25 이화여자대학교 모의[25)]

핵심개념 및 용어	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
부등식, 다항함수, 지수함수, 로그함수, 함수의 미분, 정적분, 정적분의 활용	자연계열-3개 영역 등급 합 6이내(한국사 제외) 의예과-4개 영역 등급 합 5이내(한국사 제외)	수학(3문항, 9문제)	100분

[문항 1] 부등식 $|y+|x-2|-4|+|y-|x+2|+4| \leq 4$을 만족하는 좌표평면 위의 점의 집합을 D라 할 때 다음 물음에 답하시오. [40점]

논제 1. 부등식 $(y+|x-2|-4)(y-|x+2|+4) \leq 0$을 만족하는 영역을 좌표평면 위에 나타내시오.

논제 2. 부등식 $2y+|x-2|-|x+2| \leq 4$을 만족하는 영역을 좌표평면 위에 나타내시오.

논제 3. 집합 D의 영역을 좌표평면 위에 나타내고 넓이를 구하시오.

25) 이화여자대학교 홈페이지

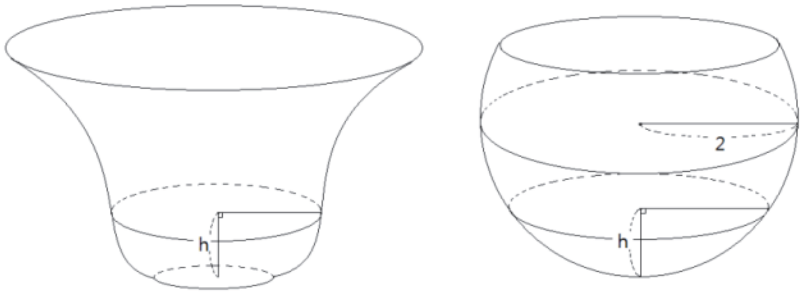
[문항 2] 함수 $f(x)=\ln(e^x+1)$ 이며 $g(x)=x^2-2x+a$ 이다. (단, $\ln x$ 는 자연로그이며 a 는 실수이다.) 합성함수 $h(x)=(f\circ g)(x)$ 에 대하여 아래 물음에 답하시오. [30점]

논제 1. 합성함수 $h(x)$ 가 일대일 대응이 되고 $h'(x)\geq 0$ 가 되는 실수 x 의 최대범위를 정하시오.

논제 2. [논제 1]에서 정한 x 의 범위에서 합성함수 $h(x)$ 의 최솟값이 1 이라고 할 때 실수 a 의 값을 구하시오.

논제 3. [논제 1]에서 정한 x 의 범위에서 합성함수 $h(x)$ 의 역함수를 $x=h^{-1}(y)$ 라고 하자. y 의 값이 $\ln(1+e^a)$ 일 때, $\dfrac{dx}{dy}$ 의 값을 구하시오.

[문항 3] 아래 그림과 같이 높이가 3인 그릇이 두 개 있다. 왼쪽 그릇의 높이가 h인 지점에서 밑면에 평행하게 자른 단면은 반지름이 $\sqrt{\frac{1}{2}+2h-4h^2+4h^3}$ 인 원이다. 오른쪽 그릇은 반지름이 2인 구의 윗부분이 밑면에 평행하게 잘린 모양이다. [30점]



논제 1. 두 그릇의 부피를 구하시오.

논제 2. 두 그릇에 담긴 물의 높이 $h=1$일 때, 두 그릇에 담긴 물의 부피를 구하시오.

논제 3. 두 그릇에 높이가 같도록 물을 담을 때, 각각의 그릇에 담긴 물의 부피가 같아지는 높이가 있음을 보이시오.

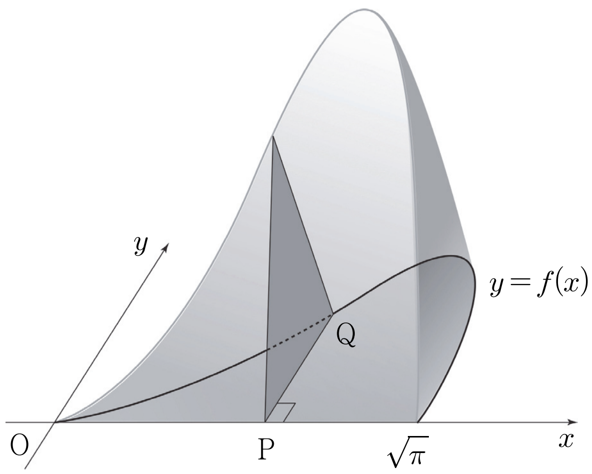
풀어보기

문제1. 연립부등식 $\begin{cases} x^2+y^2-9 \le 0 \\ (\sqrt{3}x-y)(\sqrt{3}x+y) \le 0 \end{cases}$ 을 만족시키는 점 (x, y)가 좌표평면 위에 나타내는 영역의 넓이는? (2010. 11월 전국연합)

① 2π ② 3π ③ 4π ④ 5π ⑤ 6π

문제2. 함수 $f(x)=(x+1)^{\frac{3}{2}}$과 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $g(x)$에 대하여 함수 $h(x)$를 $h(x)=(g \circ f)(x)$라 하자. $h'(0)=15$일 때, $g'(1)$의 값을 구하시오.
(2013. 6월 평가원)

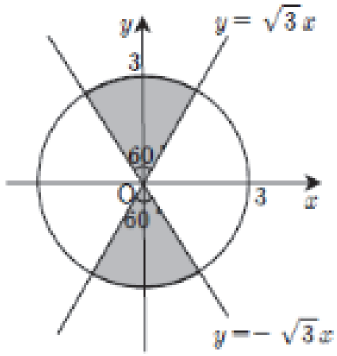
문제3. 그림과 같이 함수 $f(x)=\sqrt{x(x^2+1)\sin(x^2)}$ $(0 \le x \le \sqrt{\pi})$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 두 점 $\mathrm{P}(x, 0)$, $\mathrm{Q}(x, f(x))$를 지나고 x축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면이 선분 PQ를 한 변으로 하는 정삼각형이다. 이 입체도형의 부피를 구하시오.
(2016. 4월 전국연합)



예시답안

풀어보기(문제1)　정답 ②

연립부등식 $\begin{cases} x^2+y^2-9 \le 0 \\ (\sqrt{3}x-y)(\sqrt{3}x+y) \le 0 \end{cases}$ 을 만족시키는 점 (x, y)를 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



따라서 구하는 영역의 넓이는

$$9\pi \times \frac{120^\circ}{360^\circ} = 3\pi$$

풀어보기(문제2)　정답 10

$h'(x)=g'(f(x))f'(x)$ 이므로 $h'(0)=g'(f(0))f'(0)=g'(1)f'(0)$ 이다.

이때, $f'(x)=\frac{3}{2}(x+1)^{\frac{1}{2}}$ 이므로 $f'(0)=\frac{3}{2}$ 이다.

따라서 $15=g'(1)\times\frac{3}{2}$ 이므로 $g'(1)=10$ 이다.

풀어보기(문제3)　정답 $\frac{\sqrt{3}(\pi+2)}{8}$

선분 PQ를 한 변으로 하는 정삼각형의 넓이 $S(x)$는

$$S(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}\left\{\sqrt{x(x^2+1)\sin(x^2)}\right\}^2$$

입체도형의 부피 V는

$$V=\int_0^{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{3}}{4}x(x^2+1)\sin(x^2)dx$$

$x^2=t$라 하면 $2x\frac{dx}{dt}=1$ 이고 $x=0$일 때 $t=0$, $x=\sqrt{\pi}$일 때 $t=\pi$ 이므로

$$V=\frac{\sqrt{3}}{8}\int_0^{\pi}(t+1)\sin t\,dt$$

$(\ u(t)=t+1,\ v'(t)=\sin t,\ u'(t)=1,\quad v(t)=-\cos t\ )$

$$V=\frac{\sqrt{3}}{8}\times\Big[-(t+1)\cos t\Big]_0^{\pi}-\frac{\sqrt{3}}{8}\int_0^{\pi}(-\cos t)dt\ =\frac{\sqrt{3}(\pi+2)}{8}$$

[문항1] 대학발표 예시답안

논제 1.

부등식 $(y+|x-2|-4)(y-|x+2|+4)\le 0$은 다음 두 영역으로 나누어진다.

