연계성 분석(B)

Grand Final

-2013학년도 6평 연계성 분석(B)-

본 자료는 2014학년도 6평을 준비하는 수험생을 위한
무료배포용 자료입니다.
작년 6평과 연계된 수능기출과 EBS문항을 낱낱이 보여줌으로써
올해 6평을 대비하고자 합니다.

* 문제 끝에 작은 숫자 번호를 찾아가시면 해당 문항의 정답과 해설이 나옵니다.
* 번호 옆에 있는 빈 BOX 에 문제의 제목을 붙여 보세요. 나도 모르는 사이에 출제의도를 파악하게 될 겁니다.

예시)

3.

행렬 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$로 나타내어지는 일차변환을 f라 하자. 실수 a, b와 2×1행렬 $X=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$에 대하여 $f(aX)=\begin{pmatrix} 4 \\ b \end{pmatrix}$일 때, $a+b$의 값은? ③

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

1.

$\log_2 3 + \log_2 \frac{4}{3}$의 값은?1)

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

2.

다항식 $(1+x)^5$의 전개식에서 x^2의 계수는? 2)

① 7　② 8　③ 9　④ 10　⑤ 11

3.

행렬 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$로 나타내어지는 일차변환을 f라 하자. 실수 a, b와 2×1행렬 $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$에 대하여 $f(aX) = \begin{pmatrix} 4 \\ b \end{pmatrix}$일 때, $a+b$의 값은? 3)

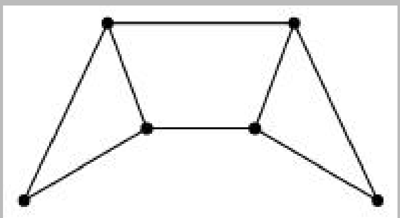
① 5　② 6　③ 7　④ 8　⑤ 9

:: E-연계 ::

세 행렬 $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$와 일차변환 f에 대하여 $f(A) = B$가 성립할 때, $f(B+C)$의 모든 성분의 합을 구하시오.4)

4.

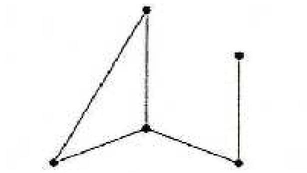
다음 그래프와 각 꼭짓점 사이의 연결 관계를 나타내는 행렬의 성분 중 0의 개수는? 5)



① 18 ② 20 ③ 22 ④ 24 ⑤ 26

:: 2012학년도 6월 평가원 ::

다음 그래프의 각 꼭짓점 사이의 연결 관계를 나타내는 행렬의 성분 중 1의 개수는?6)



① 8 ② 10 ③ 12
④ 14 ⑤ 16

5.

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{9}=1$의 두 꼭짓점은 타원 $\dfrac{x^2}{13}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$의 두 초점이다. a^2+b^2의 값은? 7)

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

:: 2012학년도 9월 평가원 ::

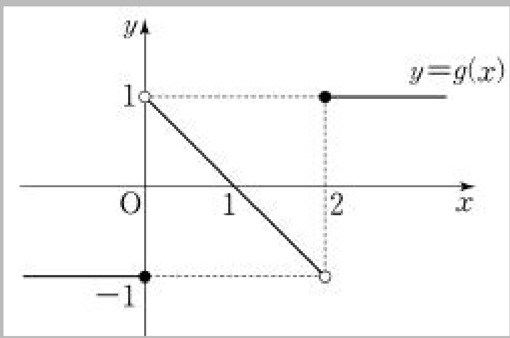
쌍곡선 $\dfrac{x^2}{12}-\dfrac{y^2}{8}=1$ 위의 점 (a,b)에서의 접선이 타원 $\dfrac{(x-2)^2}{4}+y^2=1$의 넓이를 이등분할 때, a^2+b^2의 값을 구하시오.8)

6.

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$와 함수

$$g(x)=\begin{cases}-1 & (x \le 0)\\ -x+1 & (0 < x < 2)\\ 1 & (x \ge 2)\end{cases}$$

에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이다. $f(5)$의 값은? 9)



① 15 ② 17 ③ 19 ④ 21 ⑤ 23

:: 2011학년도 6월 평가원 ::

함수 $f(x)$가 $f(x)=\begin{cases}x^2 & (x \ne 1)\\ 2 & (x=1)\end{cases}$ 일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? 10)

ㄱ. $\lim_{x\to 1-0} f(x)=\lim_{x\to 1+0} f(x)$

ㄴ. 함수 $g(x)=f(x-a)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 실수 a가 존재한다.

ㄷ. 함수 $h(x)=(x-1)f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

:: 2010학년도 6월 평가원 ::

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$와 두 함수

$$g(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}-1}{x^{2n}+1},$$

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x} & (x \ne 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$$ 에 대하여 함수

$f(x)g(x)$와 함수 $f(x)h(x)$가 모두 연속함수 일 때, $f(10)$의 값을 구하시오.11)

:: 2009학년도 수능 ::

함수 $f(x)=x^2-4x+a$와 함수

$$g(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2|x-b|^n+1}{|x-b|^n+1}$$ 에 대하여

$h(x)=f(x)g(x)$라 하자. 함수 $h(x)$가 모든 실수 x에서 연속이 되도록 하는 두 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은?12)

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

7.

밀폐된 용기 속의 액체에서 증발과 응축이 계속하여 같은 속도로 일어나는 동적 평형 상태의 증기압을 포화 증기압이라 한다. 밀폐된 용기 속에 있는 어떤 액체의 경우 포화 증기압 $P(mmHg)$와 용기 속의 온도 $t(^\circ C)$사이에 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

$$\log P = 8.11 - \frac{1750}{t+235} \quad (0 < t < 60)$$

용기 속의 온도가 $15^\circ C$ 일 때의 포화 증기압을 P_1, $45^\circ C$일 때의 포화 증기압을 P_2라 할 때, $\frac{P_2}{P_1}$의 값은? 13)

① $10^{\frac{1}{4}}$ ② $10^{\frac{1}{2}}$ ③ $10^{\frac{3}{4}}$

④ 10 ⑤ $10^{\frac{5}{4}}$

:: 2012학년도 수능 ::

누에나방 암컷은 페로몬을 분비하여 수컷을 유인한다. 누에나방 암컷이 페로몬을 분비한 후 t초가 지났을 때 분비한 곳으로부터 거리가 x인 곳에서 측정한 페로몬의 농도 y는 다음 식을 만족시킨다고 한다. $\log y = A - \frac{1}{2}\log t - \frac{Kx^2}{t}$ (단, A와 K는 양의 상수이다.)누에나방 암컷이 페로몬을 분비한 후 1초가 지났을 때 분비한 곳으로부터 거리가 2인 곳에서 측정한 페로몬의 농도는 a이고, 분비한 후 4초가 지났을 때 분비한 곳으로부터 거리가 d인 곳에서 측정한 페로몬의 농도는 $\frac{a}{2}$이다. d의 값은?14)

8.

함수 $f(x)$가 $x > -1$인 모든 실수 x에 대하여 부등식

$$\ln(1+x) \le f(x) \le \frac{1}{2}(e^{2x}-1)$$

을 만족시킬 때, $\lim_{x\to 0}\frac{f(3x)}{x}$의 값은? 15)

① 1 ② e ③ 3 ④ 4 ⑤ $2e$

:: E-연계 ::

함수 $f(x)$가 $x > 0$ 인 모든 실수 x에 대하여

$$x^2 < f(x) < e^{x^2} - 1$$

을 만족시킬 때, $\lim_{x\to +0}\frac{f(x)}{x}$의 값은? (단, e는 자연로그의 밑이다.)16)

① 0 ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

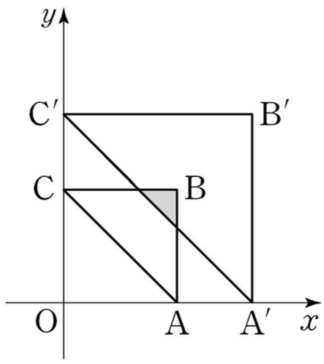
9.

행렬 $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$으로 나타내어지는 일차변환에 의하여 세 점 $A(-2,0)$, $B(2,0)$, $C(0,2)$가 옮겨진 점을 각각 A', B', C'이라 하자. 삼각형 ABC의 내부와 삼각형 $A'B'C'$의 내부의 공통부분의 넓이는? 17)

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

:: 2012학년도 수능기출 ::

좌표평면에서 행렬 $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ $(k>1)$로 나타내어지는 일차변환에 의하여 세 점 $A(3,\ 0)$, $B(3,\ 3)$, $C(0,\ 3)$이 옮겨진 점을 각각 A', B', C'이라 하자. 삼각형 ABC의 내부와 삼각형 $A'B'C'$의 내부의 공통부분의 넓이가 $\frac{1}{2}$일 때, k의 값은? 18)



10.

연속함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_0^x f(t)dt = e^x + ax + a$$

를 만족시킬 때, $f(\ln 2)$의 값은? (단, a는 상수이다.) 19)

① 1 ② 2 ③ e ④ 3 ⑤ $2e$

:: E-연계 ::

다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_1^x f(t)dt = (2x-1)^5 + ax$$

를 만족할 때, $f(0)$의 값은? (단, a는 상수이다.) 20)

① 9 ② 10 ③ 11
④ 12 ⑤ 13

11.

첫째항이 2이고, 각 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$\sum_{k=1}^{10} \frac{a_{k+1}}{S_k S_{k+1}} = \frac{1}{3}$일 때, S_{11}의 값은? 21)

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

:: E-연계 ::

첫째항이 3인 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $\sum_{k=1}^{20} \frac{a_{k+1}}{S_k S_{k+1}} = \frac{1}{4}$이 성립한다. S_{21}의 값을 구하시오. (단, $S_n \neq 0$)22)

:: 2011학년도 9월 평가원 ::

수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 2$이고,

$$a_{n+1} = a_n + (-1)^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \quad (n \geq 1)$$

을 만족시킨다. $a_{20} = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) 23)

:: E-연계 ::

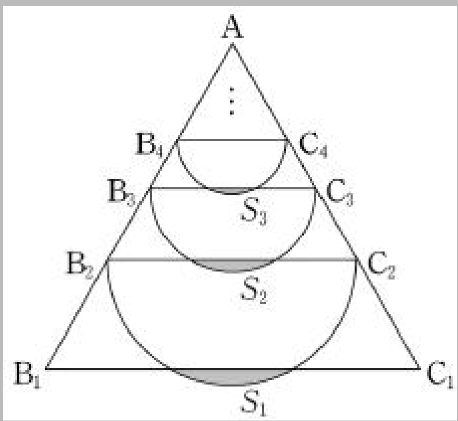
$$a_1 = \frac{1}{3}, \quad \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{n+1} = \frac{a_n}{2}$$

$(n = 1, 2, 3, \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{20} \frac{1}{a_{2k-1} a_{2k+1}} = \frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)24)

12.

한 변의 길이가 3인 정삼각형 AB_1C_1이 있다. 그림과 같이 선분 AB_1과 선분 AC_1을 $2:1$로 내분하는 점을 각각 B_2, C_2라 하고, 선분 B_2C_2를 지름으로 하는 원의 호 B_2C_2와 선분 B_1C_1 로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1이라 하자. 정삼각형 AB_2C_2에서 선분 AB_2와 선분 AC_2를 $2:1$로 내분하는 점을 각각 B_3, C_3이라 하고, 선분 B_3C_3을 지름으로 하는 원의 호 B_3C_3과 선분 B_2C_2로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하자.

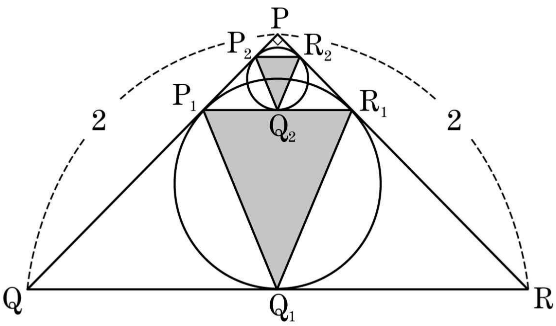
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? 25)



① $\frac{3\pi-5\sqrt{3}}{10}$ ② $\frac{6\pi-9\sqrt{3}}{20}$ ③ $\frac{4\pi-5\sqrt{3}}{10}$ ④ $\frac{8\pi-9\sqrt{3}}{20}$ ⑤ $\frac{10\pi-9\sqrt{3}}{20}$

:: 2011실시. 3월 교육청 ::

그림과 같이 $\overline{PQ}=\overline{PR}=2$이고 $\angle QPR=90°$인 삼각형 PQR의 내접원과 세 변 PQ, QR, RP 의 접점을 각각 P_1, Q_1, R_1이라 하자. 또, 삼각형 PP_1R_1의 내접원과 세 변 PP_1, P_1R_1, R_1P 의 접점을 각각 P_2, Q_2, R_2라 하자.



이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 세 점 P_n, Q_n, R_n을 꼭짓점으로 하는 삼각형 $P_nQ_nR_n$의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n = p+q\sqrt{2}$를 만족시키는 두 유리수 p, q 의 합 $p+q$ 의 값은?26)

① $\frac{1}{7}$ ② $\frac{2}{7}$ ③ $\frac{3}{7}$ ④ $\frac{4}{7}$ ⑤ $\frac{5}{7}$

13.

함수 $f(x)=2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+3\sin x$의 최댓값은? 27)

① 4 ② $\sqrt{17}$ ③ $3\sqrt{2}$
④ $\sqrt{19}$ ⑤ $2\sqrt{5}$

:: 2012학년도 6월 평가원 ::

닫힌 구간 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi\right]$에서 함수
$f(x)=\sqrt{3}\,sinx+\cos x+1$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값은?28)

① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$
④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

14.

집합 S가
$S=\{M|M$은 이차정사각행렬이고 $M^2=M\}$
일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?(단, E는 단위행렬이다.) 29)

ㄱ. $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\in S$
ㄴ. $A\in S$이고 A의 역행렬이 존재하면 $A=E$이다.
ㄷ. $A+E\in S$이면 $A^4\in S$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

:: 2010학년도 6월 평가원::

행렬 $P=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$에 대하여 집합 S가
$S=\{A\,|\,A$는 이차정사각행렬이고, $PAP=A\}$일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?(단, O는 영행렬이다.)30)

ㄱ. $P\in S$
ㄴ. $A\in S$이고 $B\in S$이면 $AB\in S$이다.
ㄷ. $A\in S$이고 $A^2=O$이면 $A=O$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

15.

수열 $\{a_n\}$은 $a_1=2$이고, $S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$라 할 때, $a_{n+1}=\frac{S_n}{a_n}$ $(n \geq 1)$을 만족시킨다. 다음은 S_n을 구하는 과정이다.

