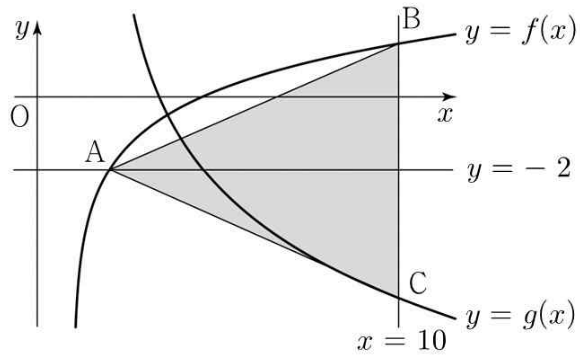
아드레날린 ex
공통

1. $a>1$인 실수 a에 대하여 두 함수

$$f(x)=\frac{1}{2}\log_a(x-1)-2,\ \ g(x)=\log_{\frac{1}{a}}(x-2)+1$$

이 있다. 직선 $y=-2$와 함수 $y=f(x)$의 그래프가 만나는 점을 A라 하고, 직선 $x=10$과 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점을 각각 B, C라 하자.
삼각형 ACB의 넓이가 28일 때, a^{10}의 값은?
〔2021년 7월 11〕

① 15 ② 18 ③ 21 ④ 24 ⑤ 27



1. 정답 ④ 〔2021년 7월 11〕

1) 그림 있으면 그림 보면서,

$a>1$인데 $f(x)=\frac{1}{2}\log_a(x-1)-2$, $g(x)=\log_{\frac{1}{a}}(x-2)+1$랍니다. 그리고 그림이 주어져 있네요. 여기에

$y=-2$와 $y=f(x)$가 만나는 점이 A, $x=10$과 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 만나는 점이 각각 B, C이라고 합니다.

그림에 다 표시되어 있네요. 그리고 삼각형 ACB의 넓이가 28이라네요.

일단 좌표부터 확인해봐야겠죠? 먼저 A는 $y=-2$와 $y=f(x)$가 만나는 점이니까 $\frac{1}{2}\log_a(x-1)-2=-2$라

하면 $\log_a(x-1)=0$이고 $0=\log_a 1$이니까 $x-1=1$입니다. $x=2$이네요.

다음으로 $x=10$과 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 만나는 점이 각각 B, C이니까 $x=10$을 각각 넣어보면 되겠죠?

$\mathrm{B}=\left(10,\ \frac{1}{2}\log_a 9-2\right)=(10,\ \log_a 3-2)$이구요, $\mathrm{C}=\left(10,\ \log_{\frac{1}{a}}8+1\right)=(10,\ -3\log_a 2+1)$입니다.

삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}\times$(B(또는 C)의 x좌표 − A의 x좌표)$\times$(B의 y좌표 - C의 y좌표)

$=\frac{1}{2}\times(10-2)\times(\log_a 3-2+3\log_a 2-1)=4(\log_a 24-3)$입니다. 이게 28이니까 $\log_a 24=10$이고

$a^{10}=24$이네요. 답은 ④번입니다.

2. 첫째항이 1인 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$(n+1)S_{n+1} = \log_2(n+2) + \sum_{k=1}^{n} S_k \quad \cdots \quad (*)$$

가 성립할 때, $\sum_{k=1}^{n} ka_k$를 구하는 과정이다.

주어진 식 $(*)$에 의하여

$$nS_n = \log_2(n+1) + \sum_{k=1}^{n-1} S_k \ (n \geq 2) \quad \cdots \quad ㉠$$

이다. $(*)$에서 ㉠을 빼서 정리하면

$$(n+1)S_{n+1} - nS_n$$

$$= \log_2(n+2) - \log_2(n+1) + \sum_{k=1}^{n} S_k - \sum_{k=1}^{n-1} S_k \ (n \geq 2)$$

이므로

$$(\boxed{\text{(가)}}) \times a_{n+1} = \log_2 \frac{n+2}{n+1} \ (n \geq 2)$$

이다.

$a_1 = 1 = \log_2 2$이고,

$2S_2 = \log_2 3 + S_1 = \log_2 3 + a_1$이므로

모든 자연수 n에 대하여

$$na_n = \boxed{\text{(나)}}$$

이다. 따라서

$$\sum_{k=1}^{n} ka_k = \boxed{\text{(다)}}$$

이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$, $h(n)$이라 할 때, $f(8) - g(8) + h(8)$의 값은?

① 12 ② 13 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16

2. 정답 ① 〔2021년 7월 13〕

1) 문제해석, 조건해석

$a_1 = 1$인 수열이 있는데 $(n+1)S_{n+1} = \log_2(n+2) + \sum_{k=1}^{n} S_k$ $\cdots$ $(*)$이랍니다. 이때 $\sum_{k=1}^{n} ka_k$를 구하라네요.

가봅시다.

그리고 갑자기 $nS_n = \log_2(n+1) + \sum_{k=1}^{n-1} S_k$ $(n \geq 2)$ $\cdots$ ㉠가 나오네요. 위 식이랑 비교해서 잘 보면 n 대신 $n-1$이 들어간 식 같아요. 이걸 빼서 정리하면

$(n+1)S_{n+1} - nS_n = \log_2(n+2) - \log_2(n+1) + \sum_{k=1}^{n} S_k - \sum_{k=1}^{n-1} S_k$ $(n \geq 2)$이 나옵니다. 그리고 갑자기

$(\boxed{(가)}) \times a_{n+1} = \log_2 \dfrac{n+2}{n+1}$ $(n \geq 2)$가 나오네요. 위 식을 잘 정리해서 아래 식을 만들어보라는 거겠죠?

가봅시다.

2) 시그마 펼치기

일단 $(n+1)S_{n+1} - nS_n$을 정리하기 위해서 펼쳐볼게요.

$(n+1)S_{n+1} = (n+1)a_1 + (n+1)a_2 + \cdots + (n+1)a_n + (n+1)a_{n+1}$이고

$nS_n = na_1 + na_2 + \cdots + na_n$입니다. 따라서

$(n+1)S_{n+1} - nS_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + (n+1)a_{n+1} = S_n + (n+1)a_{n+1}$입니다.

그리고 오른쪽을 정리해볼게요. 일단 로그는 빼는 거니까 $n+1$을 나눠서 $\log_2 \dfrac{n+2}{n+1}$로 해주구요, 오른쪽의 시그마는 그냥 펼치면 되겠죠? $(S_1 + \cdots + S_{n-1} + S_n) - (S_1 + \cdots + S_{n-1}) = S_n$입니다.

정리하면 $S_n + (n+1)a_{n+1} = \log_2 \dfrac{n+2}{n+1} + S_n$이네요. 양변에 S_n을 없애면 $(n+1)a_{n+1} = \log_2 \dfrac{n+2}{n+1}$입니다.

구했네요! (가)$= f(n) = n+1$입니다.

그리고 내려가보면 모든 자연수 n에 대하여 $na_n = \boxed{(나)}$라고 합니다. 어? 방금 $(n+1)a_{n+1} = \log_2 \dfrac{n+2}{n+1}$을 구했으니까 n 대신 $n-1$을 넣어서 정리하면 되는 거 아닌가? 라고 생각하실 수 있겠지만 지금 $(n+1)a_{n+1} = \log_2 \dfrac{n+2}{n+1}$는 $n \geq 2$에서만 사용할 수 있어요. 다시 말하면 $a_1 = \log_2 \dfrac{2}{1}$, $2a_2 = \log_2 \dfrac{3}{2}$인지 확인해야만 $(n+1)a_{n+1} = \log_2 \dfrac{n+2}{n+1}$에 n 대신 $n-1$을 넣어서 모든 자연수 n에 대하여 성립한다고 할 수

있다는 거죠.

