF}}=2$이므로 $\overline{\mathrm{FH}}=x-4$이다. 또 두 각 $\angle\mathrm{AOF}$와 $\angle\mathrm{BFH}$는 각으로 같으므로 $\cos\angle\mathrm{AOF}=\cos\angle\mathrm{BFH}$, $\frac{1}{3}=\frac{x}{x-4}$이다.
따라서 $x=6$이다.
한편 두 각 $\angle\mathrm{OAF}$와 $\angle\mathrm{AFB}$는 엇각으로 같고, 이등변 삼각형 AOF에서 $\sin\angle\mathrm{AOF}=\frac{4\sqrt{2}}{9}$이다.
그러므로 삼각형 AFB의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AF}}\times\overline{\mathrm{BF}}\times\sin\angle\mathrm{AFB}=\frac{1}{2}\times3\times6\times\frac{4\sqrt{2}}{9}=4\sqrt{2}$이다.

19. **[출제의도] 제 2코사인 법칙을 이용하여 이면각의 크기 구하기**



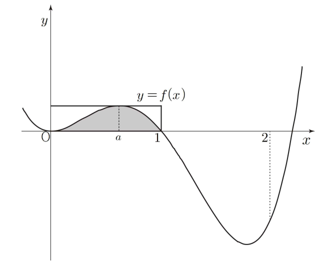
위 그림에서 삼수선의 정리에 의해
$\angle\mathrm{ABD}=\angle\mathrm{HBD}=90^\circ$이다. 따라서 두 삼각형 ABD, HBD의 넓이 비는 두 선분 AB, BH의 넓이 비이다.
직각삼각형 ABH에서 $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BH}}=2:1$이고 $\overline{\mathrm{AH}}=3$이므로 $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{BH}}=\sqrt{3}$이다. 또한 직각삼각형 ABD에서 피타고라스의 정리에 의해 $\overline{\mathrm{AD}}=\sqrt{21}$이다.
한편 직각삼각형 ADC에서 피타고라스의 정리에 의해 $\overline{\mathrm{AC}}=2\sqrt{3}$이다. 따라서 두 삼각형 ABD와 ADC는 합동이다. (SSS합동) 마찬가지로 두 삼각형 HBD와 HDC는 합동이다. (SSS합동)
이면각을 나타내기 위해 점 B, C에서 선분 AD에 수선의 발을 내리면 수선의 발은 E로 일치한다. 이때 구하는 각의 크기 θ는 $\angle\mathrm{BEC}$이다.
직각삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{BD}}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AD}}\times\overline{\mathrm{BE}}$이므로 $\overline{\mathrm{BE}}=\overline{\mathrm{CE}}=\frac{6}{\sqrt{7}}$이다. 같은 방법으로 $\overline{\mathrm{BC}}=3$이다.
삼각형 BCE에서 제 2코사인법칙에 의해 $\cos\theta$는

$$\cos\theta=\frac{\frac{36}{7}+\frac{36}{7}-9}{2\times\frac{36}{7}}=\frac{1}{8}\text{이다.}$$

20. **[출제의도] 평균값의 정리와 중간값의 정리를 이용하여 진위추론하기**

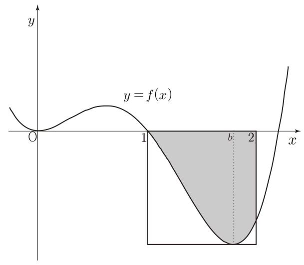
ㄱ. $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면
$\int_{n-1}^{n}f(x)dx=\frac{F(n)-F(n-1)}{n-(n-1)}$이다. 평균값의 정리에 의해 $\frac{F(n)-F(n-1)}{n-(n-1)}=f(k)$인 k가 구간 $[n-1,\,n]$에 적어도 하나 존재한다. (거짓)

ㄴ.



