

패턴 35

벡터의 다양한 해법

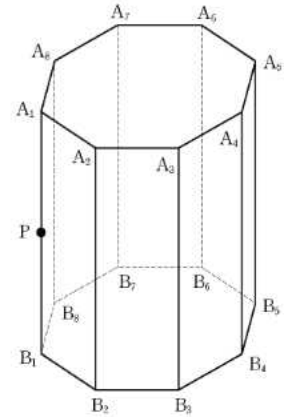
편집:우에노리에

1. **2004** **교육청(3점)**

세 벡터 $\vec{a} = (2, 3)$, $\vec{b} = (x, -1)$, $\vec{c} = (-4, y)$ 에 대하여 $2\vec{a} - \vec{b} = \vec{b} + \vec{c}$ 가 성립할 때, 두 실수 x, y 의 곱을 구하시오.

2. **2009** **평가원(3점)**

다음 그림은 밑면이 정팔각형인 팔각기둥이다. $\overline{A_1A_3} = 3\sqrt{2}$ 이고, 점 P가 모서리 A_1B_1 의 중점일 때, 벡터 $\sum_{i=1}^8 (\overrightarrow{PA_i} + \overrightarrow{PB_i})$ 의 크기를 구하시오.



3. **2007** **교육청(3점)**

세 점 O, A, B에 대하여 두 벡터 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

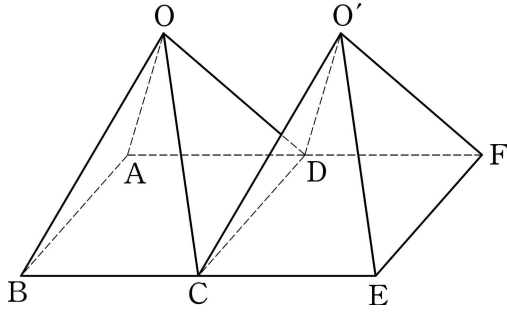
- (가) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2$
 (나) $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3$

이때, 두 선분 OA, OB를 두 변으로 하는 평행사변형의 넓이는?

- ① $3\sqrt{2}$ ② $4\sqrt{2}$ ③ $3\sqrt{3}$
 ④ $4\sqrt{3}$ ⑤ $5\sqrt{3}$

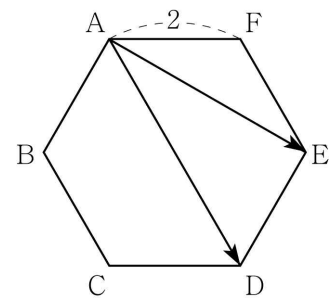
4. **2006** **평가원(3점)**

그림은 모든 모서리의 길이가 2인 두 개의 정사각뿔 $O-ABCD$, $O'-DCEF$ 에 대하여 모서리 CD 를 일치시킨 도형을 나타낸 것이다. $|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OF}|^2$ 의 값을 구하시오. (단, 면 $ABCD$ 와 면 $DCEF$ 는 한 평면 위에 있다.)



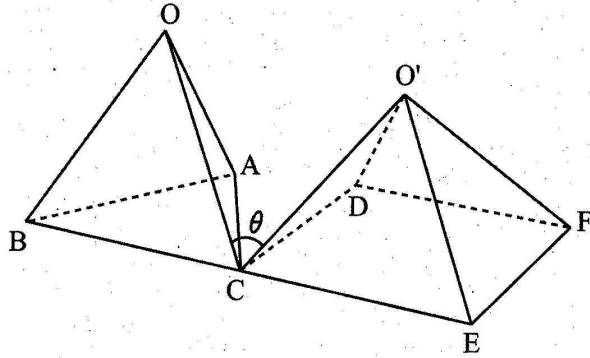
5. **2009** **교육청(3점)**

그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정육각형 $ABCDEF$ 가 있다. 두 벡터 \overrightarrow{AD} , \overrightarrow{AE} 의 내적 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE}$ 의 값을 구하시오.



6. 2008 교육청(3점)

모든 모서리의 길이가 2 인 정사면체 $OABC$ 와 정사각뿔 $O'-DCEF$ 를 아래 그림과 같이 두 모서리 BC 와 CE 가 한 직선 위에 오도록 나란히 붙여 놓았다고 하자. 두 벡터 \overrightarrow{OC} 와 $\overrightarrow{OC'}$ 가 이루는 각의 크기를 θ 라 할 때, $\cos \theta$ 의 값은?(단, 삼각형 ABC 와 사각형 $DCEF$ 는 한 평면 위에 있다.)

