

1.

출제의도 : 행렬의 덧셈을 할 수 있는가?

$$\begin{aligned} A+B &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2+a & 0 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

행렬 $A+B$ 의 모든 성분의 합이 6이므로

$$2+a+3+(-3)=2+a=6$$

$$\therefore a=4$$

<답> ④

2.

출제의도 : 삼각함수의 배각공식을 이해하고 있는가?

$$\begin{aligned} \sec^2\theta &= 1 + \tan^2\theta = 1 + \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 \\ &= \frac{25+5}{25} = \frac{30}{25} \text{ 이므로} \end{aligned}$$

$$\cos^2\theta = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}$$

$$\therefore \cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$

$$= 2 \times \frac{5}{6} - 1 = \frac{2}{3}$$

<답> ③

3.

출제의도 : 좌표공간의 두 점의 내분점을 구할 수 있는가?

선분 AB를 3:2로 내분하는 점을 P라 하면

$$P\left(\frac{-6+2a}{5}, \frac{10}{5}, 5\right) \text{ 이므로}$$

$$\left(\frac{-6+2a}{5}, \frac{10}{5}, 5\right) = (0, b, 5)$$

$$\frac{-6+2a}{5} = 0 \text{ 에서 } a=3$$

$$\frac{10}{5} = b \text{ 에서 } b=2$$

$$\therefore a+b=3+2=5$$

<답> ⑤

4.

출제의도 : 등차수열의 일반항을 구할 수 있는가?

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$a_3 = 2 + 2d, \quad a_9 = 2 + 8d \text{ 이므로}$$

$$a_9 = 3a_3 \text{ 에서}$$

$$2 + 8d = 3(2 + 2d)$$

$$2 + 8d = 6 + 6d$$

$$2d = 4$$

$$d = 2$$

$$\therefore a_5 = 2 + 4d = 2 + 8 = 10$$

<답> ①

5.

출제의도 : 확률의 성질을 이해하고 있는가?

$$A^c \cup B^c = (A \cap B)^c \text{ 에서}$$

$$P(A^c \cup B^c) = P((A \cap B)^c)$$

$$= 1 - P(A \cap B) = \frac{4}{5}$$

$$\therefore P(A \cap B) = \frac{1}{5}$$

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$=P(A)-\frac{1}{5}=\frac{1}{4}$$

$$\therefore P(A)=\frac{1}{5}+\frac{1}{4}=\frac{9}{20}$$

$$\therefore P(A^c)=1-P(A)=1-\frac{9}{20}=\frac{11}{20}$$

<답> ②

6.

출제의도 : 두 직선이 수직일 조건을 알고 있는가?

직선 $x=4-y=z-1$ 의 방향벡터를 \vec{u} 라 하면

$$\vec{u}=(1, -1, 1)$$

$$\text{또, } \overrightarrow{AB}=(-5, -5, 3-a)$$

$$\vec{u} \perp \overrightarrow{AB} \text{이므로}$$

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} = -5+5+3-a=0 \text{에서 } a=3$$

<답> ①

7.

출제의도 : 삼각함수의 합성을 이용하여 최댓값을 구할 수 있는가?

$$f(x)=2\cos^2x+k\sin 2x-1$$

$$=2 \times \frac{1+\cos 2x}{2}+k\sin 2x-1$$

$$=k\sin 2x+\cos 2x$$

$$=\sqrt{k^2+1} \sin(2x+\alpha)$$

$$(\text{단, } \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}, \cos \alpha = \frac{k}{\sqrt{k^2+1}})$$

따라서, 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $\sqrt{k^2+1}$ 이므로

$$\sqrt{k^2+1}=\sqrt{10}, k^2=9$$

$$k>0 \text{이므로 } k=3$$

<답> ③

8.

출제의도 : 포물선의 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

두 직선 l_1, l_2 의 기울기

m_1, m_2 ($m_1 < m_2$)가 방정식

$$2x^2-3x+1=0 \text{의 두 근이므로}$$

$$2x^2-3x+1=(2x-1)(x-1)=0 \text{에서}$$

$$x=\frac{1}{2} \text{ 또는 } x=1$$

$$\therefore m_1=\frac{1}{2}, m_2=1$$

즉, 두 직선 l_1, l_2 의 기울기는 각각 $\frac{1}{2}$,

2라고 할 수 있다.