위 그림에서 $\int_0^1 f(x)dx$는 색칠된 부분의 넓이이고 $f(k)$는 밑변의 길이가 1이고 높이가 $f(k)$인 직사각형의 넓이이다.
$x=0$일 때 $f(0)=0$이므로 $f(0)<\int_0^1 f(x)dx$이다.
$x=a$일 때 그림과 같이 $f(x)$의 극대점 $(a,\,f(a))$에 대해 $f(a)>\int_0^1 f(x)dx$이다.
$x=1$일 때 $f(1)=0$이므로 $f(1)<\int_0^1 f(x)dx$이다.
따라서 중간값의 정리에 의해 구간 $[0,\,a]$, $[a,\,1]$에서 집합 A_1의 원소는 적어도 1개씩 존재한다. 그런데 함수 $f(x)$는 구간 $[0,\,a]$에서 증가하므로 구간 $[0,\,a]$에서 집합 A_1의 원소는 1개다. 마찬가지로 함수 $f(x)$는 구간 $[a,\,1]$에서 감소하므로 구간 $[a,\,1]$에서 집합 A_1의 원소는 1개다. 그러므로 집합 A_1의 원소는 2개다. (참)

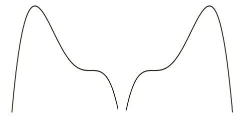
ㄷ.



위 그림에서 $-\int_1^2 f(x)dx$는 색칠된 부분의 넓이이고 $-f(k)$는 밑변의 길이가 1이고 높이가 $|f(k)|$인 직사각형의 넓이이다.
$x=1$일 때 $f(1)=0$이므로 $f(1)>\int_1^2 f(x)dx$이다.
$x=b$일 때 그림과 같이 $f(x)$의 극소점 $(a,\,f(a))$에 대해 $f(b)<\int_1^2 f(x)dx$이다.
따라서 중간값의 정리에 의해 구간 $[1,\,b]$에서 집합 A_2의 원소는 적어도 1개씩 존재한다. 그런데 함수 $f(x)$는 구간 $[1,\,b]$에서 감소하므로 구간 $[1,\,b]$에서 집합 A_2의 원소는 1개다.
그런데 집합 A_2의 원소가 1개보다 많을 때, 그 원소는 구간 $[b,\,2]$에 존재해야한다.
따라서 중간값의 정리에 의해 집합 A_2의 원소가 1개보다 많을 때, $f(2)\ge\int_1^2 f(x)dx$이다. (참)
따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

21. **[출제의도] 접선의 방정식과 사차함수의 성질을 이용하여 문제해결하기**

함수 $f(x)$위의 점 $(t,\,f(t))$에서 그은 접선의 방정식은 $y=f'(t)(x-t)+f(t)$이다.
이 직선이 점 $(0,\,k)$를 지나므로
$k=-tf'(t)+f(t)$이다.
따라서 함수 $g(k)$는 곡선 $h(t)=-tf'(t)+f(t)$와 직선 $y=k$의 교점의 개수이다. $h(t)$를 구하면
$h(t)=-t(4t^3+3at^2+12at-2)+t^4+at^3+6t^2-2t-4$
$\quad=-3t^4-2at^3-6t^2-4$
이고, $h'(t)=-12t^3-6at^2-12t=-6t(2t^2+at+2)$이다.
그런데 함수 $h(t)$는 최고차항의 계수가 음수인 사차함수이고, (가) 조건에 의해 곡선 $h(t)$의 개형은 다음과 같이 극점이 1개인 사차함수와 같다.



그런데 $h'(t)=-6t(2t^2+at+2)$에서 $h(t)$는 $t=0$에서 극값을 가지므로 이차방정식 $2t^2+at+2=0$의 실근이 존재하지 않거나 중근을 갖는다. 또한 $t=0$은 이차방정식 $2t^2+at+2=0$의 실근이 아니다. 따라서 판별식 $D=a^2-16\le0$에서 $-4\le a\le4$이다. …①
또한 $h(t)$의 최댓값은 $h(0)=-4$이므로 $g(a)\ge1$일 때, 즉 $y=a$와 곡선 $y=h(t)$가 만날 때, $a\le-4$이다. …②
①, ②에서 $a=-4$이다. 따라서 $f(1)$의 값은
$f(1)=1-4+6-2-4=-3$이다.

22. **[출제의도] 중복조합의 수 구하기**

구하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_5={}_7\mathrm{C}_5=21$이다.

