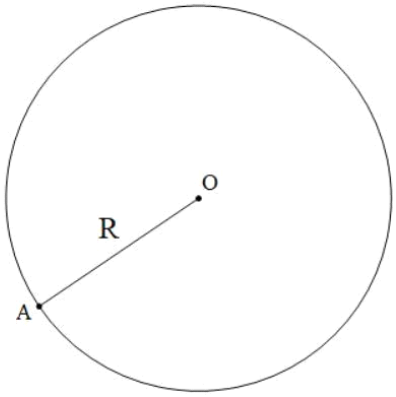
평면기하 정리

# Ⅱ. 원 : 길이

## 2. 원과 길이

한 원 위에 있는 점들로부터는 각에 관한 정보 뿐만 아니라 길이에 관한 정보 역시 얻을 수 있습니다. 이때 길이 관계에 있어서 핵심이 되는 것은 바로 반지름입니다. 원의 반지름을 $R$, 원의 중심을 $O$, 원 위의 한 점을 $A$라 했을 때 원의 정의에 의해 다음이 자명하게 성립합니다.

$$\overline{OA} = R$$




원과 관련하여 길이를 구하게 될 때는 많은 경우 이 자명한 사실로부터 출발하게 됩니다. 즉, 원이 주어져 있고 특정 선분들의 길이를 구하게 되는 문제라면 원의 반지름을 구하는 것을 목표로 하는 것이 좋습니다.

이제 반지름을 바탕으로 현의 길이를 구하는 법을 알아보겠습니다.

원 위의 두 점 $A, B$에 대하여 $\angle AOB = 2\theta$일 때, 다음 식이 성립합니다.

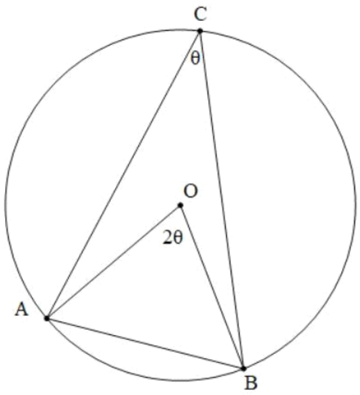
$$\overline{AB} = 2R\sin\theta$$

증명은 $O$에서 $\overline{AB}$에 수선의 발을 내리면 쉽게 할 수 있습니다. 위 식에 대해 곰곰이 생각해보면, 위 식은 결국 중심각과 반지름의 크기만 안다면 현의 길이를 알 수 있음을 의미한다는 것을 알 수 있습니다. 그리고 중심각은 원주각의 두배이므로, 원주각의 크기와 반지름을 안다면 현의 길이를 알 수 있습니다. 구체적으로 원 위의 세 점 $A, B, C$에 대하여 $\angle ACB = \theta$일 때, 다음이 성립합니다.

$$\overline{AB} = 2R\sin\theta$$

위의 식은 결국 사인 법칙과 같은 내용임을 알 수 있습니다.

또한 위의 식을 반지름 관점에서 본다면, 현의 길이와 원주각(또는 중심각)의 크기를 안다면 반지름을 구할 수 있음을 알 수 있습니다. 즉 원에서 길이와 각은 반지름을 매개로 서로 연결됩니다.




이번 칼럼과 지난 칼럼에서는 원에서 각과 길이에 대한 정보를 얻을 수 있는 방법에 대해 살펴보았습니다. 다시 한번 정리하자면, 원 위의 점들이 우리에게 유용한 이유는 이를 통해 각에 관한 다양한 정보들을 얻을 수 있을뿐더러, 반지름을 매개로 하여서 각에 관한 정보를 길이에 관한 정보로 바꿀 수 있기 때문입니다. 앞으로 원을 활용한 문제에서 이러한 점들을 고려하면서 문제를 해결해 나가면 유용한 정보들을 훨씬 쉽게 찾아낼 수 있을 것입니다.

마지막으로 원과 길이에 관하여 중요한 정리인 방멱 정리를 살펴보겠습니다. 방멱 정리의 기본적인 형태는 다음과 같습니다. 원 밖의 고정된 한점 $X$에 대하여, $X$를 지나는 직선이 원과 만나는 두 점을 $A, B$라 둡시다. 이때 다음이 성립합니다.

$\overline{XA} \times \overline{XB}$는 일정

다르게 표현하면, 원 위의 네 점 $A, B, C, D$에 대하여 $\overleftrightarrow{AB}$와 $\overleftrightarrow{CD}$의 교점이 $X$ 일 때 다음이 성립합니다.

$\overline{XA} \times \overline{XB} = \overline{XC} \times \overline{XD}$

원 밖의 한 점에서 원에 그은 두 직선에 관한 문제가 나온다면 방멱 정리를 활용할 수 있습니다.