두 직선 l_1, l_2 는 포물선

$$y^2=8x=4 \cdot 2x \text{의 접선이므로}$$

(i) 기울기 $m_1=\frac{1}{2}$ 인 접선 l_1 의 방정식은

$$y=\frac{1}{2}x+\frac{2}{1}=\frac{1}{2}x+4 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

(ii) 기울기 $m_2=1$ 인 접선 l_2 의 방정식은

$$y=x+2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

두 직선의 방정식 ㉠, ㉡을 연립하면

$$\frac{1}{2}x+4=x+2, \frac{1}{2}x=2$$

$$\therefore x=4$$

따라서 구하는 교점의 x 좌표는 4이다.

<답> ④

9.

출제의도 : 중복조합을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가?

숫자 1, 2, 3의 개수를 각각 a, b, c 라 하자.

(i) 숫자 4가 택해지지 않은 경우
구하는 경우의 수는 $a+b+c=5$ 를 만족시키는 음이 아닌 정수의 순서쌍 (a, b, c) 의 개수이므로

$${}_3H_5 = {}_7C_5 = {}_7C_2 = 21$$

(ii) 숫자 4가 한 개 택해지는 경우
구하는 경우의 수는 $a+b+c=4$ 를 만족시키는 음이 아닌 정수의 순서쌍 (a, b, c) 의 개수이므로

$${}_3H_4 = {}_6C_4 = {}_6C_2 = 15$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는
 $21+15=36$

<답> ④

10.

출제의도 : 함수의 그래프를 이용하여
분수부등식의 해를 구할 수 있는가?

$$\frac{g(x)}{f(x)} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{g(x)-f(x)}{f(x)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow f(x)\{g(x)-f(x)\} \leq 0, f(x) \neq 0$$

$$(i) f(x) < 0, g(x) \geq f(x)$$

일 때, $-2 < x < 0, 2 < x \leq 4$

이므로 정수 x 의 값은 $-1, 3, 4$ 이다.

$$(ii) f(x) > 0, g(x) \leq f(x)$$

일 때, $-4 \leq x \leq \alpha, \beta \leq x < 2$

이고, $-4 < \alpha < -3, 0 < \beta < 1$ 이므로

정수 x 의 값은 $-4, 1$ 이다.

(i), (ii)에 의하여 구하는 정수 x 의
개수는 5이다.

<답> ⑤

11.

출제의도 : 조건을 만족시키는 일반항
 $\{a_n\}$ 을 구할 수 있는가?

모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$ 은

$$a_1 = 10,$$

$$(a_{n+1})^n = 10(a_n)^{n+1} \quad (n \geq 1) \dots\dots \textcircled{1}$$

식 $\textcircled{1}$ 의 양변에 상용로그를 취하면

$$n \log a_{n+1} = (n+1) \log a_n + 1$$

이다. 양변을 $n(n+1)$ 로 나누면

$$\frac{\log a_{n+1}}{n+1} = \frac{\log a_n}{n} + \frac{1}{n(n+1)}$$

이다.

$$b_n = \frac{\log a_n}{n} \text{이라 하면}$$

$$b_1 = 1 \text{이고 } b_{n+1} = b_n + \frac{1}{n(n+1)} \text{이다.}$$

$$b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{n(n+1)} \right)$$

$$= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$= 1 + \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right)$$

$$= 1 + 1 - \frac{1}{n} = \frac{2n-1}{n}$$

수열 $\{b_n\}$ 의 일반항을 구하면

$$b_n = \frac{2n-1}{n}$$

이므로

$$\log a_n = n \times \frac{2n-1}{n} \left(\because b_n = \frac{\log a_n}{n} \right)$$

이다. 그러므로 $a_n = 10^{n \times \frac{2n-1}{n}}$ 이다.

따라서

$$f(n) = \frac{1}{n(n+1)}, \quad g(n) = \frac{2n-1}{n}$$

이므로

$$f(4) = \frac{1}{20}, \quad g(10) = \frac{19}{10} \text{이다.}$$

$$\therefore \frac{g(10)}{f(4)} = \frac{\frac{19}{10}}{\frac{1}{20}} = 38$$

<답> ①

12.

출제의도 : 함수가 연속일 조건을 이용하여 극한값을 구할 수 있는가?

$f(x) = x^2 + ax + b$ 로 놓으면

$$f(x)g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + ax + b}{\ln(x+1)} & (x \neq 0, x > -1) \\ 8b & (x = 0) \end{cases}$$

함수 $f(x)g(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + ax + b}{\ln(x+1)} = 8b$$

(i) $x \rightarrow 0$ 일 때, (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉, $b=0$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + ax}{\ln(x+1)} = 0 \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+a}{\frac{\ln(x+1)}{x}} = \frac{a}{1} = 0 \text{이므로 } a=0$$

(i), (ii)에서 $f(x) = x^2$

$$\therefore f(3) = 3^2 = 9$$

<답> ②

13.

출제의도 : 정적분을 활용하여 회전체의 부피를 구할 수 있는가?

