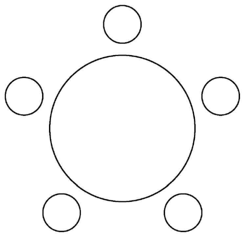
14. 다섯 명이 둘러앉을 수 있는 원 모양의 탁자와 두 학생 A, B를 포함한 8명의 학생이 있다. 이 8명의 학생 중에서 A, B를 포함하여 5명을 선택하고 이 5명의 학생 모두를 일정한 간격으로 탁자에 둘러앉게 할 때, A와 B가 이웃하게 되는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점]

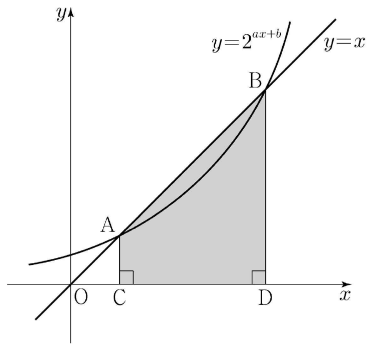
① 180 ② 200 ③ 220 ④ 240 ⑤ 260

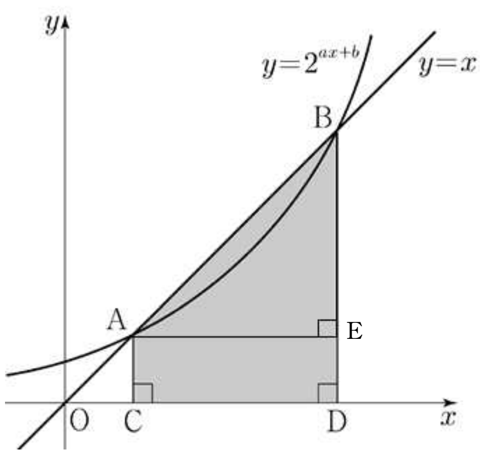


일단 A,B를 제외한 앉힐 3명을 골라주자. $\therefore {}_6C_3 = 20$
그 뒤 A,B를 먼저 앉혀두고 나머지 세 명을 배열해주자 $\therefore 3!$
A,B 는 자리 바꿀 수 있다. $\therefore \times 2$
해서 정답은 $20 \times 3! \times 2 = 240$

15. 곡선 $y=2^{ax+b}$과 직선 $y=x$가 서로 다른 두 점 A, B에서 만날 때, 두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=6\sqrt{2}$이고 사각형 ACDB의 넓이가 30일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$





$y=x$이므로 기울기가 1인 직선이다.
해서 $\overline{\mathrm{AB}}=6\sqrt{2}$에서 $\overline{\mathrm{AE}}=\overline{\mathrm{BE}}=6$임을 알 수 있다.

문제에서 넓이가 30이라 했으므로 $\overline{\mathrm{AC}}=k$, $\overline{\mathrm{BD}}=6+k$
라 두고 사다리꼴넓이를 구해보면 $k=2$임을 알 수 있다.

해서 점 A와 점 B의 좌표를 구할 수 있다.
$\therefore \mathrm{A}(2,2), \mathrm{B}(8,8)$

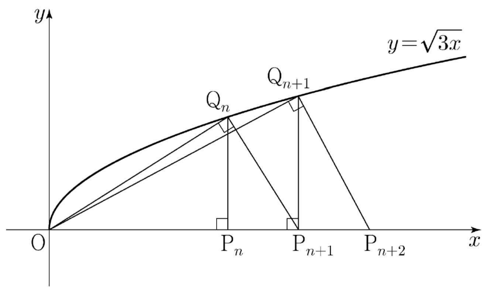
두 점은 곡선과 직선의 교점이므로 대입하면 성립한다.
$\therefore 2^{2a+b}=2, 2^{8a+b}=8$
$\therefore 2a+b=1, 8a+b=3$ 해서 $a=\frac{1}{3}, b=\frac{1}{3}$임을
알 수 있다.

$\therefore a+b=\frac{2}{3}$

16. 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 x축 위의 점 P_n과 곡선 $y=\sqrt{3x}$ 위의 점 Q_n이 있다.

