

# 수리 영역 (가형)



종로학평

시간 : 100 분

점수 : 100 점

1. 다음 등식을 만족하는 두 실수  $a, b$ 의 곱  $ab$ 의 값은? [2점]

$$\begin{pmatrix} a & 2b \\ 2b & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 4 \\ 2a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$$

- ① -4                      ② -2                      ③ -1  
④ 2                        ⑤ 4

2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2 + 16n} - 2n)$ 의 값은? [2점]

- ① 1                        ② 2                        ③ 3  
④ 4                        ⑤ 5

3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left( \frac{2}{e^x + 1} - \frac{1}{e^x} \right)$ 의 값은? (단,  $e$ 는 자연로그의 밑이다.) [2점]

- ①  $\frac{1}{2}$                       ② 1                        ③  $\frac{3}{2}$   
④ 2                        ⑤  $\frac{5}{2}$

4. 두 사건  $A$ 와  $B$ 는 서로 독립이고

$$P(B) = \frac{1}{2}, P(A \cup B) = \frac{2}{3}$$

일 때,  $P(A|B)$ 는?

- ①  $\frac{1}{6}$                       ②  $\frac{1}{3}$                         ③  $\frac{1}{2}$   
④  $\frac{2}{3}$                       ⑤  $\frac{5}{6}$

5. 무리방정식  $\sqrt{x^2+x+3}=x^2+x-3$ 의 모든 실근의 합은? [3점]

- ① -2                      ② -1                      ③ 0  
 ④ 1                         ⑤ 2

6. 정적분  $\int_e^{e^2} \frac{\ln(\ln x)}{x} dx$ 의 값은? (단,  $e$ 는 자연로그의 밑이다.) [3점]

- ①  $\ln 2 - 2$                 ②  $\ln 2 - 1$                 ③  $2\ln 2 - 2$   
 ④  $2\ln 2 - 1$                 ⑤  $3\ln 2 - 2$

7. 어떤 바이러스의 개체 수는 1분마다 일정한 비율로 증가한다. 이 바이러스의 개체 수가 10분마다 2배로 증가할 때, 그 개체 수가 처음으로 현재보다 60배 이상이 되는 것은 약 몇 분 후인가? (단,  $\log 2=0.30$ ,  $\log 3=0.48$ 로 계산한다.) [3점]

- ① 약 54분 후                ② 약 56분 후                ③ 약 58분 후  
 ④ 약 60분 후                ⑤ 약 62분 후

8. 좌표평면에서  $x$ 축 위의 점은  $y$ 축 위의 점으로,  $y$ 축 위의 점은  $x$ 축 위의 점으로 옮기는 일차변환  $f$ 가 있다. 일차변환  $f$ 에 의하여 점  $P(3, 4)$ 가 점  $Q(6, 7)$ 로 옮겨질 때, 일차변환  $f$ 에 의하여 점  $(6, 2)$ 가 옮겨지는 점의 좌표는? [3점]

- ①  $(2, 11)$                 ②  $(3, 8)$                 ③  $(3, 14)$   
 ④  $(4, 6)$                 ⑤  $(4, 10)$

9.  $0 < a < \pi$  일 때, 함수

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{x-a} & (x \neq a) \\ b & (x = a) \end{cases}$$

가 모든 실수  $x$ 에 대하여 연속이 되도록 하는 두 실수  $a, b$ 의 곱  $ab$ 의 값은? [3점]

- ①  $-\pi$                       ②  $-\frac{\pi}{2}$                       ③ 0  
 ④  $\frac{\pi}{2}$                         ⑤  $\pi$

10. 다음은  $n$ 이 자연수일 때,

$$1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + \dots + n(2n+1) = \frac{1}{6}n(n+1)(4n+5) \quad \dots \textcircled{1}$$

임을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

<증명>

(i)  $n=1$ 일 때,

(좌변)=3, (우변)=3이므로 등식 ①은 성립한다.

(ii)  $n=k$ 일 때 등식 ①이 성립한다고 가정하면

$$1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + \dots + k(2k+1) = \frac{1}{6}k(k+1)(4k+5)$$

이 등식의 양변에  $\boxed{\text{가}}$  을(를) 더하면

$$1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + \dots + k(2k+1) + \boxed{\text{가}}$$

$$= \frac{1}{6}k(k+1)(4k+5) + \boxed{\text{가}}$$

$$= \frac{1}{6} \boxed{\text{나}}$$

따라서,  $n=k+1$ 일 때도 등식 ①이 성립한다.