직선 $y=x-1$ 과 쌍곡선 $x^2 - 2y^2 = 1$ 의 교점의 좌표를 구하면

$$x^2 - 2(x-1)^2 = 1$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0, \quad (x-1)(x-3) = 0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=3$$

따라서, 교점의 좌표는 $(1, 0), (3, 2)$ 이다.

직선의 방정식 $x-y-1=0$ 에서

$$x = y+1$$

쌍곡선의 방정식 $x^2 - 2y^2 = 1$ 에서

$$x^2 = 2y^2 + 1$$

이므로 구하는 회전체의 부피 V 는

$$V = \pi \int_0^2 (y+1)^2 dy - \pi \int_0^2 (2y^2 + 1) dy$$

$$= \pi \int_0^2 \{(y^2 + 2y + 1) - (2y^2 + 1)\} dy$$

$$= \pi \int_0^2 (-y^2 + 2y) dy$$

$$= \pi \left[-\frac{y^3}{3} + y^2 \right]_0^2$$

$$= \pi \left(-\frac{8}{3} + 4 \right)$$

$$= \frac{4}{3}\pi$$

<답> ③

14.

출제의도 : 회전변환에 의하여 옮겨진 직선의 방정식을 구할 수 있는가?

쌍곡선 $x^2 - 2y^2 = 1$, $x^2 - \frac{y^2}{\frac{1}{2}} = 1$ 에서

$$c^2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore c = -\frac{\sqrt{6}}{2} \quad (\because c < 0)$$

$$\therefore F\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, 0\right)$$

직선 l 위에 있는 점 (x, y) 가 원점을 중심으로 θ 만큼 회전한 회전변환에 의하여 옮겨진 점을 (x', y') 이라 하면

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

이므로

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\therefore x = \cos\theta \cdot x' + \sin\theta \cdot y',$$

$$y = -\sin\theta \cdot x' + \cos\theta \cdot y'$$

이 식을 직선 l 의 방정식 $x - y - 1 = 0$ 에 대입하면

$$(\cos\theta x' + \sin\theta y') - (-\sin\theta x' + \cos\theta y') - 1 = 0$$

$$(\cos\theta + \sin\theta)x' + (\sin\theta - \cos\theta)y' - 1 = 0$$

.....㉠

이때 직선 ㉠이 쌍곡선의 초점

$$F\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, 0\right) \text{을 지나므로}$$

$$(\cos\theta + \sin\theta)\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\right) - 1 = 0$$

$$\therefore \sin\theta + \cos\theta = -\frac{2}{\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{6}}{3} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

㉡의 양변을 제곱하면

$$(\sin\theta + \cos\theta)^2 = 1 + 2\sin\theta\cos\theta$$

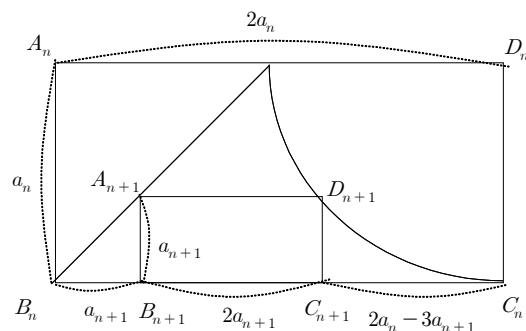
$$= 1 + \sin 2\theta = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \sin 2\theta = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$$

<답> ④

15.

출제의도 : 반복되는 도형에서의 규칙을 찾아 넓이의 극한값을 구할 수 있는가?



직사각형 $A_n B_n C_n D_n$ 의 세로의 길이를 a_n 이라 하면 직사각형

$A_{n+1} B_{n+1} C_{n+1} D_{n+1}$ 의 세로의 길이는

a_{n+1} 이고 $\overline{B_n B_{n+1}} = \overline{A_{n+1} B_{n+1}}$ 이므로

$$\overline{C_{n+1} C_n} = 2a_n - 3a_{n+1}$$

또한, 점 D_n 을 좌표평면 위의 원점에 놓고 직사각형 $A_n B_n C_n D_n$ 의 가로와 세로를 x 축, y 축에 평행하게 놓으면 점 $D_{n+1}(-2a_n + 3a_{n+1}, a_{n+1} - a_n)$ 은

원 $x^2 + y^2 = a_n^2$ 위에 놓이게 된다.

$$(-2a_n + 3a_{n+1})^2 + (a_{n+1} - a_n)^2 = a_n^2$$

$$5a_{n+1}^2 - 7a_{n+1}a_n + 2a_n^2 = 0$$

$$(5a_{n+1} - 2a_n)(a_{n+1} - a_n) = 0$$

$$\therefore a_{n+1} = \frac{2}{5}a_n \quad (\because a_{n+1} < a_n)$$

따라서, 닢음비가 $\frac{2}{5}$ 이므로 닢이의 비

는 $\frac{4}{25}$ 이고

$$S_1 = 2 \times \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \right) = \frac{\pi}{2} - 1$$

에서

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{\frac{\pi}{2} - 1}{1 - \frac{4}{25}} = \frac{25}{21} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right)$$

<답> ③

16.