(i) $y\le -|x-2|+4$ 이고 $y\ge|x+2|-4$

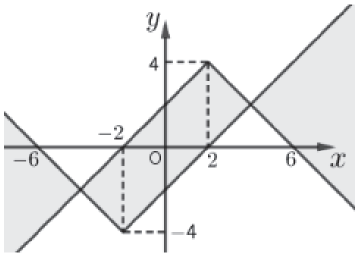
(ii) $y\ge -|x-2|+4$ 이고 $y\le|x+2|-4$

따라서 부등식을 만족하는 영역은 그래프 $y=-|x-2|+4$와 $y=|x+2|-4$에 의하여 분할된 좌표평면의 영역들 중 원점을 포함한 영역과 이 영역에 인접하지 않는 영역이다. 따라서 다음 두 집합

$\{(x,\ y)|-4\le x\le 4,\ |x+2|-4\le y\le-|x-2|+4\}$

$\{(x,\ y)|x\le\ -4$ 또는 $x\ge 4,\ -|x-2|+4\le y\le|x+2|-4\}$

의 합집합이며 구하는 영역은 아래와 같다.



논제 2.

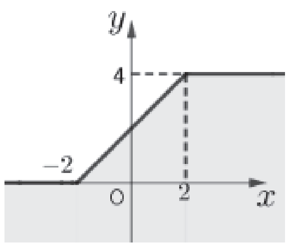
주어진 부등식 $2y+|x-2|-|x+2|\le 4$이 나타내는 영역은

$$y=\frac{|x+2|-|x-2|}{2}+2$$

의 그래프 아래쪽의 점들이다. x의 값에 따라 $x\le-2$, $-2<x<2$, $x\le 2$로 나누어서 식을 나타내면

$$y=\begin{cases}0 & (x\le-2)\\ x+2 & (-2<x<2)\\ 4 & (x\ge 2)\end{cases}$$

이다. 따라서 구하는 영역은 아래와 같다.



논제 3.

절댓값 부호를 풀기 위하여 아래와 같이 그래프 $y = -|x-2|+4$ 와 $y=|x+2|-4$ 로 나누어지는 좌표 평면의 영역을 생각한다.

(i) $y \geq -|x-2|+4$ 이고 $y \geq |x+2|-4$

(ii) $y \leq -|x-2|+4$ 이고 $y \leq |x+2|-4$

(iii) $y \leq -|x-2|+4$ 이고 $y \geq |x+2|-4$

(iv) $y \geq -|x-2|+4$ 이고 $y \leq |x+2|-4$

(ㄱ) [영역 (i)]

$y \geq -|x-2|+4$ 이고 $y \geq |x+2|-4$ 일 때 부등식을 풀면

$$y+|x-2|-4+y-|x+2|+4 \leq 4$$

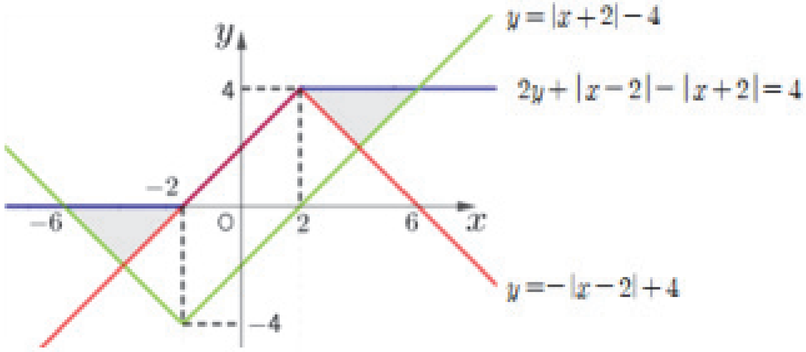
$$\Rightarrow 2y+|x-2|-|x+2| \leq 4$$

이다.

따라서 주어진 영역은 세 부등식

$$\begin{cases} y \geq -|x-2|+4 \\ y \geq |x+2|-4 \\ 2y+|x-2|-|x+2| \leq 4 \end{cases}$$

을 모두 만족하는 좌표 평면의 점으로 [논제 2]에 따라 구하는 영역은 다음과 같다.



(ㄴ) [영역 (ii)]

$y \leq -|x-2|+4$ 이고 $y \leq |x+2|-4$ 일 때, 부등식을 풀면

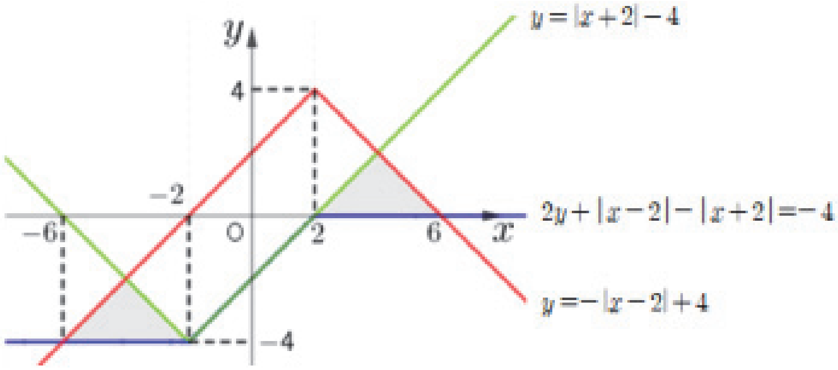
$$y+|x-2|-4+y-|x+2|+4 \geq -4$$

$$\Rightarrow 2y+|x-2|-|x+2| \geq -4$$

이다. 따라서 주어진 영역은 세 부등식

$$\begin{cases} y \leq -|x-2|+4 \\ y \leq |x+2|-4 \\ 2y+|x-2|-|x+2| \geq -4 \end{cases}$$

을 모두 만족하는 좌표 평면의 점으로 구하는 영역은 아래와 같다.



(ㄷ) [영역(iii)]

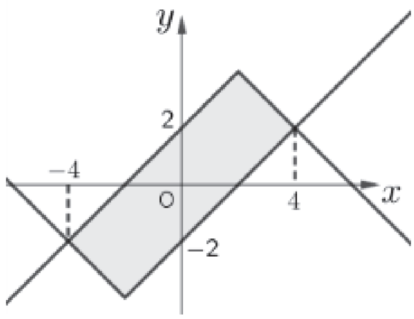
$y \leq -|x-2|+4$ 이고 $y \geq |x+2|-4$일 때, 부등식을 풀면

$$-y-|x-2|+4+y-|x+2|+4 \leq 4$$
$$\Rightarrow |x-2|+|x+2| \geq 4$$

이다. 주어진 영역에서 x는 $-4 \leq x \leq 4$이므로 부등식 $|x+2|+|x-2| \geq 4$이 항상 성립한다. 따라서 주어진 세 부등식

$$\begin{cases} y \leq -|x-2|+4 \\ y \geq |x+2|-4 \\ |x+2|+|x-2| \geq 4 \end{cases}$$

을 만족하는 좌표평면의 점의 집합은 주어진 영역과 같으며 아래 그림과 같다.



(ㄹ) [영역(iv)]

$y \geq -|x-2|+4$ 이고 $y \leq |x+2|-4$ 일 때, 부등식을 풀면

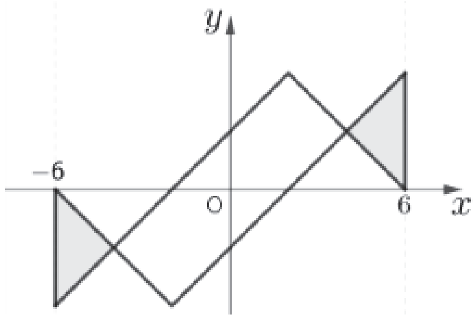
$$y+|x-2|-4-y+|x+2|-4 \leq 4$$
$$\Rightarrow |x+2|+|x-2| \leq 12$$

이다. 주어진 영역에서 $x \leq -4$이거나 $x \geq 4$이므로 부등식 $|x+2|+|x-2| \leq 12$를 $x \leq -4$에서 풀면 $-6 \leq x \leq -4$이다. 마찬가지로 부등식 $|x+2|+|x-2| \leq 12$를 $x \geq 4$에서 풀면 $4 \leq x \leq 6$이다.

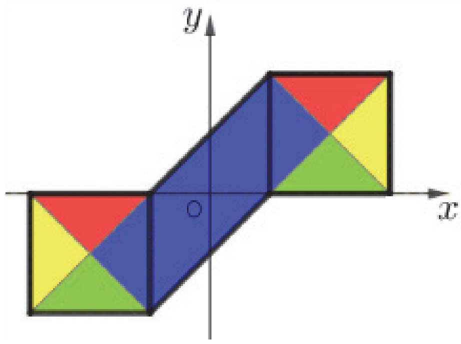
따라서 주어진 영역에서 구하는 부등식의 영역은 세 부등식

$$\begin{cases} y \geq -|x-2|+4 \\ y \leq |x+2|-4 \\ -6 \leq x \leq -4,\ 4 \leq x \leq 6 \end{cases}$$

을 만족하는 좌표평면의 점의 집합으로 아래 그림과 같다.