23. **[출제의도] 쌍곡선의 점근선을 알고 배각공식 이용하기**

두 점근선의 기울기는 $\frac{2}{3}$, $-\frac{2}{3}$이므로 두 직선은 x축에 대해 대칭이다.
따라서 $\tan\frac{\theta}{2}=\frac{2}{3}$이고, $\tan\theta=\frac{\frac{4}{3}}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{12}{5}$이다.
그러므로 $p+q=17$이다.

24. **[출제의도] 연속확률변수 이해하기**

$\int_0^2 f(x)=1$이므로 $\int_0^2 kx(x-2)=1$, $k=-\frac{3}{4}$이다.
한편 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 대칭이므로 $E(X)=1$이다. 따라서 $E(-160kX)=(-160)\times\left(-\frac{3}{4}\right)\times1=120$이다.

25. **[출제의도] 조건부확률 구하기**

주머니 안에 3이 적힌 카드가 있을 때, 성훈이가 꺼낸 카드로 가능한 경우의 수는
$(1,\,2)$, $(1,\,4)$, $(1,\,5)$, $(2,\,4)$, $(2,\,5)$, $(3,\,4)$, $(3,\,5)$, $(4,\,5)$로 8가지이다. 이 중 주머니 안에 4가 적힌 카드가 없을 경우는
$(1,\,4)$, $(2,\,4)$, $(3,\,4)$로 3가지다. 따라서 구하는 확률은 $\frac{3}{8}$이고, $p+q=11$이다.

26. **[출제의도] 삼각함수와 원의 성질을 이용하여 극한값 구하기**

직각삼각형 ABQ에서 $\overline{\mathrm{BQ}}=10\sin\theta$이다. 또 내심의 성질에 의해 $\angle\mathrm{PAQ}=\angle\mathrm{QAB}=\theta$, 원주각의 성질에 의해 $\angle\mathrm{PBQ}=\theta$이다. 따라서 $\overline{\mathrm{QR}}=10\sin\theta\tan\theta$이다.
한편 직각삼각형 ABP에서 $\overline{\mathrm{AP}}=10\cos2\theta$이고, 직각삼각형 ARP에서 $\overline{\mathrm{PR}}=10\cos2\theta\tan\theta$이다.
그리고 외각의 성질에 의해 $\angle\mathrm{PRQ}=\frac{\pi}{2}+\theta$이다.

따라서 삼각형 PRQ의 넓이 $f(\theta)$는

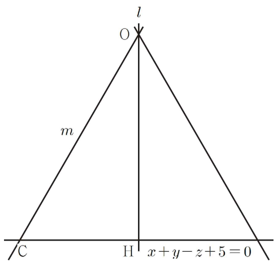
$$f(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PR}}\times\overline{\mathrm{RQ}}\times\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$$
$$=50\cos2\theta\sin^2\theta\tan\theta\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$$

이다 그러므로 구하는 극한값은

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{f(\theta)}{\theta^3}=\lim_{\theta\to+0}\frac{50\cos2\theta\sin^2\theta\tan\theta\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}{\theta^3}=50$$이다.

27. [출제의도] 직선과 평면의 방정식을 이용하여 문제 해결하기

직선 l의 방향벡터와 평면 $x+y-z+5=0$의 법선벡터는 $(1,1,-1)$로 일치한다. 따라서 직선 l은 평면 $x+y-z+5=0$와 수직이다. 주어진 상황을 단면으로 나타내면 다음과 같다.



그림에서 점 O는 직선 l과 직선 m의 교점인 $(1,1,1)$이고, 점 C, H는 각각 직선 m, l과 평면 $x+y-z+5=0$의 교점이다.

이때 $\angle\mathrm{COH}=30^\circ$이므로 점 C가 그리는 자취는 원이 된다. 원의 반지름을 알기 위해서는 $\overline{\mathrm{OH}}$를 알아야 한다. 점 H의 좌표를 (a,b,c)라 하면 점 H는 직선 $l: x=y=2-z$위에 있으므로 매개변수 t에 대해 $a=t,\ b=t,\ c=2-t$이고, 점 H는 평면 $x+y-z+5=0$위에 있으므로 $a+b-c+5=0$이다.

따라서 $t=-1$이고, $a=-1,\ b=-1,\ c=3$이다.