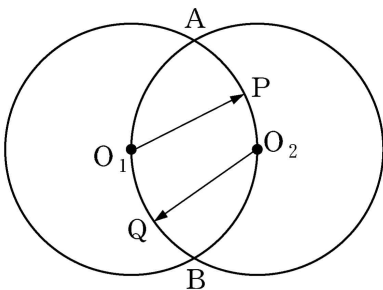


- ① $\frac{\sqrt{3}}{12} - \frac{1}{4}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2}$ ③ $\frac{5}{12}\sqrt{3} - \frac{1}{4}$
 ④ $\frac{7}{12}\sqrt{3} - \frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{3}{4}\sqrt{3} - \frac{1}{4}$

7. 2008 평가원(3점)

평면 위의 두 점 O_1, O_2 사이의 거리가 1일 때, O_1, O_2 를 각각 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 두 원의 교점을 A,

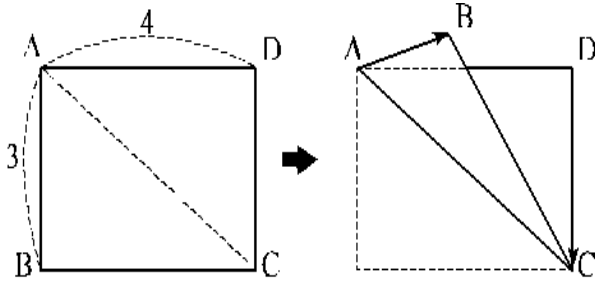
B라 하자. 호 AO_2B 위의 점 P와 호 AO_1B 위의 점 Q에 대하여 두 벡터 $\overrightarrow{O_1P}, \overrightarrow{O_2Q}$ 의 내적 $\overrightarrow{O_1P} \cdot \overrightarrow{O_2Q}$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M+m$ 의 값은?



- ① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0
 ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ 1

8. 2004 교육청(4점)

$\overline{AD} = 4$, $\overline{AB} = 3$ 인 직사각형 모양의 종이 $ABCD$ 가 있다. 대각선 AC 를 접는 선으로 하여 평면 ABC 가 평면 ACD 와 수직이 되게 접는다. 접은 도형에서 내적 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = \frac{b}{a}$ (a, b 는 서로소인 자연수)일 때, $a + b$ 의 값을 구하시오.

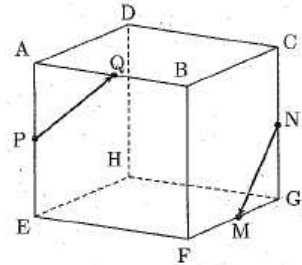


9. 2009 교육청(3점)

그림과 같이 한 변의 길이가 $\sqrt{6}$ 인 정육면체 $ABCD-EFGH$ 가 있다. 모서리 AE, AB, FG, CG 의 중점을 각각 P, Q, M, N 이라 하자.

$$\left| \overrightarrow{PQ} + \frac{1}{2} \overrightarrow{NM} \right| = \frac{b}{a}$$

일 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 구하시오.
(단, a, b 는 서로소인 자연수이다.)

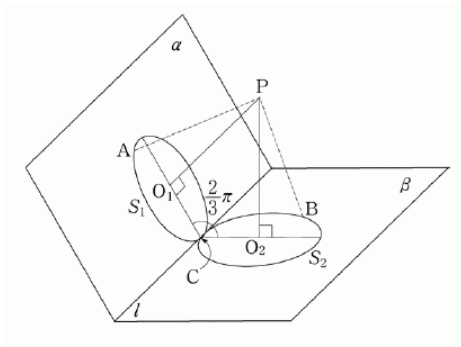


10. 2010 교육청(4점)

두 점 $A(2, 0)$, $B(0, 1)$ 와 타원 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 위를 움직이는 점 P 에 대하여, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP}$ 가 최대가 되는 점 P 에서의 접선의 방정식은 $y = ax + b$ 이다. $a^2 + b^2$ 의 값을 구하시오