- 선분 OP_n과 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$이 서로 수직이다.
- 선분 OQ_n과 선분 $\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}$이 서로 수직이다.

다음은 점 P_1의 좌표가 $(1, 0)$일 때, 삼각형 $\mathrm{OP}_{n+1}\mathrm{Q}_n$의 넓이 A_n을 구하는 과정이다. (단, O는 원점이다.)



모든 자연수 n에 대하여 점 P_n의 좌표를 $(a_n, 0)$이라 하자.
$\overline{\mathrm{OP}_{n+1}}=\overline{\mathrm{OP}_n}+\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$이므로

$$a_{n+1}=a_n+\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$$

이다. 삼각형 $\mathrm{OP}_n\mathrm{Q}_n$과 삼각형 $\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$이 닮음이므로

$$\overline{\mathrm{OP}_n} : \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n} = \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n} : \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$$

이고, 점 Q_n의 좌표는 $(a_n, \sqrt{3a_n})$이므로

$$\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}=\boxed{(\text{가})}$$

이다. 따라서 삼각형 $\mathrm{OP}_{n+1}\mathrm{Q}_n$의 넓이 A_n은

$$A_n=\frac{1}{2}\times\left(\boxed{(\text{나})}\right)\times\sqrt{9n-6}$$

이다.

위의 (가)에 알맞은 수를 p, (나)에 알맞은 식을 $f(n)$이라 할 때, $p+f(8)$의 값은? [4점]

① 20 ② 22 ③ 24 ④ 26 ⑤ 28

★★★이런문항에서 (가)와 (나)를 "직접 계산해서"풀면 안된다. 출제의도가 결국엔 추론이기 때문에 서술된 것을 "따라가서" 빈칸을 해결하는 것이 맞다.

(가) 빈칸위를 보면 비례식을 줬고, 빈칸에서 묻는 것은 $\overline{\mathrm{P_nP_{n+1}}}$이므로 결국 주어진 비례식에서 $\overline{\mathrm{P_nP_{n+1}}}$을 구해내야 한다.

$$\therefore \overline{\mathrm{P_nP_{n+1}}}=a_{n+1}-a_n=\frac{\overline{\mathrm{P_nQ_n}}\times\overline{\mathrm{P_nQ_n}}}{\overline{\mathrm{OP_n}}}=\frac{\sqrt{3a_n}\times\sqrt{3a_n}}{a_n}$$

해서 $a_{n+1}-a_n=3$이 된다. $\therefore$ (가)$=3$

이는 곧 등차수열을 의미하므로 $a_n=3n-2$인 것을 알 수 있다.

마지막으로 묻는 것은 넓이이고
$A_n=\frac{1}{2}\times 3n+1\times\sqrt{9n-6}$ 이 되므로 (나) $=3n+1$이 된다.

17. $\angle\mathrm{A}=90°$이고 $\overline{\mathrm{AB}}=2\log_2 x$, $\overline{\mathrm{AC}}=\log_4\frac{16}{x}$인 삼각형 ABC의 넓이를 $S(x)$라 하자. $S(x)$가 $x=a$에서 최댓값 M을 가질 때, $a+M$의 값은? (단, $1<x<16$) [4점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

바로 계산해서 구해보자.
$$S(x)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AC}}=\frac{1}{2}\times 2\log_2 x\times\log_4\frac{16}{x}$$
식을 좀 손보면, $\log_2 x\times\frac{1}{2}(4-\log_2 x)$ 임을 알 수 있다.

이해하기 쉽게 $\log_2 x=t$라 하면, $S(x)=\frac{t(4-t)}{2}$가 되어 최고차항계수가 음수인 이차함수 꼴을 떠올릴 수 있다.