출제의도 : 확률밀도함수의 성질을 이용하여 연속확률변수의 평균을 구할 수 있는가?

$$P(0 \leq X \leq a) = 1 \text{ 이므로}$$

$$ka^2 = 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

확률변수 X 의 확률밀도함수를 $f(x)$ 라 하면

$$P(0 \leq X \leq x) = \int_0^x f(t) dt = kx^2$$

등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = 2kx$$

$$\therefore E(X) = \int_0^a xf(x) dx$$

$$= \int_0^a 2kx^2 dx$$

$$= \left[\frac{2}{3} kx^3 \right]_0^a$$

$$= \frac{2}{3} ka^3 = 1$$

$$\therefore ka^3 = \frac{3}{2} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \div \textcircled{1} \text{에서 } a = \frac{3}{2}$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } \frac{9}{4}k = 1$$

$$\therefore k = \frac{4}{9}$$

<답> ②

17.

출제의도 : 주어진 행렬의 조건을 이용하여 참, 거짓을 판단할 수 있는가?

$$\neg. AB + A^2B = (A + A^2)B = E \text{ 이므로}$$

$$B^{-1} = A + A^2 \quad (\text{참})$$

$$\neg. AB + A^2B = A(B + AB) = E$$

$$\therefore A^{-1} = B + AB$$

따라서,

$$A^{-1}B^{-1} = E + A, \quad B^{-1}A^{-1} = E + A$$

$$\text{에서 } A^{-1}B^{-1} = B^{-1}A^{-1} \text{ 이므로}$$

$$(A^{-1}B^{-1})^{-1} = (B^{-1}A^{-1})^{-1}$$

$$BA = AB \quad (\text{참})$$

$$\neg. (A - E)^2 + B^2 = O \text{ 에서}$$

$$B^2 = -A^2 + 2A - E$$

$$AB + A^2B = E \text{ 에서}$$

$$B = AB^2 + A^2B^2$$

$$= A(-A^2 + 2A - E) + A^2(-A^2 + 2A - E)$$

$$=-A^4+A^3+A^2-A$$

$$=-(A^3-A)(A-E)$$

따라서, $(A+A^2)B=E$ 이므로

$$(A+A^2)\{-(A^3-A)(A-E)\}=E$$

$$(A^3-A)^2=-E$$

$$(A^3-A)^2+E=O \text{ (참)}$$

따라서, 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 이다.

<답> ⑤

18.

출제의도 : 수열의 극한의 성질을 이용하여 극한값을 구할 수 있는가?

$$(i) a_1 + \pi < a_2$$

$$a_2 + \pi < a_3$$

$$a_3 + \pi < a_4$$

⋮

$$a_{n-1} + \pi < a_n$$

위의 식을 변끼리 더하면

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}) + (n-1)\pi$$

$$< (a_2 + a_3 + \cdots + a_n)$$

$$a_1 + (n-1)\pi < a_n$$

$$\frac{\pi}{4} + (n-1)\pi < a_n$$

$$\frac{\pi}{4n} + \frac{n-1}{n}\pi < \frac{a_n}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{4n} + \frac{n-1}{n}\pi \right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}$$

$$\therefore \pi \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}$$

$$(ii) a_n < (n-1)\pi + \frac{\pi}{2} \text{ 이므로}$$

$$a_n < \frac{2n-1}{2}\pi$$

$$\frac{a_n}{n} < \frac{2n-1}{2n}\pi$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-1}{2n}\pi \right)$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} \leq \pi$$

$$(i), (ii) \text{에서 } \pi \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} \leq \pi \text{ 이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \pi$$

<답> ④

19.

출제의도 : 좌표공간에서 구의 방정식을 구할 수 있는가?

구 S 의 반지름의 길이를 r , 중심의 좌표를 $C(a, b, c)$ 라 하자.

(단, $a > 0, b > 0, c > 0$)

구 S 가 x 축과 y 축에 접하는 점을 각각 A, B 라 하면

$$A(a, 0, 0), B(0, b, 0)$$

이고, $r = \overline{AC} = \overline{BC}$ 이므로

$$r^2 = b^2 + c^2 = a^2 + c^2$$

$$\therefore a = b \text{ (} \because a > 0, b > 0 \text{)}$$

따라서, 구 S 의 방정식은

$$(x-a)^2 + (y-a)^2 + (z-c)^2 = a^2 + c^2$$

... ㉠

으로 놓을 수 있다.

