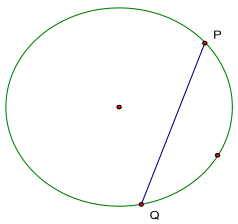
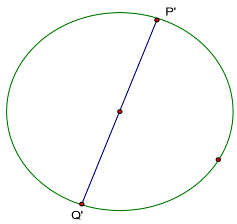
오르비 기출해설대회 - 귀여운울림소리
수학B 2014년도 수능

29.
평면 $y=4$를 m_1, 평면 $y+\sqrt{3}z+8=0$을 m_2라 하자.
$PQ=l$, PQ와 m_1이 이루는 각을 θ_1, PQ와 m_2가 이루는 각을 θ_2라 하면
$2PQ^2-P_1Q_1^2-P_2Q_2^2=2l^2-(l\cos\theta_1)^2-(l\cos\theta_2)^2=l^2(\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2)$
if $l<4$, PQ와 평행하고 구의 중심을 지나는 직선이 구와 만나는 점을 P', Q'이라 하면(아래 그림 참조) θ_1, θ_2는 불변하고 $l=4$가 되므로 구하고자 하는 값이 더 커진다. 결국, 우리는





PQ가 구의 중심을 지나는 경우, 즉 $l=4$인 경우만 생각하면 된다는 것을 알 수 있다.

이제 $\overrightarrow{PQ}=(a,b,c)$ 라고 놓고 열심히 계산하면 된다. (단, $a^2+b^2+c^2=16$)

m_1의 법선벡터는 $(0,1,0)$, m_2의 법선벡터는 $(0,1,\sqrt{3})$ 이니까
$\dfrac{(a,b,c)\bullet(0,1,0)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\times 1}=\dfrac{b}{4}=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta_1\right)=\sin\theta_1$ 마찬가지 방법으로 $\sin\theta_2=\dfrac{b+\sqrt{3}c}{8}$

$\therefore \sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2=\dfrac{5b^2+2\sqrt{3}bc+3c^2}{64}\le\dfrac{5b^2+(b^2+3c^2)+3c^2}{64}$

(by $AM\ge GM$, 등호는 $b^2=3c^2$일 때)

$=\dfrac{6(b^2+c^2)}{64}=\dfrac{6(16-a^2)}{64}\le\dfrac{96}{64}=\dfrac{3}{2}$ (단, 등호는 $a=0$일 때)

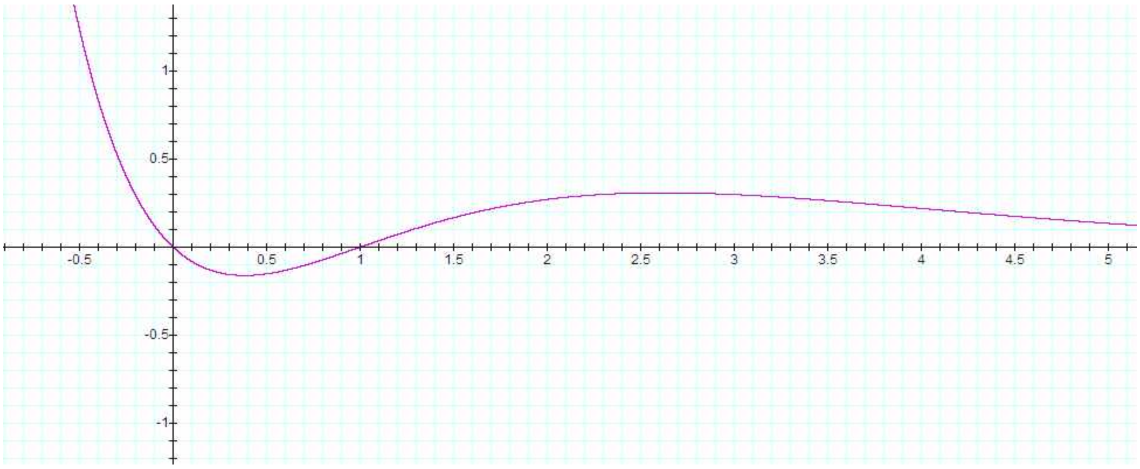
따라서 답은 $4^2\times\dfrac{3}{2}=24$

Comment) 중간에 산술기하부등식을 왜 저렇게 쓰냐고 물을 수 있는데, 주어진 조건 ($a^2+b^2+c^2=16$)을 어떻게 이용할 수 있을까 생각을 해보면 b^2과 c^2의 계수를 똑같이 맞추어주면 좋겠다.. 하는 feel이 옴.

30.
(가) 조건으로부터 $g''(1)=g''(4)=0$이다.
$g''=(f''-2f'+f)e^{-x}$ 인데 $e^{-x}>0$이므로 $f''(1)-2f'(1)+f(1)=f''(4)-2f'(4)+f(4)=0$
$f(x)=ax^2+bx+c$라 두면, $f''-2f'+f=ax^2+(b-4a)x+2a-2b+c$이고, 조건을 대입하면 $-a-b+c=0,\ 2a+2b+c=0$ 두 식을 얻는다. 이로부터, $b=-a, c=0$을 얻는다.
$\therefore g(x)=a(x^2-x)e^{-x}$
결국 $g(x)$의 그래프는 $x=0,1$에서 x축과 만나고, $x=1,4$에서 볼록성이 변한다.