위 (ㄱ), (ㄴ), (ㄷ), (ㄹ)에서 구한 영역을 모두 합하여 구하는 부등식의 영역을 나타내면 아래와 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형 두 개와 밑변의 길이가 4이고 높이가 4인 평행사변형의 합집합이다.



따라서 구하는 영역의 넓이는 48이다.

[문항2] 대학발표 예시답안

논제 1.

먼저 2차 다항식의 완전 제곱식을 이용하여 다음 수식을 구하자.

$$x^2-2x+a=(x-1)^2+a-1$$

여기에서 $x\le 1$ 또는 $x\ge 1$인 범위에서 $g(x)$는 일대일 대응이 된다. 자연로그함수가 일대일 대응이므로 $g(x)$가 일대일 대응이 될 때 $h(x)$도 일대일 대응이 된다. 따라서 구하는 최대범위는 $x\le 1$ 또는 $x\ge 1$ 중의 하나가 된다.

한편, 합성함수 미분에 대한 연쇄법칙을 사용하면 함수 $h(x)$의 도함수 $\dfrac{dh}{dx}$는 아래와 같이 계산된다.

$$\begin{aligned}\frac{dh}{dx}&=\frac{1}{e^{g(x)}+1}e^{g(x)}\frac{dg}{dx}\\&=\frac{1}{e^{x^2-2x+a}+1}e^{x^2-2x+a}\cdot 2(x-1)\end{aligned}\quad \cdots\cdots \text{(A)}$$

이때 $x\le 1$와 $x\ge 1$ 중에 $\dfrac{dh}{dx}\ge 0$ 조건을 만족하는 최대범위는 $x\ge 1$ 이다.

논제 2.

합성함수 $h(x)=(f\circ g)(x)$는 아래와 같이 표현된다.

$$(f\circ g)(x)=\ln(e^{g(x)}+1)$$

자연로그함수가 증가함수이므로 $g(x)$가 최소일 때 $e^{g(x)}+1$이 최소이고 $(f\circ g)(x)$도 최소이다. [논제 1]에서 정한 범위 $x\ge 1$에서 $g(x)$가 증가함수이고 $x=1$일 때 최솟값 $a-1$을 가지므로 합성함수 $h(x)$는 최솟값

$$h(1)=(f\circ g)(1)=f(a-1)=\ln(e^{a-1}+1)$$

을 갖는다. $h(x)$의 최솟값이 1이므로 구하는 실수 $a=1+\ln(e-1)$이다.

논제 3.

$y=\ln(1+e^a)$가 될 때 $\ln(e^{x^2-2x+a}+1)=\ln(1+e^a)$이므로 [논제 1]에서 구한 범위 $x\ge 1$에서 x의 값은 $x=2$이다.

수식 (A)로부터 아래와 같은 식을 얻는다.

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=\frac{1}{h'(x)}$$

$h'(2)=\dfrac{2e^a}{e^a+1}$이므로 구하는 값은 $\dfrac{e^a+1}{2e^a}$ (또는 $\dfrac{1}{2}(1+e^{-a})$)이다.

[문항3] 대학발표 예시답안

논제 1.

왼쪽 그릇의 높이 h지점에서 밑면에 평행하게 자른 단면은 반지름 $\sqrt{\frac{1}{2}+2h-4h^2+4h^3}$ 인 원이므로, 왼쪽 그릇의 부피는

$$V=\pi\int_0^3\left(\frac{1}{2}+2x-4x^2+4x^3\right)dx=\frac{111}{2}\pi$$

이다. 오른쪽 그릇은 반지름이 2인 구에서 윗부분이 1인 위치가 밑면에 평행하게 잘린 모양이므로, 오른쪽 그릇의 부피는

$$W=\pi\int_{-2}^{1}(4-x^2)dx=9\pi$$

이다.

논제 2.

왼쪽 그릇의 높이 h인 지점에서 밑면에 평행하게 자른 단면은 반지름 $\sqrt{\frac{1}{2}+2h-4h^2+4h^3}$ 인 원이므로, 높이가 h인 지점까지 그릇의 부피는

$$V(h)=\pi\int_0^h\left(\frac{1}{2}+2x-4x^2+4x^3\right)dx=\pi h\left(\frac{1}{2}+h-\frac{4}{3}h^2+h^3\right)$$

이다. 따라서 $h=1$을 대입하면 왼쪽 그릇에 담긴 물의 부피는 $V(1)=\frac{7}{6}\pi$이다.

오른쪽 그릇은 반지름이 2인 구에서 윗부분이 1인 위치가 밑면에 평행하게 잘린 모양이므로, 높이가 h인 지점까지 그릇의 부피는

$$W(h)=\pi\int_{-2}^{h-2}(4-x^2)dx=\pi\left(-\frac{1}{3}h^3+2h^2\right)=\pi h^2\left(2-\frac{1}{3}h\right)$$

이다. 따라서 $h=1$을 대입하면 오른쪽 그릇에 담긴 물의 부피는 $W(1)=\frac{5}{3}\pi$이다.

논제 3.

함수 $f(h)=V(h)-W(h)=\pi h\left(\frac{1}{2}-h-h^2+h^3\right)$이라 하자. 두 그릇에 담긴 물의 부피가 같아지는 높이 h, 즉 $V(h)=W(h)$를 만족하는 h가 0과 3 사이에 존재한다는 것은

$$g(h)=\frac{1}{2}-h-h^2+h^3=0$$

이 0과 3사이에서 근을 갖는다는 것과 같다.

$$g'(h)=-1-2h+3h^2$$

이므로 $g(h)$는 $h=1,\ -\frac{1}{3}$에서 극점을 갖는다. 극솟값이 $g(1)=-\frac{1}{2}<0$이고 $g(3)=\frac{31}{2}>0$이므로, $g(h)$는 0과 3 사이에서 근을 갖는다. 따라서 $V(h)=W(h)$를 만족하는 h가 0과 3사이에 적어도 하나 존재한다.

26 이화여자대학교(자연계열 Ⅰ) 수시[26)]

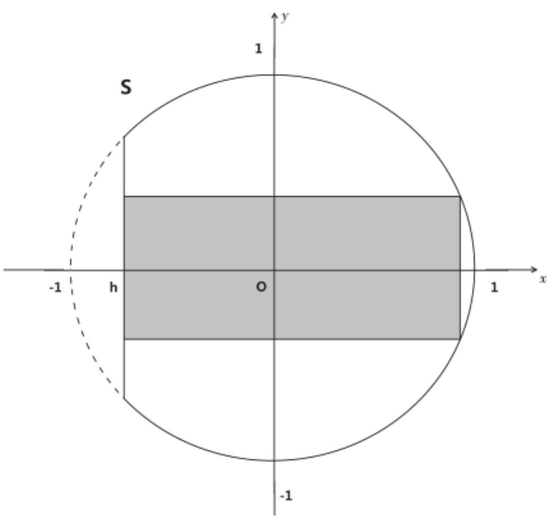
핵심개념 및 용어	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
부등식, 다항함수, 지수함수, 로그함수, 함수의 미분, 정적분, 정적분의 활용	자연계열-3개 영역 등급 합 6이내(한국사 제외) 의예과-4개 영역 등급 합 5이내(한국사 제외)	수학(3문항, 9문제)	100분

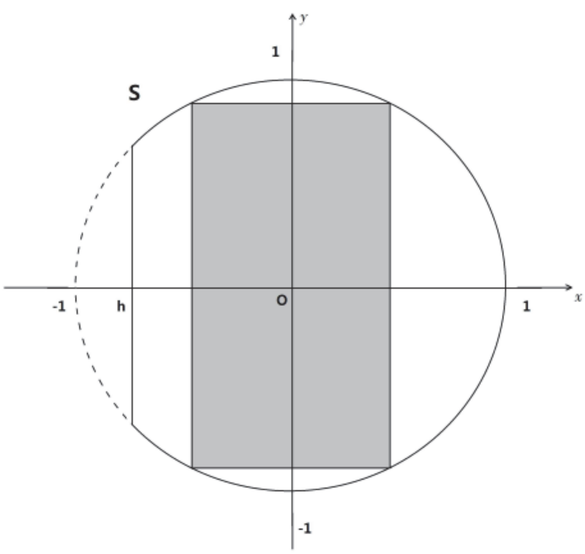
문항 1. 도형 S는 좌표평면에서 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 원을 직선 $x=h\,(-1 \le h \le 1)$으로 왼쪽 부분을 자른 도형이다. 도형 S의 내부에 있고 가로는 x축에 평행하고 세로는 y축에 평행한 직사각형에 대하여 다음 물음에 답하시오. [40점]

(1) $h=-1$일 때, 직사각형의 넓이의 최댓값을 구하시오.