그래서 $a_1 = 1 = \log_2 2$라고 하면서 확인하고 있네요. 그러면 $2a_2 = \log_2 \frac{3}{2}$을 확인해야겠어요. 아래에

$2S_2 = \log_2 3 + S_1 = \log_2 3 + a_1$가 있네요. 가봅시다. 시그마를 펼치면 $2a_1 + 2a_2 = \log_2 3 + a_1$인데

$a_1 = 1$이니까 $2a_2 = \log_2 3 - 1 = \log_2 \frac{3}{2}$입니다. 맞네요! 따라서 모든 자연수 n에 대하여

$na_n = \log_2 \frac{n+1}{n}$입니다. (나)$= g(n) = \log_2 \frac{n+1}{n}$입니다.

그리고는 마지막으로 $\sum_{k=1}^{n} ka_k$를 구하랍니다. 아까 $na_n = \log_2 \frac{n+1}{n}$랬으니까 넣어보면

$\sum_{k=1}^{n} \log_2 \frac{k+1}{k} = \log_2 \frac{2}{1} + \log_2 \frac{3}{2} + \cdots + \log_2 \frac{n+1}{n} = \log_2 \frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \cdots \times \frac{n+1}{n} = \log_2 (n+1)$이네요.

(다)$= h(n) = \log_2 (n+1)$입니다.

이제 숫자를 넣어볼까요? $f(8) - g(8) + h(8) = 9 - \log_2 \frac{9}{8} + \log_2 9 = 9 - \log_2 9 + \log_2 8 + \log_2 9 = 9 + 3 = 12$

입니다. 답은 ①번이네요.

3. 시각 $t=0$일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t \geq 0)$에서의 속도 $b(t)$가

$$v(t)=3t^2-6t$$

일 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?
〔2021년 7월 14〕

<보 기>

ㄱ. 시각 $t=2$에서 점 P의 움직이는 방향이 바뀐다.
ㄴ. 점 P가 출발한 후 움직이는 방향이 바뀔 때 점 P의 위치는 -4이다.
ㄷ. 점 P가 시각 $t=0$일 때부터 가속도가 12가 될 때까지 움직인 거리는 8이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

3. 정답 ⑤ 〔2021년 7월 14〕

1) 문제해석, 위치, 속도, 가속도는 수직선 위를 움직인다

$t=0$일 때 원점을 출발하는데 속도가 $v(t)=3t^2-6t$랍니다.

ㄱ에서 $t=2$에서 점 P의 움직이는 방향이 바뀌냐고 물어보네요. 움직이는 방향이 바뀐다는 건? $t=2$에서 극점을 가져야 한다는 거죠. 위로 가다가 아래로 가거나 아래로 가다가 위로 가는 건 극점이잖아요.
지금 속도 함수를 보면 $v(t)=3t^2-6t=3t(t-2)$이잖아요. $t=2$에서 감소하다가 증가하게 되네요. ㄱ은 맞습니다.

ㄴ에서 점 P가 출발한 후 움직이는 방향이 바뀔 때의 위치가 -4냐고 물어보네요. 이거는 위치 그래프를 알아야겠죠? 위치는 속도를 적분한 거니까 $v(t)=3t^2-6t$를 적분해봅시다. 위치를 $x(t)$라 하면 $x(t)=t^3-3t^2+a$인데 원점을 출발하죠? 따라서 $t=0$일 때 위치도 0이어야 합니다. $x(t)=t^3-3t^2$이네요.
$t=2$일 때 위치는 -4맞습니다. ㄴ도 맞네요.

ㄷ에서 점 P가 시각 $t=0$일 때부터 가속도가 12가 될 때까지 움직인 거리가 8이냐고 하네요. 가속도는 속도를 미분한 거죠? 따라서 미분하면 $v'(t)=6t-6$입니다. 이게 12가 되는 점은 $6t-6=12$라 하고 정리하면 $t=3$이네요.

그럼 결국 $t=0$부터 $t=3$까지 움직인 거리를 구해야 하는 거네요.

2) 거리는 절댓값이다, 이차함수와 x축으로 둘러싸인 넓이

움직인 거리는 속도를 적분해서 구해야 합니다. 그런데 단순히 구하는 게 아니라 절댓값을 씌운 뒤 적분해야 해요. 거리는 음수가 나올 수 없으니까요. 따라서 $\int_0^3 \left|3t^2-6t\right| dt$입니다.

$v(t)$의 그래프를 그려보면 0부터 2까지는 음수, 2부터 3까지는 양수잖아요? 그런데 여기에 0부터 2까지 적분한 건 이차함수와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이 공식을 사용하면 되죠. $\frac{3}{6}(2-0)^3=4$입니다.

$\int_2^3 (3t^2-6t)dt=\left[t^3-3t^2\right]_2^3=4$입니다. 둘을 더하면 $4+4=8$입니다. ㄷ도 맞네요! 따라서 맞는 건 ㄱ, ㄴ, ㄷ이고 답은 ⑤번입니다.

4. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$에 대하여 방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 세 실근 α, 0, $\beta\,(\alpha<0<\beta)$가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, 함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f(x)=9$는 서로 다른 세 실근을 가진다. (나) $f(\alpha)=-16$

함수 $g(x)=|f'(x)|-f'(x)$에 대하여 $\int_0^{10} g(x)dx$의 값은?

〔2021년 7월 15〕

① 48 ② 50 ③ 52 ④ 54 ⑤ 56

4. 정답 ② 〔2021년 7월 15〕

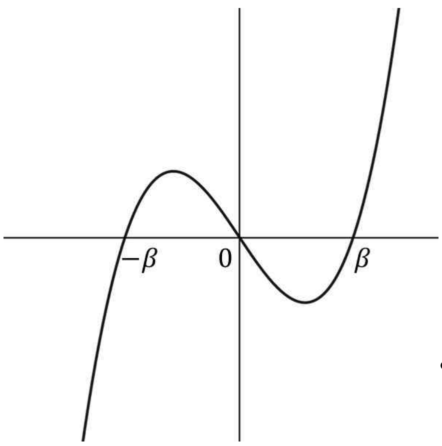
1) 문제해석

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 있는데 도함수 $f'(x)$에 대하여 $f'(x)=0$의 서로 다른 세 실근이 $\alpha,\ 0,\ \beta\ (\alpha<0<\beta)$이고 이 순서대로 등차수열을 이룬답니다. 등차수열을 이루니까 등차중항에 의하여 $\dfrac{\alpha+\beta}{2}=0$이고 $\beta=-\alpha$가 되어야겠죠? 그래야 $-\beta,\ 0,\ \beta$로 공차가 β인 등차수열을 이룰 테니까요.

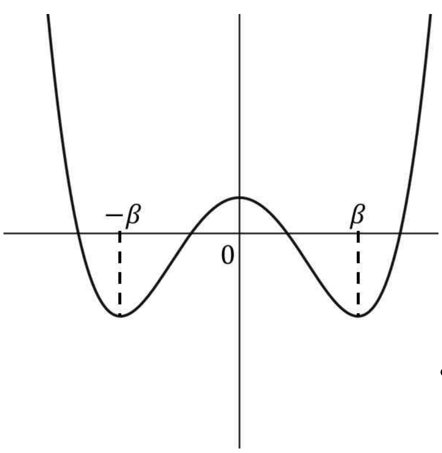
그러면 $f'(x)=0$의 실근이 $-\beta,\ 0,\ \beta$인 거니까 인수정리에 의하여 $f'(x)=4x(x-\beta)(x+\beta)$입니다. 도함수는 최고차항의 계수가 1인 사차함수를 미분한 거니까 최고차항의 계수가 4인 삼차함수이죠?

2) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기, 조건해석

저거 식을 잘 보면 $f'(x)$는 기함수이죠? 그래프를 그려보면

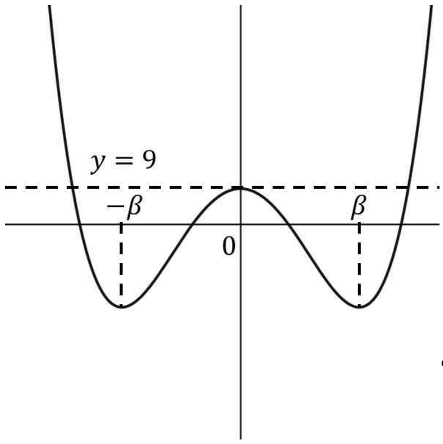


이렇게 됩니다. 이 상태에서 $f(x)$를 그려보면



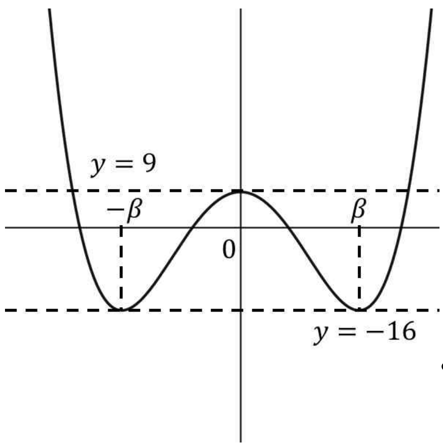
이렇게 되죠? 아직 확정은 아니에요. 위아래로 움직일 수는 있어요.

이때 (가)조건에서 $f(x)=9$가 서로 다른 세 실근을 갖는답니다. 이건 다시 말하면 $y=f(x)$와 $y=9$가 세 점에서 만난다는 거죠. 그래프 보세요. 세 점에서 만나는 x축에 평행한 직선은 딱 하나입니다.



이렇게 말이죠. $f(0)=9$입니다.

(나)조건에서는 $f(\alpha)=-16$라네요. 아까 $\beta=-\alpha$라 했으니까 $f(-\beta)=-16$이겠네요. 그럼



이렇게 됩니다.

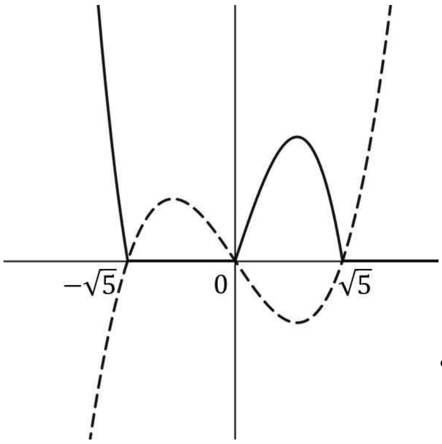
결국 $y=f(x)$는 $y=-16$과 $x=-\beta$, $x=\beta$에서 접해야 하죠? 따라서 $f(x)+16$은 $(x+\beta)$, $(x-\beta)$라는 인수를 각각 적어도 두 개는 가져야 합니다. 인수정리에 의하여 $f(x)+16=(x+\beta)^2(x-\beta)^2$이고 $f(x)=(x+\beta)^2(x-\beta)^2-16$이네요.

이때 $f(0)=9$이어야 하잖아요? 넣어보면 $\beta^4=25$이고 $\beta^2=5$입니다. $\beta>0$이니까 $\beta=\sqrt{5}$이네요.
$f(x)=(x+\sqrt{5})^2(x-\sqrt{5})^2-16$입니다.

3) 절댓값 풀기

마지막으로 $g(x)=|f'(x)|-f'(x)$일 때 $\int_0^{10} g(x)dx$를 구하라네요. 일단 해석부터 해봅시다.

일단 $f'(x)\geq 0$일 때는 $g(x)=0$입니다. 그리고 $f'(x)<0$이면 $g(x)=-2f'(x)$입니다. 다시 표현해보면 $f'(x)$가 x축보다 크거나 같을 때는 0이고, 아래에 있을 때는 -2를 곱해서 위로 접어 올린 그래프겠네요.
그래프를 대충 그려보면



이렇게 되겠어요. 그러면 0부터 10까지 적분한 건 그냥 0부터 $\sqrt{5}$ 까지 적분한 거네요. $x \geq \sqrt{5}$ 부터는 계속 0이니까요.

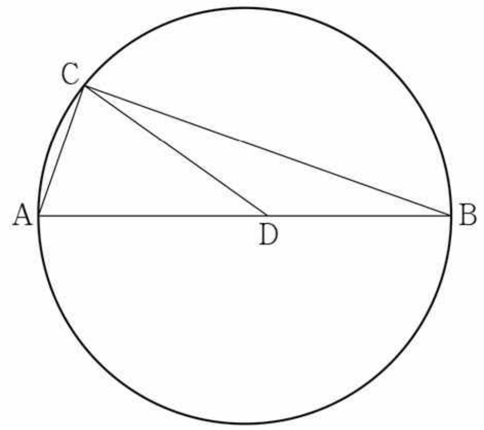
$f'(x) = 4x(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5}) = 4x^3 - 20x$ 이니까

$\int_0^{10} g(x)dx = \int_0^{\sqrt{5}} (-8x^3 + 40x)dx = \left[-2x^4 + 20x^2\right]_0^{\sqrt{5}} = 50$ 입니다. 답은 ②번이네요.

5. 그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 점 C에 대하여

$$\overline{\mathrm{BC}}=12\sqrt{2},\ \cos(\angle\mathrm{CAB})=\frac{1}{3}$$

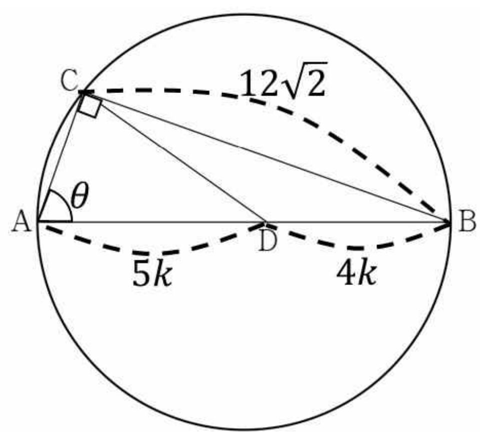
이다. 선분 AB를 5 : 4로 내분하는 점을 D라 할 때, 삼각형 CAD의 외접원의 넓이는 S이다.
$\frac{S}{\pi}$의 값을 구하시오. [2021년 7월 20]



5. 정답 27 〔2021년 7월 20〕

1) 그림 있으면 그림 보면서

그림처럼 선분 AB가 지름인 원이 있는데 $\overline{\mathrm{BC}}=12\sqrt{2}$, $\cos(\angle\mathrm{CAB})=\dfrac{1}{3}$이라고 합니다. 그리고 선분 AB를 $5:4$로 내분하는 점이 D라네요. 이거 표시 좀 해볼까요? $\overline{\mathrm{AB}}=9k$, $\angle\mathrm{CAB}=\theta$라 할게요. $\angle\mathrm{BCA}=\dfrac{\pi}{2}$이죠? 지름을 한 변으로 하고 원에 내접하는 삼각형의 한 각은 $\dfrac{\pi}{2}$이니까요.