$a<0$이면, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=0$이므로 그래프를 그려보면 아래와 같은 꼴이 된다.

$(0, k)$ $(k<0)$ 에서 접선을 3개나 그을 수 없음이 명백하다.
$a>0$이면 $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=0$이므로 그래프 개형은 아래와 같다.



$(0, k)$ $(k<0)$ 에서 일단 그래프의 $x<0$인 부분에 접선을 하나 그을 수 있음은 명백하다. 나머지 두 접선은 $0<x<1$인 부분과 $1<x<4$인 부분에서 생기면 된다. $0<x<1$인 부분에서 $g(x)$의 접선들을 생각해보자. 접선의 y절편은 $x=1$에 다가갈수록 작아진다. $1<x<4$인 부분에서도 생각해보면, 접선의 y절편은 $x=1$에 다가갈수록 작아진다. 결국 $x=1$에서의 $g(x)$의 접선의 y절편보다 $(0, k)$가 위쪽에 있으면 접선을 3개 그릴 수 있다는 것을 알 수 있다. 결국 $-1<k<0$이 주어진 범위이므로, $y=g'(1)(x-1)$이 $(0, -1)$을 지나면 된다.
$\therefore g'(1)=ae^{-1}=1$, $a=e$
$\therefore g(x)=e(x^2-x)e^{-x}$, $g(-2)\times g(4)=6e^3\times 12e^{-3}=72$

Comment) 그래프의 개형에서 접선을 어디에 그을 수 있는가를 직관적으로 빠르게 파악하는 것이 중요하다. 이를 위해서는 그래프의 개형을 그릴 때 볼록성, $\pm\infty$에서의 극한값, 축과 만나는 점들 등을 최대한 정확히 도시하는 것이 중요하다.

21. 주어진 식을 양변 미분하면(RHS가 미분가능한 꼴이므로, $LHS=f(x)$도 미분가능하다)

$f'(x)=\frac{\pi}{2}f(x+1)$

구하고자 하는 값에 $xf(x+1)$의 적분이 들어있으니까, 양변에 x를 곱해서 같은 꼴을 만든다.

$xf'(x)=\frac{\pi}{2}xf(x+1)$

이제 양변을 0부터 1까지 적분한다.

$\int_0^1 xf'(x)=\frac{\pi}{2}\int_0^1 xf(x+1)dx$ LHS는 딱 부분적분을 적용하기 좋은 꼴이다.

$\int_0^1 xf'(x)dx=[xf(x)]_0^1-\int_0^1 f(x)dx=f(1)-\int_0^1 f(x)dx$

$\int_0^1 f(x)dx$는 주어진 식에서 얻을 수 있다. 주어진 식에 $x=-1$을 대입하면

$f(-1)=\frac{\pi}{2}\int_1^0 f(t)dt=-\frac{\pi}{2}\int_0^1 f(t)dt$, $f(x)$가 기함수이므로 $f(-1)=-f(1)=-1$

$\therefore \int_0^1 f(t)dt=\frac{2}{\pi}$, $\int_0^1 xf'(x)dx=f(1)-\int_0^1 f(x)dx=1-\frac{2}{\pi}$

$\therefore \pi^2\int_0^1 xf(x+1)dx=\pi^2\times\frac{2}{\pi}\times(1-\frac{2}{\pi})=2(\pi-2)$ 답 1번.

Comment) 이런 문제는 계산하라는 식의 꼴을 만들어내는 것이 전부다. 자잘한 값을 알아내는 방법은, $\int_a^a F(t)dt=0$ 등을 이용하거나 이것저것 대입해볼 수밖에 없다. 조건식에 적분이 포함될 경우 무조건 미분을 하고 시작한다.

27.

$AP-FP=AP-(10-F'P)$ ($\because FP+F'P=2\times(\text{장축})=10$)

$=AP+F'P-10\geq AF'-10$ (삼각부등식)

$=1$

$\therefore AF'=11$, $F'=(-4,0)$이므로 $a^2+(-4)^2=11^2$

$\therefore a^2=105$

Comment) 이차곡선 문제에서는 이차곡선의 성질을 이용하지 않으면 어렵다. 근데 성질을 적용시키는 순간 껌이 된다. 이차곡선 각각의 성질을 잘 숙지해두자.

17.

조건 : (1) $AB+A^2B=E$ (2) $(A-E)^2+B^2=O$

(ㄱ) (1)에서 $(A+A^2)B=E \quad \therefore B^{-1}=A+A^2$으로 존재. (참)

(ㄴ) (1)에서 $AB(E+A)=E$ 이니까 A도 역행렬 존재, $(E+A)AB=E$도 성립.
$AB(E+A)=E$ 에서 $(E+A)AB=E$를 변끼리 빼면, $ABA-AAB=O$. $A(BA-AB)=O$
A의 역행렬이 존재하므로 $BA-AB=O$. (참)

(ㄷ) (2)에서 양변에 $(B^{-1})^2$을 곱하자. 단 $(A-E)^2$에는 $(A+A^2)^2$으로 바꾸어 곱해주자. 그러면, $(A-E)^2(A+A^2)^2+E=O \quad \therefore (A^3-A)^2+E=O$. (참)

답 5번.

Comment) 뭐 그냥 풀면 된다. 행렬 문제는 이것저것 하다보면 된다.