(2) $h=-\dfrac{3}{4}$일 때, 직사각형의 넓이의 최댓값을 구하시오.

(3) $h=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$일 때, 직사각형의 넓이의 최댓값을 구하시오.





26) 이화여자대학교 홈페이지

문항 2. 양의 실수 a에 대하여 함수 $g(x)=\dfrac{1}{1+ax^2}$이고, 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 아래의 조건을 만족시킨다. $f'(x)=g(x)+xg'(x)$, $f(0)=0$ 다음 물음에 답하시오. [30점]

(1) 함수 $f(x)$를 구하시오.

(2) 함수 $f(x)$의 최댓값을 $M(a)$라고 할 때, $M(a)$를 구하시오.

(3) 문제 (2)에서 구한 최댓값 $M(a)$에 대하여 다음의 극한값을 구하시오.

$$\lim_{n\to\infty}\left[M(n)\sum_{k=1}^{n}\{M(n)-M(n+k)\}\right]$$

문항 3. 이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$가 있다. 모든 음이 아닌 정수 n에서 $f(n)$이 정수가 되는 실수 a, b, c에 대하여 다음 물음에 답하시오. [30점]

(1) $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$가 모두 정수가 되는 실수 a, b, c의 조건을 제시하시오.

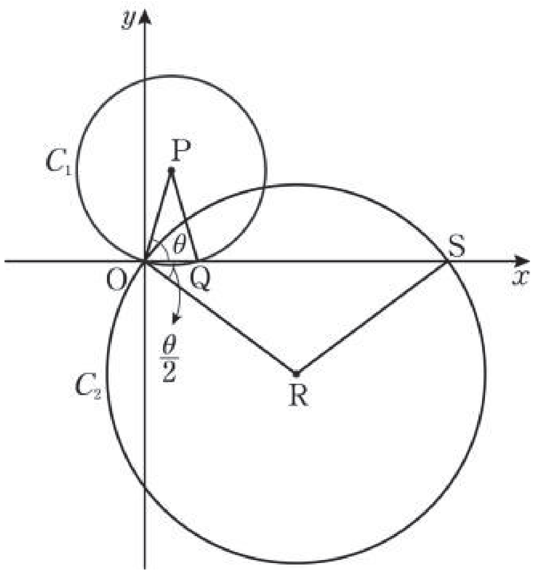
(2) 문제 (1)에서 제시된 실수 a, b, c의 조건을 이용하여 3 이상인 모든 자연수 n에서 $f(n)$이 정수임을 보이시오.

(3) 모든 음의 정수 m에서 $f(m)$이 정수임을 보이시오.

(4) 구간 $[0,\ 10]$에 속하는 실수 a, b에 대하여 모든 정수 n에서 $f(n)$이 정수가 되는 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수를 구하시오.

풀어보기

문제1. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{OP}}=1$인 제1사분면 위의 점 P를 중심으로 하고 원점을 지나는 원 C_1이 x축과 만나는 점 중 원점이 아닌 점을 Q라 하자. $\overline{\mathrm{OR}}=2$이고 $\angle\mathrm{ROQ}=\frac{1}{2}\angle\mathrm{POQ}$인 제4사분면 위의 점 R를 중심으로 하고 원점을 지나는 원 C_2가 x축과 만나는 점 중 원점이 아닌 점을 S라 하자. $\angle\mathrm{POQ}=\theta$라 할 때, 삼각형 OQP와 삼각형 ORS의 넓이의 합이 최대가 되도록 하는 θ에 대하여 $\cos\theta$의 값은? (단, O는 원점이고, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이다.) (2015. 전국연합)



문제2. 연속함수 $y=f(x)$의 그래프가 원점에 대하여 대칭이고, 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=\frac{\pi}{2}\int_{1}^{x+1}f(t)dt$이다. $f(1)=1$일 때, $\pi^2\int_{0}^{1}xf(x+1)dx$의 값은?

(2014. 대수능)

예시답안

풀어보기(문제1) 정답 $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$

점 P의 좌표는 $(\cos\theta, \sin\theta)$이므로 삼각형 OQP 의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times 2\cos\theta\times\sin\theta=\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}\sin2\theta$$

점 R 의 좌표는 $\left(2\cos\frac{1}{2}\theta,\ -2\sin\frac{1}{2}\theta\right)$이므로 삼각형 ORS의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times 4\cos\frac{1}{2}\theta\times 2\sin\frac{1}{2}\theta=4\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta=2\sin\theta$$

따라서 삼각형 OQP 와 삼각형 ORS의 넓이의 합을 $f(\theta)$라 하면

$$f(\theta)=\frac{1}{2}\sin2\theta+2\sin\theta$$

$$f'(\theta)=\cos2\theta+2\cos\theta=2\cos^2\theta+2\cos\theta-1$$

이므로 $f'(\theta)=0$에서 $\cos\theta=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $\cos\theta>0$이므로

$$\cos\theta=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$$

$f'(\theta)=0$인 θ의 값을 $\theta_1\left(0<\theta_1<\frac{\pi}{2}\right)$라 할 때, $f(\theta)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

θ	(0)	$\cdots$	θ_1	$\cdots$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$f(\theta)$		$\nearrow$	$f(\theta_1)$	$\searrow$	

그러므로 $f(\theta)$는 $\theta=\theta_1$에서 극대이면서 최대이다. 따라서 $f(\theta)$가 최대가 되도록 하는 θ에 대하여 $\cos\theta$의 값은 $\cos\theta=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$이다.

풀어보기(문제2) 정답 $2(\pi-2)$

$f(x)=\frac{\pi}{2}\int_1^{x+1}f(t)\,dt$에서 양변을 x에 관하여 미분하면 $f'(x)=\frac{\pi}{2}f(x+1)$

따라서 $\pi^2\int_0^1 xf(x+1)\,dx=\pi^2\int_0^1\frac{2}{\pi}xf'(x)\,dx=2\pi\int_0^1 xf'(x)\,dx$

$$= 2\pi\left\{[xf(x)]_0^1 - \int_0^1 f(x)\,dx\right\} = 2\pi - 2\pi\int_0^1 f(x)\,dx = 2\pi - 2\pi\int_0^1 \frac{2}{\pi}f'(x-1)\,dx$$

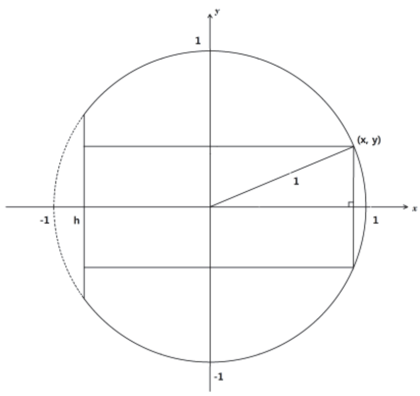
$$= 2\pi - 4[f(x-1)]_0^1 = 2\pi - 4[f(0) - f(-1)]$$

$y=f(x)$ 의 그래프가 원점에 대하여 대칭이므로 $f(0)=0,\ f(-1)=-f(1)=-1$

$$\therefore\ \pi^2\int_0^1 x f(x+1)\,dx = 2\pi - 4 = 2(\pi-2)$$

[문항1] 대학발표 예시답안

(1)



그림과 같이 $(x,\ y)$ 를 직사각형의 우측 상단의 꼭짓점이라 하면, 직사각형의 넓이 $A(x)$ 는 다음과 같다.

