2013 고려대학교 수리논술 적중

2013 고려대학교 논술문제

(제시문)

(가) 연속함수 $f:[1,2]\to[1,2]$에 대하여 함수 f를 n번 합성한 함수를 f_n이라 정의하자.

$$\text{수열 } \{a_n\}\text{을 } a_n = \int_1^2 f_n(x)dx$$

이라 할 때, $a_1 = \frac{5}{3}$이고 점화식은 $a_{n+1} = \frac{3a_n - 2}{a_n}$이다.

(나) 연속함수 $f:[1,2]\to[1,2]$에 대하여 점 $(3,\ 3)$에 대하여 점대칭인 함수 g를 생각한다. g는 자연스럽게 정의역이 $[4,5]$이고, 공역 또한 $[4,5]$임을 확인할 수 있다.
이 함수 g를 n번 합성한 함수를 g_n이라 정의한다.

(다) 함수 $h:[0,1]\to[0,1]$을 다음과 같이 정의한다.

$$h(x) = \begin{cases} 2x & \left(0 \le x \le \frac{1}{3}\right) \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & \left(\frac{1}{3} \le x \le 1\right) \end{cases}$$

마찬가지로 함수 h를 n번 합성한 함수를 h_n이라 한다.

[논제 1]

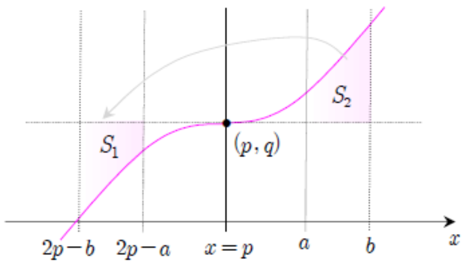
(a) $p:[1,2]\to[1,2]$가 일대일 대응함수라고 하자. $\int_1^2 p(x)dx = \frac{4}{3}$일 때, $\int_1^2 p^{-1}(x)dx$의 값에 대하여 서술하시오.

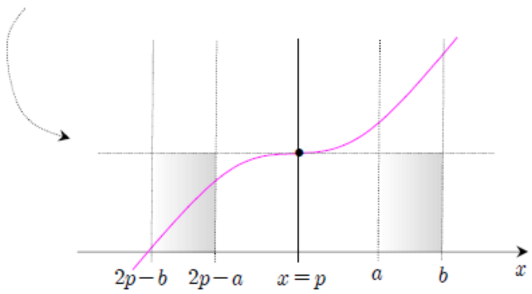
(b) (가)에서 제시된 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하시오.

(c) $g_n(x)$를 f_n을 이용하여 표현할 방법에 대해서 수학적 귀납법으로 논의하고, $\int_4^5 g_5(x)dx$의 값을 구하시오.

(d) $\int_0^1 h_n(x)dx$의 값을 구하시오.

한완수 적분과 통계(상) 152p - 도형의 이동과 정적분





마찬가지로 위 그림과 같이 S_2를 S_1으로 옮겨서 생각하면

$\int_a^b f(x)dx + \int_{2p-b}^{2p-a} f(x)dx = 2(b-a)q$ (직사각형 두 개) 임을 알 수 있다.[1]

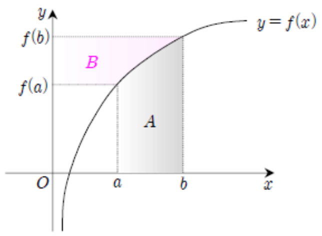
1) 이 상황이 가장 일반적인 상황 4 이고 $p=0$, $q=0$일 때 2 가 된다. 두 식 모두 $x=2p-t$라는 치환을 통해 증명할 수도 있다. 각자 해보길 바란다.

한완수 적분과 통계(상) 223p~224p - 치환적분

역함수와 관련된 항등식

① $f^{-1}(x)=g(x)$**라 하고, 미분가능한 증가함수** $y=f(x)$**에 대하여**

$$\int_a^b f(x)dx+\int_{f(a)}^{f(b)} g(x)dx=bf(b)-af(a)$$



먼저 ①의 $\int_a^b f(x)dx+\int_{f(a)}^{f(b)} g(x)dx=bf(b)-af(a)$을 증명해보자.