> 주어진 식으로부터 $a_2=\frac{S_1}{a_1}=1$이다.
>
> $n \geq 3$일 때, $a_n=\frac{S_{n-1}}{a_{n-1}}=\frac{S_{n-2}+a_{n-1}}{a_{n-1}}=\frac{a_{n-2}a_{n-1}+a_{n-1}}{a_{n-1}}$이므로 $a_n=a_{n-2}+1$
>
> 이다. 따라서 일반항 a_n을 구하면, 자연수 k에 대하여
>
> $n=2k-1$일 때, $a_{2k-1}=k+1$, $n=2k$일 때, $a_{2k}=$ $\boxed{(가)}$ 이다.
>
> 한편, $S_n=a_n a_{n+1}$이므로 $S_n=\begin{cases}(k+1)\times\boxed{(가)} & (n=2k-1)\\ \boxed{(나)} & (n=2k)\end{cases}$ 이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(k), g(k)$라 할 때, $f(6)+g(7)$의 값은? 31)

① 65 ② 67 ③ 69 ④ 71 ⑤ 73

:: 2012학년도 수능 ::

첫째항이 1 인 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$ 라 할 때, $nS_{n+1}=(n+2)S_n+(n+1)^3$ $(n \geqq 1)$

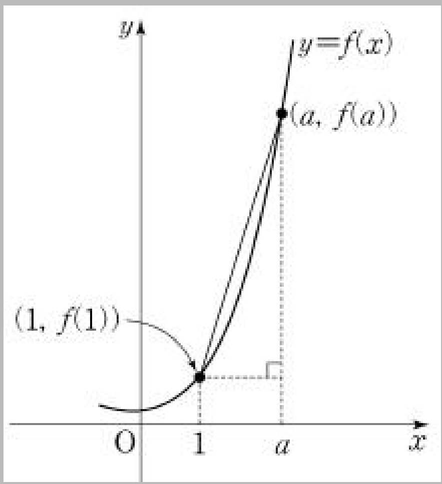
이 성립한다. 다음은 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을 구하는 과정의 일부이다.

> 자연수 n 에 대하여 $S_{n+1}=S_n+a_{n+1}$ 이므로 $na_{n+1}=2S_n+(n+1)^3$ …… ㉠
>
> 이다. 2 이상의 자연수 n 에 대하여 $(n-1)a_n=2S_{n-1}+n^3$ …… ㉡
>
> 이고, ㉠ 에서 ㉡ 을 뺀 식으로부터 $na_{n+1}=(n+1)a_n+$ $\boxed{(가)}$ 를 얻는다.
>
> 양변을 $n(n+1)$ 로 나누면 $\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{n}+\frac{\boxed{(가)}}{n(n+1)}$ 이다.
>
> $b_n=\frac{a_n}{n}$ 이라 하면, $b_{n+1}=b_n+3+$ $\boxed{(나)}$ $(n \geqq 2)$ 이므로 $b_n=b_2+$ $\boxed{(다)}$ $(n \geqq 3)$ 이다.
>
> ⋮

위의 (가), (나), (다)에 들어갈 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$, $h(n)$ 이라 할 때, $\frac{f(3)}{g(3)h(6)}$ 의 값은?32)

16.

양의 실수 전체의 집합에서 증가하는 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하다. 1보다 큰 모든 실수 a에 대하여 점 $(1, f(1))$과 점 $(a, f(a))$ 사이의 거리가 a^2-1일 때, $f'(1)$의 값은? 33)



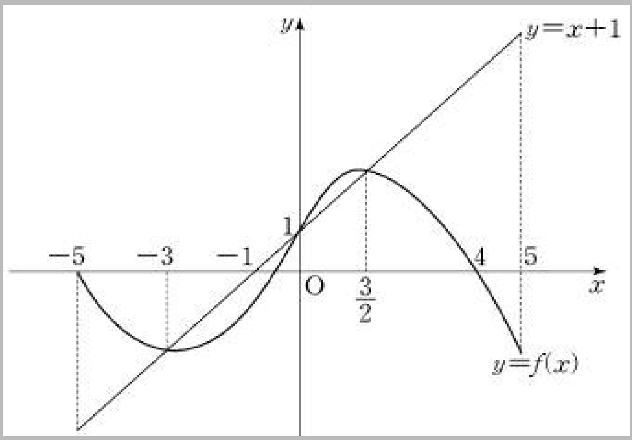
① 1　　② $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　③ $\frac{\sqrt{6}}{2}$　　④ $\sqrt{2}$　　⑤ $\sqrt{3}$

:: 2007학년도 9월 평가원 ::

곡선 $y=x^3$ 위의 점 $P(t,\ t^3)$에서의 접선과 원점 사이의 거리를 $f(t)$라 하자. $\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)}{t}=\alpha$ 일 때, 30α의 값을 구하시오.34)

17.

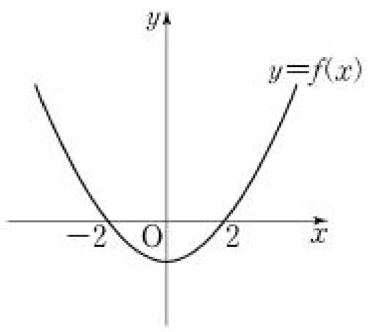
닫힌 구간 $[-5,5]$에서 정의된 함수 $y=f(x)$와 $y=x+1$의 그래프가 그림과 같을 때, 부등식 $\frac{1}{x}-\frac{1}{f(x)}\geq\frac{1}{xf(x)}$ 을 만족시키는 정수 x의 개수는? 35)



① 2　　② 4　　③ 6　　④ 8　　⑤ 10

:: 2011학년도 6월 평가원 ::

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

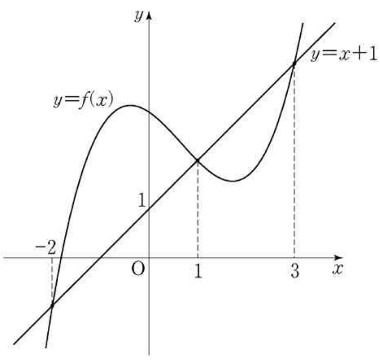


두 집합 $A=\left\{x\,\middle|\,\frac{f(x+1)}{f(x-1)}\leq 1\right\}$,
$B=\{x|-5<x<5\}$에 대하여 집합 $A\cap B$에 속하는 정수의 개수는? (단, $f(2)=f(-2)=0$) 36)

① 4　　② 5　　③ 6　　④ 7　　⑤ 8

:: 2010학년도 6월 평가원 ::

그림과 같이 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x+1$은 세 점에서 만나고 그 교점의 x좌표는 -2, 1, 3이다. 부등식 $\frac{x}{f(2x)-1}\geq\frac{1}{2}$ 을 만족시키는 실수 x의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값은? 37)



① -1　② $-\frac{1}{2}$　③ $\frac{1}{2}$　④ 1　⑤ $\frac{3}{2}$

18.

2보다 큰 자연수 n에 대하여 $(-3)^{n-1}$의 n제곱근 중 실수인 것의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$의 값은? [38]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{5}{12}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

:: E-연계 ::

2 이상인 자연수 m과 양수 a에 대하여 $K(m, a)$를 $K(m, a) = \sqrt[m]{a}$ 로 정의할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?[39]

ㄱ. $K(4,\ 2) = K(8,\ 4)$
ㄴ. $K(m,\ a) \cdot K(m,\ b) = K(m,\ ab)$
ㄷ. $m < n,\ K(m,\ a) = K(n,\ b)$ 이면 $a < b$ 이다.

① ㄱ ② ㄱ,ㄴ ③ ㄱ,ㄷ
④ ㄴ,ㄷ ⑤ ㄱ,ㄴ,ㄷ

집합 $R(n)$을

$R(n) = \{x \mid x^n = n,\ x \text{는 실수}, n\text{은 자연수}\}$

로 정의할 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? (단, $n \geq 2$)[40]

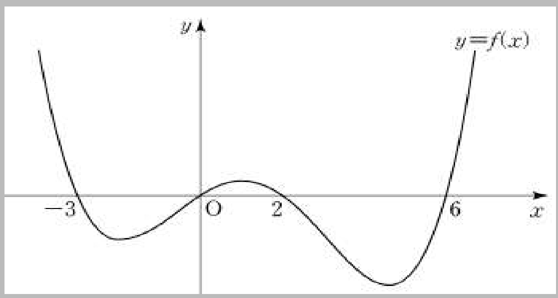
ㄱ. $-\sqrt[3]{3} \in R(3)$
ㄴ. $R(k) \cap R(k^2) = \varnothing$
ㄷ. 2 이상의 두 자연수 m, n에 대하여 $m > n$ 일 때, $a \in R(m)$, $b \in R(n)$이면 $a^m > b^n$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

19.

사차함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(m+\frac{k}{n}\right)<0$을 만족시키는 정수 m의 개수는?

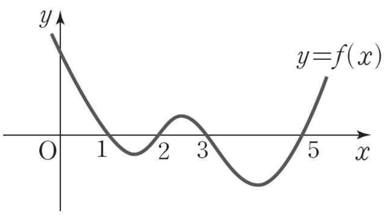
41)



① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

:: E-연계 ::

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 부등식 $\int_{n}^{n+1}f(x)dx<0$을 만족시키는 자연수 n의 개수를 구하여라. (단, $x<1$, $x>5$일 때, $f(x)>0$이다.)42)



:: E-연계 ::

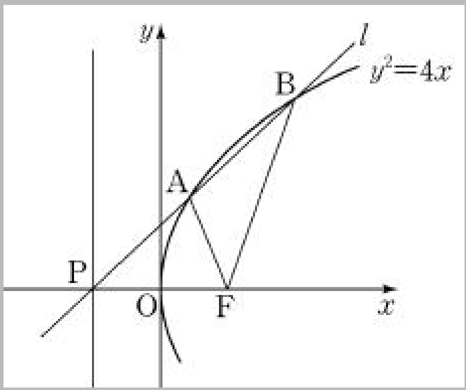
함수 $f(x)=x^2+2x+p$가 $a<b$인 모든 두 실수 a, b에 대하여 부등식

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{b-a}{n}\cdot k\right)\cdot\frac{b-a}{n}>0$$

을 만족시키기 위한 실수 p의 최솟값을 구하여라.43)

20.

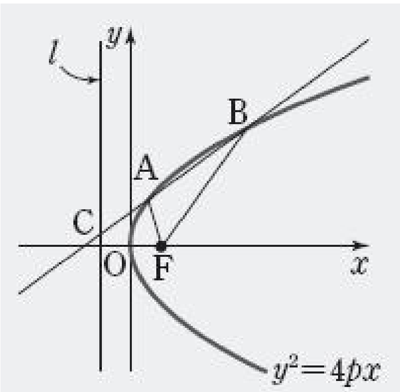
포물선 $y^2 = 4x$의 초점을 F, 준선이 x축과 만나는 점을 P, 점 P를 지나고 기울기가 양수인 직선 l이 포물선과 만나는 두 점을 각각 A, B라 하자. $\overline{FA}:\overline{FB} = 1:2$일 때, 직선 l의 기울기는? 44)



① $\frac{2\sqrt{6}}{7}$ ② $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ③ $\frac{4}{5}$ ④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

:: E−연계 ::

좌표평면에서 포물선 $y^2 = 4px\ (p > 0)$의 초점을 F, 준선을 l이라 하자. 제1사분면의 포물선 위의 두 점 A, B에 대하여 직선 AB와 직선 l의 교점을 C라 하자. $\overline{AF} : \overline{BF} = 3 : 10$일 때, $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$의 값은?45)



① $\frac{3}{13}$ ② $\frac{6}{13}$ ③ $\frac{7}{13}$ ④ $\frac{3}{7}$ ⑤ $\frac{4}{7}$

21.

함수 $f(x)=x^3-3x^2-9x-1$과 실수 m에 대하여 함수 $g(x)$를

$g(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\geq mx) \\ mx & (f(x)< mx) \end{cases}$

라 하자. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, m의 값은? 46)

① -14 ② -12 ③ -10
④ -8 ⑤ -6

:: 2012학년도 수능 ::

실수 m에 대하여 점 $(0,\ 2)$를 지나고 기울기가 m인 직선이 곡선 $y=x^3-3x^2+1$과 만나는 점의 개수를 $f(m)$이라 하자. 함수 $f(m)$이 구간 $(-\infty,\ a)$에서 연속이 되게 하는 실수 a의 최댓값은?47)

① -3 ② $-\dfrac{3}{4}$ ③ $\dfrac{3}{2}$
④ $\dfrac{15}{4}$ ⑤ 6

:: 2011학년도 6월 평가원 ::

다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 함수 $h(x)$를 $h(x)=\begin{cases} f(x) & (x\geq 0) \\ g(x) & (x<0) \end{cases}$ 라고 하자. $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?48)

<보 기>

ㄱ. $f(0)=g(0)$
ㄴ. $f'(0)=g'(0)$이면 $h(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.
ㄷ. $f'(0)g'(0)<0$이면 $h(x)$는 $x=0$에서 극값을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

22.

무리방정식 $\sqrt{4x+9}-x=1$의 해를 구하시오.49)

:: 2011학년도 수능기출 ::

무리방정식 $\sqrt{4x^2-5x+7}-4x^2+5x=1$ 의 모든 실근의 곱은? 50)

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{3}{2}$ ③ $-\frac{5}{2}$
④ $-\frac{7}{2}$ ⑤ $-\frac{9}{2}$

23.

$0 < x < 2\pi$일 때, 방정식

$(\cos 2x-\cos x)\sin x=0$

을 만족시키는 모든 해의 합은 $k\pi$이다. $10k$의 값을 구하시오. 51)

:: 2011학년도 6월 평가원 ::

삼각방정식 $2\sin x-4\sin x\cos^2 x-\cos 2x+1=0$을 만족시키는 모든 근의 합은? (단, $0 \le x < 2\pi$) 52)

① $\frac{5}{2}\pi$ ② $\frac{11}{4}\pi$ ③ 3π
④ $\frac{13}{4}\pi$ ⑤ $\frac{7}{2}\pi$

24.

함수 $y=\frac{1}{2}x^2$ $(x \geq 0)$의 그래프와 이 함수의 역함수의 그래프로 둘러싸인 부분을 x축의 둘레로 회전시켜 생기는 회전체의 부피는 $\frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) 53)

:: E-연계 ::

함수 $y=x^2(x \geq 0)$의 그래프와 이 함수의 역함수의 그래프 로 둘러싸인 부분을 x축의 둘레로 회전시켜 생기는 회전체의 부피는?54)

① $\frac{\pi}{10}$ ② $\frac{\pi}{5}$ ③ $\frac{3}{10}\pi$

④ $\frac{2}{5}\pi$ ⑤ $\frac{\pi}{2}$

25.