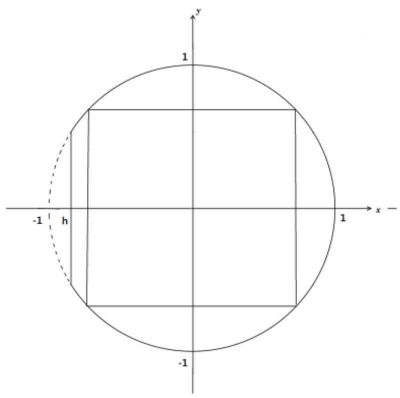
$$A(x) = 2x \times 2\sqrt{1-x^2} = 4x\sqrt{1-x^2} = 4\sqrt{x^2(1-x^2)},\ (x \geq 0)$$

한편, $x^2(1-x^2)$ 은 $x^2 = \dfrac{1}{2}$ 일 때 최댓값을 가지므로 직사각형의 넓이의 최댓값은

$$A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2}{\sqrt{2}} \times 2\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 2$$

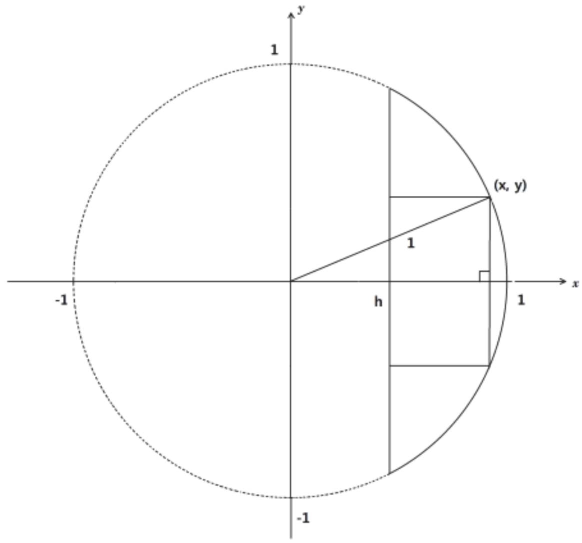
이고, 넓이가 최대가 되는 직사각형은 한 변의 길이가 $\sqrt{2}$ 인 정사각형이다.

(2)



$\frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{3}{4}$ 이므로 그림과 같이 (1)에서 구한 한 변이 $\sqrt{2}$ 인 정사각형이 도형 S의 내부에 속한 직사각형이다. 도형 S의 내부에 있는 직사각형은 원의 내부에 있는 직사각형이 된다. 한 변이 $\sqrt{2}$ 인 정사각형의 넓이가 원의 내부에 있는 모든 직사각형의 넓이보다 크므로 도형 S의 내부에 있는 모든 직사각형의 넓이보다 크다. 한 변이 $\sqrt{2}$ 인 정사각형이 도형 S의 내부에 존재하므로 S의 내부에 있는 직사각형의 넓이의 최댓값은 2이다.

(3)



그림과 같이 $(x,\ y)$를 직사각형의 우측 상단의 꼭짓점이라 하면

$0 \le y \le \sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ 이다. 사각형의 넓이 $A(y)$는 다음과 같다.

$$A(y) = 2y\left(\sqrt{1-y^2}-h\right) = 2y\left(\sqrt{1-y^2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

한편, $A'(y) = 2\left(\sqrt{1-y^2}-\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}}\right) = 2\left(\frac{1-2y^2}{\sqrt{1-y^2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ 이다. 구간 $\frac{1}{\sqrt{2}} \le y \le \frac{\sqrt{6}}{3}$ 에서 $1-2y^2 \le 0$ 이므로 $A'(y) < 0$. 따라서 넓이 $A(y)$는 구간 $\frac{1}{\sqrt{2}} \le y \le \frac{\sqrt{6}}{3}$ 에서 감소이다. 구간 $0 \le y < \frac{1}{\sqrt{2}}$ 에서 $A'(y) = 0$ 인 점 y는 $\sqrt{3}(1-2y^2) = \sqrt{1-y^2}$ 을 만족한다.

따라서 $12y^4 - 11y^2 + 2 = 0$ 의 근이 된다. 즉 $y^2 = \frac{11 \pm \sqrt{121-96}}{24} = \frac{2}{3},\ \frac{1}{4}$ 이므로

구간 $0 \le y < \frac{1}{\sqrt{2}}$ 에서 만족하는 경우는 $y = \frac{1}{2}$ 이다.

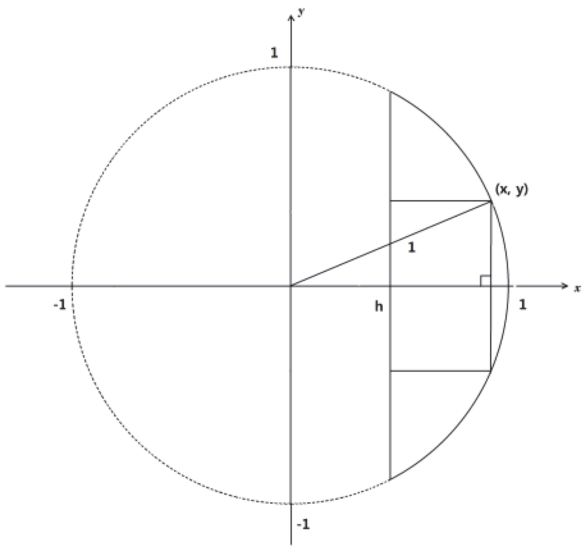
$y = \frac{1}{2}$ 의 전후에서 $A'(y)$가 양수에서 음수로 바뀌므로 $y = \frac{1}{2}$ 이 극대점이다.

따라서 구간 $0 \le y \le \frac{\sqrt{6}}{3}$ 에서

$$A(y) \le A\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \times \frac{1}{2}\left(\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

이다. 따라서 직사각형의 넓이 $A(y)$의 최댓값은 $\frac{\sqrt{3}}{6}$ 이다.

【별해】



그림과 같이 $(x,\ y)$를 직사각형의 우측 상단의 꼭짓점이라 하자.

$\frac{1}{\sqrt{3}} \le x \le 1$ 이고 직사각형의 넓이 $A(x)$는 다음과 같다.

$$A(x) = 2(x-h)\sqrt{1-x^2} = 2\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\sqrt{1-x^2}$$

한편,

$$A'(x) = 2\left(\sqrt{1-x^2} - \left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{1-x^2}}\left(\sqrt{3} + x - 2\sqrt{3}x^2\right)$$

이다. $A'(x)=0$ 인 점 x는 $x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{4\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{\sqrt{3}}{2}$ 이므로 구간 $\frac{1}{\sqrt{3}} \le x \le 1$ 에서 만족하는 경우는 $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 이다. $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 의 전후에서 $A'(x)$가 양수에서 음수로 바뀌므로 $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 이 극대점이다. 따라서 구간 $\frac{1}{\sqrt{3}} \le x \le 1$ 에서

$$A(x) \le A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

이다. 결론적으로 직사각형의 넓이 $A(x)$의 최댓값은 $\frac{\sqrt{3}}{6}$ 이다.

[문항 2] 대학발표 예시답안

(1) 먼저 주어진 도함수 $f'(x)$에 대한 적분을 다음과 같이 2개의 적분으로 분리한다.

$$\int f'(x)dx = \int \{g(x) + xg'(x)\}dx = \int g(x)dx + \int xg'(x)dx \ \cdots \ ①$$

여기에서 부분적분법에 의해

$$\int xg'(x)dx = xg(x) - \int g(x)dx$$

이므로 수식 ①로부터

$$f(x) = xg(x) + C = \frac{x}{1+ax^2} + C$$

임을 알 수 있다. 주어진 조건 $f(0)=0$ 로부터 $C=0$ 이므로 $f(x) = \dfrac{x}{1+ax^2}$ 이다.

(2) 함수 $f(x) = \dfrac{x}{1+ax^2}$ 이므로, (i) $x \le 0$ 일 때 $f(x) \le 0$; (ii) $x > 0$ 일 때, $f(x) > 0$ 이다. 그러므로 $f(x)$ 의 최댓값은 $x > 0$ 의 범위에서 찾으면 된다.

먼저 $f'(x) = \dfrac{1-ax^2}{(1+ax^2)^2}$ 이므로, $f'(x)$ 의 부호의 변화를 조사하여 다음을 알 수 있다.

(i) $x = \dfrac{1}{\sqrt{a}}$ 일 때, $f'(x) = 0$ 이며 $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$

(ii) $0 < x < \dfrac{1}{\sqrt{a}}$ 일 때, $f'(x) > 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 이 영역에서 증가한다.

(iii) $x > \dfrac{1}{\sqrt{a}}$ 일 때, $f'(x) < 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 이 영역에서 감소한다.

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = \dfrac{1}{\sqrt{a}}$ 일 때, 최댓값 $M(a) = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$ 을 갖는다.

(3) (2)번 문제에 의해, 주어진 자연수 k 에 대해, $M(k) = \dfrac{1}{2\sqrt{k}}$ 이다.

$$\begin{aligned} M(n)\sum_{k=1}^{n}\{M(n) - M(n+k)\} &= \frac{1}{2\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2\sqrt{n}} - \frac{1}{2\sqrt{n+k}}\right) \\ &= \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+k}}\right) \\ &= \frac{1}{4}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+k}}\right) \\ &= \frac{1}{4}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{k}{n}}}\right) \end{aligned}$$

따라서 구분구적법에 의해 다음의 결과를 얻게 된다.

$$\lim_{n\to\infty} M(n)\sum_{k=1}^{n}\{M(n)-M(n+k)\}=\frac{1}{4}\int_0^1\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+t}}\right)dt$$
$$=\frac{1}{4}\left[t-2\sqrt{1+t}\,\right]_0^1=\frac{1}{4}\left(3-2\sqrt{2}\right)$$

[문항 3] 대학발표 예시답안

(1) 이차함수이므로 $a\neq 0$ 이다.