따라서, (i), (ii)에 의해 등식 ①은 모든 자연수  $n$ 에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 가, 나에 알맞은 식을 각각  $f(k), g(k)$ 라 할 때,

$f(2) - g(0)$ 의 값은?

[3점]

- ① 1                              ② 2                              ③ 3  
 ④ 4                              ⑤ 5

11.  $0 \leq x < 2\pi$ 일 때, 방정식  $2\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 2\sin x = 3\tan x$ 의 서로

다른 모든 근의 합은?

[3점]

- ①  $\pi$                               ②  $\frac{5}{4}\pi$                               ③  $\frac{3}{2}\pi$   
 ④  $\frac{7}{4}\pi$                               ⑤  $2\pi$

12.  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 일 때,  $y = \sin x$ 의 역함수를  $f(x)$ 라 하자. 이때

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f\left(\frac{x}{2}\right) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{x-1}$$

의 값은?

[3점]

- ①  $\frac{\sqrt{3}}{3}$                               ②  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$                               ③  $\sqrt{3}$   
 ④  $\frac{4\sqrt{3}}{3}$                               ⑤  $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

13. 포물선  $y^2=8x$  위의 두 점 A, B와 이 포물선의 초점 F에 대하여 선분 AB의 중점의 좌표가 (3, 2)일 때,  $\overline{AF} + \overline{BF}$ 의 값은? [3점]

- ① 7                      ② 8                      ③ 9
- ④ 10                    ⑤ 11

14. 이항분포  $B(48, p)$ 를 따르는 확률변수  $X$

에 대하여  $P(X=0) = \frac{1}{4^{48}}$ 일 때, 확률

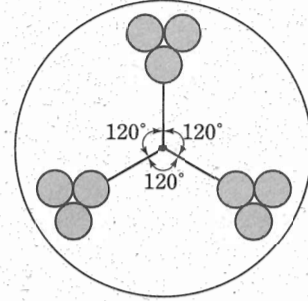
$P(X \geq 30)$ 을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단,  $0 < p < 1$ ) [4점]

- ① 0.6915
- ② 0.7745
- ③ 0.8413
- ④ 0.9332
- ⑤ 0.9772

〈표준정규분포표〉

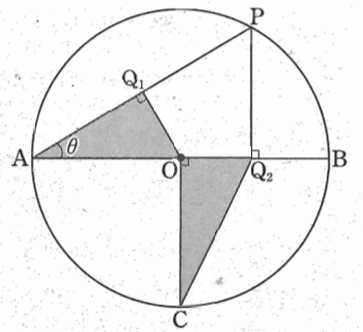
$z$	$P(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

15. 그림과 같은 원판에 반지름의 길이가 같은 9개의 원이 3개씩 접하도록 놓여 있다. 이 원판의 중심을 중심으로  $120^\circ$  회전하면 원래 원판과 겹쳐진다고 한다. 이 9개의 원에 서로 다른 9개의 색을 칠할 때, 서로 다른 방법의 수는? (단, 원판을 회전하여 같아지는 경우는 같은 것으로 센다.) [4점]



- ①  $3 \times 8!$                       ②  $8!$                       ③  $4 \times 7!$
- ④  $3 \times 7!$                       ⑤  $7!$

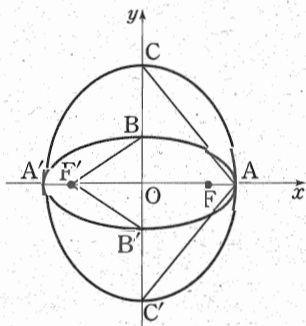
16. 중심이 O이고 지름 AB의 길이가 4인 원 위에  $\overline{AB} \perp \overline{OC}$ 인 점 C가 있다. 이 원 위에  $\angle OAP = \theta$ 인 점 P에 대하여 점 O에서 선분 AP에 내린 수선의 발을  $Q_1$ , 점 P에서 선분 AB에 내린 수선의 발을  $Q_2$ 라 하자. 두 삼각형  $OQ_1A, OCQ_2$ 의 넓이의 합이 최대가 되도록 하는  $\theta$ 에 대하여  $\tan 2\theta$ 의 값은? (단,  $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ ) [4점]



- ①  $\frac{1}{3}$                       ②  $\frac{1}{2}$                       ③ 1
- ④ 2                      ⑤ 3

17. 집합  $M = \{X \mid X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n, n=1, 2, 3, \dots\}$ 에 대하여  $P \in M, Q \in M$ 이고, 행렬  $PQ$ 의 모든 성분의 합이 20이다. 이때 행렬  $P+Q$ 의 모든 성분의 합은? [4점]
- ① 20                      ② 22                      ③ 24  
 ④ 26                      ⑤ 28