방정식 $x+y+z+w=4$를 만족시키는 음이 아닌 정수해의 순서쌍 (x,y,z,w)의 개수를 구하시오. 55)

:: E-연계 ::

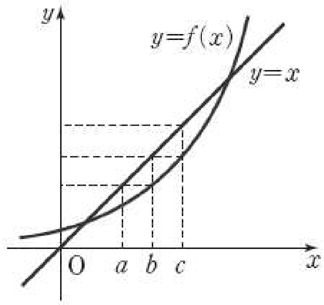
방정식 $x+y+z+w=10$을 만족하는 홀수인 자연수 x, y, z, w의 순서쌍 $(x,\ y,\ z,w)$의 개수를 구하여라.56)

26.

실수 전체의 집합에서 증가하고 미분가능한 함수 $f(x)$가 있다. 곡선 $y=f(x)$위의 점 $(2, 1)$에서의 접선의 기울기는 1이다. 함수 $f(2x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(1, a)$에서의 접선의 기울기는 b이다. $10(a+b)$의 값을 구하시오. 57)

:: E-연계 ::

58)그림과 같이 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 그 역함수를 $g(x)$라고 할 때, 다음 중 $g'(b)$와 같은 것은?

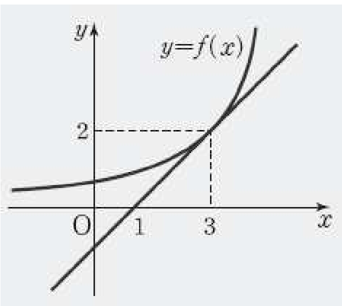


① $f'(a)$ ② $f'(c)$ ③ $\frac{1}{f'(a)}$

④ $\frac{1}{f'(b)}$ ⑤ $\frac{1}{f'(c)}$

:: E-연계 ::

열린 구간 $(-\infty, \infty)$에서 증가하는 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같고 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(3, 2)$에서의 접선이 x축과 만나는 점의 x좌표가 1이다. 함수 $y=f(3x)$의 역함수 $g(x)$라고 할 때, $g'(2)$의 값은?59)



① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$

④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

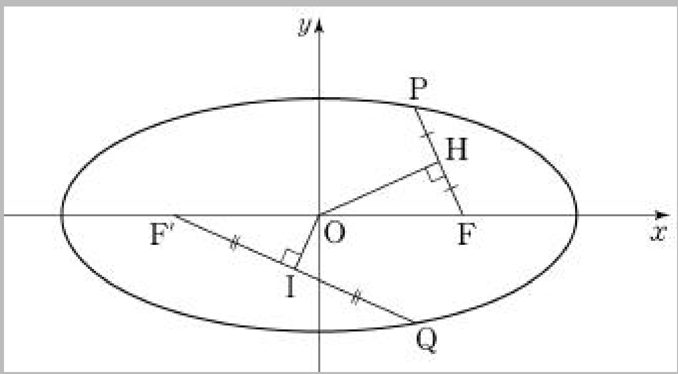
:: E-연계 ::

함수$f(x)=\sqrt{x^2+2x}\ (x \geq 0)$의 역함수를 $g(x)$라고 할 때, $\{f'(1)\}^2+\{g'(2\sqrt{2})\}^2$의 값은?60)

① $\frac{20}{9}$ ② 2 ③ $\frac{16}{9}$ ④ $\frac{14}{9}$ ⑤ $\frac{4}{3}$

27.

두 점 $F(5,0)$, $F'(-5,0)$을 초점으로 하는 타원 위의 서로 다른 두 점 P, Q에 대하여 원점 O에서 선분 PF와 선분 QF'에 내린 수선의 발을 각각 H와 I라 하자. 점 H와 점 I가 각각 선분 PF와 선분 QF'의 중점이고, $\overline{OH}\times\overline{OI}=10$일 때, 이 타원의 장축의 길이를 l이라 하자. l^2의 값을 구하시오. (단, $\overline{OH}\neq\overline{OI}$)[61]

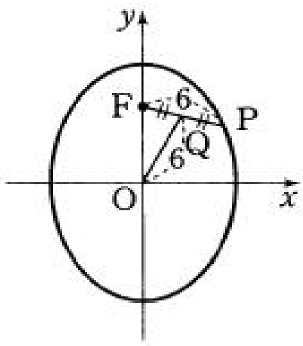


:: E-연계 ::

62) 타원 $x^2+4y^2=36$과 원 $x^2+y^2=27$의 한 교점을 P라 하자. 타원의 두 초점을 F, F'이라 할 때, $\overline{PF}\cdot\overline{PF'}$의 값을 구하시오.

:: E-연계 ::

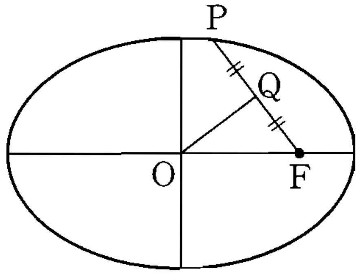
오른쪽 그림과 같이 타원 $\dfrac{x^2}{A}+\dfrac{y^2}{4A}=1$ $(A>0)$의 y축의 양의 부분에 있는 초점 F와 타원 위의 한 점 P를 잇는 선분 PF의 중점을 Q라 하자. $\overline{PF}=\overline{OQ}=6$일 때, 이 타원의 단축의 길이는? (단, O는 원점이다.)[63]



① $\dfrac{9}{4}$ ② $\dfrac{9}{2}$ ③ 9 ④ 12 ⑤ 18

:: E-연계 ::

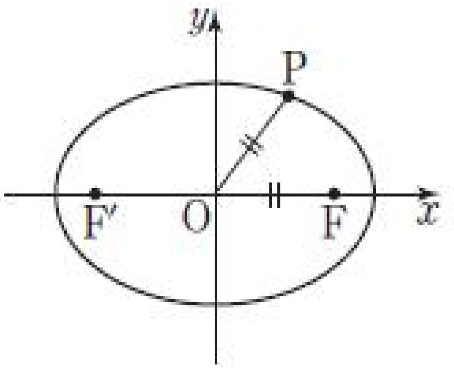
오른쪽 그림과 같이 장축의 길이와 단축의 길이의 비가 3 : 2인 타원이 있다. 이 타원의 장축의 오른쪽 부분에 있는 초점 F와 타원 위의 한 점 P를 잇는 선분PF의 중점을 Q라 하자. $\overline{OQ}=5$, $\overline{QF}=4$일 때, 이 타원의 두 초점 사이의 거리는? (단, 점 O는 장축과 단축의 교점이다.)[64]



① $4\sqrt{5}$ ② $6\sqrt{2}$ ③ $4\sqrt{6}$ ④ $6\sqrt{5}$ ⑤ $8\sqrt{6}$

:: 2007학년도 9월 평가원 ::

타원 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$의 두 초점을 F, F′이라 하자. 이 타원 위의 점 P가 $\overline{OP}=\overline{OF}$를 만족시킬 때, $\overline{PF}\cdot\overline{PF'}$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [65]



28.

수열 $\{a_n\}$에서 $a_1 = 2$이고, $n \geq 1$일 때 a_{n+1}은

$$\frac{1}{n+2} < \frac{a_n}{k} < \frac{1}{n}$$

을 만족시키는 자연수 k의 개수이다. a_{10}의 값을 구하시오. 66)

:: 2009학년도 9월 평가원 ::

수열 $\{a_n\}$의 제 n항 a_n을 자연수 k의 양의 제곱근 $\sqrt{k}$를 소수점 아래 첫째 자리에서 반올림하여 n이 되는 k의 개수라 하자. $\sum_{i=1}^{10} a_i$의 값을 구하시오.67)

:: 2011실시. 3월 교육청 ::

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

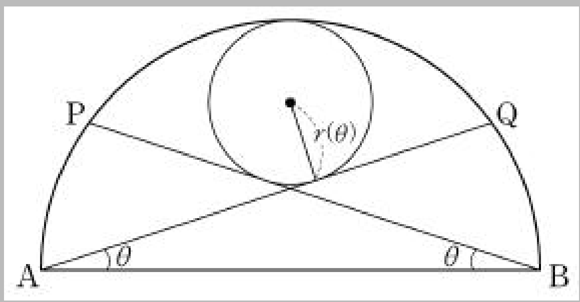
(가) a_n은 자연수이다.

(나) $\left| a_n - \sqrt{n} \right| < \frac{1}{2}$

$\sum_{n=1}^{90} a_n$의 값을 구하시오.68)

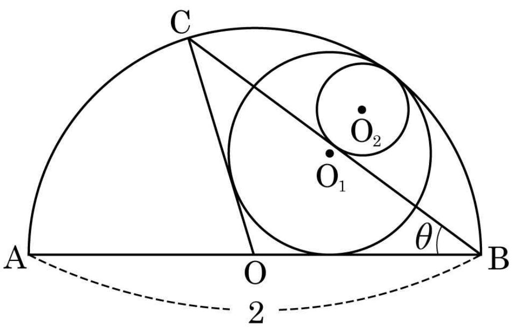
29.

그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위에 두 점 P, Q를 $\angle ABP = \angle BAQ = \theta$ $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{4}\right)$가 되도록 잡는다. 두 선분 AQ, BP와 호 PQ에 내접하는 원의 반지름의 길이를 $r(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}-0} \frac{r(\theta)}{\frac{\pi}{4}-\theta} = p\sqrt{2}+q$이다. p^2+q^2의 값을 구하시오. (단, p와 q는 유리수이다.) 69)



:: 2011실시. 3월 교육청 ::

그림과 같이 길이가 2 인 선분 AB 를 지름으로 하는 반원이 있다. 선분 AB 의 중점 O 와 반원 위를 움직이는 점 C 에 대하여 부채꼴 OBC 에 내접하는 원을 O_1, 현 BC 와 호 BC 로 둘러싸인 부분에 내접하는 원 중 반지름의 길이가 가장 큰 원을 O_2 라 하자. $\angle ABC = \theta$ 라 하고 두 원 O_1, O_2의 반지름의 길이를 각각 $f(\theta)$, $g(\theta)$ 라 할 때, $\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}-0} \frac{g(\theta)}{\{f(\theta)\}^2} = \frac{q}{p}$이다. p^2+q^2 의 값을 구하시오. (단, p, q 는 서로소인 자연수이다.)70)



30.

3보다 큰 자연수 n에 대하여 $f(n)$을 다음 조건을 만족시키는 가장 작은 자연수 a라 하자.

(가) $a \geq 3$
(나) 두 점 $(2, 0)$, $(a, \log_n a)$를 지나는 직선의 기울기는 $\frac{1}{2}$보다 작거나 같다.

예를 들어 $f(5) = 4$이다. $\sum_{n=4}^{30} f(n)$의 값을 구하시오. 71)

:: 2013학년도 수능 ::

좌표평면에서 자연수 n에 대하여 영역 $\left\{(x,\ y) \mid 2^x - n \leq y \leq \log_2(x+n)\right\}$에 속하는 점 중 다음 조건을 만족시키는 점의 개수를 a_n이라 하자.

(가) x좌표와 y좌표는 서로 같다.
(나) x좌표와 y좌표는 모두 정수이다.

예를 들어, $a_1 = 2$, $a_2 = 4$이다. $\sum_{n=1}^{30} a_n$의 값을 구하시오.72)

Ⅰ. 출제분석

출제 영역	번호	논점	전략
수1	4번	행렬과 그래프	2012학년도 6월 평가원에서는 1의 개수를 물었으나, 2013학년도 6월 평가원에서는 0의 개수를 묻고 있음.
	15번	점화식이 주어지고 S_n을 구하는 유형	당분간은 점화식이 주어지고 일반항을 구하는 유형이 지속되리라 본다. 2013학년도 6월 평가원 뿐만 아니라 2014학년도 예비시행에서도 그 유형이 지속됨을 보건데, 큰 유형변화는 없으리라 본다.
	18번	n제곱근 중 실수인 것의 개수	거듭제곱근에 관해서는 지금까지 기출문제가 없었다. 하지만 출제가 유력한 걸로 손꼽히는 주제였다. 이번 기회에 거듭제곱근에 관한 교육청 문제를 모두 풀어보고 정리할 필요가 있다.
	30번	로그부등식	밑 n이 변함에 따라서 로그함수 $\log_n a$가 어떻게 변하는지 알고 있어야 한다. 로그함수와 다항함수(1차) 그래프의 교점의 x좌표를 관찰하는 문제이다. 2012학년도 6월, 9월 ,11월 기출이 있는데, 사실 이 4개의 문제를 일관되게 풀이할 수 있어야 한다. 출제의 비밀을 밝혀야 한다!!
수2	21번	$g(x)$가 미분가능하기 위한 조건	$g(x)$가 미분가능하기 위해서는 $y=mx$는 삼차함수 $f(x)$의 변곡점을 지나야만 한다. 변곡점이 접점인 유형은 2013학년도 6월 평가원에서 살아있음을 확인할 수 있다.
	26번	역함수의 미분법	EBS수능특강에 신유형으로 소개되어 있는 문제이다. 역함수의 미분법은 공식처럼 암기하지 말고 그래프로 이해해야만 한다.
	29번	삼각함수의 극한	두 선분과 한 호에 내접하는 원의 반지름 구하기. 문제 조건으로부터 삼각방정식을 세우는 것이 가장 중요하다. ‘접한다’는 조건으로 어떻게 방정식을 세우는지 기출, 교육청,EBS의 모든 문항으로 집중연습하길 바란다.
적분과 통계	24번	역함수로 둘러싸인 부분을 회전시킨 회전체 부피	2011학년도 수능, 2012학년도 6월 평가원에서 계속해서 보이는 유형이다. 단지, 역함수라는 조건이 추가된 점이 눈이 띈다. EBS수능특강에 거의 동일한 문항이 존재하였다.
기벡	27번	타원의 대칭성(타원과 원의 결합형)	2013학년도 6월 평가원 중에서 가장 어려운 문제 중에 하나였다. 타원의 x축 대칭성을 이용하는 문제이며, x축 대칭성에 관한 기출과 EBS수능특강 문제가 존재한다. 이 주제에 관해 좀더 어렵게 공부할 필요가 있다.