그러므로 선분 OH의 길이는 $2\sqrt{3}$이며, 점 C가 그리는 원의 반지름의 길이는 $2\sqrt{3}\tan30^\circ=2$이다. 따라서 원의 넓이는 4π이다.

한편 평면 $x+y-z+5=0$와 xy평면이 이루는 각 θ에 대해 $\cos\theta=\frac{|-1|}{\sqrt{1+1+1}\times\sqrt{1}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$이므로 구하는 정사영의 넓이는 $\frac{4}{\sqrt{3}}\pi=\frac{4\sqrt{3}}{3}\pi$이다. 따라서 $p+q$의 값은 7이다.

28. [출제의도] 등차수열의 성질을 이용하여 문제 해결하기

두 식 $\sum_{k=1}^{n}2^{a_k}=nb_n,\ \sum_{k=1}^{n-1}2^{a_k}=(n-1)b_{n-1}$을 뺀 식으로부터 2이상의 자연수 n에 대해 $2^{a_n}=n(b_n-b_{n-1})+b_{n-1}$이다.

등차수열 $\{b_n\}$의 일반항을 $b_n=d(n-1)+b_1$이라 하자.

이 때 $\sum_{k=1}^{n}2^{a_k}=nb_n$에 $n=1$을 대입하면 $\sum_{k=1}^{1}2^{a_k}=b_1=2$이고, $2^{a_n}=dn+d(n-2)+2=2dn-2d+2$이다. $a_4=5$이므로 $n=4$를 대입한 식으로부터 $32=8d-2d+2,\ d=5$이다.

따라서 $b_n=5n-3$이고, $b_5=22$이다.

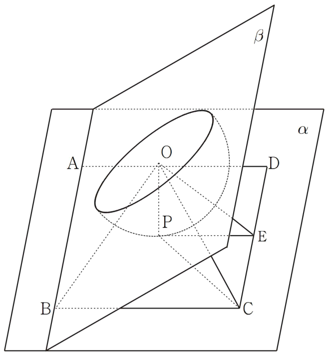
29. [출제의도] 구와 평면사이의 위치관계를 이용하여 내적에 대한 문제 해결하기

두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{CO}}$, $\overrightarrow{\mathrm{DX}}$의 내적 $\overrightarrow{\mathrm{CO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DX}}$에 대하여

$$\overrightarrow{\mathrm{CO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DX}}=\overrightarrow{\mathrm{CO}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OX}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}})$$
$$=\overrightarrow{\mathrm{CO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OX}}-\overrightarrow{\mathrm{CO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

이다. 두 내적 $\overrightarrow{\mathrm{CO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OX}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}$을 각각 구하면 다음과 같다.

I) $\overrightarrow{\mathrm{CO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OX}}$



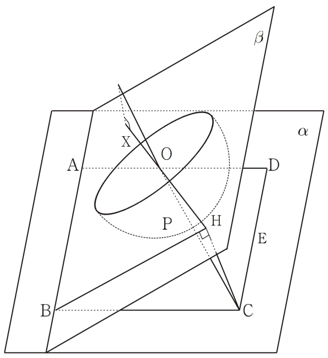
그림과 같이 선분 CD의 중점을 E라 하자. 이 때 점 P는 직사각형 ABCD의 두 대각선의 교점, 즉 중점이므로 $\angle\mathrm{OEP}$는 두 평면 α, β와 이루는 각인 30°이다.

직각삼각형 OPE에서 $\overline{\mathrm{PE}}=3$, $\angle\mathrm{OEP}=30^\circ$이므로 $\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{3}$이다. 그러므로 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$의 크기는 $\sqrt{3}$이다.

또, 직각삼각형 PCE에서 $\overline{\mathrm{PE}}=3$, $\overline{\mathrm{CE}}=2\sqrt{3}$이므로 피타고라스의 정리에 의해 $\overline{\mathrm{PC}}=\sqrt{21}$이고, 직각삼각형 OPC에서 $\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{PC}}=\sqrt{21}$이므로 $\overline{\mathrm{CO}}=2\sqrt{6}$이다.

그러므로 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{CO}}$의 크기는 $2\sqrt{6}$이다.

그러므로 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{CO}}$, $\overrightarrow{\mathrm{DX}}$가 이루는 각의 크기 θ에 대해 $\overrightarrow{\mathrm{CO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OX}}=6\sqrt{2}\cos\theta$이다.