18. 그림과 같이 두 점  $F(2, 0), F'(-2, 0)$ 을 초점으로 하는 타원  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 과 두 점  $B(0, b), B'(0, -b)$ 를 초점으로 하는 타원  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{c^2} = 1$ 이 있다.  $\overline{BF'} + \overline{B'F} = 6$ 일 때, 세 점  $A(a, 0), C(0, c), C'(0, -c)$ 에 대하여  $\overline{AC} + \overline{AC'}$ 의 값은? (단,  $a > 0, b > 0, c > 0$ ) [4점]



- ① 8  
 ②  $6\sqrt{2}$   
 ③  $4\sqrt{5}$   
 ④  $2\sqrt{23}$   
 ⑤ 10

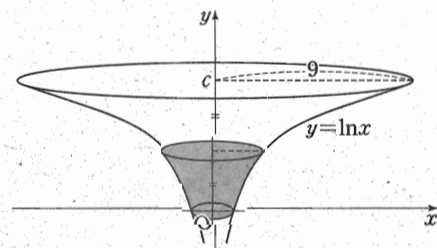
19. 정의역이  $\{x \mid 0 \leq x \leq 2\pi\}$ 인 함수  $f(x) = e^{\sin x}$ 에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단,  $e$ 는 자연로그의 밑이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. 함수  $f(x)$ 의 극댓값은  $e$ 이다.  
 ㄴ. 곡선  $y=f(x)$ 는 두 개의 변곡점을 갖는다.  
 ㄷ. 함수  $f'(x)$ 의 최댓값은 1보다 크다.

- ① ㄱ                      ② ㄱ, ㄴ                      ③ ㄱ, ㄷ  
 ④ ㄴ, ㄷ                      ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

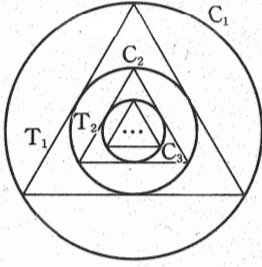
20. 그림과 같이 곡선  $y = \ln x$ 와  $x$ 축,  $y$ 축 및 직선  $y=c$ 로 둘러싸인 부분을  $y$ 축의 둘레로 회전시켜 만든 회전체 모양과 똑같은 그릇이 있다. 이 그릇에 물을 가득 채우면 수면의 반지름의 길이는 9가 된다. 이 그릇 깊이의 중간지점까지 물을 채울 때, 채워진 물의 부피는? (단,  $c > 0$ ) [4점]



- ①  $\frac{7}{2}\pi$                       ②  $4\pi$                       ③  $\frac{9}{2}\pi$   
 ④  $5\pi$                       ⑤  $\frac{11}{2}\pi$

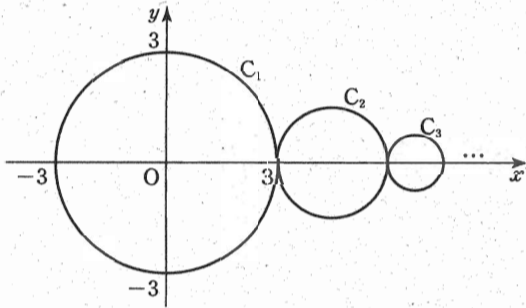


21. [그림 1]과 같이 반지름의 길이가 3인 원  $C_1$ 에 내접하는 정삼각형  $T_1$ 과 이 정삼각형  $T_1$ 에 내접하는 원  $C_2$ 를 그린다. 다시 이 원  $C_2$ 에 내접하는 정삼각형  $T_2$ 와 이 정삼각형  $T_2$ 에 내접하는 원  $C_3$ 를 그린다. 이와 같이 정삼각형과 원을 번갈아가며 한없이 그려나간다.



[그림 1]

또한, [그림 2]와 같이 좌표평면 위에 원  $C_1$ 의 중심이 원점이 되도록 하고, [그림 1]에서 만들어진 원  $C_2, C_3, C_4, \dots$ 가 차례대로 외접하면서 중심이  $x$ 축에 오도록 한없이 그려 나간다. 이때 원  $C_n (n=1, 2, 3, \dots)$ 의 중심의  $x$ 좌표를  $x_n$ 이라 할 때,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 의 값은? [4점]



[그림 2]

