2014학년도 6월 평가원(A형) 해설지

신동훈샘

1) 정답 : ③

2) 정답 : ④

$$2A-B=2\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & -1\\2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 4\\0 & 6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & -1\\2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 5\\-2 & 4\end{pmatrix}$$

따라서 모든 성분의 합은 9

3) 정답 : ⑤

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5\times 7^{n+1}+3}{7^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{35\cdot 7^n+3}{7^n}=35$$

4) 정답 : ②

행렬에서 행의 모든 성부의 합이 3인 것은 각 꼭짓점에서 연결된 변의 개수(=차수) 같다.

차수가 3인 꼭짓점은 2개다.

5) 정답 : ②

$$\log_5(6-\sqrt{11})+\log_5(6+\sqrt{11})=\log_5(6-(\sqrt{11})^2)=\log_5(36-11)=\log_5 25=2$$

6) 정답 : ③

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(1+3h)-f(1)}{2h}=\lim_{n\to\infty}\frac{f(1+3h)-f(1)}{3h}\times\frac{3}{2}=f'(1)\times\frac{3}{2}$$

$f'(x)=3x^2-1$ 이므로 $f'(1)=2$

따라서 준식은 $2\times\frac{3}{2}=3$

7) 정답 : ①

$a_1a_9=a_5^2=4$

$a_2a_8=a_5^2=4,\quad a_4a_6=a_5^2=4$

$\therefore\ a_2a_8+a_4a_6=8$

8) 정답 : ④

연립방정식 $\begin{pmatrix}t & -2\\3 & t-7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$이 $x=y=0$ 이외의 해를 가지려면 행렬 $\begin{pmatrix}t & -2\\3 & t-7\end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않아야 하므로

$t(t-7)+6=0$

$\therefore\ t^2-7t+6=0$

따라서 모든 실수 t 의 합은 7이다.

2014학년도 6월 평가원(A형) 해설지

신동훈샘

9) 정답 : ⑤

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-3}{x-2}=5$ 에서 $x\to2$ 일 때, (분모)→0이고 극한값이 존재하므로 (분자)→0이어야 한다.

$\lim_{x\to2}\{f(x)-3\}=0$ 이고 $\lim_{x\to2}f(x)=3$

$$\lim_{x\to2}\frac{x-2}{\{f(x)\}^2-9}=\lim_{x\to2}\frac{1}{\frac{\{f(x)\}^2-9}{x-2}}=\lim_{x\to2}\frac{1}{\frac{f(x)-3}{x-2}}\times\frac{1}{f(x)+3}=\frac{1}{5}\times\frac{1}{3+3}=\frac{1}{30}$$

10) 정답 : ②

$$f(x)=\begin{cases}x+a & (x\le1)\\ \lim_{n\to\infty}\frac{2x^{n+1}+3x^n}{x^n+1} & (x>1)\end{cases}$$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$에서 연속이어야 한다.

ⅰ) $f(1)=1+a$ ⋯①

ⅱ) $x>1$일 때 $x^n\to\infty$이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{2x^{n+1}+3x^n}{x^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2x+3}{1+\frac{1}{x^n}}=2x+3$

$\therefore f(x)=2x+3\ (x>1)$

$\lim_{x\to1+0}f(x)=\lim_{x\to1+0}(2x+3)=5$ ⋯②

ⅰ)과 ⅱ)에 의하여 $1+a=5$이므로 $a=4$

11) 정답 : ③

ㄱ. $\lim_{x\to+0}f(x)=1$ (참)

ㄴ. $\lim_{x\to2-0}f(x)=1\ne-1$ (거짓)

ㄷ. $\lim_{x\to2-0}|f(x)|=\lim_{x\to2-0}f(x)=1$

$\lim_{x\to2+0}|f(x)|=\lim_{x\to2+0}\{-f(x)\}=-(-1)=1$

$|f(2)|=|-1|=1$ 이므로 함수 $|f(x)|$는 $x=2$에서 연속이다. (참)

12) 정답 : ①

$S_n=n^2-10n$ 에서 $a_n=S_n-S_{n-1}=2n-11\ (n\ge2)$

수열 $\{a_n\}$은 a_5까지 음수이고 a_6부터 양수이다. 따라서 $a_n<0$인 자연수 n의 개수는 5이다.