구 S 가 xy 평면과 만나서 생기는 원의 방정식은

$$(x-a)^2 + (y-a)^2 + (0-c)^2 = a^2 + c^2$$

$$(x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2$$

이고, 원의 넓이가 64π 이므로

$$a^2\pi = 64\pi, \quad a^2 = 64$$

$a > 0$ 이므로 $a = 8$

$a = 8$ 을 ㉠에 대입하면 구 S 의 방정식은

$$(x-8)^2 + (y-8)^2 + (z-c)^2 = 64 + c^2$$

... ㉡

구 S 가 z 축과 만나는 점의 z 좌표를 구하기 위해 ㉡에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$64 + 64 + (z-c)^2 = 64 + c^2$$

$$(z-c)^2 = c^2 - 64$$

$$z = c \pm \sqrt{c^2 - 64}$$

구 S 가 z 축과 만나는 두 점 사이의 거리가 8이므로

$$(c + \sqrt{c^2 - 64}) - (c - \sqrt{c^2 - 64}) = 8$$

$$\sqrt{c^2 - 64} = 4, \quad c^2 - 64 = 16$$

$$\therefore c^2 = 80$$

따라서, 구 S 의 반지름의 길이는

$$r = \sqrt{a^2 + c^2} = \sqrt{64 + 80}$$

$$= \sqrt{144} = 12$$

<답> ㉡

20.

출제의도 : 상용로그의 지표와 가수의 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

1보다 큰 실수 x 에 대해 $f(x), g(x)$ 는 $\log x$ 의 지표와 가수이므로

$\log x = f(x) + g(x)$ (단, $f(x)$ 는 정수,

$$0 \leq g(x) < 1)$$

이때 $3f(x) + 5g(x)$ 의 값이 10의 배수이므로

$3f(x) + 5g(x) = 10k$ (단, k 는 자연수)로 나타낼 수 있다.

또한, $f(x)$ 는 정수이므로

$5g(x) = 10k - 3f(x)$ 는 정수이고

$0 \leq g(x) < 1$ 이므로 $0 \leq 5g(x) < 5$ 에서

$5g(x) = 0, 1, 2, 3, 4$ 이어야 한다.

한편, $3f(x) = 10k - 5g(x)$ 이므로

조건들을 만족시키는 x 의 값은 자연수 k 이 값이 작을수록 $5g(x)$ 의 값이 클수록 작아진다.

따라서 x 의 값을 작은 수부터 구하려면 자연수 k 는 작은 순서대로, $5g(x)$ 의 값은 큰 순서대로 구하면 된다.

(i) $k = 1, 5g(x) = 4$ 일 때,

$$3f(x) = 6 \text{이므로 } f(x) = 2$$

$$\therefore \log x = 2 + \frac{4}{5} = \frac{14}{5}$$

$$\text{즉 } x = 10^{\frac{14}{5}}$$

(ii) $k = 1, 5g(x) = 1$ 일 때,

$$3f(x) = 9 \text{이므로 } f(x) = 3$$

$$\therefore \log x = 3 + \frac{1}{5} = \frac{16}{5}$$

$$\text{즉 } x = 10^{\frac{16}{5}}$$

(iii) $k = 2, 5g(x) = 2$ 일 때,

$$3f(x) = 18 \text{이므로 } f(x) = 6$$

$$\therefore \log x = 6 + \frac{2}{5} = \frac{32}{5}$$

$$\text{즉 } x = 10^{\frac{32}{5}}$$

(iv) $k = 3, 5g(x) = 3$ 일 때,

$$3f(x) = 27 \text{이므로 } f(x) = 9$$

$$\therefore \log x = 9 + \frac{3}{5} = \frac{48}{5}$$

$$\text{즉 } x = 10^{\frac{48}{5}}$$

(v) $k=3$, $5g(x)=0$ 일 때,

$$3f(x)=30 \text{ 이므로 } f(x)=10$$

$$\therefore \log x = 10$$

$$\text{즉 } x = 10^{10}$$

(vi) $k=4$, $5g(x)=4$ 일 때,

$$3f(x)=36 \text{ 이므로 } f(x)=12$$

$$\therefore \log x = 12 + \frac{4}{5} = \frac{64}{5}$$

$$\text{즉 } x = 10^{\frac{64}{5}}$$

따라서 x 의 값을 작은 수부터 크기순으로 나열하면

$$10^{\frac{14}{5}}, 10^{\frac{16}{5}}, 10^{\frac{32}{5}}, 10^{\frac{48}{5}}, 10^{10}, 10^{\frac{64}{5}}, \dots$$

이므로

$$a = 10^{\frac{16}{5}}, \quad b = 10^{\frac{64}{5}}$$

$$\therefore \log ab = \log a + \log b$$

$$= \frac{16}{5} + \frac{64}{5}$$

$$= 16$$

<답> ⑤

21.