- ①  $6 + \sqrt{3}$
- ②  $6 + 2\sqrt{3}$
- ③  $6 + 3\sqrt{3}$
- ④ 9
- ⑤ 12

단답형

22. 좌표공간에서  $y$ 축 위의 점  $P$ 와 두 점  $A(1, -2, -3), B(-3, 3, 4)$ 에 대하여  $\overline{AP} = \overline{BP}$ 가 성립할 때, 선분  $OP$ 의 길이를 구하시오. (단,  $O$ 는 원점이다.) [3점]

23. 로그부등식  $\log_2(x-4) + \log_2(x+4) < \log_2 6x$ 를 만족하는 모든 정수  $x$ 의 값의 합을 구하시오. [3점]

24. 두 벡터  $\vec{x}, \vec{y}$ 에 대하여  
 $2|\vec{x}| = |\vec{y}| = 6$ ,  $\vec{x} \perp (\vec{x} + \vec{y})$   
 가 성립할 때, 내적  $(\vec{x} + \vec{y}) \cdot (\vec{y} - 3\vec{x})$ 의 값을 구하시오. [3점]

25.  $x$ 에 대한 분수부등식  

$$\frac{1}{x-n} + \frac{1}{x-9n} \leq 0$$
 을 만족하는 자연수  $x$ 의 개수가 100이상이 되도록 하는 자연수  $n$ 의 최  
 소값을 구하시오. [3점]

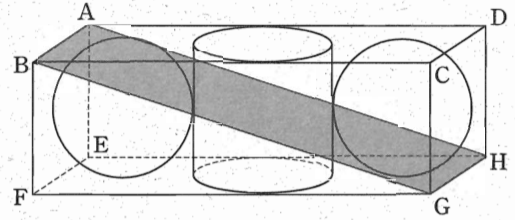
26.  $n$ 이 자연수일 때, 이차함수  $y = x^2 - 4nx - 1$ 의 그래프는  $x$ 축과 서  
 로 다른 두 점 P, Q에서 만난다. 두 점 P, Q의  $x$ 좌표를 각각  $a_n, b_n$ 이  
 라 할 때,  $\sum_{k=1}^{10} \{(a_k+1)(b_k+1)\}$ 의 값을 구하시오. [4점]

27. 0, 1, 2, 3, ..., 9의 숫자가 각각 하나씩 적힌 10장의 카드 중에서  
 서로 다른 4장의 카드를 뽑아 일렬로 배열하였다. 홀수 2개, 짝수 2개  
 가 배열되었을 때, 홀수는 홀수끼리 짝수는 짝수끼리 인접할 확률을  $\frac{q}{p}$   
 라 하자. 이때,  $p+q$ 의 값을 구하시오. (단,  $p, q$ 는 서로소인 자연수이  
 고, 0은 짝수로 생각한다.) [4점]

28. 어느 지역에서 두 사안 A, B에 대한 찬성비율을 조사하기 위하여 100명을 임의추출하였더니 두 사안 A, B에 대하여 찬성하는 사람의 수가 각각 40명,  $n$ 명이었다. 두 사안 A, B에 각각 찬성하는 사건이 서로 독립일 때, 이 지역 사람이 두 사안 A, B에 모두 찬성하는 비율을 신뢰도 95%로 추정하였더니 신뢰구간이  $[0.1216, 0.2784]$ 이었다. 이때 자연수  $n$ 의 값을 구하시오. (단,  $P(|Z| \leq 1.96) = 0.95$ 이다.) [4점]

29. 좌표공간 위에 직선  $l: \frac{x}{2} = k(y-1) = \frac{z+1}{2}$ 과 직선  $l$ 에 수직인 벡터  $\vec{PQ} = (1, 2, -2)$ 가 놓여 있다. 점 P에서 직선  $l$ 에 내린 수선의 발 R(2, 2, 1)에 대하여 세 점 P, Q, R로 만들어지는 평면의 방정식은  $ax+by+cz=1$ 이다. 이때  $16(a+b+c)$ 의 값을 구하시오. (단, 세 점 P, Q, R는 한 직선 위에 있지 않다.) [4점]

30. 그림과 같이 반지름의 길이가 6인 두 구가 밑면의 반지름의 길이가 6이고 높이가 12인 원기둥을 사이에 두고 서로 접하며 일렬로 놓여 있다. 또, 이 세 도형이 직육면체 ABCD-EFGH에 내접하고 있다. 두 모서리 AB, GH를 포함하는 평면  $\alpha$ 로 세 도형을 자를 때, 두 구와 원기둥에 만들어지는 세 단면의 넓이의 합은  $(a\sqrt{10}+b)\pi$ 이다. 이때  $a+5b$ 의 값을 구하시오. (단,  $a, b$ 는 유리수이다.) [4점]



※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.