그럼 당연히 $t=2$일 때 넓이가 최대가 될 것이고
$t=\log_2 x$이므로 $t=2$이려면 $x=4$여야 한다. $\therefore a=4$

$S(4)=2=M$이므로 $a+M=6$

18. 최고차항의 계수가 a인 이차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

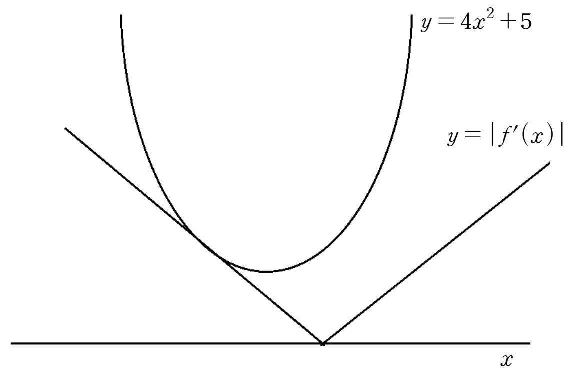
$$|f'(x)| \leq 4x^2+5$$

를 만족시킨다. 함수 $y=f(x)$의 그래프의 대칭축이 직선 $x=1$일 때, 실수 a의 최댓값은? [4점]

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

$|f'(x)|$는 직선을 접어올렸는데 아무튼 직선이고 $4x^2+5$는 곡선이므로 이 문항은 직선과 곡선을 비교하는 문항이다.

그러므로 당연히 곡선과 직선의 접하는 상황을 의심할 수 밖에 없고, 이를 염두하여 그래프를 그려보면 된다.



해서 위와 같은 상황이 되야함을 알 수 있다.
($y=4x^2+5$의 축은 $x=0$이고 $f'(x)$는 $x=1$에서 대칭이므로 $x<1$에서 접함을 알 수 있다.)

접점의 x좌표를 t라 두고 계산해보자.
접선의 방정식은, $y=8t(x-t)+4t^2+5$
이 접선의 방정식이 $(1,0)$을 지나므로 대입하면 성립한다.
$0=-4t^2+8t+5$ 에서 $t=-\frac{1}{2}$임을 알 수 있다.

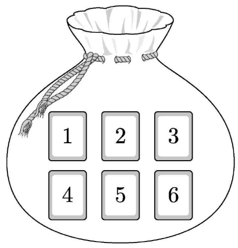
해서 접선의 방정식은 $y=-4\left(x+\frac{1}{2}\right)+6=-4x+4$이고
이는 곧 $f'(x)$이므로 $f(x)=2x^2+4x+c$임을 알 수 있다.
정답은 2

19. 1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 두 장의 카드를 동시에 꺼내어 적혀 있는 수를 확인한 후 다시 넣는 시행을 두 번 반복한다. 첫 번째 시행에서 확인한 두 수 중 작은 수를 a_1, 큰 수를 a_2라 하고, 두 번째 시행에서 확인한 두 수 중 작은 수를 b_1, 큰 수를 b_2라 하자. 두 집합 A, B를

$$A=\{x \mid a_1 \leq x \leq a_2\},\quad B=\{x \mid b_1 \leq x \leq b_2\}$$

라 할 때, $A \cap B \neq \varnothing$일 확률은? [4점]

① $\frac{3}{5}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{11}{15}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{13}{15}$



글쎄. 확통은 항상 풀이가 다양할 수 있어서, 꼭 빠른 풀이로만 풀려는 생각보단 본인에게 맞는 풀이로 연습하는 것이 좋다.
내풀이는 다음과 같다.

a_1, a_2, b_1, b_2는 이미 순서가 정해져 있다. 즉 뽑기만 하면 알아서 a_1인지 a_2인지가 정해지므로 굳이 순서를 정할필요는 없다. 해서 분모는 ${}_6C_2 \times {}_6C_2$가 된다.

그런데 $A \cap B \neq \varnothing$인 확률은 1에서 $A \cap B = \varnothing$인 경우를 빼면 되므로(여사건) $A \cap B = \varnothing$인 경우를 구해보자.
(대충 보기 슥 봤을 때 보기가 $\frac{13}{15}$처럼 1에 매우 가까우면 여사건이 유용할 수 있다.)