번호	제목	EBS연계	기출연계
1			
2			
3			
4	행렬과 그래프		2012학년도 6월 평가원
5	쌍곡선의 꼭짓점 = 타원의 초점		2012학년도 9월 평가원
6	곱함수의 연속성		2011,2010,2009학년도
7	로그실생활		2012학년도 수능
8	샌드위치, 극한값	O	
9	삼각형 내부의 공통부분의 넓이		2012학년도 수능
10	정적분 형태를 띠고 있는 함수, 적분과 미분과의 관계	O	
11	부분분수	O	2011학년도 9월 평가원
12	무한등비급수의 도형에의 응용		
13	삼각함수의 최댓값		2012학년도 6월 평가원
14	행렬 ㄱㄴㄷ		
15	증명문제: S_n 구하기		2012학년도 수능
16	거리와 미분계수		2007학년도 9월 평가원
17	분수부등식		2011,2010학년도 6월 평가원
18	거듭제곱근		
19	무한급수와 정적분		
20	포물선	O	
21	$g(x)$ 가 실수전체에서 미분가능할 조건.		2012학년도 수능+6월 평가원 2011학년도 6월 평가원
22	무리방정식		2011학년도 수능
23	삼각방정식		2011학년도 6월 평가원
24	역함수의 그래프로 둘러싸인 부분을 x축 둘레로 회전시켜 생기는 회전체 부피	O	2012학년도 6월 평가원
25	중복조합	O	
26	역함수의 미분법	O	
27	타원의 대칭성, 타원과 원의 결합형	O	2007학년도 9월 평가원
28	수열과 부등식		2009학년도 9월 평가원
29	삼각함수의 극한		2012학년도 6월 평가원 2011실시. 3월 교육청
30	로그함수와 1차함수의 교점의 x좌표		2013학년도 수능
총계		8	

Ⅱ. 앞으로의 계획

(1) 적절한 난이도 조절 :

2013학년도 6평은 만점자가 상위 1%가 되도록 노력한 흔적이 보이지만,
앞으로 보게될 2014학년도 6평에는 만점자 1%원칙이 적용되지 않는다.
따라서 올해 보게될 6,9월 평가원의 난이도를 분석하고 이에 대한 적합하고도 신속한 대처가 필요하다.

(2) EBS 우수문항 및 신유형 문제를 집중 파헤져라~

(3) Killer 문항들을 집중 공략하라~

21번 $g(x)$가 미분가능하기 위한 조건
27번 타원의 대칭성(타원과 원의 결합형)
30번 로그부등식

위 킬러 문항을 대비하기 위해서는 우선적으로 최근 수능기출의 경향성을 철저히 분석해야 하고,
관련 주체에 대한 킬러문항 대비가 필요하다.

(4) 6월, 9월 평가원 자료를 토대로 파이널을 예상하라!

6평, 9평 분석노트를 통하여 11월 수능을 합리적으로 예측하는 시간을 반드시 갖어야 한다.
6평 보기 전보다는 보고 난 이후의 분석 작업에 총력을 기울이길 바란다.

Grand Final (2013학년도 6평 연계성 분석) 해설

1) 정답 : ②

$\log_2 4 = 2$

2) 정답 : ④

$(1+x)^5 = \sum_{r=0}^{5} {}_5C_r x^r \qquad \therefore {}_5C_2 = \frac{5\times 4}{2} = 10$

3)정답 : ④

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2a \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ 3a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ b \end{pmatrix} \qquad \therefore a=2, b=6$

4) 정답 4

$B+C = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2A$ 이므로 $\quad f(B+C) = f(2A) = 2f(A) = 2B = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

따라서 구하는 모든 성분의 합은 4이다.

5) 정답 : ②

0의 개수 $= 6\times 6 - (1$의 개수$) = 36 - 2\times($변의 개수$) = 36 - 2\times 8 = 20$

6) 정답 : ②

1의 개수 $= 2\times($변의 개수$) = 2\times 5 = 10$

7) 정답 : ④

쌍곡선의 두 꼭짓점 $= (\pm a, 0) \qquad \therefore a^2 = 13 - b^2 \quad \therefore a^2 + b^2 = 13$

8) 정답 : 52

쌍곡선 위의 점 (a, b)에서 접선의 방정식 $\frac{ax}{12} - \frac{by}{8} = 1$

타원 $\frac{(x-2)^2}{4} + y^2 = 1$의 중심은 $(2,\ 0)$이므로 위 접선이 타원의 중심을 지나야 넓이가 이등분 된다.

위 접선의 방정식에 $(2,0)$을 대입하면 $\frac{2a}{12} - 0 = 1 \qquad \therefore a = 6$

한편, $(a,b) = (6,\ b)$는 쌍곡선 위의 점이므로 $\frac{36}{12} - \frac{y^2}{8} = 1 \qquad \therefore y^2 = 16 \quad \therefore b^2 = 16$

$\therefore a^2 + b^2 = 36 + 16 = 52$

9) 정답 : ①

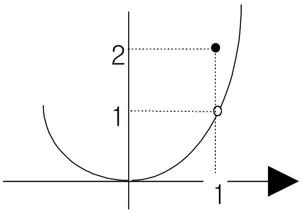
$\lim_{x\to -0} f(x)g(x) = \lim_{x\to +0} f(x)g(x) = f(0)g(0)$ 이므로 $f(0) = 0$

$\lim_{x \to 2-0} f(x)g(x) = \lim_{x \to 2+0} f(x)g(x) = f(2)g(2)$ 이므로 $f(2)=0$

따라서 $f(x)=x(x-2)$이므로 $f(5)=15$

10) ③

$y=f(x)$의 그래프는 아래 그림과 같다.



$$f(x)=\begin{cases} x^2 & (x \neq 1) \\ 2 & (x=1) \end{cases}$$

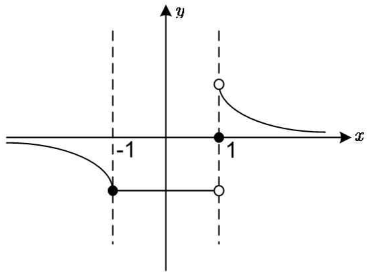
㉠ $\lim_{x \to 1-0} f(x) = \lim_{x \to 1+0} f(x) = 1$ (참)

㉡$g(x)$는 $f(x)$를 x축 방향으로 a만큼 평행이동한 것이므로 $x=1+a$에서 불연속 (거짓)

㉢ $h(x)=\begin{cases} x^2(x-1) & (x \neq 1) \\ 2(x-1) & (x=1) \end{cases} = \begin{cases} x^3-x^2 & (x \neq 1) \\ 0 & (x=1) \end{cases}$ (참)

11) 정답 : 90

$$g(x)=\begin{cases} \frac{1}{x} & (x > 1) \\ 0 & (x=1) \\ -1 & (-1 < x < 1) \\ -1 & (x=1) \\ \frac{1}{x} & (x < -1) \end{cases}, \quad h(x)=\begin{cases} 1 & (x > 0) \\ 0 & (x=0) \\ -1 & (x < 0) \end{cases}$$



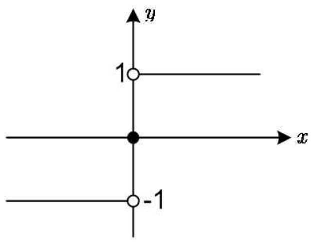
$y=f(x) \cdot g(x)$ 가 연속이므로

$f(1) \cdot g(1) = 0$, $\lim_{x \to 1+0} f(x)g(x) = f(1) = 0$

$y=f(x) \cdot h(x)$ 가 연속이므로

$f(0) \cdot h(0) = 0$, $\lim_{x \to +0} f(x)h(x) = f(0) = 0$

$\therefore f(x) = x \cdot (x-1)$ $\therefore f(10) = 90$



12) 정답 : ③

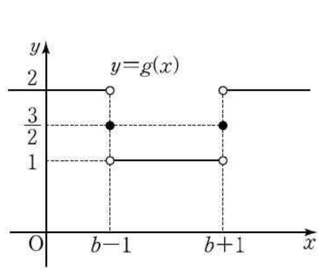
$f(x) = (x-2)^2 + a - 4$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 그래프는 직선 $x=2$ 에 대하여 대칭인 연속함수이다. 한편, $g(x)$ 를 간단히 하면 다음과 같다.

(i) $|x-b| > 1$ 일 때 $g(x)=2$

(ii) $|x-b| = 1$ 일 때 $g(x)=\frac{3}{2}$

(iii) $|x-b| < 1$ 일 때 $g(x)=1$

이때 $|x-b|=1 \Leftrightarrow x=b-1$ 또는 $x=b+1$ 이므로 함수 $g(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



이때, 함수 $g(x)$ 는 $x=b-1$, $x=b+1$ 일 때 불연속이므로 함수 $h(x)=f(x)g(x)$ 가 모든 실수 x 에 연속이 되려면

$f(b-1)=f(b+1)=0$ 이어야 한다.
따라서 $y=f(x)$ 의 대칭축의 방정식은 $x=2=b$ · · · ㉠이고,
$f(3)=9-12+a=0$ · · · ㉡이어야 한다. ㉠, ㉡에서 $a=3$, $b=2$ $\quad\therefore a+b=5$

13) 정답 : ③

$\log P_1 = 8.11-\dfrac{1750}{15+235}=1.11$

$\log P_2 = 8.11-\dfrac{1750}{45+235}=1.86$ 이므로 $\quad\therefore \log\dfrac{P_2}{P_1}=0.75=\dfrac{3}{4}$

$\therefore \dfrac{P_2}{P_1}=10^{\frac{3}{4}}$

14) ④

$\log y = A-\dfrac{1}{2}\log t-\dfrac{Kx^2}{t}$ 에서 $t=1$, $x=2$, $y=a$ 일 때 $\log a = A-4K$ …… ㉠

$t=4$, $x=d$, $y=\dfrac{a}{2}$ 일 때 $\log a = A-\dfrac{Kd^2}{4}$ …… ㉡

㉠, ㉡ 에서 $A-4K=A-\dfrac{Kd^2}{4}$, $d^2=16$

$\therefore d=4$ ($\because d>0,\ K>0$)

15) 정답 : ③

$\ln(1+3x)\leqq f(3x)\leqq \dfrac{e^{6x}-1}{2}$

$x>0$ 인 경우, $\dfrac{\ln(1+3x)}{x}\leqq\dfrac{f(3x)}{x}\leqq\dfrac{e^{6x}-1}{2x}$

$\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln(1+3x)}{x}=3$, $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{e^{6x}-1}{2x}=3$ $\qquad\therefore \lim\limits_{x\to+0}\dfrac{f(3x)}{x}=3$

16) 정답 ①

$x^2<f(x)<e^{x^2}-1$이고, $x>0$이므로 $x<\dfrac{f(x)}{x}<\dfrac{e^{x^2}-1}{x}$

$\lim\limits_{x\to+0}x=0$ 일 때 $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{e^{x^2}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}\cdot x\right)=1\cdot 0=0$

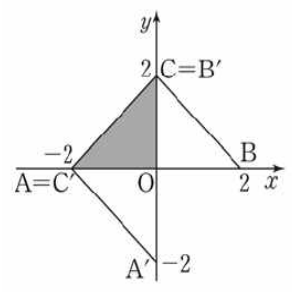
$\therefore \lim\limits_{x\to+0}\dfrac{f(x)}{x}=0$

17) 정답 : ③

$\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$ $\quad\therefore A'(0,-2)$

$\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ $\quad\therefore B'(0,2)$

$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad\therefore C'(-2, 0)$



$\therefore$ 공통부분의 넓이 $=\dfrac{1}{2}\times 2\times 2=2$

[별해]

행렬 $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$은 90° 회전변환을 의미하므로 $\triangle ABC$를 -90° 회전변환하면 $\triangle A'B'C'$가 된다.

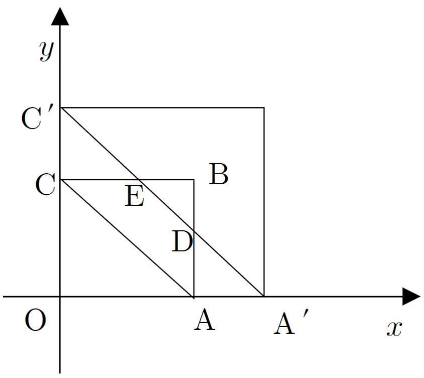
18) 정답 : ②

$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3k \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad\therefore\ A'(3k,\ 0)$

$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 3k \end{pmatrix}$ $\quad\therefore\ C'(0,\ 3k)$

따라서 두 점 A', C'를 지나는 직선의 방정식은 $y-3k=\dfrac{3k-0}{0-3k}(x-0)$, $y=-x+3k$

직선 $y=-x+3k$가 선분 AB, BC와 만나는 점을 각각 D, E라 하면



$\therefore\ D(3,\ -3+3k)$, $E(-3+3k,\ 3)$

그러므로 삼각형 BDE의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times\overline{BD}\times\overline{BE}=\dfrac{1}{2}\times(6-3k)^2$ 이므로

$\dfrac{1}{2}\times(6-3k)^2=\dfrac{1}{2}$ 에서 $(6-3k)^2=1$ $\quad\therefore\ k=\dfrac{5}{3}$

19) 정답 : ①

준 식에서 $x=0$ 대입 $\therefore a=-1$

준 식을 미분하면 $f(x)=e^x-1$ $\quad\therefore f(\ln 2)=1$

20) 정답 : ①

$\displaystyle\int_1^x f(t)dt=(2x-1)^5+ax$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

㉠에 $x=1$을 대입하면 $\quad 0=1+a$ $\quad\therefore\ a=-1$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=5(2x-1)^4(2x-1)'-1$

$\therefore\ f(x)=10(2x-1)^4-1$

$\therefore\ f(0)=10(-1)^4-1=9$

21) 정답 : ①

$$\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{S_k}-\frac{1}{S_{k+1}}\right)=\left(\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_2}\right)+\left(\frac{1}{S_2}-\frac{1}{S_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{S_{10}}-\frac{1}{S_{11}}\right)=\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_{11}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{S_{11}}=\frac{1}{3}$$

$\therefore S_{11}=6$

22) 답 **12**

$S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$ 이므로 $\dfrac{a_{n+1}}{S_nS_{n+1}}=\dfrac{S_{n+1}-S_n}{S_nS_{n+1}}=\dfrac{1}{S_n}-\dfrac{1}{S_{n+1}}$

$a_1=S_1=3$ 이므로 $\displaystyle\sum_{k=1}^{20}\frac{a_{k+1}}{S_kS_{k+1}}=\sum_{k=1}^{20}\left(\frac{1}{S_k-S_{k+1}}\right)=\left(\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_2}\right)+\left(\frac{1}{S_2}-\frac{1}{S_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{S_{20}}-\frac{1}{S_{21}}\right)$

$$=\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_{21}}=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{S_{21}}=\frac{1}{3}-\frac{1}{S_{21}}=\frac{1}{4}$$

따라서 $\dfrac{1}{S_{21}}=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{12}$ 이므로 $S_{21}=12$