$f(0)=c,\ f(1)=a+b+c$ 이므로 c는 정수이고 $a+b$도 정수이다.

$$f(2)=4a+2b+c=2a+2(a+b)+c$$

이므로 $2a$가 정수이다. 따라서 구하는 조건은 $2a$가 0이 아닌 정수이고 $a+b$와 c가 정수이다.

(2) (1)의 풀이를 통해 c가 정수이고 실수 $2a,\ a+b$가 정수라고 하면

$$f(n)=an^2+bn+c=an(n-1)+(a+b)n+c$$

로 쓸 수 있다. 여기서 연속한 두 정수의 곱 $n(n-1)$은 짝수이므로 $an(n-1)$이 정수이다. 조건에 따라 $a+b$와 c가 정수이므로 $f(n)$이 정수이다. 그러므로 $f(x)$가 3 이상인 모든 자연수 n에 대하여 $f(n)$이 정수이다.

(3) 음의 정수 m에 대하여

$$\begin{aligned} f(m)&=am^2+bm+c\\ &=a(-m)^2+b(-m)+c+2bm\\ &=f(-m)+2bm \end{aligned}$$

로 쓸 수 있다. $2a,\ a+b$가 정수인 조건에 따라 $2b$가 정수이며 양의 정수 $-m$에 대하여 $f(-m)$도 정수이므로 $f(-m)+2bm$도 정수이다.

(4) 구하는 순서쌍 $(a,\ b)$는 $1\le i,\ j\le 10$ ($i,\ j$는 자연수) 일 때,

$$(i,\ 0),\ (i,\ j),\ \left(i-\frac{1}{2},\ j-\frac{1}{2}\right)$$

이다. 따라서 구하는 순서쌍의 개수는 $2\times 10^2+10=210$ 이다.

27 이화여자대학교(자연계열Ⅱ) 수시[27)]

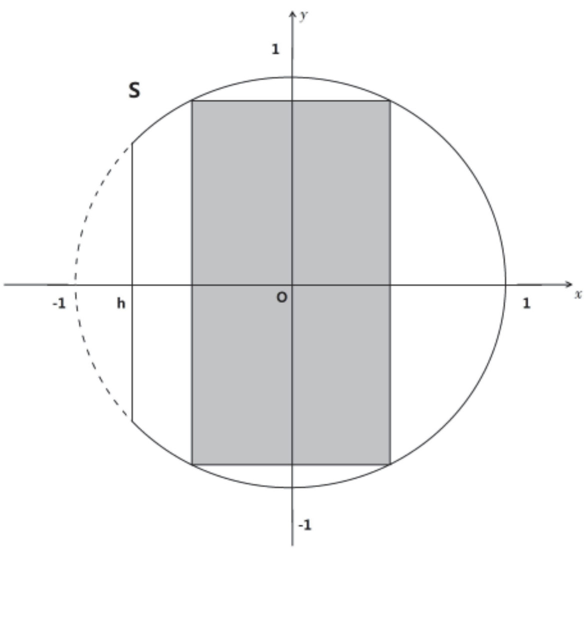
핵심개념 및 용어	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
부등식, 다항함수, 지수함수, 로그함수, 함수의 미분, 정적분, 정적분의 활용	자연계열-3개 영역 등급 합 6이내(한국사 제외) 의예과-4개 영역 등급 합 5이내(한국사 제외)	수학(3문항, 9문제)	100분

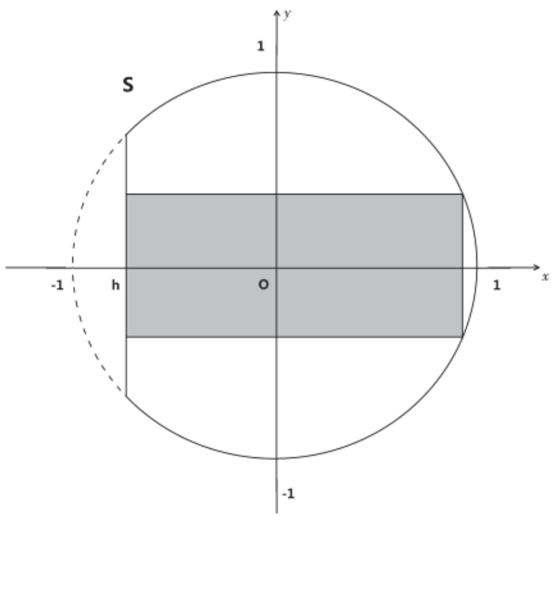
문항 1. 도형 S는 좌표평면에서 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 원을 직선 $x=h\,(-1\le h\le 1)$으로 왼쪽 부분을 자른 도형이다. 도형 S의 내부에 있고 가로는 x축에 평행하고 세로는 y축에 평행한 직사각형에 대하여 다음 물음에 답하시오. [40점]

(1) $h=-1$일 때, 직사각형의 넓이의 최댓값을 구하시오.

(2) $h=-\dfrac{3}{4}$일 때, 직사각형의 넓이의 최댓값을 구하시오.

(3) $h=-\dfrac{1}{\sqrt{6}}$일 때, 직사각형의 넓이의 최댓값을 구하시오.





27) 이화여자대학교 홈페이지

문항 2. 양의 실수 a에 대하여 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 아래의 조건을 만족시킨다.

$$f'(x)=\frac{1}{1+ax^2}\left(1-\frac{2ax^2}{1+ax^2}\right),\ f(0)=0$$

다음 물음에 답하시오. [30점]

(1) 함수 $f(x)$를 구하시오.

(2) 함수 $f(x)$의 최댓값을 $M(a)$라고 할 때, $M(a)$를 구하시오.

(3) 문제 (2)에서 구한 최댓값 $M(a)$에 대하여 다음의 극한값을 구하시오.

$$\lim_{n\to\infty}\left[M(n)\sum_{k=1}^{n}\{M(n)-M(n+k)\}\right]$$

문항 3. 삼차함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$가 있다. 모든 음이 아닌 정수 n에서 $f(n)$이 정수가 되는 실수 $a,\ b,\ c$에 대하여 다음 물음에 답하시오. [30점]

(1) 삼차함수 $f(x)$가 위의 조건을 만족하는 실수 $a,\ b,\ c$의 조건을 제시하시오.

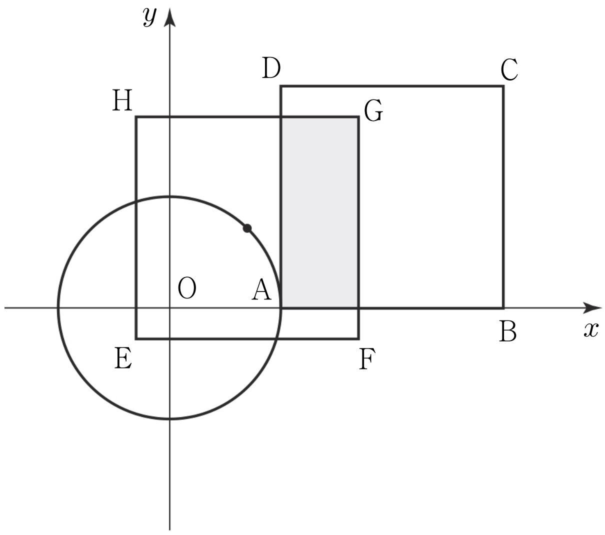
(2) 문제 (1)에서 제시된 실수 $a,\ b,\ c$의 조건을 이용하여 모든 음이 아닌 정수 n에서 $f(n)$이 정수임을 보이시오.

(3) 모든 음의 정수 m에서 $f(m)$이 정수임을 보이시오.

(4) 구간 $[0,\ k]$에 속하는 실수 $a,\ b$에 대하여 모든 정수 n에서 $f(n)$이 정수가 되는 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수가 항상 홀수임을 설명하시오.(단, k는 자연수이다.)

풀어보기

문제1. 그림과 같이 좌표평면 위에 네 점 A(1, 0), B(3, 0), C(3, 2), D(1, 2)를 꼭짓점으로 하는 정사각형 ABCD가 있다. 한 변의 길이가 2인 정사각형 EFGH의 두 대각선의 교점이 원 $x^2+y^2=1$ 위에 있을 때, 두 정사각형의 내부의 공통부분의 넓이의 최댓값은? (단, 정사각형의 모든 변은 x축 또는 y축에 수직이다.) (2014. 전국연합)



문제2. 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모든 양의 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족한다.