출제의도 : 주어진 조건과 부분적분법을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

$$f(x) = \frac{\pi}{2} \int_1^{x+1} f(t) dt \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

①의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = \frac{\pi}{2} f(x+1) \text{ 이므로}$$

$$f(x+1) = \frac{2}{\pi} f'(x)$$

$$\pi^2 \int_0^1 x f(x+1) dx = \pi^2 \int_0^1 \left\{ x \times \frac{2}{\pi} f'(x) \right\} dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 x f'(x) dx$$

$$\int_0^1 x f'(x) dx \text{에서 } u=x, v'=f'(x) \text{로 놓}$$

으면 $u'=1, v=f(x)$ 이므로

$$\int_0^1 x f'(x) dx = [x f(x)]_0^1 - \int_0^1 f(x) dx$$

$$= f(1) - \int_0^1 f(x) dx$$

한편, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 원점에 대하여 대칭이므로 $f(1)=1$ 에서 $f(-1)=-1$ 이다.

$$-1 = f(-1) = \frac{\pi}{2} \int_1^0 f(t) dt \text{에서}$$

$$\int_0^1 f(t) dt = \frac{2}{\pi}$$

$$\therefore \pi^2 \int_0^1 x f(x+1) dx$$

$$= 2\pi \times \left\{ f(1) - \int_0^1 f(x) dx \right\}$$

$$= 2\pi \times \left(1 - \frac{2}{\pi} \right)$$

$$= 2(\pi - 2)$$

<답> ①

22.

출제의도 : 지수함수의 도함수를 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

$$f(x) = 5e^{3x-3}$$

$$f'(x) = 5e^{3x-3} \times 3 = 15e^{3x-3}$$

$$\therefore f'(1) = 15e^0 = 15 \times 1 = 15$$

<답> 15

23.

출제의도 : 조건부 확률을 구할 수 있는가?

참가한 회원 50명 중에서 임의로 선택한 한 명이 여성인 사건을 A , 마라톤에서 완주하였을 사건을 B 라 하면 구하는 확률은

$$\begin{aligned} p &= P(B|A) \\ &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \\ &= \frac{\frac{9}{50}}{\frac{15}{50}} \\ &= \frac{9}{15} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

$$\therefore 100p = 100 \times \frac{3}{5} = 60$$

<답> 60

24.

출제의도 : 무리방정식의 근을 구할 수 있는가?

$$\sqrt{2x^2 - 6x} = \frac{1}{2}(2x^2 - 6x) - 4 \text{에서}$$

$$\sqrt{2x^2 - 6x} = t \quad (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$t = \frac{1}{2}t^2 - 4$$

$$t^2 - 2t - 8 = (t+2)(t-4) = 0$$

$$t = -2 \text{ 또는 } t = 4$$

$$t > 0 \text{이므로 } t = 4$$

$$\sqrt{2x^2 - 6x} = 4 \text{에서 } 2x^2 - 6x - 16 = 0$$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하

$$\text{여 } k = -8 \text{이므로 } k^2 = (-8)^2 = 64$$

<답> 64

25.

출제의도 : 상용로그의 성질을 이용하여 실생활의 문제를 해결할 수 있는가?

$x = R^{\frac{27}{23}}$ 일 때의 물의 속력을 v_1 이라 하면

$$v_1 = \frac{1}{2}v_c \text{이므로}$$

$$\frac{v_c}{v_1} = 1 - k \log \frac{R^{\frac{27}{23}}}{R} = 2$$

$$k \log R^{\frac{4}{23}} = -1, \quad \frac{4}{23} k \log R = -1$$

$$\therefore k \log R = -\frac{23}{4} \quad \dots \textcircled{1}$$

$x = R^a$ 일 때의 물의 속력을 v_2 라 하면

$$v_2 = \frac{1}{3}v_c \text{이므로}$$

$$\frac{v_c}{v_2} = 1 - k \log \frac{R^a}{R} = 3$$

$$k \log R^{a-1} = -2, \quad (a-1)k \log R = -2 \dots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$(a-1) \times \left(-\frac{23}{4}\right) = -2$$

$$a-1 = \frac{8}{23}$$

$$\therefore a = \frac{31}{23}$$

$$\therefore 23a = 31$$

<답> 31

26.