A와 B가 겹치지 않으려면 결국 a_1, a_2, b_1, b_2가 모두 다르면 된다. 해서 분자는 ${}_6C_4 \times 2$가 된다.
(${}_6C_4$해서 서로 다른 4개의 수를 뽑은 뒤에 앞에꺼 2개, 뒤에꺼 2개로 나누면 각각 $(a_1, a_2), (b_1, b_2)$ 혹은 $(b_1, b_2), (a_1, a_2)$가 된다.

$$\therefore 1-\frac{2 \times {}_6C_4}{{}_6C_2 \times {}_6C_2}=\frac{13}{15}$$

20. 실수 전체의 집합에서 연속인 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(x) \geq g(x)$
>
> (나) $f(x)+g(x)=x^2+3x$
>
> (다) $f(x)g(x)=(x^2+1)(3x-1)$

$\int_0^2 f(x)dx$의 값은? [4점]

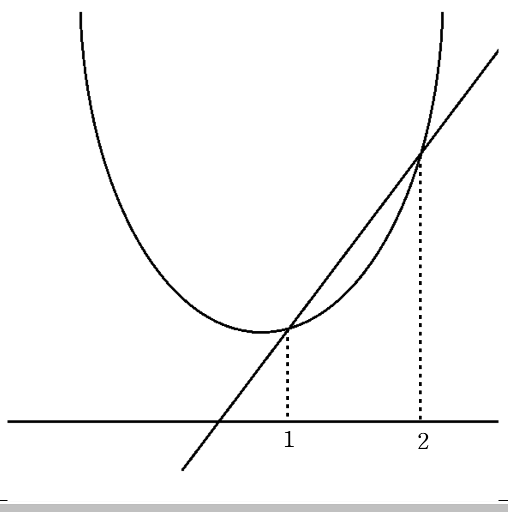
① $\frac{23}{6}$ ② $\frac{13}{3}$ ③ $\frac{29}{6}$ ④ $\frac{16}{3}$ ⑤ $\frac{35}{6}$

두 함수 $f(x)$,$g(x)$의 식을 구해내는 방법은 두 가지가 있을 것이다.

첫 번째 : 인수분해된 꼴
(다)에서 우변이 인수분해된 형태이므로 좌변도 인수분해가 가능해야 한다. 해서 $f(x), g(x)$는 무조건 $x^2+1, 3x-1$ 중 각각 하나이다. 또한 이를 곧 (나)조건에 넣어보면 성립함을 알 수 있다. (물론 $f(x)$,$g(x)$가 다항함수라는 전제가 깔려있어야 할 것)

두 번째 : 식변형 후 조합
(나)에서 $g(x)=x^2+3x-f(x)$이므로 (다)에 대입하면
$f(x)\{x^2+3x-f(x)\}=(x^2+1)(3x-1)$이 된다.
좌변 전개 후 넘겨주면,
$\{f(x)\}^2-(x^2+3x)f(x)+(x^2+1)(3x-1)=0$
인수분해 해주면
$\{f(x)-(x^2+1)\}\{f(x)-(3x-1)\}=0$임을 알 수 있다.

그런데 $f(x)=x^2+1$이든 $f(x)=3x-1$이든 (가)조건을 만족할 수 없다.
만약 $f(x)=x^2+1$이고 $g(x)=3x-1$이면
$x^2+1 \geq 3x-1$ 이여야 하는데 이는 성립하지 않는다.



그러므로 결국 $0 \leq x \leq 1$에선 $f(x)=x^2+1$을 $1 \leq x \leq 2$에선 $f(x)=3x-1$ 을 따라야 함을 알 수 있다.

해서 $\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 x^2+1\,dx + \int_1^2 3x-1\,dx = \frac{29}{6}$가 된다.

(20,21,29,30번 급에서 $\int_0^3 f(x)dx$꼴의 질문이 등장하면 높은 확률로 $f(x)$가 구간별로 정의된 함수입니다.
당연하지 않을까요? 설마 풀이가 $f(x)=x$이므로 적분하면 답이다 끝 이럴까요...)

★★★이 문제를 두고 앞으로의 두달을 좀 잘 설정해볼 필요가 있다.
1. 난 이런 아이디어를 좀 경험해봐야만 풀 수 있을 것 같다.
= 기출은 그만 덮고 N제 푸세요. 뭘풀까요? 일단 푸세요. 유명한거 위주로. 적중을 바라고 풀지마세요.