이렇게 할 수 있죠? 지금 보면 삼각형 ACB가 직각삼각형이니까

sin값으로 $9k$를 바로 구할 수 있겠어요. 사인값을 구하려면.... $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$를 사용하면 되겠죠?

$\sin^2\theta=\dfrac{8}{9}$입니다. θ은 예각이니까 $\sin\theta=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$이네요. 그런데 $\sin\theta=\dfrac{12\sqrt{2}}{9k}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$이니까 $k=2$입니다.

그러면 피타고라스의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{CA}}^2+(12\sqrt{2})^2=18^2$이고 $\overline{\mathrm{CA}}^2=36$입니다. 길이는 양수니까 $\overline{\mathrm{CA}}=6$이네요.

그리고는 삼각형 CAD의 외접원의 넓이가 S라네요. $\dfrac{S}{\pi}$를 구하래요. 일단 외접원의 넓이를 알기 위해서는 사인법칙을 사용해야 하죠? 마침 $\sin\theta=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$도 있으니까 $\dfrac{\overline{\mathrm{CD}}}{\sin\theta}=2R$을 사용하면 되겠어요.

2) 내부 : 삼각형은 정해져 있다 - 두 변의 길이와 한 각

그런데 $\overline{\mathrm{CD}}$는 어떻게 알죠? 잘 생각해보세요. 삼각형 CAD는 두 변의 길이와 한 각이 나와 있잖아요.

$\overline{\mathrm{CA}}=6$, $\overline{\mathrm{AD}}=10$이고 $\cos\theta=\dfrac{1}{3}$이니까 코사인법칙으로 나머지 한 변의 길이를 구해봅시다.

$\dfrac{1}{3}=\cos\theta=\dfrac{6^2+10^2-\overline{\mathrm{CD}}^2}{2\times6\times10}=\dfrac{136-\overline{\mathrm{CD}}^2}{120}$이고 정리하면 $\overline{\mathrm{CD}}^2=96$입니다. 길이는 양수니까

$\overline{\mathrm{CD}} = 4\sqrt{6}$이네요. 이제 할 수 있겠어요.

사인법칙에 의하여 $\dfrac{\overline{\mathrm{CD}}}{\sin\theta} = \dfrac{\dfrac{4\sqrt{6}}{1}}{\dfrac{2\sqrt{2}}{3}} = 6\sqrt{3} = 2R$이고 $R = 3\sqrt{3}$입니다. 외접원의 넓이는 $\pi R^2 = 27\pi$이네요.

따라서 $\dfrac{S}{\pi} = 27$입니다.

6. 공차가 d이고 모든 항이 자연수인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_1 \le d$
(나) 어떤 자연수 k $(k \ge 3)$에 대하여 세 항 a_2, a_k, a_{3k-1}이 이 순서대로 등비수열을 이룬다.

$90 \le a_{16} \le 100$일 때, a_{20}의 값을 구하시오. 〔2021년 7월 21〕

6. 정답 117 〔2021년 7월 21〕

1) 자연수 보이면 숫자 넣을 준비, 조건해석, 등차수열은 $a_n = a + (n-1)d$로 놓기

공차가 d이고 모든 항이 자연수인 등차수열 $\{a_n\}$이 있답니다. 모든 항이 자연수라구요? 그러면 첫 항부터 계속 자연수라는 거네요? 거기에 자연수에 자연수를 더해야 자연수가 될 테니까 공차도 자연수일 거구요.

(가)조건에서 $a_1 \le d$라고 합니다. 그리고 (나)조건에서 $k \ge 3$인 어떤 자연수 k에 대하여 $a_2,\ a_k,\ a_{3k-1}$가 이 순서대로 등비수열을 이룬다네요. 등비수열을 이루니까 등비중항을 이용하면 $a_2 \times a_{3k-1} = {a_k}^2$가 되겠죠? 이때 $a_2 = a + d,\ a_k = a + (k-1)d,\ a_{3k-1} = a + (3k-2)d$이니까 $(a+d)(a+(3k-2)d) = (a+(k-1)d)^2$입니다.

어후... 이건 나중에 합시다.

2) 자연수 보이면 숫자 넣기

$90 \le a_{16} \le 100$이랍니다. $a_{16} = a + 15d$이니까 $90 \le a + 15d \le 100$이네요. 이때 $a_1 \le d$이잖아요? $a \le d$의 양변에 $15d$를 더하면 $a + 15d \le 16d$가 됩니다. 따라서 $90 \le a + 15d \le 16d$이네요. $90 \le 16d$인데 이걸 만족시키는 d는 6부터죠? 따라서 $d \ge 6$입니다.

근데 생각해보세요. $d = 7$이라면 $a + 105 \le 100$이잖아요? a가 자연수인데 이럴 수가 있나요? 7보다 더 커도 마찬가지이구요. $d = 6$이라면 $a + 90 \le 100$로 $a \le 6$이기만 하면 조건을 만족시킵니다. 따라서 $d = 6$이고 $a \le 6$이네요.

이거 $(a+d)(a+(3k-2)d) = (a+(k-1)d)^2$에 넣어볼까요? $(a+6)(a-12+18k) = (a+6k-6)^2$입니다.
정리하면 $a^2 - 6a - 72 + 18ak + 108k = a^2 + 12ak - 12a + 36k^2 - 72k + 36$입니다.
$6a + 6ak = 36k^2 - 180k + 108$이네요. 양변 6으로 나누면 $a + ak = 6k^2 - 30k + 18$입니다. 정리하면 $a(k+1) = 6k^2 - 30k + 18$이네요.

어? 그런데 a는 6 이하의 자연수이죠? $a = \dfrac{6k^2 - 30k + 18}{k+1}$은 6 이하의 자연수여야 합니다. 따라서

$a = \dfrac{6k^2 - 30k + 18}{k+1} \le 6$이고 $\dfrac{k^2 - 5k + 3}{k+1} \le 1$이어야 하네요. 여기서 k도 3 이상의 자연수니까

$k^2 - 5k + 3 \le k + 1$이고 $k^2 - 6k + 2 \le 0$이어야 합니다. $k^2 - 6k + 2$는 $k = 3$이 축인 이차함수이죠? $k = 3$은 마침 3 이상이라는 조건에 딱 맞네요. 넣어보면 -7로 0보다 작거나 같습니다. 맞네요? 혹시 모르니까 4도 넣어봅시다. -6이니까 이것도 되네요. 5를 넣으면 -3입니다. 6부터는 양수가 되네요. 지금 후보는

3, 4, 5입니다.

그러면 $a=\dfrac{6k^2-30k+18}{k+1}=\dfrac{6\left(k^2-5k+3\right)}{k+1}$에 넣어서 자연수가 되는지 확인해볼게요. $k=3$을 넣으면 $-\dfrac{18}{4}$입니다. 안 되네요. $k=4$를 넣으면 $-\dfrac{6}{5}$입니다. 안 되네요. $k=5$를 넣으면 $\dfrac{18}{6}=3$입니다. 되네요!

따라서 $k=5$, $a=3$이고 $a_{20}=a+19d=3+114=117$입니다.