출제의도 : 표본비율을 이용하여 모비율을 추정할 수 있는가?

표본의 크기가 n 일 때 중앙공원을 이용한 경험에 있는 주민의 표본비율은 $\bar{p} = 0.8$ 이므로 중앙공원을 이용한 경험에 있는 주민의 모비율 p 를 신뢰도 95%로 추정한 신뢰구간은

$$\left[0.8 - 1.96 \times \sqrt{\frac{0.8 \times 0.2}{n}}, 0.8 + 1.96 \times \sqrt{\frac{0.8 \times 0.2}{n}} \right]$$

이다. 그러므로

$$b - a = 2 \times 1.96 \times \sqrt{\frac{0.8 \times 0.2}{n}} = 0.098 \text{에서}$$

$$\sqrt{n} = \frac{2 \times 1.96 \times 0.4}{0.098} = 16$$

따라서 $n = 256$

<답> 256

27.

출제의도 : 타원의 정의를 이용하여 조건을 만족시키는 상수의 값을 구할 수 있는가?

타원의 정의에 의하여

$$\overline{FP} + \overline{F'P} = 10 \text{이므로 } \overline{FP} = 10 - \overline{F'P}$$

$$\overline{AP} - \overline{FP} = \overline{AP} - (10 - \overline{F'P})$$

$$= \overline{AP} + \overline{F'P} - 10$$

$$\geq \overline{AF'} - 10$$

$$\overline{AP} - \overline{FP} \text{의 최솟값이 } 1 \text{이므로 } \overline{AF'} = 11$$

$$F'(-4, 0) \text{이므로}$$

$$\overline{AF'} = \sqrt{16 + a^2} = 11$$

$$16 + a^2 = 121 \text{에서 } a^2 = 105$$

<답> 105

28.

출제의도 : 도형의 넓이를 삼각함수로 나타내어 삼각함수의 극한값을 계산할 수 있는가?

$$\overline{AC} = x \text{라 하면}$$

$$\overline{AC} = \overline{BC} = \overline{AD} = \overline{AP} = x \text{이다.}$$

이등변삼각형 CAB에서

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{2}{x}$$

$$\therefore x = \frac{2}{\sin \frac{\theta}{2}}$$

따라서, $\triangle BDP$ 의 넓이 $S(\theta)$ 는

$$S(\theta) = \triangle ADP - \triangle ABP$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \sin 2\theta - \frac{1}{2} \times 4 \times x \sin 2\theta$$

$$= \frac{2 \sin 2\theta}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} - \frac{4 \sin 2\theta}{\sin \frac{\theta}{2}}$$

$$\therefore \lim_{\theta \rightarrow +0} (\theta \times S(\theta))$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow +0} \left(\frac{2\theta \sin 2\theta}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} - \frac{4\theta \sin 2\theta}{\sin \frac{\theta}{2}} \right)$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow +0} \left(2 \times \frac{\theta}{\sin \frac{\theta}{2}} \times \frac{\sin 2\theta}{\sin \frac{\theta}{2}} \right)$$

$$-\lim_{\theta \rightarrow +0} \left(4\theta \times \frac{\sin 2\theta}{\sin \frac{\theta}{2}} \right)$$

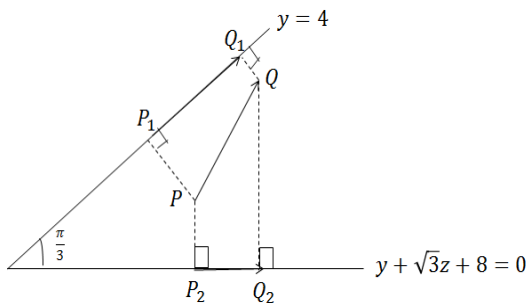
$$= 2 \times 2 \times 4 - 4 \times 0 \times 4$$

$$= 16$$

<답> 16

29.

출제의도 : 정사영을 이해하고 최댓값을 구할 수 있는가?



두 평면 $y=4$ 와 $y+\sqrt{3}z+8=0$ 의 법선 벡터를 각각 \vec{h}_1, \vec{h}_2 라 하면 두 평면이 이루는 예각의 크기 γ 는

$$\cos \gamma = \frac{|\vec{h}_1 \cdot \vec{h}_2|}{|\vec{h}_1| |\vec{h}_2|} = \frac{1}{2} \text{에서 } \gamma = \frac{\pi}{3}$$

따라서 벡터 \vec{PQ} 와 벡터 $\vec{P_1Q_1}$ 이 이루는 예각의 크기를 α , 벡터 \vec{PQ} 와 벡터 $\vec{P_2Q_2}$ 가 이루는 예각의 크기를 β 라 하

면 $\alpha + \beta = \frac{\pi}{3}$ 또는 $\alpha + \beta = \frac{2\pi}{3}$ 이다.