23) 답 39

$$a_{n+1}-a_n=(-1)^n\frac{2n+1}{n(n+1)}=(-1)^n\left(\frac{2n+1}{n}-\frac{2n+1}{n+1}\right)=(-1)^n\left(2+\frac{1}{n}-2+\frac{1}{n+1}\right)=(-1)^n\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)$$

즉, $a_{n+1}-a_n=(-1)^n\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}\right)$이므로

$$a_{20}=2+\sum_{k=1}^{19}(-1)^k\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}\right)=2+\left\{-\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\cdots-\left(\frac{1}{19}+\frac{1}{20}\right)\right\}$$

$$=2+\left(-1-\frac{1}{20}\right)=1-\frac{1}{20}=\frac{19}{20}$$

$\therefore\ p+q=39$

24) 정답 : **221**

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=S_n$

$\dfrac{S_n}{n+1}=\dfrac{a_n}{2}$ 에서 $S_n=\dfrac{n+1}{2}a_n$ …… ㉠

$\dfrac{S_{n-1}}{n}=\dfrac{a_{n-1}}{2}$ 에서 $S_{n-1}=\dfrac{n}{2}a_{n-1}$ …… ㉡

㉠ − ㉡을 하면

$a_n=S_n-S_{n-1}=\dfrac{n+1}{2}a_n-\dfrac{n}{2}a_{n-1}\,(n\ge 2)$

$\dfrac{n-1}{2}a_n=\dfrac{n}{2}a_{n-1}$ $\quad\therefore\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{n}{n-1}\,(n\ge 2)$

n에 2, 3, 4, $\cdots,n$을 차례로 대입하여 변끼리 곱하면

$$\frac{a_2}{a_1}\times\frac{a_3}{a_2}\times\frac{a_4}{a_3}\times\cdots\times\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{n}{n-1}$$

$\therefore a_n = na_1 = \frac{n}{3}(n \geq 2)$

이 등식은 $n=1$일 때도 성립하므로 $a_n = \frac{n}{3}(n \geq 1)$

$\therefore \sum_{k=1}^{20} \frac{1}{a_{2k-1}a_{2k+1}} = \sum_{k=1}^{20} \frac{9}{(2k-1)(2k+1)} \quad = \frac{9}{2}\sum_{k=1}^{20}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)$

$= \frac{9}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{39}-\frac{1}{41}\right)\right\} \quad = \frac{9}{2}\left(1-\frac{1}{41}\right) = \frac{180}{41}$

$\therefore p+q = 41+180 = 221$

25)정답 : ②

$\overline{B_1C_1} = 3,\ \overline{B_2C_2} = 3\times\frac{2}{3} = 2,$ 이므로 무한등비급수의 공비 $= \left(\frac{2}{3}\right)^2$

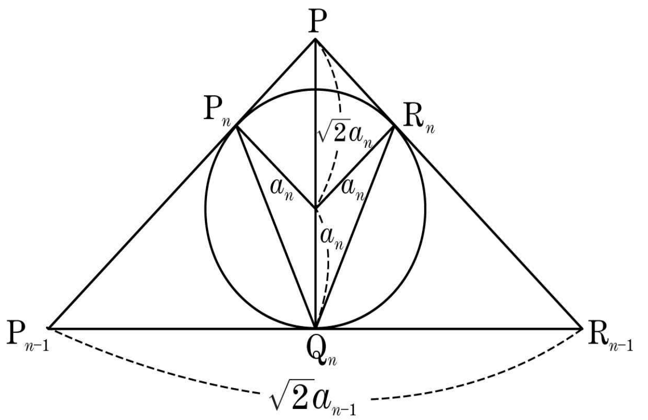
$S_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$

$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)\times\frac{1}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)\times\frac{9}{5} = \frac{6\pi - 9\sqrt{3}}{20}$

26) 정답 : ④

삼각형 PQR 의 내접원의 반지름을 a_1이라 하면 $\sqrt{2}a_1 + a_1 = \sqrt{2}$에서 $a_1 = 2-\sqrt{2}$이고

$S_1 = \frac{1}{2}\times(2\sqrt{2}-2)\times 1 = \sqrt{2}-1$



삼각형 $PP_{n-1}R_{n-1}$의 내접원의 반지름을 a_n이라 하면 $\sqrt{2}a_n + a_n = \frac{\sqrt{2}a_{n-1}}{2}$

$\therefore\ a_n = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}a_{n-1}$

따라서 수열 $\{a_n\}$이 공비가 $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$인 등비수열을 이루므로 수열 $\{S_n\}$은 공비가 $\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{3-2\sqrt{2}}{2}$인 등비수열을 이룬다.

$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\sqrt{2}-1}{1-\frac{3-2\sqrt{2}}{2}} = \frac{6-2\sqrt{2}}{7}$

$\therefore\ p+q = \frac{4}{7}$

27) 정답 : ④

$f(x)=2\left(\cos x\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\sin x\dfrac{1}{2}\right)+3\sin x=4\cdot\sin x+\sqrt{3}\cos x$

$\therefore$ 최댓값 $=\sqrt{16+3}=\sqrt{19}$

28) 정답 : ④

$f'(x)=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}sinx+\dfrac{1}{2}cosx\right)+1=2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}sinx+\sin\dfrac{\pi}{6}cosx\right)+1$

$=2\cdot\sin(x+\dfrac{\pi}{6})+1$

$\dfrac{\pi}{6}\le x\le\dfrac{5}{6}\pi$ 이고, $\dfrac{\pi}{3}\le x+\dfrac{\pi}{6}\le\pi$ 이므로 $M=3,\ m=1$

$\therefore M+m=4$

29) 정답 : ⑤

ㄱ) $\begin{pmatrix}2 & 2\\-1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 2\\-1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2\\-1 & -1\end{pmatrix}$ $\therefore$참

ㄴ) $A^2=A$ $\therefore A=E$ $\therefore$참

ㄷ) $(A+E)^2=(A+E)$ $\therefore A^2+2A+E=A+E$

$\therefore A^2=-A$ $\therefore A^4=A^2=-A$

이때 $(A^4)^2=(-A)^2=A^2=-A$

$\therefore (A^4)^2=A^2$ 이므로 $A^4\in S$ $\therefore$참

30) 정답 : ⑤

$P=\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$ 이면 $P^2=\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}=E$

㉠ : $S=\{A\,|\,A$ 는 이차정사각행렬이고, $PAP=A\}$ 에서 A 대신 P 를 대입하면

$P^3=P$ ($\because$ $P^2=E$) $\therefore$ $P\in S$ (참)

㉡ : $A\in S$ 이고 $B\in S$ 이면 $PAP=A$ · · · ①, $PBP=B$ · · · ②가 된다.

$AB\in S$ 이려면 $P(AB)P=AB$ 이어야 한다.

$\therefore$ $PA(PP)BP=AB$ ($\because$ $P^2=E$) (참)

㉢ : $A=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$ 라 가정하면 $A\in S$ 이려면 $PAP=A$ 가 성립하여야 하므로

$\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$ 이다. $\begin{pmatrix}d & c\\b & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$ $\therefore$ $a=d$, $b=c$

$A=\begin{pmatrix}a & b\\b & a\end{pmatrix}$ 에서 $A^2=\begin{pmatrix}a^2+b^2 & 2ab\\2ab & a^2+b^2\end{pmatrix}=O$ 에서 $a^2+b^2=0$, $2ab=0$

$\therefore$ $a=b=0$, $A=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$ (참)

[㉡ 별해]

$P=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ 이고 $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ 라 하면 $PAP=A$ 를 만족시키는 행렬 A 는 $A=\begin{pmatrix}a&b\\b&a\end{pmatrix}$ 가 된다.($\because\ a=d,\ b=c$)

$A\in S$ 이고 $B\in S$ 이면 $A=\begin{pmatrix}a&b\\b&a\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}p&q\\q&p\end{pmatrix}$ 라고 둘 수 있다.

$A=\begin{pmatrix}ap+bq&aq+bp\\aq+bp&ap+bq\end{pmatrix}$ $\qquad\therefore\ AB\in S$

31) 정답 : ③

$a_{2k}=a_{2k-2}+1$ 이므로

$a_4=a_2+1$

$a_6=a_4+1$

$\vdots$

$a_{2k}=a_{2k-2}+1$

$\therefore a_{2k}=a_2+(k-1)=k=$ (가) $\left(\because a_2=\dfrac{S_1}{a_1}=1\right)$

한편, $n=2k$일 때 $S_n=a_n\cdot a_{n+1}=k\cdot(k+2)=$ (나)

$\therefore f(6)+g(7)=6+7\cdot 9=69$

32) 정답 : ②

자연수 n 에 대하여 $S_{n+1}=S_n+a_{n+1}$ 이므로 $\quad n\,a_{n+1}=2\,S_n+(n+1)^3$ …… ㉠

이다. 2 이상의 자연수 n 에 대하여 $\quad(n-1)\,a_n=2\,S_{n-1}+n^3$ …… ㉡

이고, ㉠ 에서 ㉡ 을 뺀 식으로부터

$$\begin{aligned}na_{n+1}-(n-1)a_n&=2\left(S_n-S_{n-1}\right)+\left(3n^2+3n+1\right)\\&=2\left(a_n\right)+\left(3n^2+3n+1\right)\end{aligned}$$

$n\,a_{n+1}=(n+1)\,a_n+\boxed{3n^2+3n+1}$ 를 얻는다.

양변을 $n(n+1)$ 로 나누면 $\quad\dfrac{a_{n+1}}{n+1}=\dfrac{a_n}{n}+\dfrac{\boxed{3n^2+3n+1}}{n(n+1)}=\dfrac{a_n}{n}+3+\dfrac{1}{n(n+1)}$

이다. $b_n=\dfrac{a_n}{n}$ 이라 하면,

$b_{n+1}=b_n+3+\boxed{\dfrac{1}{n(n+1)}}\quad(n\geqq 2)$ 이므로

$$\begin{aligned}b_n&=b_2+\sum_{k=2}^{n-1}\left(3+\frac{1}{k(k+1)}\right)\\&=b_2+3(n-2)+\sum_{k=2}^{n-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\&=b_2+\boxed{3(n-2)+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}\quad(n\geqq 3)\end{aligned}$$

따라서 $f(n)=3n^2+3n+1$, $g(n)=\dfrac{1}{n(n+1)}$,

$h(n)=3(n-2)+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n}$ 이므로 $\therefore\ \dfrac{f(3)}{g(3)\,h(6)}=\dfrac{37}{\dfrac{1}{12}\times\dfrac{37}{3}}=36$

33) 정답 : ⑤

$(a^2-1)^2=(a-1)^2+\{f(a)-f(1)\}^2$

$\therefore f(a)-f(1)=\sqrt{(a^2-1)^2-(a-1)^2}=(a-1)\sqrt{a\cdot(a+2)}$

$\therefore f'(1)=\lim_{a\to1}\frac{f(a)-f(1)}{a-1}=\lim_{a\to1}\sqrt{a\cdot(a+2)}=\sqrt{3}$

34) 정답 20

접선의 방정식은 $y-t^3=3t^2(x-t)$이므로 $3t^2x-y-2t^3=0$

이 직선에서 원점까지의 거리 $f(t)$는 $f(t)=\frac{|-2t^3|}{\sqrt{(3t^2)^2+(-1)^2}}$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)}{t}=\lim_{t\to\infty}\frac{2t^2}{\sqrt{9t^4+1}}=\frac{2}{3}$$

$a=\frac{2}{3}$이므로 $30a=20$

35) 정답 : ②

$\frac{f(x)-x-1}{xf(x)}\geqq 0$

$\therefore\{f(x)-(x+1)\}\cdot x\cdot f(x)\geqq 0$

$+$	$+$	$+$
$+$	$-$	$-$
$-$	$+$	$-$
$-$	$-$	$+$

① $f(x)\geqq x+1$, $x>0$, $f(x)>0$ $\therefore 0<x\leqq\frac{3}{2}$ $\therefore x=1$

② $f(x)\geqq x+1$, $x<0$, $f(x)<0$ $\therefore -5<x\leqq-3$ $\therefore x=-4,-3$

③ $f(x)\leqq x+1$, $x>0$, $f(x)<0$ $\therefore 4<x\leqq 5$ $\therefore x=5$

④ $f(x)\leqq x+1$, $x<0$, $f(x)>0$ 정수해 없음

36) 정답 : ③

$\frac{f(x+1)}{f(x-1)}-1=\frac{(x-1)(x+3)}{(x-3)(x+1)}-1=\frac{4x}{(x-3)(x+1)}\leqq 0$

$x<-1,\ 0\leqq x<3$이므로 $A\cap B=\{x|-5<x<-1,\ 0\leqq x<3\}$

정수의 개수는 6이다.

37) 정답 ③

$2x=t$로 치환하면 부등식 $\frac{x}{f(2x)-1}\geqq\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{t}{f(t)-1}\geqq 1$

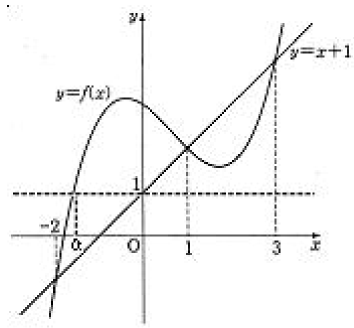
(i) $f_{(t)}>1$이면 $f(t)\leqq t+1$ 이어야 하므로 주어진 그래프에서 두 조건을 만족하는 t의 범위는 $1\leqq t\leqq 3$이다.

(ii) $f_{(t)} < 1$이면 $f_{(t)} \geqq t+1$ 이어야 하므로 같은 방법으로 t의 범위를 구하면 $-2 \leqq t < \alpha$이다.