7. 삼차함수 $f(x)=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}x(x-3)(x+3)$에 대하여

$x \geq -3$에서 정의된 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (-3 \leq x < 3) \\ \\ \dfrac{1}{k+1}f(x-6k) & (6k-3 \leq x < 6k+3) \end{cases}$$

(단, k는 모든 자연수)

이다. 자연수 n에 대하여 직선 $y=n$과 함수 $y=g(x)$의

그래프가 만나는 점의 개수를 a_n이라 할 때,

$\sum_{n=1}^{12} a_n$의 값을 구하시오. 〔2021년 7월 22〕

7. 정답 64 〔2021년 7월 22〕

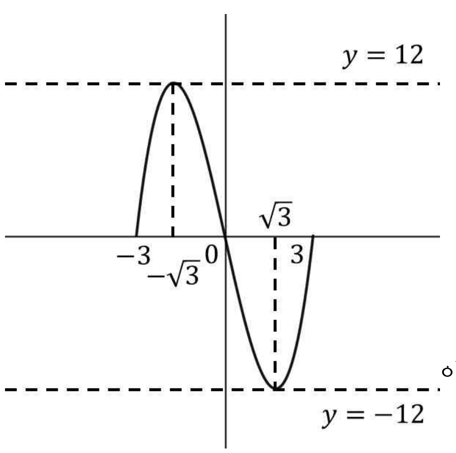
1) 문제해석, 자연수 보이면 숫자 넣기

$f(x)=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}x(x-3)(x+3)$가 있네요. 이거 기함수네요? 최고차항의 계수가 양수인 기함수에요.

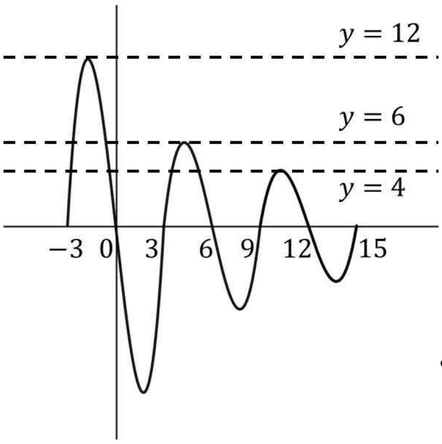
이때 $g(x)=\begin{cases} f(x) & (-3 \le x < 3) \\ \\ \dfrac{1}{k+1}f(x-6k) & (6k-3 \le x < 6k+3) \end{cases}$ 라고 합니다. k는 모든 자연수이구요. 자연수면 숫자 넣어야겠죠? 가봅시다. $k=1$이면 $3 \le x < 9$에서 $\dfrac{1}{2}f(x-6)$입니다. $k=2$이면 $9 \le x < 15$에서 $\dfrac{1}{3}f(x-12)$입니다. 지금 보면 $-3 \le x < 3$에서 $f(x)$를 6만큼씩 오른쪽으로 평행이동하면서 $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{1}{4}$, $\cdots$이렇게 점점 작게 만드는 함수네요. 대충이라도 그려볼까요?

2) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

$f(x)=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}x(x-3)(x+3)=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}(x^3-9x)$는 -3, 0, 3에서 x축과 만나구요, 미분하면 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}(3x^2-9)=2\sqrt{3}(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$이니까 $x=-\sqrt{3}$에서 극대, $x=\sqrt{3}$에서 극소네요. 극댓값은 12이고 극솟값은 -12입니다.



이렇게 되는데 이게 6씩 평행이동하면서 $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{1}{4}$, $\cdots$가 되니까



이렇게 되겠네요. 이정도면 해석은 된 것 같아요.

3) 시그마 펼치기,

이때 $y=n$과 $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 개수를 a_n이라고 하는데 $\sum_{n=1}^{12} a_n$를 구하랍니다. 해석은 굉장히 간단하네요. 그냥 $y=n$이라는 직선을 그어서 $y=g(x)$와 만나는 점의 개수를 구하면 되는 거예요.
그러면 일단 펼쳐봅시다. $a_1+a_2+\ \cdots\ +a_{12}$이네요.

a_{12}는 $y=12$랑 $y=g(x)$가 만나는 점의 개수이죠? 위의 그래프에서 한 점에서만 만나잖아요? $a_{12}=1$입니다.
a_{11}은요? 지금 보면 2개의 점에서 만나죠. $y=12$와 $y=6$ 사이에서는 2개의 점에서 만나잖아요. 따라서
$a_{11}=a_{10}=a_9=a_8=a_7=2$입니다.

그러다가 a_6이 되면 3개의 점에서 만납니다. $a_6=3$이네요. 그리고 $y=6$과 $y=4$ 사이에 있으면 4개의 점에서 만나네요. 따라서 $a_5=4$입니다.

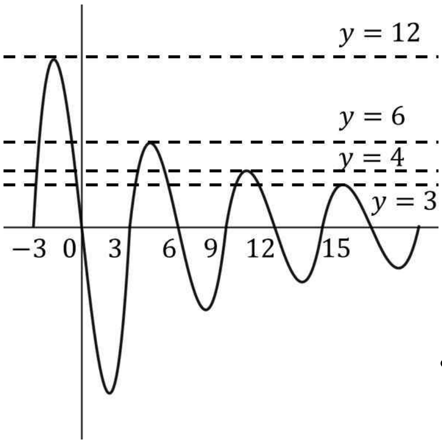
$y=4$가 되면 5개의 점에서 만나죠. $a_4=5$입니다. 이 아래부터는 생각을 좀 해봐야겠어요.

지금 보면 함수의 극대점이 될 때 만나는 점의 개수가 변하는 걸 알 수 있어요. 극댓값은 12에서부터
$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\cdots$이렇게 작아지고 있잖아요? 이걸 나열해보면 12, 6, 4, 3, $\frac{12}{5}$, 2, $\cdots$, 1, $\cdots$이렇게 되겠죠?

그리고 극댓값과 a_n의 관계를 보면 $12 \rightarrow 6$으로 갈 때 a_n이 2가 늘었어요. 12일 때 $a_{12}=1$, 12랑 6 사이일 때 $a_n=2$, 6일 때 3 이런 식으로요.

그러면 4에서 3으로 갈 때도 a_n이 2가 늘어야겠죠? 지금 $a_4 = 5$이니까 $a_3 = 7$이 되어야 할 거예요.

혹시 모르니까 그래프를 늘려봅시다.



이렇게 되네요. $a_3 = 7$ 맞네요? 그럼 이제 다음으로 가봅시다.

다음은 3에서 2로 갈 때에요. 지금 12, 6, 4, 3, $\frac{12}{5}$, 2, $\cdots$, 1, $\cdots$을 보면 3에서 2를 가려면 $\frac{12}{5}$를 거쳐서 가야 하죠? 그러면 3에서 $\frac{12}{5}$로 가면 2가 늘고, $\frac{12}{5}$에서 2로 가면 또 2가 늘어나니까 총 4가 늘어날 거예요. 따라서 $a_2 = 7 + 4 = 11$입니다.

이제 마지막 a_1입니다. 이거는 2에서 1로 갈 때 몇 개의 숫자를 거치는지를 확인하면 되겠죠? 나열해봅시다.

2, $\frac{12}{7}$, $\frac{12}{8}$, $\frac{12}{9}$, $\frac{12}{10}$, $\frac{12}{11}$, 1이렇게 되네요. 총 5번 거쳐서 6번째에 1에 도달하니까 총 12가 늘어나겠네요. 따라서 $a_1 = 11 + 12 = 23$입니다. 모두 더하면

$1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 3 + 4 + 5 + 7 + 11 + 23 = 64$입니다. 답은 64네요.