$\int_a^b f(x)dx$을 치환적분 하는데 $y=f(x)$로 치환해보자.[1]

그런데 $y=f(x) \Leftrightarrow x=g(y)$이므로 $g'(y)=\dfrac{dx}{dy}$이다.

즉 $\int_a^b f(x)dx=\int_{f(a)}^{f(b)} yg'(y)dy$ [2]이 되는데, $\int_{f(a)}^{f(b)} yg'(y)dy$을 보면 부분적분이 떠오른다면 매우 좋은 현상이다. 왜냐하면 y는 미분하기 좋은 형태, $g'(y)$는 적분하기 좋은 형태이기 때문이다. 부분적분하면

$\int_{f(a)}^{f(b)} yg'(y)dy=\Big[yg(y)\Big]_{f(a)}^{f(b)}-\int_{f(a)}^{f(b)} g(y)dy$이므로

$\int_a^b f(x)dx=\Big[yg(y)\Big]_{f(a)}^{f(b)}-\int_{f(a)}^{f(b)} g(y)dy$에서

$\int_a^b f(x)dx+\int_{f(a)}^{f(b)} g(y)dy=\Big[yg(y)\Big]_{f(a)}^{f(b)}=f(b)g(f(b))-f(a)g(f(a))=$

$bf(b)-af(a)$임을 알 수 있다.

즉, (치환적분 + 부분적분)을 활용해서 주어진 식을 증명한 것이다.

이처럼 위의 식들을 그래프로 확인하는 것도 중요하지만 다양한 적분 스킬을 통해 논리적으로 증명해보는 것이 좋다.

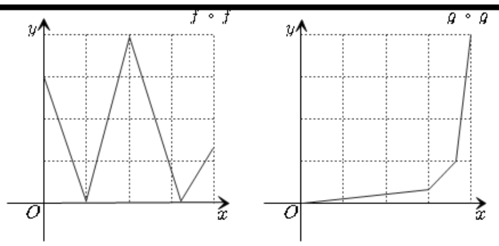
문제1 - 위의 ②의 공식을 논리적으로 증명하시오.

1) 역함수를 활용하는 특별한 치환방법에 해당하는데 $y=f(x)$의 그래프를 생각해보 특별할 것도 없음을 알 수 있다

2) 이 식 또한 유의미 한데, 함수 $f(x)$를 몰라도 역함수 $g(y)$를 알면 정적분 $\int_a^b f(x)dx$의 값을 대신해서 $\int_{f(a)}^{f(b)} yg'(y)dy$을 적분함으로써 구할 수 있음을 의미한다.

예를 들어, $f(x)=x^3+x^2+x$이라 하면 f의 역함수 g에 대하여 $\int_0^3 g(x)dx$을 구할 때 함수 $g(x)$를 모르지만 $g(x)$의 역함수인 $f(x)$를 알기 때문에 $\int_0^1 xf'(x)dx$를 계산하면 $\int_0^3 g(x)dx$의 값과 같게 된다. (이는 고교과정을 전혀 벗어나지 않고, 수능이라면 그래프를 주고 물어볼 수 있다. 실제로 출제된 바가 있다.)

한완수 수학2(하) 89p - 합성함수의 그래프



$(f \circ f)(x)$의 그래프를 를 그릴 때 고정점의 활용

$(f \circ f)(x)$를 그릴 때는 두 종류의 고정점을 활용할 수 있다.

① 제1고정점

$\{x \mid f(x)=x\} \subset \{x \mid (f \circ f)(x)=x\}$

② 제2고정점

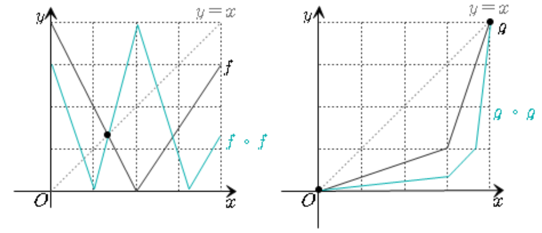
$\{x \mid f(x)=x\} = S$일 때

$\{x \mid f(x)=\alpha,\ \alpha \in S\} \subset \{x \mid (f \circ f)(x)=f(x)\}$

먼저 ①을 증명하고 그래프에서 확인해보자.