13) 정답 : ①

함수 $g(x)=f(x)\{f(x)+k\}$ 에서

$g(0)=f(0)\{f(0)+k\}=2(2+k)=4+2k$

$\lim_{x\to+0}g(x)=\lim_{x\to+0}f(x)\{f(x)+k\}=0\quad\left(\because\ \lim_{x\to+0}f(x)=0\right)$

따라서 $4+2k=0$ $\therefore\ k=-2$

14) 정답 : ④

수열 $\{a_n\}$ 의 $a_1=1>0$ 이고 $a_n>0$ 이므로 $a_{n+1}=f(f(a_n))=f\left(-\frac{1}{2}a_n\right)=-\frac{1}{2}a_n+2$

$\lim_{n\to\infty} a_n=k$(상수) 이면 $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}=k$ 이므로 $k=-\frac{1}{2}k+2$ $\therefore\ k=\lim_{n\to\infty} a_n=\frac{4}{3}$

15) 정답 : ③

$V_2=V_1\times\left(\frac{H_2}{H_1}\right)^{\frac{2}{2-k}}$ 에서 $8=2\times\left(\frac{36}{12}\right)^{\frac{2}{2-k}}$ $\therefore 4=3^{\frac{2}{2-k}}$

$b=a\times\left(\frac{90}{10}\right)^{\frac{2}{2-k}}$ 에서 $\frac{b}{a}=\left(3^{\frac{2}{2-k}}\right)^2=4^2=16$

16) 정답 : ①

점Q 가 $\sqrt{2}$ 만큼씩 이동한 횟수가 Q 의 x 좌표와 같으므로 점 Q가 55번 이동하였다면 이 때 x좌표는 55이다.

$$\begin{array}{r|l} & x_2=x_1+2 \\ & x_3=x_2+3 \\ & x_4=x_3+4 \\ & \vdots \\ + & x_n=x_{n-1}+n \\ \hline \end{array}$$

$$x_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}(k-1)=\frac{n^2+n}{2}=55 \qquad \therefore n=10$$

$x_n=55$일 때 $n=10$이므로 점Q 의 위치는 점P_{10} 이다. 이 때의 y좌표 y_{10}을 구해보자.

$$\begin{array}{r|l} & y_2=y_1-2 \\ & y_3=y_2+3 \\ & y_4=y_3-4 \\ & \vdots \\ + & y_n=y_9+10 \\ \hline \end{array}$$

$$y_{10}=1-2+3-4+\cdots+9-10=-5$$

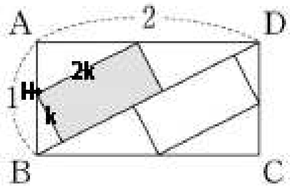
17) 정답 : ②

$f(x)=x^3-3x^2+x+1$ 이라 하면 $f'(x)=3x^2-6x+1$ 이므로 점$\mathrm{A}(3,\ 4)$에서의 접선의 기울기는 $f'(3)=10$

$f'(x)=10$ 일 때의 $x=3,\ x=-1$이므로 점$\mathrm{B}(-1,\ -4)$에서의 접선의 방정식은 $y+4=10(x+1)$이다

따라서 구하는 y 절편은 6 이다.

18) 정답 : ④



$\triangle ABD$의 세 변의 길이는 $2:1:\sqrt{5}$ 이고, 위 그림처럼 내접 직사각형의 가로, 세로의 길이를 $2k$, k라 하면,

$\overline{BH}+\overline{HA}=\dfrac{\sqrt{5}\,k}{2}+\dfrac{2k}{\sqrt{5}}+\ =1$ 이므로 $k=\dfrac{2\sqrt{5}}{9}$

ⅰ) $S_1=2k^2=\dfrac{40}{81}$

ⅱ) 위 그림에서 닮음인 두 직사각형의 가로 길이의 비는 $\dfrac{2k}{2}=k=\dfrac{2\sqrt{5}}{9}$이므로

무한등비급수 S_n의 공비는 $k^2=\dfrac{20}{81}$ 이다.