2. 내가 아는 것만으로 "경험이 없는(=신유형?)"문제를 풀어내고 싶다.
= N제 푸세요. 다만 풀이가 막히는 문항을 만났을 때 해설지보지말고 고민하시고 고민하는 과정은 소설쓰는게 아니라 결국 내가아는 것으로 귀결된다 라는 가정하에 고민하세요. N제를 푸는 이유는 위와같은 고민을 거쳐 사고를 확장하려함입니다. 쌓이는 경험은 부수적인 덤

3. 이 문제를 풀 때 고민을 많이 했으나 100분안에 풀지못함.
= 이 부류의 학생을 모두 같게 묶을 생각은 전혀없는데, 왜냐하면 다음 세가지로 나뉘기 때문이다.
1) 고민하되 한가지 고민을 못벗어남(고민의 전환이 없음)
 - 고민하는 연습이 필요. 이제 실전모의 풀면서 꼭 연습해야함
2) 이것저것 고민을 하면서 전환은 잘되는데 막상 고민한거 보면 출제될리 없는 소설쓰는 경우
 - 이것도 스스로 그런 고민을 좀 억누르는 학습이 필요
 - 역시 실전모의가 그 역할을 할 것.
3) 정해진 틀 내에서 80%를 맞게 접근하고 조금의 시간만 더있었으면 끝에 다다를 수 있는 학생들
 - 사실 거의 완성된 단계지만 그 100분내에 고민을 완료하는 단계를 가기위해서 계속 훈련을 해야합니다. 답답하고 하겠지만 지름길은 없습니다. 무던히 N제 풀고 고민하고 오답하고 고민하고 오답하고 해야해요. 그리고 현장에서도 계속 주문을 외워야합니다.
'결국 끝나고 해설보면 "이걸왜ㅠㅠ"하면서 머리한대칠 문제일거야..'

21. 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2}=\begin{cases}2a_n+a_{n+1} & (a_n \le a_{n+1})\\ a_n+a_{n+1} & (a_n > a_{n+1})\end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_3=2$, $a_6=19$가 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① $-\frac{1}{2}$　② $-\frac{1}{4}$　③ 0　④ $\frac{1}{4}$　⑤ $\frac{1}{2}$

두가지 풀이가 있습니다.
1. 식변형x
2. 식변형o

1부터 갑시다.
결국 a_1, a_2에 대한 정보는 아무것도 모른채로 시작해야하므로
가정하는 수밖에 없습니다.
그런데 a_1, a_2모두 음수인 경우는 어떤식으로든 a_3이 음수가
나오므로 말이 안되고, 결국 아래 4가지만 가능합니다.

1) $0<a_1<a_2$
그러면 $a_3=2a_1+a_2$ 인데 둘다 양수이므로 $a_2<a_3$이 됩니다.
해서 $a_4=2a_2+a_3$인데 이는 곧 $a_3<a_4$라는 것입니다.
해서 $a_5=2a_4+a_3, a_6=2a_5+a_4$까지 무난하게 갑니다.
$\therefore a_6=6a_2+5a_3=19$, $a_2=\frac{3}{2}$이고 $a_3=2a_1+a_2$이므로
$a_1=\frac{1}{4}$

2) $0<a_2<a_1$
이러면 $a_3=a_1+a_2$이지만 어차피 $a_2<a_3$이므로
$a_4=2a_2+a_3$이 되어 1)과 똑같이 진행됩니다. 해서
$a_2=\frac{3}{2}, a_1=\frac{1}{2}$이 되지만 조건에 부합하지 않으므로 실패

3) $a_1<0<a_2$
이러면 $a_3=2a_1+a_2$가 되고 $a_3=2, a_1<0$이므로
$a_1<0<a_3<a_2$가 됩니다. 해서 $a_4=a_2+a_3$
그런데 a_2, a_3모두 양수이므로
$a_1<0<a_3<a_2<a_4$가 됩니다. 해서 $a_5=2a_3+a_4$
$\therefore a_6=2a_4+a_5$ 해서 정리하면 $a_2=3, a_1=-\frac{1}{2}$