아드레날린 ex
확통

8. 한 개의 주사위를 세 번 던져서 나오는 눈의 수를 차례로 a, b, c라 할 때, $(a-2)^2+(b-3)^2+(c-4)^2=2$가 성립할 확률은? 〔2021년 7월 확통 26〕

① $\frac{1}{18}$　② $\frac{1}{9}$　③ $\frac{1}{6}$　④ $\frac{2}{9}$　⑤ $\frac{5}{18}$

8. 정답 ① 〔2021년 7월 확통 26〕

1) 확통은 상황이해 후 기준 잡고 분류

한 개의 주사위를 세 번 던져서 나오는 눈의 수를 차례로 a, b, c라 하는데 $(a-2)^2+(b-3)^2+(c-4)^2=2$가 성립할 확률을 구하랍니다. 일단 구하는 확률은 $\dfrac{(a-2)^2+(b-3)^2+(c-4)^2=2}{\text{주사위 세 번}}$ 이네요.

분모부터 구해볼까요? 주사위를 세 번 던지는 경우의 수니까 6^3이네요.

다음으로 $(a-2)^2+(b-3)^2+(c-4)^2=2$이 성립할 경우의 수를 구해봅시다. 일단 제곱이 되어 있으니까 음수는 될 수 없어요. a, b, c 모두 1부터 6까지 자연수니까 제곱을 하면 1, 4, 9, $\cdots$이런 식으로 될 거구요. 이걸 더해서 2가 되려면 제곱한 결과가 1이 두 개, 0이 한 개가 나와야겠네요.

그러면 어떤 숫자가 1이 될지, 0이 될지를 정해볼까요? 그냥 a, b, c 중에서 1이 될 숫자 2개를 고르는 거니까 ${}_3C_2=3$입니다.

지금은 a, b가 1이 될 숫자이고 c가 0이 될 숫자라고 해봅시다. 그러면 $c=4$이겠네요.

a가 1이 되려면 3 또는 1이 되어야 해요. b가 1이 되려면 2, 4가 되어야 하구요. 따라서 경우의 수는 $2\times2=4$입니다. 총 12이네요.

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{12}{6^3}=\dfrac{1}{18}$입니다. 답은 ①번이네요.

9. 3개의 문자 A, B, C를 포함한 서로 다른 6개의 문자를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 나열할 때, 두 문자 B와 C 사이에 문자 A를 포함하여 1개 이상의 문자가 있도록 나열하는 경우의 수는? 〔2021년 7월 확통 27〕

① 180 ② 200 ③ 220 ④ 240 ⑤ 260

9. 정답 ④ 〔2021년 7월 확통 27〕

1) 확통은 상황이해 후 기준 잡고 분류

A, B, C를 포함해서 서로 다른 문자가 6개 있는데 이걸 일렬로 나열할 때 B, C 사이에 A를 포함해서 1개 이상의 문자가 있도록 나열하는 경우의 수를 구하랍니다.

적어도 1개 이상의 문자가 있도록 하는 거니까 아예 사이에 문자가 없는 걸 빼서 여사건으로 가도 되지 않을까요...?

하는 생각이 들었지만 여기에서는 무조건 A를 포함하라고 했어요. 그러니까 이 문제는 B, C 사이에 A를 포함하고, 1개 이상의 문자가 있어야 하는 거죠. 여사건은 A를 포함하지 않거나 0개의 문자가 있는 거가 되는 거예요. 이거 너무 복잡하지 않을까요?

그냥 정석대로 갑시다. B, C 사이에 몇 개의 문자가 있는지를 기준으로 잡고 분류해볼게요.

2) 케이스 분류

2-1) 1개의 문자가 있을 경우

이러면 그 1개의 문자는 무조건 A여야 합니다. BAC를 한 묶음으로 한 후에, BAC라는 묶음 안에서 일단 B, C의 위치를 바꿀 수 있으니까 경우의 수는 2이구요, 이걸 나머지 3개의 카드들과 나열하면 $4! = 24$입니다. 총 $2 \times 24 = 48$이네요.

2-2) 2개의 문자가 있을 경우

그러면 A를 빼고 나머지 3개 중에서 하나를 골라서 가져오면 되겠네요. 경우의 수는 ${}_3C_1 = 3$입니다.

여기서는 D라는 문자를 가져왔다고 해볼게요.(그냥 가상의 문자입니다.) BADC를 한 묶음으로 한 후에, BADC 안에서 B, C의 위치를 바꿀 수 있으니까 경우의 수는 2이고, AD도 바꿀 수 있으니까 경우의 수는 2입니다. 이후에 이걸 나머지 2개의 카드들과 나열하면 $3! = 6$이네요. 총 $3 \times 2 \times 2 \times 6 = 72$이네요.

2-3) 3개의 문자가 있을 경우

A를 빼고 나머지 3개 중에서 두 개를 골라서 가져오면 됩니다. 경우의 수는 ${}_3C_2 = 3$입니다.

이러면 B, C의 위치를 바꿀 수 있으니까 경우의 수는 2이고, B, C 사이의 3개의 문자의 위치도 바꿀 수 있으니까 경우의 수는 $3! = 6$입니다. 이후에 이걸 나머지 1개의 카드들과 나열하면 $2! = 2$이네요. 총 $3 \times 2 \times 6 \times 2 = 72$이네요.

2-4) 4개의 문자가 있을 경우

나머지 4개의 문자가 B, C 사이에 있으니까 경우의 수는 1입니다.

이후에 B, C의 위치를 바꿀 수 있으니까 경우의 수는 2이고, B, C 안에서 4개의 문자의 위치를 바꿀 수 있으니까 $4! = 24$입니다. 총 $2 \times 24 = 48$이네요.

따라서 구하는 경우의 수는 $48 + 72 + 72 + 48 = 240$입니다.

10. 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 2^2)$, 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따른다. 상수 a에 대하여 두 확률변수 X, Y가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $Y=3X-a$
(나) $\mathrm{P}(X\le 4)=\mathrm{P}(Y\ge a)$

$\mathrm{P}(Y\ge 9)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? 〔2021년 7월 확통 28〕

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.0228 ② 0.0668
③ 0.1587 ④ 0.2417
⑤ 0.3085

10. 정답 ⑤ 〔2021년 7월 확통 28〕

1) 조건해석

$X \sim \mathrm{N}(m,\ 2^2)$이고 $Y \sim \mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$일 때 (가)조건에서 $Y=3X-a$라고 합니다. 지금 보면 X와 Y의 평균이 m으로 같네요? $E(X)=E(Y)$인데 $Y=3X-a$이잖아요. 그러면
$E(Y)=E(3X-a)=3E(X)-a$이겠네요. 따라서 $m=3m-a$이고 $2m=a$입니다.

(나)조건에서 $\mathrm{P}(X \leq 4)=\mathrm{P}(Y \geq a)$라고 합니다. 각각 값을 집어넣어볼게요. $Y=3X-a$이고 $2m=a$이니까 $\mathrm{P}(Y \geq a)=\mathrm{P}\left(X \geq \frac{4}{3}m\right)$입니다.