(가) $\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)'=x^2e^{-x^2}$

(나) $g(x)=\dfrac{4}{e^4}\displaystyle\int_1^x e^{t^2}f(t)dt$

$f(1)=\dfrac{1}{e}$일 때, $f(2)-g(2)$의 값은? (2017. 9월 평가원)

예시답안

풀어보기(문제1) 정답 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

정사각형 EFGH의 두 대각선의 교점을 P라 하자. 동경 OP가 나타내는 각을 θ라 하면 공통부분이 생기는 θ의 범위는 $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$이다.

점 $\mathrm{P}(\cos\theta,\sin\theta)$, 점 $\mathrm{G}(\cos\theta+1,\sin\theta+1)$이므로 공통부분의 넓이는 $S(\theta)=\cos\theta(\sin\theta+1)$,

$S'(\theta)=\cos2\theta-\sin\theta=-(\sin\theta+1)(2\sin\theta-1)=0$,

$\sin\theta=-1$ 또는 $\sin\theta=\frac{1}{2}$이다.

$-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$이므로 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 이다.

θ	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$S'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$S(\theta)$		$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	

$S(\theta)$는 $\theta=\frac{\pi}{6}$에서 극대이고 최댓값을 갖는다. 따라서 최댓값은 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ 이다.

풀어보기(문제2) 정답 $\frac{20}{3e^4}$

$$g(x)=\frac{4}{e^4}\int_1^x e^{t^2}f(t)dt=\frac{2}{e^4}\int_1^x 2te^{t^2}\frac{f(t)}{t}dt$$

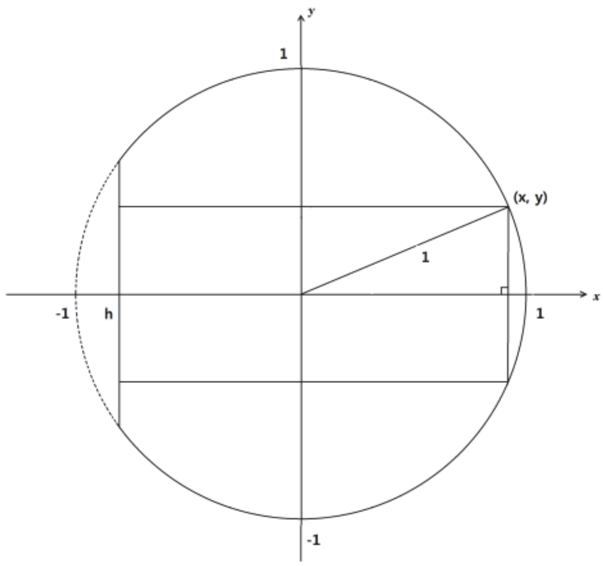
이 때, $u'=2te^{t^2}$, $v=\frac{f(t)}{t}$라 하고 부분적분하면

$$\begin{aligned} g(x)&=\frac{2}{e^4}\left\{\left[e^{t^2}\frac{f(t)}{t}\right]_1^x-\int_1^x t^2dt\right\} \\ &=\frac{2}{e^4}\left\{e^{x^2}\frac{f(x)}{x}-ef(1)-\left[\frac{1}{3}t^3\right]_1^x\right\} \\ &=\frac{2}{e^4}\left\{e^{x^2}\frac{f(x)}{x}-ef(1)-\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}\right)\right\} \end{aligned}$$

$g(2)=\frac{2}{e^4}\left(e^4\frac{f(2)}{2}-\frac{10}{3}\right)=f(2)-\frac{20}{3e^4}$. 따라서 $f(2)-g(2)=\frac{20}{3e^4}$이다.

[문항1] 대학발표 예시답안

(1)



그림과 같이 $(x,\ y)$를 직사각형의 우측 상단의 꼭짓점이라 하면, 직사각형의 넓이 $A(x)$는 다음과 같다.

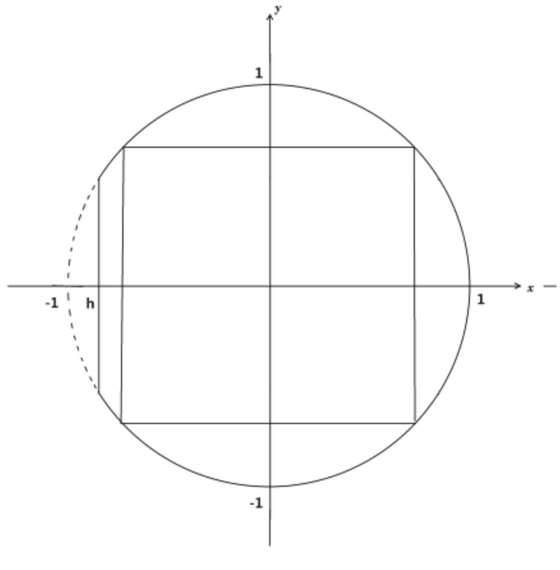
$$A(x)=2x\times 2\sqrt{1-x^2}=4x\sqrt{1-x^2}=4\sqrt{x^2(1-x^2)},\ (x\geq 0)$$

한편, $x^2(1-x^2)$은 $x^2=\dfrac{1}{2}$일 때 최댓값을 가지므로 직사각형의 넓이의 최댓값은

$$A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{2}{\sqrt{2}}\times 2\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=2$$

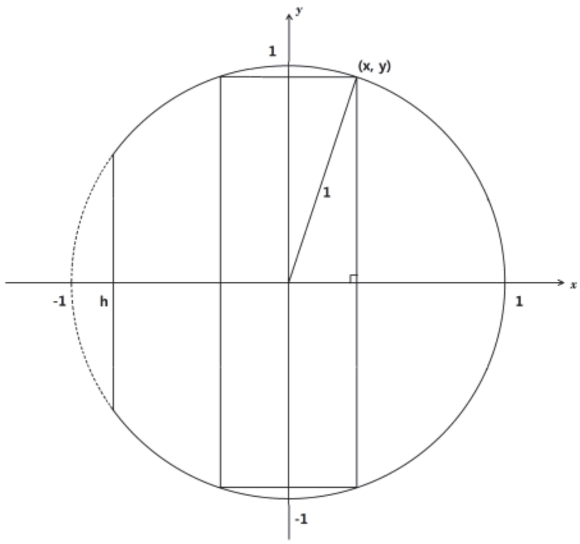
이고, 넓이가 최대가 되는 직사각형은 한 변의 길이가 $\sqrt{2}$인 정사각형이다.

(2)



$\frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{3}{4}$ 이므로 그림과 같이 (1)에서 구한 한 변이 $\sqrt{2}$ 인 정사각형이 도형 S의 내부에 속한 직사각형이다. 도형 S의 내부에 있는 직사각형은 원의 내부에 있는 직사각형이 된다. 한 변이 $\sqrt{2}$ 인 정사각형의 넓이가 원의 내부에 있는 모든 직사각형의 넓이보다 크므로 도형 S의 내부에 있는 모든 직사각형의 넓이보다 크다. 한 변이 $\sqrt{2}$ 인 정사각형이 도형 S의 내부에 존재하므로 S의 내부에 있는 직사각형의 넓이의 최댓값은 2이다.

(3)



그림과 같이 $(x,\ y)$를 직사각형의 우측 상단의 꼭짓점이라 하자.

(i) $0 \le y \le \sqrt{1-\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2} = \frac{\sqrt{30}}{6}$ 인 경우, 직사각형의 넓이 $A(y)$는 다음과 같다:

$$A(y) = 2y\left(\sqrt{1-y^2}-h\right) = 2y\left(\sqrt{1-y^2}+\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

한편, $A'(y) = 2\left(\sqrt{1-y^2}+\frac{1}{\sqrt{6}}-\frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}}\right) = 2\left(\frac{1-2y^2}{\sqrt{1-y^2}}+\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$이다. 구간 $0 \le y \le \frac{1}{\sqrt{2}}$ 에서 $1-2y^2 \ge 0$ 이므로 $A'(y) > 0$. 따라서 넓이 $A(y)$는 증가이다.

구간 $\frac{1}{\sqrt{2}} < y < \frac{\sqrt{30}}{6}$ 에서 $A'(y) = 0$ 인 점 y는 $\sqrt{6}(2y^2-1) = \sqrt{1-y^2}$ 을 만족한다.