4) $a_2<0<a_1$
이러면 $a_3=a_1+a_2$가 되고 a_3은 무조건 양수이므로
$a_2<0<a_3<a_1$가 됩니다. 해서 $a_4=a_2+a_3$이 되고
$a_2<0<a_4<a_3<a_1$이 됩니다. 해서 $a_5=a_3+a_4$이고
$a_2<0<a_4<a_3<a_1<a_5$가 됩니다. 해서
$a_6=2a_5+a_4$인데 정리하면 $a_2=a_1=1$이 되어 조건에 부합x

식변형 풀이로 가봅시다. 최근 수능과 평가원이
약간의 식변형을 요구했고 그 기준은 중복된 항이였습니다.

위 식에서 a_{n+1}이 중복되는 항이므로 넘겨주면
$a_{n+2}-a_{n+1}=\begin{cases}2a_n & (a_n \le a_{n+1})\\ a_n & (a_n > a_{n+1})\end{cases}$ 가 됩니다.
이제 $a_1, a_2, 2, a_4, a_5, 19$에서 문제를 풀어나가면 됩니다.
2와 19사이에서 먼저 풀어보면, a_4와 2와의 관계를 모르므로
두가지 경우가 가능합니다.

1) $a_5-a_4=2$
2) $a_5-a_4=4$
a_4를 t라고 하면
1)의 경우는, $a_1, a_2, 2, t, t+2, 19$
2)의 경우는, $a_1, a_2, 2, t, t+4, 19$
가 됩니다. 그런데 $t<t+2$, $t<t+4$이므로
$19-a_5=2a_4$입니다.
1)에서는 $19-(t+2)=2t$, $t=\frac{17}{3}$ (성립x)
2)에서는 $19-(t+4)=2t$, $t=5$ (성립O)

해서 $t=5$임을 정확히 알 수 있습니다.
이제 a_1, a_2도 같은 방식으로 구해주면 됩니다.

그간의 출제상황으로 봐서 식변형이 좀더 부합하는 풀이였으나
애시당초 초반시작부분에 대한 조건이 없는상태에선
하나하나 가정하고 들어가는게 습관이 되어있어야 합니다.
첫 번째로 바로 풀어내도 매우 훌륭하다고 봅니다.

26. 방정식 $x^3-x^2-8x+k=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2일 때, 양수 k의 값을 구하시오. [4점]

좀 어렵게 나왔으면 하는 문항입니다.
$x^3-x^2-8x=-k$로 정리하면 좌변의 삼차함수의 극솟값이 $-k$여야 합니다. 계산해보면 $k=12$

27. 두 이산확률변수 X, Y의 확률분포를 표로 나타내면 각각 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	b	c	d	1

Y	11	21	31	41	합계
$\mathrm{P}(Y=y)$	a	b	c	d	1

$\mathrm{E}(X)=2$, $\mathrm{E}(X^2)=5$일 때, $\mathrm{E}(Y)+\mathrm{V}(Y)$의 값을 구하시오. [4점]

확률변수 X는 1,2,3,4로만 구성되어 있고,
확률변수 Y는 11,21,31,41로만 구성되어 있다.
해서 $Y=10X+1$임을 알 수 있다.

그러므로 구하려 하는 $E(Y)=E(10X+1)=10E(X)+1=21$ 이고
$V(Y)=V(10X+1)=100V(X)=100(E(X^2)-(E(x))^2)=100$ 임을 알 수 있다.
더하면 정답은 121

28. 함수 $f(x)=-x^2-4x+a$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_0^x f(t)dt$$

가 닫힌구간 $[0,1]$에서 증가하도록 하는 실수 a의 최솟값을 구하시오. [4점]

$g(x)$가 증가하는 함수이므로 $g'(x)\geq 0$이어야 한다.
$g'(x)=f(x)\geq 0$이므로 $-x^2-4x+a\geq 0$을 만족해야 한다.
$x=0$에서 $a\geq 0$, $x=1$에서 $-5+a\geq 0$이므로
모두 만족하는 a의 최솟값은 5이다.