11. **2005** **평가원(4점)**

두 평면 α , β 의 교선을 l 이라 하자. 평면 α 위에 있는 원 S_1 과 평면 β 위에 있는 원 S_2 는 반지름의 길이가 모두 2이다. 그림과 같이 원 S_1 과 원 S_2 는 점 C 에서 직선 l 과 접한다. S_1 의 중심 O_1 을 지나고 평면 α 에 수직인 직선과 S_2 의 중심 O_2 를 지나고 평면 β 에 수직인 직선이 만나는 점을 P 라 하자. $\angle O_1CO_2 = \frac{2}{3}\pi$ 일 때, S_1 위에 있는 임의의 점 A 와 S_2 위에 있는 임의의 점 B 에 대하여 $|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}|$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 하자. $M + m$ 의 값을 구하시오.



12. **2012** **평가원(3점)**

좌표공간에서 네 점 A_0, A_1, A_2, A_3 이 다음 조건을 만족시킨다.

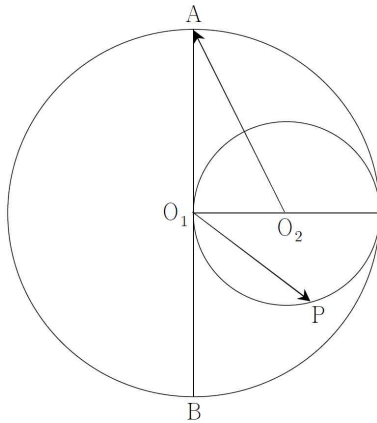
(가) $|\overrightarrow{A_0A_2}| = |\overrightarrow{A_1A_3}| = 2$

(나) $\frac{1}{2} \overrightarrow{A_0A_3} \cdot \left(\overrightarrow{A_0A_k} - \frac{1}{2} \overrightarrow{A_0A_3} \right) = \cos \frac{3-k}{3} \pi \quad (k = 1, 2, 3)$

$|\overrightarrow{A_1A_2}|$ 의 최댓값을 M 이라 할 때, M^2 의 값을 구하시오.

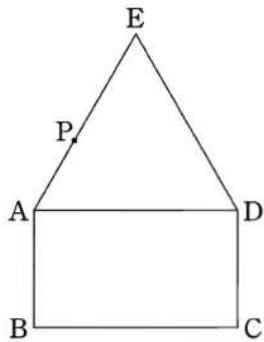
13. 2011 교육청(4점)

그림과 같이 두 점 O_1, O_2 를 중심으로 하는 반지름의 길이가 각각 2, 1 인 두 원이 내접하고, 큰 원의 지름 AB 와 선분 O_1O_2 가 수직이다. 점 P 가 작은 원 위를 움직일 때, 두 벡터 $\overrightarrow{O_1P}, \overrightarrow{O_2A}$ 의 내적 $\overrightarrow{O_1P} \cdot \overrightarrow{O_2A}$ 의 최댓값 M 에 대하여 $12(M+1)^2$ 의 값을 구하시오.



14. 2010 평가원(4점)

평면에서 그림과 같이 $\overline{AB} = 1$ 이고 $\overline{BC} = \sqrt{3}$ 인 직사각형 $ABCD$ 와 정삼각형 EAD 가 있다. 점 P 가 선분 AE 위를 움직일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?



[보 기]

- ㄱ. $|\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CP}|$ 의 최솟값은 1이다.
 ㄴ. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CP}$ 의 값은 일정하다.
 ㄷ. $|\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CP}|$ 의 최솟값은 $\frac{7}{2}$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

15. **2006 수능 (3점)**

타원 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 의 두 초점을 F, F' 이라 하자. 이 타원 위의 점 P 가 $|\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OF}| = 1$ 을 만족시킬 때, 선분 PF 의 길이는 k 이다. $5k$ 의 값을 구하시오. (단, O 는 원점이다.)

16. **2012 수능 (3점)**

삼각형 ABC 에서 $\overline{AB} = 2$, $\angle B = 90^\circ$, $\angle C = 30^\circ$ 이다. 점 P 가 $\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \vec{0}$ 를 만족시킬 때, $|\overrightarrow{PA}|^2$ 의 값은?

- ① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

17. **2006 수능 (3점)**

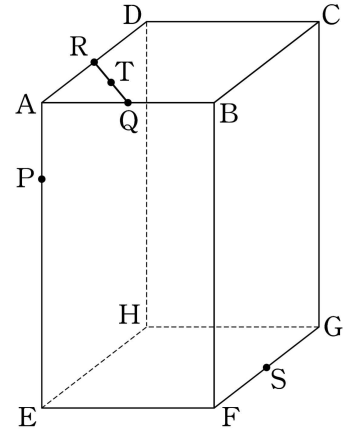
좌표평면 위에 원점 O 를 시점으로 하는 서로 다른 임의의 두 벡터 \overrightarrow{OP} , \overrightarrow{OQ} 가 있다. 두 벡터의 종점 P , Q 를 x 축 방향으로 3만큼, y 축 방향으로 1만큼 평행이동 시킨 점을 각각 P' , Q' 이라 할 때, 다음 중 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?

\neg . $ \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP'} = \sqrt{10}$ \neg . $ \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP'} - \overrightarrow{OQ'} $ \subset . $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP'} \cdot \overrightarrow{OQ'}$

- ① \neg ② \subset ③ \neg , \subset
④ \neg , \subset ⑤ \neg , \subset , \subset

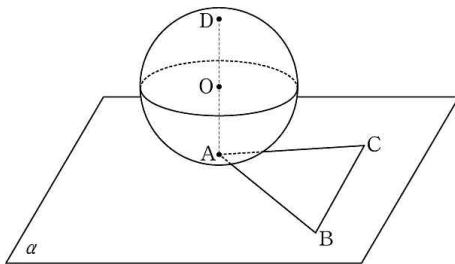
18. 2008 수능 (3점)

그림과 같이 $\overline{AB} = \overline{AD} = 4$, $\overline{AE} = 8$ 인 직육면체 $ABCD-EFGH$ 에서 모서리 AE 를 $1:3$ 으로 내분하는 점을 P , 모서리 AB , AD , FG 의 중점을 각각 Q , R , S 라 하자. 선분 QR 의 중점을 T 라 할 때, 벡터 \overrightarrow{TP} 와 벡터 \overrightarrow{QS} 의 내적 $\overrightarrow{TP} \cdot \overrightarrow{QS}$ 의 값을 구하시오.



19. 2006 수능 (4점)

그림과 같이 평면 α 위에 한 변의 길이가 3인 정삼각형 ABC 가 있고, 반지름의 길이가 2인 구 S 는 점 A 에서 평면 α 에 접한다. 구 S 위의 점 D 에 대하여 선분 AD 가 구 S 의 중심 O 를 지날 때, $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}|^2$ 의 값을 구하시오.



20. 2007 수능 (4점)

좌표공간에서 중심이 C 인 구 $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 9$ 와 평면 $x+y+z=6$ 이 만나서 생기는 도형을 S 라 하자. 도형 S 위의 두 점 P , Q 에 대하여 두 벡터 \overrightarrow{CP} , \overrightarrow{CQ} 의 내적 $\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CQ}$ 의 최솟값은?

- ① -3 ② -2 ③ -1
 ④ 1 ⑤ 2

21. 2005 수능 (4점)

좌표공간에 두 점 $A(3, 1, 1)$, $B(1, -3, -1)$ 이 있다.

평면 $x - y + z = 0$ 에 있는 점 P 에 대하여 $|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}|$ 의 최솟값은?

- ① $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ② $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ ③ $2\sqrt{3}$
 ④ $\frac{7\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\frac{8\sqrt{3}}{3}$

22. 2007 수능 (4점)

좌표공간에 네 점 $A(2, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(-3, 0, 0)$, $D(0, 0, 2)$ 를 꼭지점으로 하는 사면체 $ABCD$ 가 있다.

모서리 BD 위를 움직이는 점 P 에 대하여 $\overline{PA}^2 + \overline{PC}^2$ 의 값을 최소로 하는 점 P 의 좌표를 (a, b, c) 라고 할 때, $a + b + c = \frac{q}{p}$ 이다. $p + q$ 의 값을 구하시오. (단, p, q 는 서로소인 자연수이다.)

23. 2006 수능 (4점)

좌표공간의 점 $A(3, 6, 0)$ 에서 평면 $\sqrt{3}y - z = 0$ 에 내린 수선의 발을 B 라 할 때, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ 의 값을 구하시오.
 (단, O 는 원점이다.)