따라서 $24y^4 - 23y^2 + 5 = 0$ 의 근이 된다. 즉 $y^2 = \frac{23 \pm \sqrt{529-480}}{48} = \frac{5}{8},\ \frac{1}{3}$ 이므로

구간 $\frac{1}{\sqrt{2}} < y < \frac{\sqrt{30}}{6}$ 에 포함되는 경우는 $y = \frac{\sqrt{10}}{4}$ 이다.

$y = \frac{\sqrt{10}}{4}$ 의 전후에서 $A'(y)$가 양수에서 음수로 바뀌므로 $y = \frac{\sqrt{10}}{4}$ 이 극대점이다.

따라서 구간 $0 \le y < \dfrac{\sqrt{30}}{6}$ 에서

$$A(y) \le A\left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right) = 2\times\frac{\sqrt{10}}{4}\left(\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)^2}+\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \frac{5\sqrt{15}}{12}$$

이다.

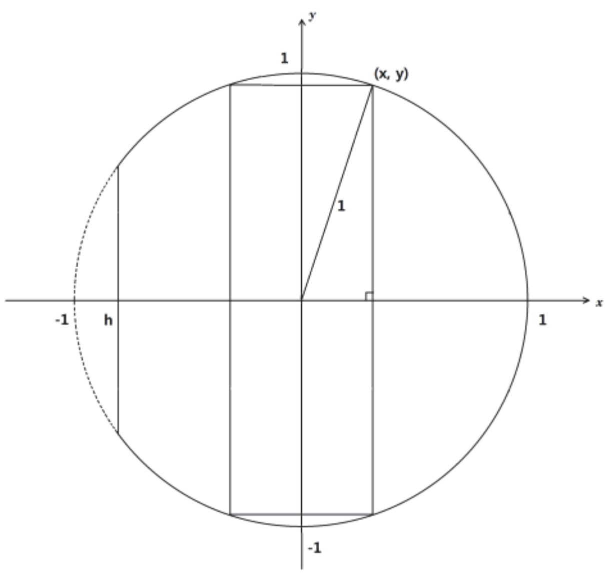
(ii) $\dfrac{\sqrt{30}}{6} \le y \le 1$ 인 경우, 직사각형의 넓이 $A(y)$는 다음과 같다.

$A(y) = 2y \times 2\sqrt{1-y^2} = 4y\sqrt{1-y^2} = 4\sqrt{y^2(1-y^2)}$

한편, $y^2(1-y^2)$은 주어진 구간 내에서 감소함수이므로, $A(y) \le A\left(\dfrac{\sqrt{30}}{6}\right)$이다.

(i), (ii)의 경우를 모두 적용하면 직사각형의 넓이 $A(y)$의 최댓값은 $\dfrac{5\sqrt{15}}{12}$ 이다.

【별해】



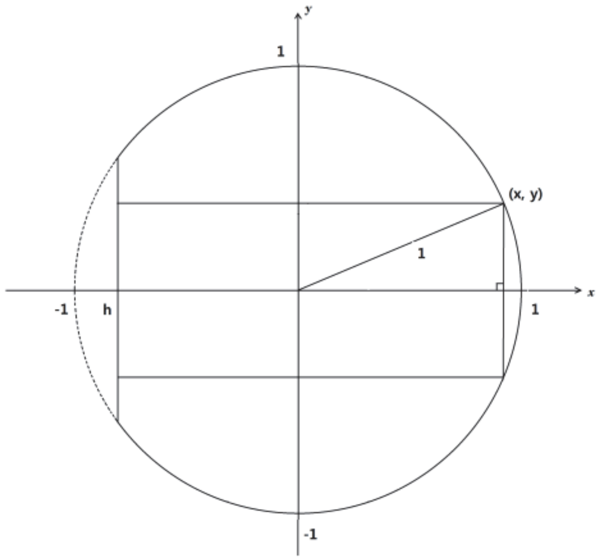
그림과 같이 $(x,\ y)$를 직사각형의 우측 상단의 꼭짓점이라 하자.

(i) $0 \le x \le \dfrac{1}{\sqrt{6}}$ 인 경우, 직사각형의 넓이 $A(x)$는 다음과 같다.

$A(x) = 2x \times 2\sqrt{1-x^2} = 4x\sqrt{1-x^2} = 4\sqrt{x^2(1-x^2)}$

한편, $x^2(1-x^2)$은 주어진 구간 내에서 증가함수이므로, $A(x) \le A\left(\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$이다.

(ii) $\dfrac{1}{\sqrt{6}} < x \le 1$ 인 경우, 직사각형의 넓이 $A(x)$는 다음과 같다.



$$A(x)=2(x-h)\sqrt{1-x^2}=2\left(x+\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\sqrt{1-x^2}$$

한편, $A'(x)=2\left(\sqrt{1-x^2}-\left(x+\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)=\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\left(1-\frac{x}{\sqrt{6}}-2x^2\right)$이다.

$A'(x)=0$인 점 x는 $x=\frac{-1\pm\sqrt{1+48}}{4\sqrt{6}}=-\frac{\sqrt{6}}{3},\ \frac{\sqrt{6}}{4}$이므로 구간 $\frac{1}{\sqrt{6}}<x\leq 1$에서 만족하는 경우는 $x=\frac{\sqrt{6}}{4}$이다. $x=\frac{\sqrt{6}}{4}$의 전후에서 $A'(x)$가 양수에서 음수로 바뀌므로 $x=\frac{\sqrt{6}}{4}$이 극대점이다. 따라서 구간 $\frac{1}{\sqrt{6}}<x\leq 1$에서

$$A(x)\leq A\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)=2\left(\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2}=\frac{5\sqrt{15}}{12}$$

이다. (i), (ii)의 경우를 모두 적용하면 직사각형의 넓이 $A(x)$의 최댓값은 $\frac{5\sqrt{15}}{12}$이다.

[문항2] 대학발표 예시답안

(1)

먼저 주어진 도함수 $f'(x)$에 대한 적분을 다음과 같이 2개의 적분으로 분리한다.

$$\int f'(x)dx=\int\frac{1}{1+ax^2}\left(1-\frac{2ax^2}{1+ax^2}\right)dx=\int\frac{1}{1+ax^2}dx+\int\frac{-2ax^2}{(1+ax^2)^2}dx\ \cdots\ ①$$

그리고 위의 두 번째 적분을 부분적분법을 이용하여 다음과 같이 계산한다.

즉 $u(x)=x,\ v'(x)=\frac{-2ax}{(1+ax^2)^2}$로 놓으면 $u'(x)=1,\ v(x)=\frac{1}{1+ax^2}$이므로,

$$\int \frac{-2ax^2}{(1+ax^2)^2}dx = \int x\frac{-2ax}{(1+ax^2)^2}dx = \int u(x)v'(x)dx$$
$$= u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$
$$= \frac{x}{1+ax^2} - \int \frac{1}{1+ax^2}dx$$

위의 결과를 수식 ①에 대입하여 $f(x)=\dfrac{x}{1+ax^2}+C$가 성립함을 알 수 있다.

주어진 조건 $f(0)=0$로부터 $C=0$이므로 $f(x)=\dfrac{x}{1+ax^2}$이다.

(2)

함수 $f(x)=\dfrac{x}{1+ax^2}$이므로, (i) $x \le 0$일 때 $f(x) \le 0$; (ii) $x>0$일 때, $f(x)>0$이다.

그러므로 $f(x)$의 최댓값은 $x>0$의 범위에서 찾으면 된다.

먼저 $f'(x)=\dfrac{1-ax^2}{(1+ax^2)^2}$ 이므로, $f'(x)$의 부호의 변화를 조사하여 다음을 알 수 있다.

(i) $x=\dfrac{1}{\sqrt{a}}$일 때, $f'(x)=0$이며 $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)=\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$

(ii) $0<x<\dfrac{1}{\sqrt{a}}$일 때, $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 이 영역에서 증가한다.

(iii) $x>\dfrac{1}{\sqrt{a}}$일 때, $f'(x)<0$이므로 함수 $f(x)$는 이 영역에서 감소한다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{1}{\sqrt{a}}$일 때, 최댓값 $M(a)=\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$을 갖는다.

(3)

(2)번 문제에 의해, 주어진 자연수 k에 대해, $M(k)=\dfrac{1}{2\sqrt{k}}$이다.

$$M(n)\sum_{k=1}^{n}\{M(n)-M(n+k)\} = \frac{1}{2\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2\sqrt{n}}-\frac{1}{2\sqrt{n+k}}\right)$$
$$= \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right)$$
$$= \frac{1}{4}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+k}}\right)$$
$$= \frac{1}{4}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}}\right)$$

따라서 구분구적법에 의해 다음의 결과를 얻게 된다.