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n=\frac{\frac{40}{81}}{1-\frac{20}{81}}=\frac{40}{61}$$

19) 정답 : ⑤

$n^2 a_{n+1}=(n^2-1)a_n+n(n+1)2^n$ 에서 양변에 $\dfrac{1}{n(n+1)}$을 양변에 곱하면

$\dfrac{n}{n+1}a_{n+1}=\dfrac{n-1}{n}a_n+\boxed{2^n}$ 이므로 $b_{n+1}=b_n+2^n$ $\quad\quad \therefore$ (가)$=f(n)=2^n$

$$b_{n+1}=b_n+2^n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\cdots)\ ,\ b_1=0$$

$$\begin{array}{r|l} & b_2=b_1+2 \\ & b_3=b_2+2^2 \\ & b_4=b_3+2^3 \\ & \quad\vdots \\ + & b_n=b_{n-1}+2^{n-1} \\ \hline \end{array}$$

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}2^k=0+\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}=\boxed{2^n-2} \qquad \therefore \text{(나)}=2^n-2=g(n)$$

$$f(5)+g(10)=2^5+2^{10}-2=1054$$

20) 정답 : ④

점 B의 x좌표를 b라 하면

$2^a=15\cdot 2^{-b}$의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면 $a=-b+\log_2 15$ 이므로 $b=-a+\log_2 15$

그러므로 $\overline{AB}=a-b=2a-\log_2^{15}$

$1 < \overline{AB} < 100$ 이므로 $1 < 2a - \log_2 15 < 100$

따라서 $\frac{1}{2}log_2 30 < a < 50 + \frac{1}{2}\log_2 15$

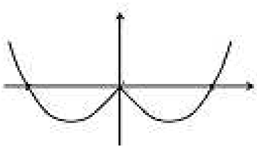
$\log_2 16 < \log_2 30 < \log_2 32$ 이므로 $4 < \log_2 30 < 5$ 이고,

$\log_2 8 < \log_2 15 < \log_2 16$ 이므로 $3 < \log_2 15 < 4$ 이므로

$2.xx < a < 51.xx$ 이다.

$\therefore 3 \le a \le 51$ 이므로 2이상의 자연수 a의 개수는 49개

21) 정답 : ⑤

$a > 0$ 이면 다음 그림과  극댓값이 존재하지 않게 되므로 $a < 0$ 이다.

$f'(x) = \begin{cases} 3a(1-x)(1+x) & (x<0) \\ 3x^2 - a & (x \geqq 0) \end{cases}$ 이므로 $f(x)$ 는 $x = -1$ 일 때 극댓값 5 를 갖는다.

$f(-1) = -2a = 5 \quad \therefore a = -\frac{5}{2}$

$\therefore f(2) = 2^3 - \left(-\frac{5}{2}\right) \cdot 2 = 13$

22) 정답 : 26

$a_6 - a_4 = 2d = 12 \ \therefore d = 6$

따라서 $a_6 = 8 + 3d = 8 + 3 \cdot 6 = 26$

23) 정답 : 13

24) 정답 : 15

$3n^2 + 2n < a_n < 3n^2 + 3n$ 이므로 $\frac{15n^2 + 10n}{n^2 + 2n} < \frac{5a_n}{n^2 + 2n} < \frac{15n^2 + 15n}{n^2 + 2n}$

$\lim_{n \to \infty} \frac{15n^2 + 10n}{n^2 + 2n} = \lim_{n \to \infty} \frac{15n^2 + 15n}{n^2 + 2n} = 15$ 이므로 $\lim_{n \to \infty} \frac{5a_n}{n^2 + 2n} = 15$

25) 정답 : 21

(분모)$\to 0$ 이므로 (분자)$\to 0$ 이어야 한다.