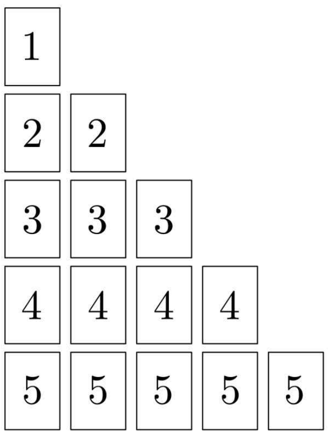
2) 정규분포 보는 법

지금 결국 $\mathrm{P}(X \leq 4)=\mathrm{P}\left(X \geq \frac{4}{3}m\right)$이잖아요. 정규분포 그래프를 생각해보세요. 4 이하일 확률과 $\frac{4}{3}m$ 이상일 확률이 같으려면? 이 둘의 평균이 X의 평균인 m이 되어야죠. 정규분포 그래프는 평균인 m에 대하여 대칭이니까요. 평균으로부터 같은 정도로 떨어져 있어야 확률이 같아지겠죠? 따라서 $\dfrac{4+\frac{4}{3}m}{2}=m$이고
$m=6$입니다. $a=12$이네요.

이제 $\mathrm{P}(Y \geq 9)$을 구해야 해요. 지금 $\sigma(Y)$를 모르잖아요? 그런데 이미 $\sigma(X)=2$라는 건 알죠. 따라서
$\sigma(Y)=\sigma(3X-12)=3\sigma(X)=6$입니다. $Y \sim \mathrm{N}(6,\ 6^2)$이네요.

$\mathrm{P}(Y \geq 9)$에서 9는 평균 $m(=6)$으로부터 $0.5\sigma(=3)$만큼 오른쪽으로 떨어져 있어요. 따라서
$\mathrm{P}(Y \geq 9)=\mathrm{P}(Z \geq 0.5)$입니다. $\mathrm{P}(Z \geq 0.5)=0.5-\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 0.5)$인데 표에서
$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 0.5)=0.1985$라고 했으니까 $\mathrm{P}(Z \geq 0.5)=0.3085$입니다. 답은 ⑤번이네요.

11. 1, 2, 3, 4, 5의 숫자가 하나씩 적힌 카드가 각각 1장, 2장, 3장, 4장, 5장이 있다. 이 15장의 카드 중에서 임의로 2장의 카드를 동시에 선택하는 시행을 한다.
이 시행에서 선택한 2장의 카드에 적힌 두 수의 곱의 모든 양의 약수의 개수가 3 이하일 때, 그 두 수의 합이 짝수일 확률은 $\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) 〔2021년 7월 확통 29〕



11. 정답 25 〔2021년 7월 확통 29〕

1) 조건부확률 A일 때 B일 확률 $= \dfrac{P(A\cap B)}{P(A)} = \dfrac{A\text{이고 }B\text{일 경우의 수}}{A\text{일 경우의 수}}$

그림과 같이 1, 2, 3, 4, 5가 각각 1, 2, 3, 4, 5장이 있네요. 이 15개 중에서 2개를 선택하는데 두 수의 곱의 모든 양의 약수의 개수가 3 이하일 때, 두 수의 합이 짝수일 확률을 구하랍니다. 구하는 확률은 $\dfrac{\text{두 수 합 짝수}}{\text{두 수 곱의 양의 약수의 개수 3 이하}}$ 이네요.

일단 분모부터 구해봅시다. 두 수의 곱의 양의 약수의 개수가 3 이하라는 건 뭘까요? 일단 뭐 대충 숫자를 대입해서 이해해봅시다. 직관적으로는 뭔 소린지 모르겠어요.

1, 2를 골랐다고 해볼게요. 그러면 곱이 2이죠. 양의 약수의 개수는 1, 2 이렇게 2개입니다. 되네요?
1, 3도 마찬가지이고, 1, 5도 마찬가지이네요. 1, 4는 곱이 4인데 양의 약수는 1, 2, 4라서 3개입니다.
이것도 되네요.

지금까지 곱이 2, 3, 5, 4였는데 소수 아니면 소수의 제곱수였어요. 이거만 되는 걸까요?

조금만 더 해봅시다. 2를 해볼게요. 2, 2이면 곱이 4이고 양의 약수는 1, 2, 4라서 됩니다!
2, 3이면 곱이 6인데 양의 약수는 1, 2, 3, 6이라서 개수는 4입니다. 이건 안 되겠어요. 2, 4도 곱이 8인데 양의 약수는 1, 2, 4, 8이니까 4개라서 안 됩니다. 2, 5도 마찬가지이구요.
3으로 넘어가도 3, 3은 3개로 가능하지만 3, 4는 6개, 3, 5는 4개라서 안 됩니다.
4는 4, 4도 5개라서 안 되고, 45도 6개라서 안 됩니다. 55는 3개로 되네요.

어쩌다보니 모든 경우를 해보았는데 결국 소수 아니면 소수의 제곱수여야 하네요. 가능한 경우는
(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 2), (3, 3), (5, 5)입니다.

그런데 여기서 주의해야 할 것은 조건부확률이라는 점이에요. 예를 들어 같은 (5, 5)라도 어떤 5를 고르느냐에 따라 달라질 수 있다는 거죠. 저 5개의 5는 모두 다른 5거든요.

그럼 결국 카드를 골라야 합니다. (1, 2)는 $1\times2=2$, (1, 3)은 $1\times3=3$, (1, 4)는 $1\times4=4$, (1, 5)는 $1\times5=5$입니다.

(2, 2)는 2개 중에 2개를 고르는 거니까 ${}_2C_2=1$, (3, 3)은 3개 중에 2개를 고르는 거니까 ${}_3C_2=3$,

$(5,\ 5)$는 5개 중에서 2개를 고르는 거니까 ${}_5C_2 = 10$입니다. 총 28이네요.

이제 이 중에서 합이 짝수인 경우를 찾아야 해요. 가능한 경우는
$(1,\ 3)$, $(1,\ 5)$, $(2,\ 2)$, $(3,\ 3)$, $(5,\ 5)$이네요, 이 것들의 경우의 수를 다 더하면 22이네요. 따라서 구하는 확률은 $\frac{22}{28} = \frac{11}{14}$입니다. $p = 14$, $q = 11$이니까 $p + q = 25$이네요.

12. 네 명의 학생 A, B, C, D에게 검은 공 4개, 흰 공 5개 빨간 공 5개를 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 색 공끼리는 서로 구별하지 않는다.) 〔2021년 7월 확통 30〕

(가) 각 학생이 받는 공의 색의 종류의 수는 2이다. (나) 학생 A는 흰 공과 검은 공을 받으며 흰 공보다 검은 공을 더 많이 받는다. (다) 학생 A가 받는 공의 개수는 홀수이며 학생 A가 받는 공의 개수 이상의 공을 받는 학생은 없다.

12. 정답 51 〔2021년 7월 확통 30〕

1) 조건해석, 확통은 상황이해 후 기준 잡고 분류

A, B, C, D 네 명에게 검은 공 4개, 흰 공 5개, 빨간 공 5개를 준다네요. 같은 색 공은 모두 같구요. 다른 상자에 같은 공을 넣는 상황같죠?

(가)조건에서 각 학생이 받는 공의 색의 종류의 수는 2랍니다. 그럼 적어도 2개의 공은 받아야 하고 공의 색의 종류는 무조건 2개여야 합니다.

(나)조건에서 A는 흰 공과 검은 공을 받으며 흰 공보다 검은 공을 더 많이 받는다고 합니다. A는 색의 종류 2가지 정해졌네요? 일단 흰 공<검은 공입니다. 흰 공은 최소 하나는 있어야 하니까 검은 공을 최소 2개는 있어야겠네요.

(다)조건에서 학생 A가 받는 공의 개수는 홀수이며 학생 A가 받는 공의 개수 이상의 공을 받는 학생은 없답니다. 그러니까 무조건 A보다는 적게 받아야 한다는 거죠.