29. 흰 공 4개와 검은 공 6개를 세 상자 A, B, C에 남김없이 나누어 넣을 때, 각 상자에 공이 2개 이상씩 들어가도록 나누어 넣는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 색 공끼리는 서로 구별하지 않는다.) [4점]

풀이에 앞서, 흰공과 검은 공을 “일부” 미리주고 나머지를 뿌리는 행위는 매우 위험하다.
흰공과 검은공을 한 개씩 상자에 넣어두고 나머지를 뿌리는 것과 검은 공만 두 개씩 상자에 넣어둔뒤 나머지 흰공을 뿌리는 것은 겹치는 상황이 생기기 때문이다.

해서 항상 흰공과 검은공을 한번에 줘야 한다.

물론 그러면 너무 복잡하다. 그럼 과정을 좀 더 세분화해서 복잡함을 줄여보자.

흰공과 검은공을 같이 줄 수 없다면 흰공 따로 그 뒤에 검은 공 따로 주자. 이건 절대 겹칠 수 없다.
해서 흰공을 먼저 넣어주면 나머지 부분은 검은 공이 채워줄 것이다.

그런데, 흰 공을 넣는 경우는 다음과 같이 나뉜다.

1. 4/0/0
흰 공 4개를 넣을 상자를 정한 뒤 나머지 두 상자엔 알아서 검은공 2개씩 넣어주고 이제 남은 검은 공 2개를 뿌려주면 된다.
$\therefore 3 \times {}_3H_2$

2. 3/1/0
흰 공 3개와 1개를 넣을 상자를 정한 뒤에 흰 공 1개 들어간 상자에는 검은 공 하나, 아무것도 들어가지 않은 상자엔 검은 공 두 개를 자동으로 넣어주고 남은 검은 공 3개를 뿌려주자.
$\therefore 6 \times {}_3H_3$

3. 2/2/0
흰 공이 들어가지 않을 상자를 정한 뒤에 흰 공이 들어가지 않은 상자에 검은 공 2개를 자동으로 넣어주고 남은 검은 공 4개를 뿌려주자.
$\therefore 3 \times {}_3H_4$

4. 2/1/1
흰 공이 두 개 들어갈 상자를 정한 뒤에 나머지 상자에 검은 공을 한 개 씩 넣어주고 남은 검은 공 4개를 뿌려주자.
$\therefore 3 \times {}_3H_4$

다더하면 정답 168

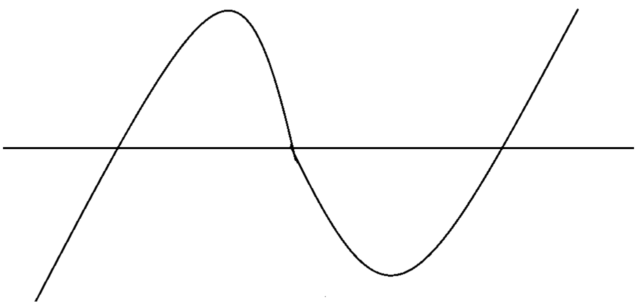
30. 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(1)=f(3)=0$
>
> (나) 집합 $\{x \mid x \geq 1$이고 $f'(x)=0\}$의 원소의 개수는 1이다.

상수 a에 대하여 함수 $g(x)=|f(x)f(a-x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $\dfrac{g(4a)}{f(0)\times f(4a)}$의 값을 구하시오. [4점]

(가)를 통해 삼차함수 $f(x)$가 x축과 최소 2개의 점에서 만난다는 것을 알 수 있다.
그런데 (나)에서, $x \geq 1$에서 기울기가 0인 순간이 한번밖에 없다 했으므로, $x=1$에서 접하거나 $x=3$에서 접하는 개형은 불가능하다.

해서 다음과 같이 $x=1, x=3$외에 $x=k\,(k<0)$에서 x축과 만나는 함수를 생각해 볼 수 있다.