$\therefore\ -2 \leqq 2x < \alpha$, $1 \leqq 2x \leqq 3$

$$-1 \leqq x \leqq \frac{\alpha}{2} \qquad \frac{1}{2} \leqq \alpha \leqq \frac{3}{2}$$

$\therefore\ \mathrm{M} = \frac{3}{2},\ m = -1$ 이므로 $\therefore\ \mathrm{M}+m = \frac{1}{2}$



38) 정답 : ①

n	$(-3)^{n-1}$	a_n
3	9	$a_3 = 1$
4	-27	$a_4 = 0$
5	81	$a_5 = 1$
6	-273	$a_6 = 0$

$\therefore a_{2k+1} = 1,\ a_{2k} = 0$

$$\therefore \sum_{n=3}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^7} + \cdots = \frac{1}{2^3} \times \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{8} \times \frac{4}{3} = \frac{1}{6}$$

39) 정답 ②

ㄱ. $K(4,\ 2) = \sqrt[4]{2} = 2^{\frac{1}{4}},\ K(8,\ 4) = \sqrt[8]{4} = \sqrt[8]{2^2} = 2^{\frac{2}{8}} = 2^{\frac{1}{4}}$이므로 $K(4,\ 2) = K(8,\ 4)$ (참)

ㄴ. $K(m,\ a) \cdot K(m,\ b) = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[m]{ab} = K(m,\ ab)$ (참)

ㄷ.[반례] $m=2,\ n=4,\ a=\frac{1}{2},\ b=\frac{1}{4}$이면 $\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt[4]{\frac{1}{4}}$ 이지만 $\frac{1}{2} > \frac{1}{4}$이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

40) 정답 : ③

ㄱ. $x^3 = 3$에서 $x = \sqrt[3]{3}$ $\therefore -\sqrt[3]{3} \not\in R(3)$ (거짓)

ㄴ. [반례] $k=2$이면 $R(2) = \left\{-\sqrt{2},\ \sqrt{2}\right\} \neq \varnothing$ (거짓)

ㄷ. $a \in R(m)$이면 $a^m = m,\ b \in R(n)$ 이면 $b^n = n$이고, $m > n$이므로 $a^m > b^n$이다. (참)

41) 정답 : ⑤

$\int_{m}^{m+1} f(x)dx < 0$ 이므로 $m = -3, -2, -1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$

$\therefore$7개

42) 정답 : 3

두 구간 $[1,\ 2],\ [3,\ 5]$에서 $f(x) \leq 0$이므로 $\int_{n}^{n+1} f(x)dx < 0$을 만족시키는 자연수 n은 $1,\ 3,\ 4$로 3개다.

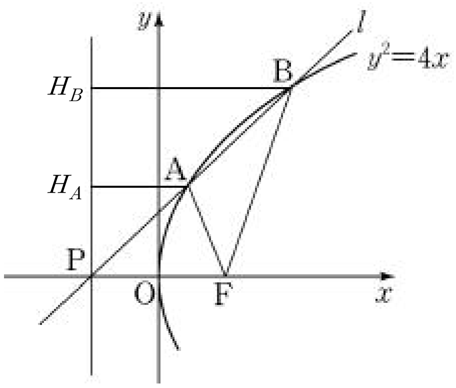
43) 정답 : 1

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}\cdot k\right)\cdot\frac{b-a}{n}=\int_a^b f(x)dx>0$$ 이므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이어야 한다.

그러므로 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면 $\frac{D}{4}=1-p\leq 0$ $\therefore\ p\geq 1$

따라서 p의 최솟값은 1이다.

44) 정답 : ⑤



점 A, B에서 준선에 내린 수선의 발을 각각 H_A, H_B라 하자.

$FA:FB=AH_A:BH_B\ =PH_A:PH_B=1:2$ ($\because$ 직각삼각형의 닮음)

$A\left(\frac{a^2}{4}, a\right)$, $B\left(\frac{b^2}{4}, b\right)$라 하면

① $PH_A:PH_B=a:b=1:2$ $\therefore b=2a$

② $AH_A:BH_B=\frac{a^2}{4}+1:\frac{b^2}{4}+1=1:2$ $\therefore a=\sqrt{2}$

직선 l의 기울기 $\dfrac{b-a}{\frac{b^2}{4}-\frac{a^2}{4}}=\frac{4}{3a}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

45) 정답: ④

두 점 A, B에서 준선 l에 내린 수선의 발을각각 D, E라 하자.

포물선의 정의에 의해 $\overline{AD}=\overline{AF}$, $\overline{BE}=\overline{BF}$

두 선분 AD, BE가 서로 평행하므로 $\triangle CAD \backsim \triangle CBE$

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{BE}}=\frac{\overline{AF}}{\overline{BF}}=\frac{3}{10}$$

이때, $\overline{CA}:\overline{CB}=3:10$이므로 $\overline{CA}:\overline{AB}=3:(10-3)=3:7$

$\therefore\ \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{3}{7}$

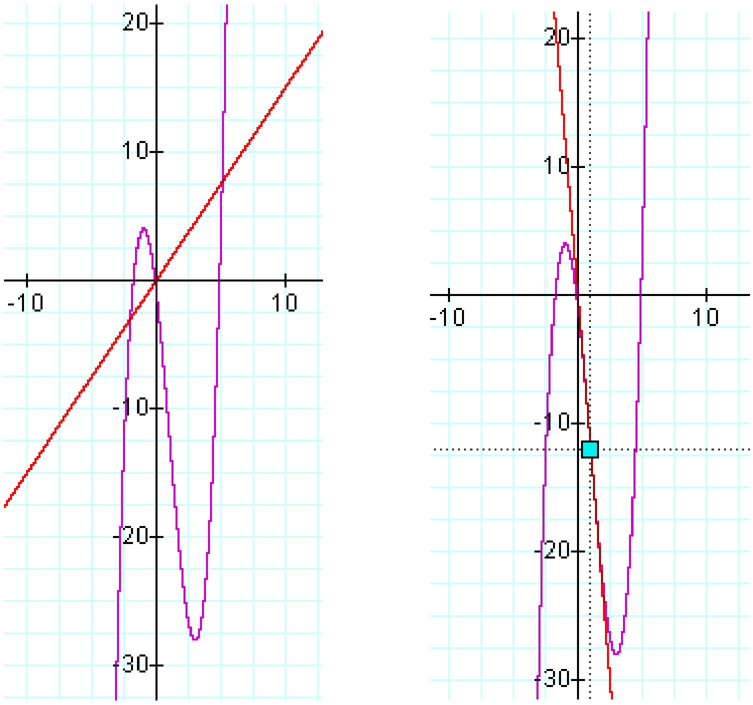
46) 정답 : ②

전체 구간에서 $g(x)$가 미분가능하려면 $g(x)$의 그래프에 첨점이 없어야 한다.

그러기 위해서는 $y=mx$는 삼차함수 $f(x)$의 변곡점을 지나야만 한다.

왜냐하면 $y=mx$는 원점을 지나고, 기울기 m을 회전시켰을 때, 원점을 지나면서 $f(x)$에 뚫으면서 접하는 경우는 오직

변곡접선 한 경우만 있기 때문이다.



$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9, \quad f''(x) = 6x - 6$ $\therefore$ 변곡점 $(1, -12)$
$m = f'(1) = -12$

※ $y = mx$이 지나는 $(0, 0)$은 $y = f(x)$의 변곡접선의 y절편이다.

[방법 2]
$f(x) = mx$의 근을 α라 하면 $f(\alpha) = m\alpha$ $\quad \therefore \alpha^3 - 3\alpha^2 - 9\alpha - 1 = m\alpha$ $\cdots$①식
$f'(\alpha) = m$ $\quad \therefore 3\alpha^2 - 6\alpha - 9 = m$ $\cdots$②식

①식 : $\alpha^3 - 3\alpha^2 - 9\alpha - 1 = 3\alpha^3 - 6\alpha^2 - 9\alpha$
$\therefore 2\alpha^3 - 3\alpha^2 + 1 = 0$
$(\alpha - 1)(2\alpha^2 - \alpha - 1) = 0$ $\quad \therefore (\alpha - 1)^2(2\alpha + 1) = 0$
$\therefore \alpha = 1, -\dfrac{1}{2}$
$\alpha = 1$ 일 때 $m = -12$ 이고 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하지만
$\alpha = -\dfrac{1}{2}$ 일 때 $m = -\dfrac{21}{4}$ 이고 $f(x) = mx$의 근은$\alpha = -\dfrac{1}{2}$ 이외의 또 다른 교점이 생긴다.
이 때, $g(x)$ 는 $x > 0$ 에서 미분불가능한 첨점이 1개 발생하므로 $\alpha = 1$이어야 한다.

따라서 $m = f'(1) = -12$

[방법 3]
구간의 경계가 되는 지점은 $f(x) = mx$의 해이므로 $f(x) = mx$의 모든 해 α에 대해 $f'(\alpha) = m$이어야 한다.
$h(x) = f(x) - mx$ 라 하면 $h(x) = 0$의 모든 근 α에 대해 $h'(\alpha) = 0$이어야 한다.
즉, $h(x) = 0$의 모든 근은 중근 또는 n중근이어야 한다.
그런데 $h(x)$는 삼차함수이므로 $h(x) = 0$은 삼중근을 가져야 한다.

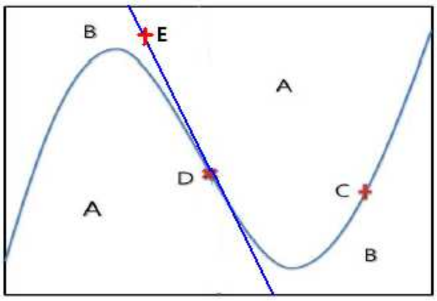
$h(x) = x^3 - 3x^2 - (9+m)x - 1$이 세 제곱식이 되려면

$x^3 - 3x^2 - (9+m)x - 1 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x-1)^3$ 이어야 한다.

$\therefore m = -12$

47) 정답 : ④

* 참고 : 삼차함수에서의 접선의 개수



접선 1개 : A, D(변곡점)

접선 2개 : C, E

접선 3개 : B

[풀이]

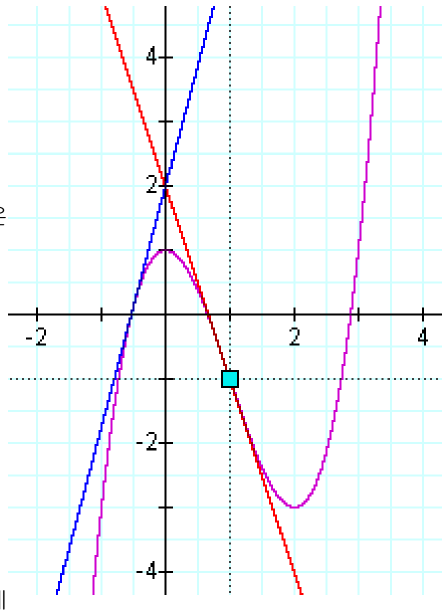
$y = x^3 - 3x^2 + 1$

$y' = 3x^2 - 6x$

$y'' = 6x - 6$ 이므로 변곡점$(1, -1)$

변곡접선은 $y + 1 = -3(x-1)$ $\therefore y = -3x + 2$

문제에서 주어진 점 $(0,2)$는 변곡접선의 y절편이다.



곡선 위의 또다른 접점의 좌표를 $(t, t^3 - 3t^2 + 1)$이라 하면, 접선의 방정식은

$y = (3t^2 - 6t)(x - t) + t^3 - 3t^2 + 1$

이 직선이 $(0,2)$를 지나므로 $2 = -3t^3 + 6t^2 + t^3 - 3t^2 + 1$

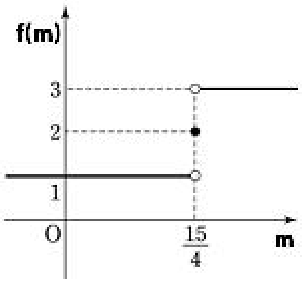
$2t^3 - 3t^2 = 1 = 0$ $\therefore (t-1)^2(2t+1) = 0$

따라서 $t = 1$ 또는 $t = -\dfrac{1}{2}$일 때 접선을 갖는다.

$m \le 0$일 때 이 직선은 곡선과 서로 다른 두 점에서 만나므로 $f(m) = 2$

$m = f'\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{15}{4}$일 때 이 직선은 곡선에 접하므로 두 점에서 만나고,

$m < \dfrac{15}{4}$일 때 곡선과 한 점에서 만나고, $m > \dfrac{15}{4}$일 때 곡선과 서로 다른 세 점에서 만난다.



따라서 함수 $f(m)$이 구간 $(-\infty, a)$에서 연속이 되게 하는 실수 a의 최댓값은 $\frac{15}{4}$이다.

※ 문제에서 주어진 $(0,2)$는 변곡접선의 y절편이다.

[별해]

$y=mx+2$와 $y=x^3-3x^2+1$의 교점의 개수는 $x^3-3x^2-mx-1=0$ 에서 교점의 좌표 $x\neq 0$이므로

$x^2-3x-\frac{1}{x}=m$의 실근의 개수와 같다.

$g(x)=x^2-3x-\frac{1}{x}$으로 놓고 미분을 이용하여 그려보면

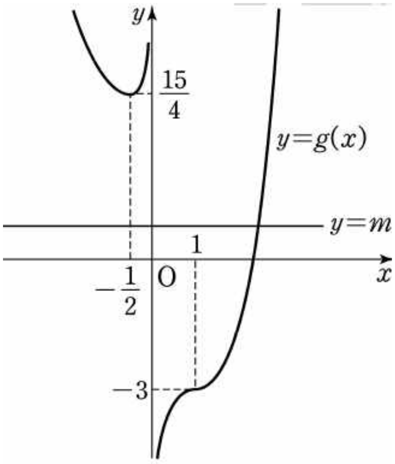
$g'(x)=2x-3+\frac{1}{x^2}=\frac{2x^3-3x+1}{x^2}=\frac{(x-1)^2(2x+1)}{x^2}=0$

증감표를 그려보면

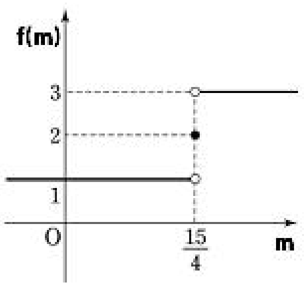
x		$-\frac{1}{2}$		(0)		1	
$g'(x)$	−	0	+	없음	+	0	+
$g(x)$	↘	$\frac{15}{4}$	↗	없음	↗	-3	↗

$\lim_{x\to -0} g(x)=+\infty$, $\lim_{x\to +0} g(x)=-\infty$ $\lim_{x\to -\infty} g(x)=+\infty$, $\lim_{x\to +\infty} g(x)=+\infty$ 이므로

$y=g(x)$와 $y=mx$의 그래프를 그려보면



$f(m)$은 $y=g(x)$와 $y=mx$의 교점의 개수이므로



따라서 a의 최댓값은 $\frac{15}{4}$이다.