$\lim_{x \to 2}(\sqrt{x+a} - 2) = 0$ 에서 $a = 2$

$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+a} - 2}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)} = \frac{1}{4} = b$

따라서 $10a+4b=10\cdot 2+4\cdot \dfrac{1}{4}=21$

26) 정답 : 28
다항함수 $f(x)$ 위의 점$(2,\ 1)$에서의 접선의 기울기가 2 이므로 $f'(2)=2,\ f(2)=1$
$g(x)=x^3f(x)$에서
$g'(x)=3x^2f(x)+x^3f'(x)$이므로 $g'(2)=3\cdot 2^2\cdot f(2)+2^3\cdot f'(2)=12\cdot 1+8\cdot 2=28$

27) 정답 : 4
$x^{\log_2 x}=8x^2$ 에서 양변에 밑에 2인 로그를 취하면 $\log_2 x\cdot \log_2 x=3+2\log_2 x$
$(\log_2 x)^2-2\log_2 x-3=0$
$(\log_2 x-3)(\log_2 x+1)=0$
$\log_2 x=3,\ -1$ 이므로 $x=8,\ \dfrac{1}{2}$
따라서 $\alpha\beta=8\times\dfrac{1}{2}=4$

28) 정답 : 11
(가) $a_{n+2}=a_n-4$
$a_1=7$
$a_3=a_1-4=3$
$a_4=a_2-4$
$a_5=a_3-4=-1$
$a_6=a_4-4=a_2-8$
수열 $\{a_n\}$은 홀수번째 항끼리, 짝수번째 항끼리 각각 공차가 -4인 등차수열이다.
(나) 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+6}=a_n$이므로 주기는 6 이다.

$a_1=7,\ a_2=p,\ a_3=3,\ a_4=p-4$, $a_5=-1,\ a_6=p-8$ 이므로 $\displaystyle\sum_{k=1}^{6}a_k=3p-3$

$\therefore \displaystyle\sum_{k=1}^{50}a_k=8\times\sum_{k=1}^{6}a_k+a_{49}+a_{50}=8\cdot(3p-3)+7+p=258$

따라서 $a_2=p=11$

29) 정답 : 31
$A^3-E=0$ 이므로 $(A-E)(A^2+A+E)=0$
양변의 왼쪽에 $(A-E)^{-1}$을 곱하면 $A^2+A+E=0$
$(A-E)^2=A^2-2A+E=-3A$
$(A-E)^{60}=(-3A)^{30}=3^{30}\cdot E$
따라서 모든 성분의 합은 $2\cdot 3^{30}$ 이므로 $a=1,\ b=30$ $\therefore a+b=31$

30) 정답 : 12

$\overline{P_mP_n}^2 = 1+(\log 2)^2$ 에서 $\log m$, $\log n$의 지표의 차이가 1이고 가수의 차이가 $\log 2$이어야 한다.

따라서 $1 \leqq m < 10$, $10 \leqq n < 100$ 이므로 $P_m(0,\ \log m)$, $P_n(1, -1+\log n)$

이 때, $\overline{P_mP_n}^2 = 1+\left(1+\log\dfrac{m}{n}\right)^2 = 1+(\log 2)^2$

$\therefore\ 1+\log\dfrac{m}{n} = \pm\log 2$ 이므로 $\log\dfrac{m}{n} = \log\dfrac{1}{5}$ or $\log\dfrac{1}{20}$

따라서 $n=20m$ 또는 $n=5m$

ⅰ) $n=5m$인 경우, $(n,m)=(2,10)$, $(3,15)$, $(4,20)$, $(5,25)$, $(6,30)$, $(7,35)$, $(8,40)$, $(9,45)$

ⅱ)$n=20m$ 인 경우, $(n,\ m)=(1,2)$, $(2,40)$, $(3,60)$, $(4,80)$

따라서 총 12개