24. **2010 수능 (4점)**

평면에서 그림의 오각형 $ABCDE$ 가

$\overline{AB} = \overline{BC}$, $\overline{AE} = \overline{BD}$, $\angle B = \angle E = 90^\circ$ 를 만족시킬 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. 선분 BE 의 중점 M 에 대하여 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$ 와 \overrightarrow{AM} 은 서로 평행하다.

ㄴ. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{ED}$

ㄷ. $|\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{ED}| = |\overrightarrow{BE}|$

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

25. **2013학년 수능 (4점)**

한 변의 길이가 2 인 정삼각형 ABC 의 꼭짓점 A 에서 변 BC 에 내린 수선의 발을 H 라 하자. 점 P 가 선분 AH 위를 움직일 때, $|\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}|$ 의 최댓값은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

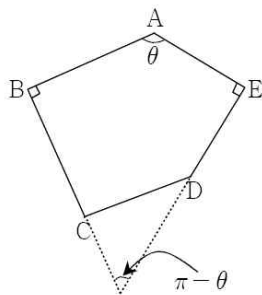
- 1) 정답 32
- 2) 정답 48
- 3) 정답 ②
- 4) 정답 12
- 5) 정답 12
- 6) 정답 ③
- 7) 정답 ②
- 8) 정답 106
- 9) 정답 13
- 10) 정답 21
- 11) 정답 12
- 12) 정답 8
- 13) 정답 60
- 14) 정답 ⑤
- 15) 정답 15
- 16) 정답 ③
- 17) 정답 ③
- 18) 정답 12
- 19) 정답 43
- 20) 정답 ①
- 21) 정답 ③
- 22) 정답 11
- 23) 정답 18
- 24) 정답 ⑤
- 25) 정답 7

23) 정답 ⑤

ㄱ. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AM}$ 이므로 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$ 와 \overrightarrow{AM} 은 평행하다. (참)
 ㄴ. (참)

$\angle B = \angle E = 90^\circ$ 이므로 \overrightarrow{AB} 와 \overrightarrow{AE} 가 이루는 각을 θ 라 하면 \overrightarrow{BC} 와 \overrightarrow{ED} 가 이루는 각은 $\pi - \theta$ 이다.
 따라서

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AE}| \cos \theta$$



$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{ED} = |\overrightarrow{BC}| |\overrightarrow{ED}| \cos(\pi - \theta) = -|\overrightarrow{BC}| |\overrightarrow{ED}| \cos \theta$$

이때, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{ED}$ 이므로

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{ED} \quad (\text{참})$$

$$\square. |\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{ED}|^2 = |\overrightarrow{BC}|^2 + 2\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{ED} + |\overrightarrow{ED}|^2$$

$$|\overrightarrow{BE}|^2 = |\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{AE}|^2 - 2\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} + |\overrightarrow{AB}|^2 \quad \text{이때, } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC},$$

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{ED} \text{ 이고 'ㄴ'에 의해 } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{ED} \text{ 이 성립하므로}$$

$$|\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{ED}|^2 = |\overrightarrow{BE}|^2$$

따라서 $|\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{ED}| = |\overrightarrow{BE}|$ 이 성립한다. (참)

24) 정답 7

해설

$\angle BPH = \theta$ 라 하면

$$|\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}| = ||\overrightarrow{PA}| \cdot |\overrightarrow{PB}| \cdot \cos(\pi - \theta)| = ||\overrightarrow{PA}| \cdot |\overrightarrow{PB}| \cdot \cos \theta|$$

$$= |\overrightarrow{PA}| \cdot |\overrightarrow{PH}| = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PH}$$

$\overrightarrow{PA} = x$, $\overrightarrow{PH} = y$ ($x > 0$, $y > 0$) 라 하면

$$|\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}| = xy, \quad \overrightarrow{AH} = \sqrt{3} \quad \text{이므로}$$

$$x + y = \sqrt{3}$$

\therefore (산술평균) \geq (기하평균) 으로부터

$$x + y \geq 2\sqrt{xy} \quad (\text{등호는 } x = y \text{ 일 때 성립})$$

$$\sqrt{3} \geq 2\sqrt{xy}, \quad \frac{3}{4} \geq xy$$

$$\therefore p + q = 4 + 3 = 7$$