48) 정답 : ⑤

ㄱ. $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $\lim_{x\to+0} h(x) = \lim_{x\to-0} h(x) = h(0)$

따라서, $\lim_{x\to+0} f(x) = \lim_{x\to-0} g(x)$ 에서 $f(0)=g(0)$ (참)

ㄴ. $f'(0)=g'(0)=k$ 라 하면

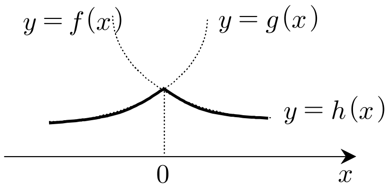
$$\lim_{x\to+0}\frac{h(x)-h(0)}{x} = \lim_{x\to+0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = f'(0)=k$$

$$\lim_{x\to-0}\frac{h(x)-h(0)}{x} = \lim_{x\to-0}\frac{g(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to-0}\frac{g(x)-g(0)}{x} = g'(0)=k$$

$\therefore\ h'(0)=\lim_{x\to0}\frac{h(x)-h(0)}{x}=k$ (참)

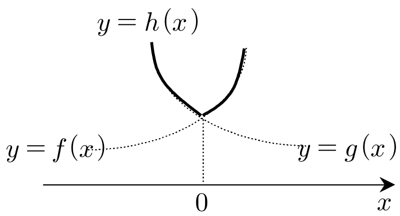
ㄷ. (ⅰ) $f'(0)<0$, $g'(0)>0$ 이면

$f(x)$는 $x=0$에서 감소상태, $g(x)$는 $x=0$에서 증가상태이고, $f(0)=g(0)$이므로 아래의 그림과 같이 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.



(ⅱ) $f'(0)>0$, $g'(0)<0$ 이면

$f(x)$는 $x=0$에서 증가상태, $g(x)$는 $x=0$에서 감소상태이고, $f(0)=g(0)$이므로 아래의 그림과 같이 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 갖는다.



따라서, $h(x)$는 $x=0$에서 극값을 갖는다. (참)

그러므로 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

49) 정답 : 4

$\sqrt{4x+9}=x+1$, $x\geq-\frac{9}{4}$ 에서 $4x+9=x^2+2x+1$

$\therefore x^2-2x-8=0$ 이므로 $(x-4)(x+2)=0$ $\quad\therefore x=4$

50) 정답] ①

$\sqrt{4x^2-5x+7}=t\,(t\geq0)$ 라고 하면 $4x^2-5x=t^2-7$

$\therefore$ (준식) = $t^2-t-6=0$ 에서 $t=3$ $(\because t\geq0)$

$\therefore 4x^2-5x-2=0$

따라서 모든 실근의 곱은 $-\frac{1}{2}$

51) 정답 : 30

ⅰ) $\sin x = 0 \quad \therefore x = \pi$

ⅱ) $\cos 2x - \cos x = 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$

$\therefore (2\cos x + 1)(\cos x - 1) = 0$

$\therefore \cos x = -\frac{1}{2}, 1 \qquad \therefore x = \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$

$\therefore k = 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = 3 \qquad \therefore 10k = 30$

52) 정답: ⑤

$X = \sin x$라 하면 $\qquad 2X - 4X(1 - X^2) - 2(1 - 2X^2) + 1 = 4X^3 + 2X^2 - 2X = 0$

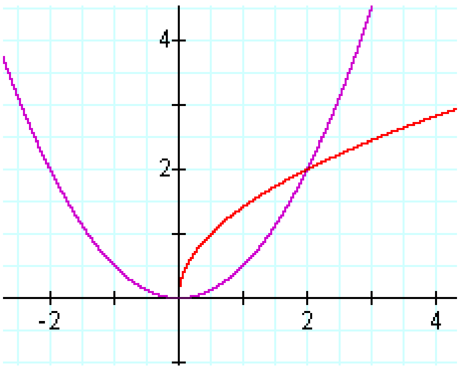
X=0 또는 X=-1 또는 $X = \frac{1}{2}$

$x = 0, \pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

모든 x의 합은 $\frac{7}{2}\pi$이다.

53) 정답 : 17

$y = \frac{1}{2}x^2$ 의 역함수는 $y = \sqrt{2x}$



$\frac{1}{2}x^2 = x \quad x\left(\frac{x}{2} - 1\right) = 0 \qquad \therefore x = 0, 2$

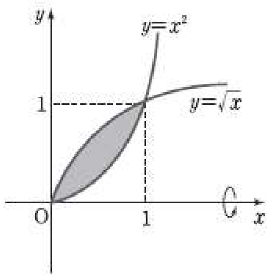
$\pi \int_0^2 \left((\sqrt{2x})^2 - \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 \right) dx = \pi \left[x^2 - \frac{x^5}{20} \right]_0^2 = \frac{12}{5}\pi \qquad \therefore p + q = 17$

54) 답 ③

$y = x^2\ (x \geq 0)$의 역함수는 $x = y^2 \quad \therefore y = \sqrt{x}\ (\because y \geq 0)$

그러므로 두 함수$y = x^2, y = \sqrt{x}$ 의 그래프는 그림과 같다.

따라서 구하는 부피를 V라 하면



$V = \pi \int_0^1 (\sqrt{x})^2\, dx - \pi \int_0^1 (x^2)^2\, dx \quad = \pi \int_0^1 x\, dx - \pi \int_0^1 x^4\, dx$

$= \pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 - \pi \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^1 \quad = \pi\left(\frac{1}{2} - 0\right) - \pi\left(\frac{1}{5} - 0\right) \quad = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} = \frac{3}{10}\pi$

55) 정답 : 35

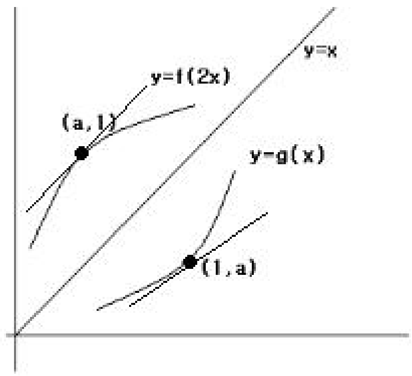
$$_4H_4 = {_7C_4} = \frac{7!}{4!3!} = 35$$

56) 정답 : 20

$x+y+z+w=10$을 만족하는 홀수인 자연수 $x,\ y,\ z,\ w$의 순서쌍 $(x,\ y,\ z,w)$의 개수는
$x=2a+1,\ y=2b+1,\ z=2c+1,\ w=2d+1$ 이라 할 때,
$a+b+c+d=3$ 의 음이 아닌 정수해 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수와 같으므로

$$_4\mathrm{H}_3 = {_6\mathrm{C}_3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$$

57) 정답 : 15



문제 조건에서 $f(2)=1,\ f'(2)=1$ 이다.
$(1,a)$는 $y=g(x)$위에 있으므로 $(a,1)$는 $y=f(2x)$위에 존재한다. $\therefore f(2a)=1$
그런데 $f(x)$는 실수 전체 집합에서 증가함수이므로 $f(2a)=f(2)=1 \quad \therefore a=1$
한편, $y=f(2x)$의 도함수는 $y'=f'(2x) \cdot 2$이므로 $g'(1)=\dfrac{1}{2f'(2a)}=\dfrac{1}{2f'(2)}=\dfrac{1}{2}=b$

$\therefore 10 \times (a+b)=15$

58) 답 ⑤

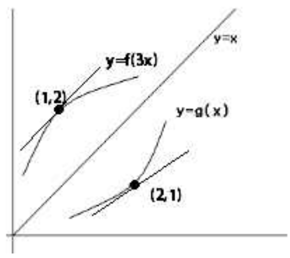
$f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로$f(g(x))=x$
양변을 x에 관하여 미분하면$f'(g(x))g'(x)=1$

$$g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}$$

$f(c)=b \Leftrightarrow g(b)=c$이므로 $g'(b)=\dfrac{1}{f'(g(b))}=\dfrac{1}{f'(c)}$

59) 답 ③

$f(3)=2$이므로 $y=f(3x)$위에 점$(1,2)$가 존재한다.
따라서 점 $(2,1)$은 $y=f(3x)$의 역함수 $g(x)$ 위에 있다.



그러므로 $y=g(x)$위의 점 $(2,1)$에서의 미분계수와 $y=f(3x)$위의 점 $(1,2)$에서의 미분계수는 역수 관계이므로

$\therefore g'(2) = \left[\dfrac{1}{3f'(3x)}\right]_{x=1} = \dfrac{1}{3f'(1)} = \dfrac{1}{3}$

60) 정답 : ①

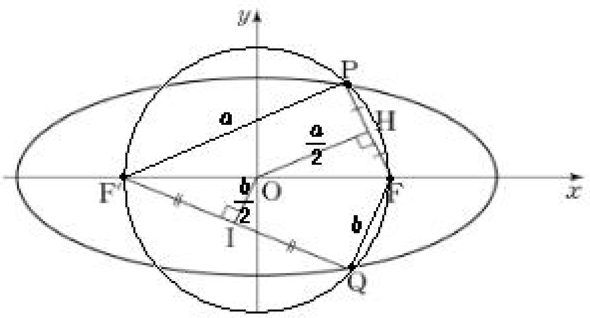
$f(x) = \sqrt{x^2+2x}$ 에서 $f'(x) = \dfrac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x}} = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}$ 이므로 $\{f'(1)\}^2 = \dfrac{4}{3}$

또, $g'(x) = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sqrt{y^2+2y}}{y+1}$ 이고 $\sqrt{x^2+2x} = 2\sqrt{2}\ (x \geq 0)$에서 $x=2$이므로 $g(2\sqrt{2}) = 2$

$\therefore \{g'(2\sqrt{2})\}^2 = \left(\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \dfrac{8}{9}$

$\therefore \{f'(1)\}^2 + \{g'(2\sqrt{2})\}^2 = \dfrac{4}{3} + \dfrac{8}{9} = \dfrac{20}{9}$

61) 정답 : 180



$\triangle OHF \equiv \triangle OHP,\ \triangle OIF' \equiv \triangle OIQ$

$\therefore OF = OP = OF' = OQ = 5$

네 점 F, F', P, Q는 중심이 원점이고, 반지름이 5인 원 위의 점들이다.

$\therefore \angle FPF' = \angle FQF' = 90^\circ$

또한, 타원의 정의에 의해 $PF + PF' = QF + QF'$ 이다.

한 원 위에 $\overline{FF'}$을 빗변으로 하고, 두 변의 길이의 합이 서로 같은 직각삼각형이므로 점 P와 점 Q는 x축 대칭관계이다.

$\therefore \triangle OPF' \equiv \triangle OQF',\quad \triangle F'FP \equiv \triangle F'FQ$

한편, $\overline{OH} = \dfrac{a}{2}$, $\overline{OI} = \dfrac{b}{2}$라 하면 $\dfrac{a}{2} \times \dfrac{b}{2} = 10 \quad \therefore\ ab = 40$

$\triangle OHF \backsim \triangle F'PF$ 이므로 $\overline{PF'} = 2\overline{HO} = a$

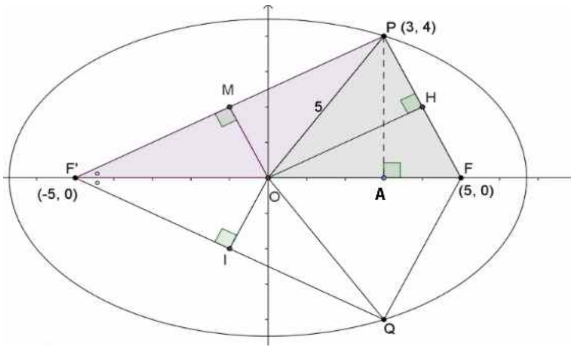
$\triangle OIF' \backsim \triangle FQF'$ 이므로 $\overline{FQ} = 2\overline{OI} = b$

$\overline{PF'} = a,\ \overline{PF} = \overline{QF} = b$ 이므로 $\triangle PF'F$에서 $a^2 + b^2 = 10^2$

$l = \overline{PF} + \overline{PF'} = a + b = 6\sqrt{5}$

$\therefore l^2 = (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 180$

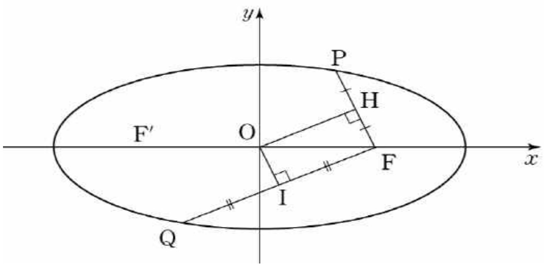
[별해]

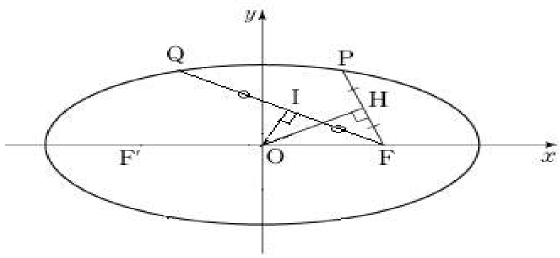


두 점 P, Q는 x축에 대하여 서로 대칭이므로,
$\triangle OIF' \equiv \triangle OMF' \equiv \triangle OMP$, $\triangle OHF \equiv \triangle OHP$
따라서 $\overline{OH}\times\overline{OI}=\overline{OH}\times\overline{OM}=\square OMPH=10$

그런데 $PF=2MO$, $PF'=2HO$ 이므로 $\triangle PFF'=20$
$FF'=10$이므로 $PA=4$,
$OF=OP=OF'=OQ=5$이므로 $OA=3$ $\quad\therefore P(3,4)$
따라서 장축의 길이 $l=PF+PF'=\sqrt{20}+\sqrt{80}=6\sqrt{5}$
$\therefore l^2=180$

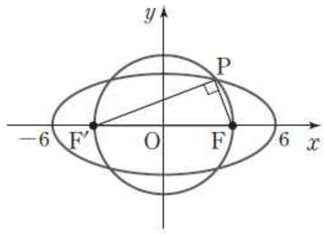
cf) 출제의도인 대칭성을 생각해 본다면 x축대칭이 아닌 y축, 원점에 대해 각각 대칭인 경우도 생각해 볼 수 있다.





62) 정답 : 18

타원 $x^2+4y^2=36$ ⋯㉠에서 $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{9}=1$

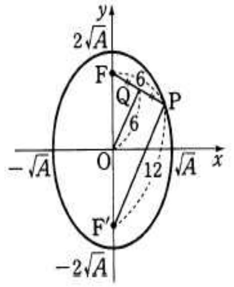


타원의 두 초점의 좌표를 $F(c,\ 0)$, $F'(-c,\ 0)$ (단, $c>0$)이라 하면
$c^2=36-9=27$ $\quad\therefore c=3\sqrt{3}$
점 P는 타원 위의 점이므로 $\overline{PF}+\overline{PF'}=2\cdot 6=12$
이때, $\overline{PF}=k$라 하면 $\overline{PF'}=12-k$이다.