그러므로

$$\begin{aligned} & 2|\vec{PQ}|^2 - |\vec{P_1Q_1}|^2 - |\vec{P_2Q_2}|^2 \\ &= (|\vec{PQ}|^2 - |\vec{P_1Q_1}|^2) + (|\vec{PQ}|^2 - |\vec{P_2Q_2}|^2) \\ &= |\vec{PQ}|^2 (\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta) \\ &= |\vec{PQ}|^2 \left\{ 1 - \frac{1}{2} (\cos 2\alpha + \cos 2\beta) \right\} \end{aligned}$$

주어진 식은 $|\vec{PQ}|$ 의 값이 최대이고 $\cos 2\alpha + \cos 2\beta$ 의 값이 최소일 때 최댓값을 갖는다.

$\alpha + \beta = \frac{\pi}{3}$ 인 경우에

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha + \cos 2\beta &= \cos 2\alpha + \cos \left(\frac{2\pi}{3} - 2\alpha \right) \\ &= \frac{1}{2} \cos 2\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\alpha \\ &= \sin \left(2\alpha + \frac{\pi}{6} \right) \end{aligned}$$

이므로 주어진 식은 $|\vec{PQ}|=4$ 이고 $\cos 2\alpha + \cos 2\beta = -1$ 일 때 최댓값 24를 갖는다.

$\alpha + \beta = \frac{2\pi}{3}$ 인 경우도 마찬가지이다.

그러므로 최댓값은 24이다.

<답> 24

30.

출제의도 : 미분법을 이용하여 조건을 만족시키는 값을 구할 수 있는가?

$$g(x) = f(x)e^{-x}$$

$$g'(x) = \{f'(x) - f(x)\}e^{-x}$$

$$g''(x) = \{f''(x) - 2f'(x) + f(x)\}e^{-x}$$

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0) \text{로 놓으면}$$

$$g''(x) = \{ax^2 + (b-4a)x + 2a - 2b + c\}e^{-x}$$

조건 (가)에서 방정식 $g''(x)=0$ 의 두 근이 $x=1, x=4$ 이므로

이차방정식

$$ax^2 + (b-4a)x + 2a - 2b + c = 0 \text{은}$$

$x=1, x=4$ 를 두 근으로 갖는다.

근과 계수의 관계에서

$$\frac{4a-b}{a}=5, \quad \frac{2a-2b+c}{a}=4 \text{ 이므로}$$

$$b=-a, \quad c=0$$

$$\text{즉, } f(x)=ax^2-ax \text{ 이고,}$$

$$g(x)=(ax^2-ax)e^{-x}$$

한편, 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $T(t, g(t))$

에서 그은 접선의 방정식은

$$y-g(t)=g'(t)(x-t)$$

이 접선이 점 $(0, k)$ 를 지나므로

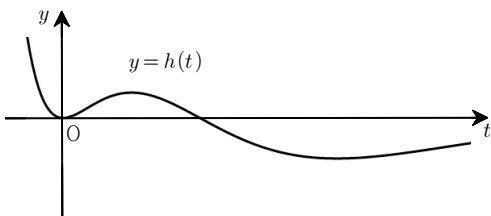
$$k-g(t)=g'(t)(0-t) \text{에서}$$

$$k=a(t^3-2t^2)e^{-t}$$

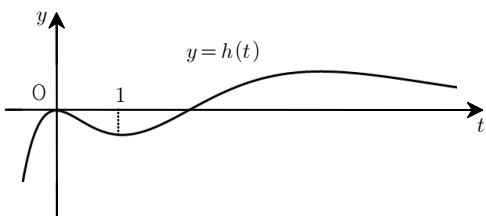
$h(t)=a(t^3-2t^2)e^{-t}$ 로 놓으면 조건 (나)

에 의하여 함수 $y=h(t)$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 k 의 값의 범위가 $-1 < k < 0$ 이어야 한다.

$a < 0$ 인 경우 함수 $y=h(t)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같고, 문제의 조건을 만족시키지 않는다.



$a > 0$ 인 경우 함수 $y=h(t)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같고, $h(1)=-1$ 이어야 한다.



$$h(1)=-ae^{-1}=-1 \text{에서 } a=e$$

$$\begin{aligned} \therefore g(-2) \times g(4) &= f(-2)e^2 \times f(4)e^{-4} \\ &= 72a^2e^{-2} \\ &= 72e^2e^{-2} = 72 \end{aligned}$$

<답> 72