$\cos\theta$가 최대가 될 때, 점 X의 위치는 그림과 같이 직선 CO를 평면 β에 내린 정사영과 원의 교점이다. 그러므로 θ는 직선 CO와 평면 β가 이루는 각의 크기이다.

점 C에서 평면 β에 내린 수선의 발을 H라 하자. 이 때 $\angle\mathrm{COH}=\theta$이다. 직각삼각형 BCH에서 $\overline{\mathrm{BC}}=6$이고 $\angle\mathrm{HBC}=30^\circ$이므로 $\overline{\mathrm{CH}}=3$이다. 또 $\overline{\mathrm{CO}}=2\sqrt{6}$이므로 직각삼각형 COH에서 $\sin\theta=\frac{3}{2\sqrt{6}}$이다.

따라서 $\cos\theta=\frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{6}}$이고, 내적 $\overrightarrow{\mathrm{CO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OX}}$의 최댓값은

$\overrightarrow{\mathrm{CO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OX}}=6\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{6}}=3\sqrt{5}$이다.

II) $\overrightarrow{\mathrm{CO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}$

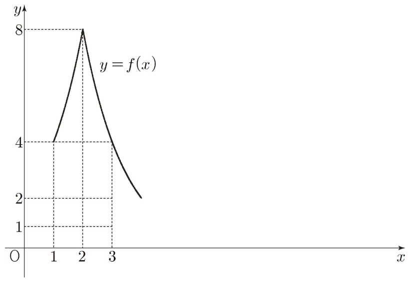
점 P는 직사각형 ABCD의 두 대각선의 교점, 즉 중점이므로 $\overline{\mathrm{CO}}=\overline{\mathrm{DO}}=2\sqrt{6}$이다. 한편 $\overline{\mathrm{DC}}=4\sqrt{3}$에서 $\overline{\mathrm{CO}}^2+\overline{\mathrm{DO}}^2=\overline{\mathrm{DC}}^2$이다. 따라서 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{CO}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$는 수직이고, 내적 $\overrightarrow{\mathrm{CO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}$는 $\overrightarrow{\mathrm{CO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=0$이다.

I), II)에서 $M=3\sqrt{5}$고, $M^2=45$이다.

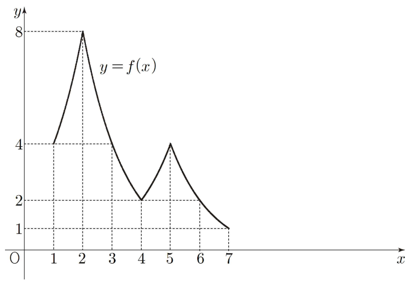
30. [출제의도] 발견적 추론을 통해 함수의 그래프에 관한 문제 해결하기

$k=1$일 때부터 그래프를 그려보자.

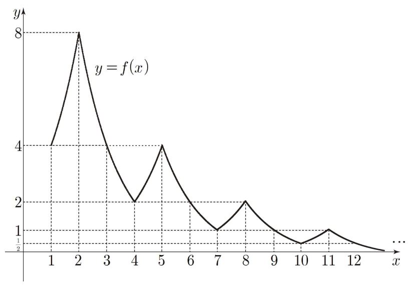
$k=1$일 때, 함수 $f(x)$는 $f(x)=\begin{cases}2^{x+1} & (1\le x<2)\\ 2^{-x+5} & (2\le x<4)\end{cases}$이다. 그래프를 그리면 다음 그림과 같다.



$k=2$일 때, 함수 $f(x)$는 $f(x)=\begin{cases}2^{x-3} & (4\le x<5)\\ 2^{-x-1} & (5\le x<7)\end{cases}$이다. 그래프를 그리면 다음과 같다.



따라서 함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같음을 추론할 수 있다.



이때, 수열 $\{M_n\}$은

$\{M_n\}$: 8, 8, 4, 4, 4, 2, 2, 2, 1, 1, 1, $\frac{1}{2}$, …

이다. 따라서

$\sum_{n=1}^{11}M_n=8+8+4+4+4+2+2+2+1+1+1=37$이다.