또 두 점 $F(3\sqrt{3},\ 0)$, $F'(-3\sqrt{3},\ 0)$은 원의 지름의 양 끝점이므로 $\angle FPF'=90^\circ$ 이다.
피타고라스의 정리에 의해 $\overline{PF}^2+\overline{PF'}^2=\overline{FF'}^2$
$k^2+(12-k)^2=(6\sqrt{3})^2$ $\quad\therefore k^2-12k+18=0$
$\therefore \overline{PF}\cdot\overline{PF'}=k(12-k)=12k-k^2=18$

63) 정답 ③

삼각형 FPF'에서 $\overline{OF}=\overline{OF'}$이고 $\overline{PQ}=\overline{FQ}$이므로 $\overline{OQ}=\frac{1}{2}\overline{PF'}=6$ $\therefore \overline{PF'}=12$



또, 타원의 정의로부터 $\overline{PF}+\overline{PF'}=$(장축의 길이)이고

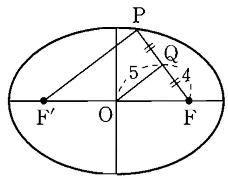
$\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{4A}=1$에서 장축의 길이는 $2\times\sqrt{4A}$ 이다.

$\therefore 2\times\sqrt{4A}=18$, $\sqrt{A}=\frac{9}{2}$

따라서 주어진 타원의 단축의 길이는 $2\sqrt{A}=9$이다.

64) 정답 : ④

타원의 나머지 한 초점을 F′이라 하면 삼각형 FPF′에서 $\overline{\mathrm{OF}}=\overline{\mathrm{OF'}}$이고 $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{FQ}}$ 이므로 삼각형의 중점연결정리에 의하여 $\overline{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{PF'}}=5$ $\therefore \overline{\mathrm{PF'}}=10$



그런데 이 타원의 장축의 길이와 단축의 길이의 비가 3 : 2이므로 장축의 길이를 $3k$라 하면

$3k=10+8$에서 $k=6$

따라서 장축과 단축의 길이가 각각 18, 12이므로

$\overline{\mathrm{OF}}=\sqrt{9^2-6^2}=3\sqrt{5}$

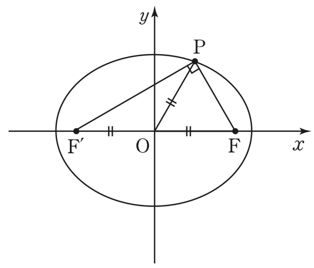
$\therefore \overline{\mathrm{FF'}}=6\sqrt{5}$

65) 정답 32

타원의 정의에 의해

$\mathrm{PF}+\mathrm{PF'}=2\times6=12\cdots\cdots①$

$\mathrm{OF}=\mathrm{OF'}=\sqrt{36-16}=\sqrt{20}$



따라서, 세점 P, F, F′은 중심 O, 반지름 $\sqrt{20}$, FF'이 지름인 원위의 점이다.

$\overline{\mathrm{PF}}^2+\overline{\mathrm{PF'}}^2=\overline{\mathrm{FF'}}^2=(2\sqrt{20})^2=80\cdots\cdots②$

①, ②에서 $\overline{\mathrm{PF}}\cdot\overline{\mathrm{PF'}}=\frac{1}{2}\left\{(\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}})^2-(\overline{\mathrm{PF}}^2+\overline{\mathrm{PF'}}^2)\right\}=\frac{1}{2}(12^2-80)=32$

66) 정답 : 513

$n+2>\frac{k}{a_n}>n$이므로 $\therefore n\cdot a_n<k<(n+2)\cdot a_n$

$\therefore$ 자연수 k의 개수 $=(n+2)\cdot a_n-n\cdot a_n-1=a_{n+1}$

$\therefore a_{n+1}=2a_n-1$

$a_{n+1}-1=2\cdot(a_n-1)$

$\therefore a_n-1=(a_1-1)\cdot 2^{n-1}=2^{n-1}$

$\therefore a_n=2^{n-1}+1$

$a_{10}=2^9+1=513$

67) 정답 110

$n-\frac{1}{2}\leq\sqrt{k}<n+\frac{1}{2}$ 양변을 제곱하면

$n^2-n+\frac{1}{4} \leqq k < n^2+n+\frac{1}{4}$ k 는 자연수이므로

$n^2-n+1 \leqq k \leqq n^2+n$

$a_n = (n^2+n)-(n^2-n+1)+1 = 2n$

$\therefore \sum_{n=1}^{10} a_i = \sum_{n=1}^{10} 2n = 2 \times \frac{10 \times 11}{2} = 110$

68) 답 570

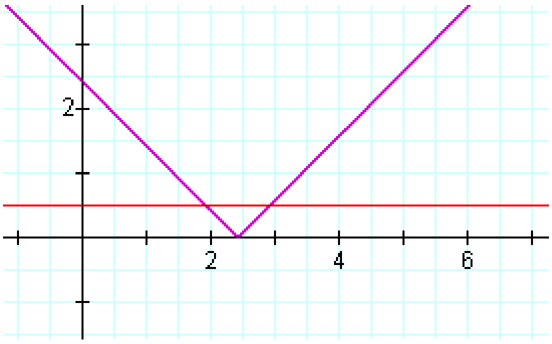
$\sqrt{n}-\frac{1}{2} < a_n < \sqrt{n}+\frac{1}{2}$

$1 < a_1 < \frac{3}{2}$ $\therefore a_1 = 1$

$\sqrt{2}-\frac{1}{2} < a_2 < \sqrt{2}+\frac{1}{2}$ $\therefore a_2 = 1$

$\sqrt{3}-\frac{1}{2} < a_3 < \sqrt{3}+\frac{1}{2}$ $\therefore a_3 = 2$

$y = |x-\sqrt{n}|$, $y = \frac{1}{2}$ 그래프에서 $a_n = x$(x는 자연수)라 할 때, n의 값 구하기.



$x-\frac{1}{2} < \sqrt{n} < x+\frac{1}{2}$

$x^2-x+\frac{1}{4} < n < x^2+x+\frac{1}{4}$

그런데 n은 자연수이므로 $a_n = x$을 만족하는 n은 x^2-x+1부터 x^2+x까지 모두 $2x$개다. 즉,

$a_1 = a_2 = 1$

$a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = 2$

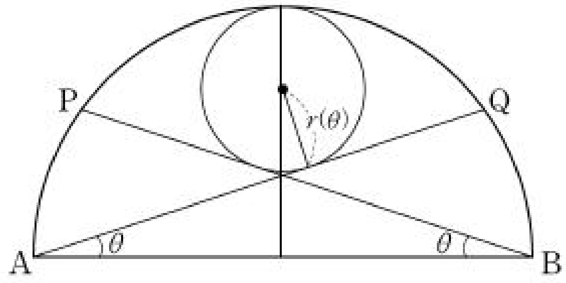
$a_7 = a_8 = a_9 = a_{10} = a_{11} = a_{12} = 3$

$\vdots$

$a_{73} = a_{74} = \cdots = a_{90} = 9$

$\sum_{n=1}^{90} a_n = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 6 + \cdots + 9 \cdot 18 = \sum_{k=1}^{9} k \cdot 2k = 2\sum_{k=1}^{9} k^2 = 2 \times \frac{9 \cdot 10 \cdot 19}{6} = 570$

69) 정답 : 8



선분 $\overline{AB}$의 수직이등분선의 길이는 1이므로 $\tan\theta+\dfrac{r(\theta)}{\cos\theta}+r(\theta)=1$

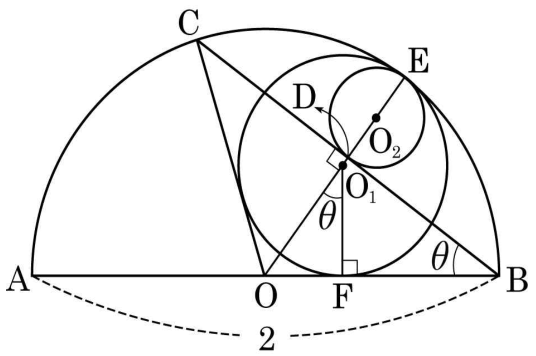
$r(\theta)\times\dfrac{1+\cos\theta}{\cos\theta}=1-\tan\theta$ $\quad\therefore\ r(\theta)=\dfrac{\cos\theta\cdot(1-\tan\theta)}{1+\cos\theta}$

$\therefore \displaystyle\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-0}\frac{\cos\theta}{1+\cos\theta}\times\frac{1-\tan\theta}{\frac{\pi}{4}-\theta}=(\sqrt{2}-1)\times\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-0}\frac{-\sec^2\theta}{-1}=2(\sqrt{2}-1)=2\sqrt{2}-2$

$\therefore p^2+q^2=2^2+(-2)^2=8$

70) 정답 : 17

점 O_1에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 F, 직선 O_1O_2와 현 BC, 호 BC의 교점을 각각 D, E라 하자.



$\overline{O_1F}=\overline{O_1E}=f(\theta)$, $\angle OO_1F=\theta$

$\overline{OE}=\overline{OO_1}+\overline{O_1E}=\dfrac{f(\theta)}{\cos\theta}+f(\theta)=1$ $\quad\therefore\ f(\theta)=\dfrac{\cos\theta}{1+\cos\theta}$

$\overline{OD}=\sin\theta$, $\overline{ED}=1-\sin\theta=2g(\theta)$이므로 $g(\theta)=\dfrac{1-\sin\theta}{2}$

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{g(\theta)}{\{f(\theta)\}^2}=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\frac{1-\sin\theta}{2}}{\left(\frac{\cos\theta}{1+\cos\theta}\right)^2}=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{(1-\sin\theta)(1+\cos\theta)^2}{2\cos^2\theta}$$

$\dfrac{\pi}{2}-\theta=t$라 하면, $\theta=\dfrac{\pi}{2}-t$이고

$\sin\theta=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-t\right)=\cos t$, $\cos\theta=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-t\right)=\sin t$

$\theta\to\dfrac{\pi}{2}-0$일때 $t\to+0$이다.

(주어진 식) $=\displaystyle\lim_{t\to+0}\frac{(1-\cos t)(1+\sin t)^2}{2\sin^2 t}=\lim_{t\to+0}\frac{(1-\cos t)(1+\sin t)^2}{2(1-\cos^2 t)}=\lim_{t\to+0}\frac{(1+\sin t)^2}{2(1+\cos t)}$

$$= \frac{1}{4} = \frac{q}{p}$$

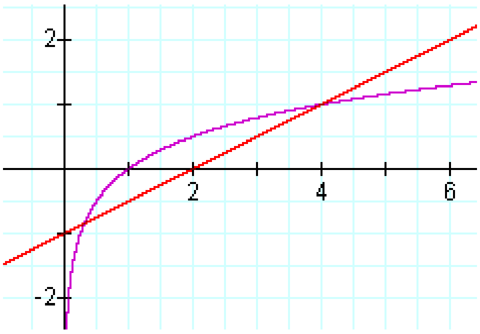
따라서 $p=4$, $q=1$ 이므로 $p^2+q^2=17$ 이다.

71) 정답 : 86

$\dfrac{\log_n a}{a-2} \le \dfrac{1}{2}$ 이므로 $\log_n a \le \dfrac{a}{2}-1$

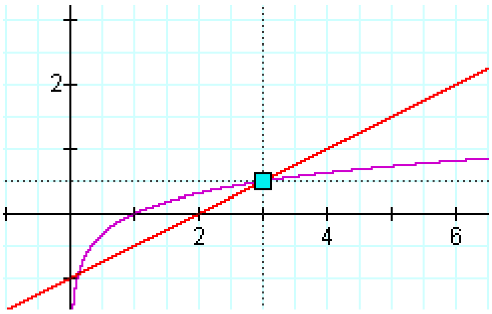
두 함수 $y=\log_n x$, $y=\dfrac{x}{2}-1$의 그래프에서 n이 커지면 $y=\log_n x$와 $y=\dfrac{x}{2}-1$의 교점의 x좌표는 점점 작아진다.

이 때, $a=4$ 이면 $\log_n 4 \le \dfrac{4}{2}-1=1$ $\quad \therefore n \ge 4$



$a=3$이면 $\log_n 3 \le \dfrac{3}{2}-1=\dfrac{1}{2}$ $\quad \therefore n \ge 9$

이상에 의해 $f(4)=\cdots=f(8)=4$, $f(9)=\cdots=f(30)=3$



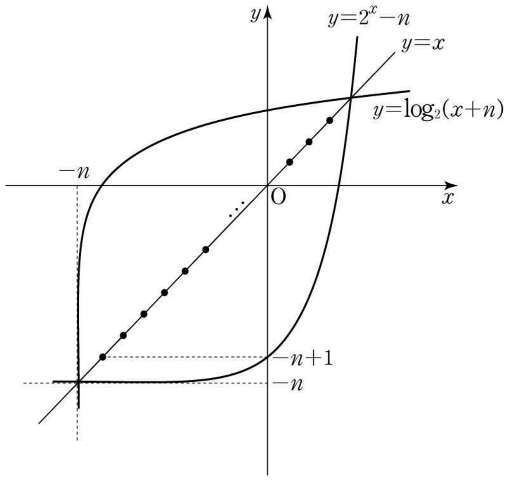
n이 아무리 커진다 하더라도 $y=\log_n a$와 $y=\dfrac{a}{2}-1$의 교점의 x좌표가 $a=2$인 경우는 발생하지 않는다.

$$\therefore \sum_{n=4}^{30} f(n) = \{f(4)+f(5)+\cdots+f(8)\}+\{f(9)+f(10)+\cdots+f(30)\}$$

$$= 4\times 5+3\times 22=86$$

72) 정답 573

$y=2^x-n$과 $y=\log_2(x+n)$은 서로 역함수 관계에 있으므로 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



ⅰ) 제 3사분면에서의 격자점의 개수(원점 포함) = $1+2+3+\cdots+30=\dfrac{30 \cdot 31}{2}=465$

ⅱ) 제 1사분면에서의 격자점의 개수

$y=2^x-n$와 $y=x$의 교점의 x좌표는 n이 커짐에 따라서 아주 조금씩 커진다.

함수 $y=2^x-n$이 $(1,1),(2,2),(3,3),\cdots$을 지날 때의 n의 값을 구해보자.

(격자점을 지날 때의 n의 값을 기준으로 갯수를 센다)

$(1,1)$ 지날 때 $2^1-n=1$ $\therefore n=1$

$(2,2)$ 지날 때 $2^2-n=2$ $\therefore n=2$

$(3,3)$ 지날 때 $2^3-n=3$ $\therefore n=5$

$(4,4)$ 지날 때 $2^4-n=4$ $\therefore n=12$

$(5,5)$ 지날 때 $2^5-n=5$ $\therefore n=27$

n의 값	제 1사분면에 있는 격자점의 갯수
1	1개
$2,3,4$	2개
$5,6,\cdots,11$	3개
$12,13,14,\cdots,26$	4개
$27,28,29,30$	5개

$$\sum_{n=1}^{30} a_n=\sum_{k=1}^{30} k+\{1+2\times3+3\times7+4\times15+5\times4\}=465+108=573$$