$A=\{x \mid f(x)=x\}$의 한 원소를 α라 하면 $f(\alpha)=\alpha$이다.

따라서 $f(f(\alpha))=f(\alpha)=\alpha$이므로 $B=\{x \mid (f \circ f)(x)=x\}$라 할 때, $\alpha \in B$가 된다. 이것은 그래프 위에서는 $y=f(x)$와 $y=x$의 교점은 $y=f(f(x))$와 $y=x$의 교점이 된다는 것으로 해석할 수 있다. 앞서 풀어본 합성문제에서 확인해보면 아래와 같다. 그림에서 보듯이 $f \circ f$에서 1개, $g \circ g$에서 2개의 고정점이 있다.



한완수 적분과 통계(상) 152p - 도형의 이동과 정적분
한완수 적분과 통계(상) 223p~224p - 치환적분
한완수 수학2(하) 89p - 합성함수의 그래프

에서 완전히 똑같은 문제가 그대로 출제되었고 실제로 많은 고려대 합격자를 배출했다.

논술전형&합격자 후기

홍대서강대투어후기.jpg

주댕(wnehd14) 성실회원 1:1

오늘 고대논술치러갔는데... 아 진짜 딱 보자마자 헐 한완수다 대박 ..
2번 일반항 100분동안 구한건함정ㅋ 물리도쉬웠는데 진짜아쉬움 ㅜㅜ
고대구경할것도없이 홍대건축가기로 맘먹어서 홍대갈생각에 들뜸ㅋㅋㅋㅋㅋㅋㅋㅋㅋㅋ 바로지하철타고 꼬고했느데....

치대꼭간다 0

얘기하기 조심스럽지만....
일단 심화특강 부분이 저도 처음엔 부담스러워서...일단 CP 포인트 부분위주로 몇회독하고나서..
심화특강 천천히 좀 여유있을때 보면서,,사고의 범위를 확장한다는 그런 마음으로 편히 보세요.
저도 처음엔 이많은걸 다 외워야 돼나 싶엇는데...그냥 하다보니 아 이런것도 있구나 하고 약간 감동받는 그런 느낌?
글구 저는 고려대학교수시 오전 시험치르고나서 (결국 붙엇네요)논술 학원 다녀본적없는데..
한완수 보길 잘했다 딱 이 생각 들었습니다..

12/15 05:24 IMIN: 375157 IP: 211.♡.183.14 MS: 2011

혜원(난만한) 0

정말 축하드립니다 ㅎㅎ

12/15 07:11 IMIN: 347173 IP: 58.♡.247.14 MS: 2010

아주대논술굳

로베르발(doa2610) 성실회원 1:1

한완수 반영한줄알앗음 ㄷ ㄷ

아 그러고보니 한완수덕분에 아주대논술로 된듯 ㄷㄷㄷ

연대조질로베르발HMT(doa2610) 정회원 1:1

내신3.8에다가 내신 반영비율큰데 한완수내용거의 비슷하게나와서 ㅋㅋ난만한님께 감솨드립니당 ㅠㅠ

난만한님 서강대 논술 적중이여 ㅋㅋ 감사해요 !!

룰룰룰루(yahboykr) 성실회원 1:1

이번 난이도에 상관없이

두번째 제시문에 피타고라스 정리하고
정적분 닮음 변환 나왔어요 ㅋㅋㅋ 둘다
제기억으로 한완수 기벡 적분편 심화특강에서 봤던거라 ㅋㅋㅋ 멘붕 이 일어날 여지가 없었네요 ㅎㅎ

특히 2-4 번은 감회가 있던게

몇달전에 난만한님께 공간상에 피타고라스정리 질문했었고
난만한님이 기억하실려나 모르겠는데
피타 고라정리의 확장판으로서 그냥 증명만 해보라고 답변 달아주신거..ㅠㅠㅠ

그대로 똑같이 소문제로 나왔어요 ㅋ
다른분들 얘기로 이번에 많이 쉬웠다고는 하지만

왠지 좋은 결과를 가질거같네요 ㅋㅋ

감사해요 !!!