그러므로 $f(x)=(x-1)(x-3)(x-k)$라 둘 수 있다.
(최고차항계수는 어차피 약분되므로 생략)

그런데 $g(x)=|f(x)f(a-x)|$에서 $f(x)$는 삼차함수이고 $f(a-x)$도 결국 삼차함수이므로 $f(x)f(a-x)$는 항 6개가 곱해져있는 다항함수이다.
그런데 $(\ )^1$꼴이 있으면 그 점에서 미분이 불가능하므로 $f(x)f(a-x)$는 $(\ )^1$이 없어야 한다.

그런데 이미 $f(x)$는 $x=1,3,k$에서 $(\ )^1$꼴이므로 곱해지는 $f(a-x)$가 $(x-1)(x-3)(x-k)$를 갖고 있어야 한다. 해서 $f(a-x)=(x-1)(x-3)(x-k)$가 된다.
그래서 $f(x)$에 x대신 $a-x$를 대입해서 답내도 되고, $f(x)=f(a-x)$이므로 결국 $f(x)$를 y축 평행이동한 뒤 $x=a$만큼 평행이동한 함수가 서로 같으므로 $x=\dfrac{a}{2}$에서 대칭인 삼차함수여야 함을 써도 된다. 그럼 결국 $k=-1$이고 $\dfrac{a}{2}=1$ 즉 $a=2$가 될 것이다.

끝. 너무 쉽다 답은 105

★★★★총평 및 앞으로..
앞으로의 학습방법은 칼럼으로 해서 올리겠습니다.
지금이 19일 새벽이니 이번주내로 올리겠습니다. 시간이 없으니깐요.
그전에 짤막하게 총평을 좀하자면,
현재 1컷 84로 잡혀있는 것은 조금 납득이 갈듯말 듯 안갑니다.
제 생각은 이렇습니다.
1. 29? 확통이지만 29번이니깐 거르고
2. 30번? 응 30번이니깐 걸러
3. 21번 만만해 보여서 건들여봤는데 케이스 너무많을것같아 패쓰
4. 여기에 20번발상안되었으면 84점/ 19번 확통이니깐 가볍게 실수해주면 84점 / 16번 빈칸흐름안따라가고 따로구하려다 틀리면 84점/
또 뭐있죠? 모르겠네
그 외에는 틀릴문항을 잘 모르겠고. 만약 212930 20 19 16 등 다 틀려줬으면.ㅠㅠ 괜찮아요. 근데 알겠죠 기출은 기본이고 그 다음을 꼭 해달라는거.

남은 두달간 꼭 문제풀이 곁들여주고, 바로바로 풀이가 안튀어나오는 부분 빨리 사고과정 정리하고 기출풀어줘서 메꿔주세요.

남들 다 모의고사 푼다고 나도 모의고사 풀어야지? 아닙니다
맞춰야 될 것을 못맞추고 있는데 모의고사 풀고있는건 아닙니다.
물론 모의고사도 n제 성격을 띄고 있으나 그럼 그냥 n제를 푸세요

모의고사는 누가푸냐.
1. 실력은 88~100인데 그대로 점수화 하질 못한다.(아래는 세부사항)
2. 실수가 많아서 100분내에 실수잡는 연습해보려한다.
3. 검토법을 어떻게 해야할지몰라 이것저것 연습해본다.
4. 다양한 문제배치를 익혀서 그에 따른 멘탈을 훈련한다.
5. 조금더 어렵게 풀어서 모래주머니 효과를 누리고 싶다.
6. 각 번호별로 몇 분 내에 들어오는지 대충의 이정표를 만들어서 수능날에 시간이 없는 일이 없도록 하려고
등등등등등등등
입니다.

본인이 그럴 상황인지 정확히 인지하고 앞으로의 학습을 해주길 바랍니다.

그리고 상위권학생들. 이번 30번정도는 풀 수 있게 준비해야합니다.
n제만 몇 번 풀어도 정말 많이나오는 유형인거 우리 알잖아요.
또한 경우의수 확률은 많이 풀어서 경험쌓는 것이 매우매우매우 중요하지만 제 해설처럼 일관된 접근이 중요합니다.
사관나형해설이랑 비교해보세요 접근은 다 동일합니다.

앞으로의 학습법칼럼을 통해 더 자세히 만나뵙도록 하겠습니다.
^^