생각 좀 해볼게요. 각 학생은 무조건 최소 2개는 받아야 해요. 그러니까 A는 최대 8개까지만 받을 수 있다는 거죠. 홀수여야 하니까 최대 7개까지겠네요.

그럼 가능한 경우는 3, 5, 7입니다. 3은 안될 것 같아요. 총 14개 중 3개를 주고 나면 11개인데 아무리 최대와 최소의 차이를 적게 해서 줘도 344입니다. A의 공의 개수를 넘죠?

그럼 5개이거나 7개이겠네요. 가봅시다.

2) 케이스 분류

2-1) 5개일 때

총 14개 중에 5개를 제외한 9개를 나머지에게 나누어 줄 수 있는 경우는 234, 333입니다.

검은 공 4개, 흰 공 5개 중에서 5개를 고를 때 검은 공이 흰 공보다 더 많도록 고르는 경우는 검은 공, 흰 공 순서로 (4, 1), (3, 2)이 가능하죠? 하나씩 확인해봅시다.

일단 기본적으로 A를 제외한 나머지 3명에게 줄 공 묶음을 구성한 후에 그걸 사람에게 배열한다는 느낌으로 가면 될 것 같아요.

(4, 1)의 경우는 A에게 주고 나면 흰 공 4개, 빨간 공 5개가 남습니다. 234의 경우 일단 각자에게 흰 공 1개, 빨간 공 1개를 주면 흰 공 1개, 빨간 공 2개가 남습니다. 이거 중에 하나만 한 묶음에게 주면 자동적으로 나머지 두 개의 공은 다른 묶음에게 가겠죠? 개수를 234를 맞춰야 하니까요. 경우는 흰 공 1개 보내기, 빨간 공 1개 보내기로 2개입니다. 이후에 사람도 정해야죠. 234를 어떤 사람이 가질 지를 정해야 합니다. 경우의 수는 $3!=6$이네요. 총 $2\times6=12$입니다.

333의 경우 각자에게 흰 공 1개, 빨간 공 1개를 주면 흰 공 1개, 빨간 공 2개가 남아요. 이걸 이제 하나씩 주면 됩니다. 모두 같은 묶음에 공을 하나씩 넣는 거니까 경우의 수는 1이에요. 이제 문제는 배분하는 거예요. 지금 흰 공 1개, 빨간 공 2개로 구성된 묶음이 2개가 있어요. 이 둘은 구별하지 못한다는 거죠. 사람에게 줄 때도 겹치는 경우는 제외해야 합니다. 같은 것이 있는 순열에 의하여 $\frac{3!}{2!}=3$입니다. (4, 1)의 경우는 $12+3=15$이네요.

(3, 2)의 경우는 A에게 주고 나면 검은 공 1개, 흰 공 3개, 빨간 공 5개가 남습니다.
이 경우에는 검은 공 1개를 받는 사람이 어떤 색 공을 받는지가 중요하겠네요.

먼저 흰 공을 받는 경우를 해볼게요. 흰 공을 하나만 받는다면 나머지에 흰 공 2개, 빨간 공 5개를 주면 됩니다. 흰 공 1개, 빨간 공 1개는 무조건 받아야 하니까 결국 같은 빨간 공 3개를 나누면 되겠네요.
$0+3$, $1+2$로 두 가지가 있습니다. 다만 $0+3$의 경우 그 사람은 흰 공 1개, 빨간 공 4개로 5개가 되어 A의 개수와 같아지죠? 따라서 $1+2$만 가능합니다. 빨간 공 1개, 흰 공 1개가 들어 있는 공 묶음 두 개는 구별이 안 돼요. 완전히 똑같거든요. 따라서 빨간 공 1개, 2개는 아무런 공 묶음에다 집어 넣어도 됩니다. 따라서 경우의 수는 1이네요.

흰 공을 두 개 받는다면 나머지에 흰 공 1개, 빨간 공 5개를 주면 됩니다. 그런데 이건 불가능하죠. 흰 공이 하나만 있으니까 흰 공을 받지 못한 사람은 공의 색의 종류가 1이 됩니다. 흰 공 세 개도 마찬가지이구요.

다음으로 빨간 공을 받는 경우로 가봅시다. 빨간 공을 하나만 받는다면 나머지에 흰 공 3개, 빨간 공 4개를 주면 됩니다. 빨간 공, 흰 공 1개씩은 받아야 하니까 흰 공 1개, 빨간 공 2개를 나눠주면 되겠네요. 빨간 공 1개, 흰 공 1개가 들어 있는 공 묶음 두 개는 구별이 안 되니까 흰 공은 아무런 공 묶음에다 집어 넣으면 됩니다. 경우의 수는 1입니다. 이제 공 묶음은 구별이 됩니다.
그러면 빨간 공 2개를 배열하는 경우는 $0+2$, $1+1$가 됩니다. $0+2$의 경우 구별이 되는 공 묶음 두 개 중 어느 것에 집어 넣을지도 결정해야 하니까 경우의 수는 2입니다. $1+1$은 그냥 1이구요.
다만 흰 공 1개와 빨간 공 2개가 모두 같은 주머니로 들어가면 총 개수가 5개가 되어 A와 개수가 같아지죠?

이것만 빼주면 경우의 수는 2입니다.

빨간 공을 두 개 받는다면 나머지에 흰 공 3개, 빨간 공 3개를 주면 됩니다. 이 경우 빨간 공, 흰 공 1개씩은 주고 시작하면 흰 공 1개, 빨간 공 1개를 주면 되겠네요. 빨간 공 1개, 흰 공 1개가 들어 있는 공 묶음 두 개는 구별이 안 되니까 흰 공 먼저 주면 경우의 수는 1입니다. 이제 빨간 공은 구별이 가능해진 두 묶음 중에서 어느 것에 들어갈지 정하면 되죠. 경우의 수는 2입니다. 흰 공과 빨간 공이 같은 묶음으로 들어간다고 해도 총 4개라 괜찮네요.

빨간 공을 세 개 받는다면 나머지에 흰 공 3개, 빨간 공 2개를 주면 됩니다. 이 경우 빨간 공, 흰 공 1개씩은 주고 시작하면 흰 공 1개만 주면 됩니다. 빨간 공 1개, 흰 공 1개가 들어 있는 공 묶음 두 개는 구별이 안 되니까 경우의 수는 1입니다.

빨간 공을 네 개 이상은 받을 수 없습니다. 그러면 총 5개를 넘으니까 A의 공 개수를 넘죠?
구별이 가능해진 공 묶음을 세 명에게 배열하는 건 $3! = 6$이죠. 따라서 $6 \times (1+2+2+1) = 36$입니다.

2-2) 7개일 때

총 14개 중에 7개를 제외한 7개를 나머지에게 나누어 줄 수 있는 경우는 223입니다.
검은 공 4개, 흰 공 5개 중에서 7개를 고를 때 검은 공이 흰 공보다 더 많도록 고르는 경우는 검은 공, 흰 공 순서로 (4, 3)이 가능합니다.

그런데 이건 불가능합니다. A에게 주고 나면 흰 공 2개, 빨간 공 5개가 남는데 남은 사람은 3명이에요.
2명에게 흰 공을 각각 하나씩 준다고 해도 나머지 한 사람은 흰 공을 받을 수 없습니다. 그러면 자동적으로 색의 종류가 1개가 되네요.

따라서 구하는 경우의 수는 $15 + 36 = 51$입니다.