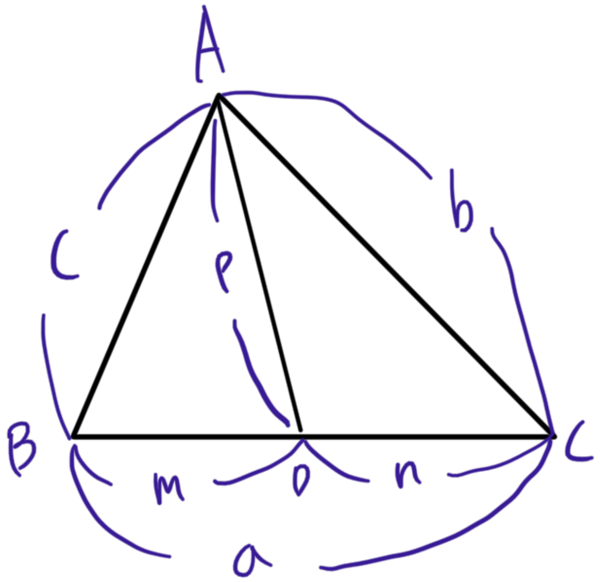
가끔 쓸모있는 도형 정리-Stewart's Theorem



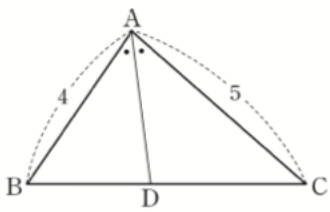
$$\Rightarrow \boxed{mb^2+nc^2 = a(mn+p^2)}$$

제2코사인법칙을 두 번 적용해야 하는 문제에서 두 번 계산하지 않고도 해결할 수 있음.

Ex) 2022학년도 수특 p.57

예제 2 코사인법칙

그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\overline{AC}=5$이고 $\cos A=\frac{1}{8}$인 삼각형 ABC가 있다. $\angle BAC$의 이등분선이 선분 BC와 만나는 점을 D라 할 때, 선분 AD의 길이는?



① 3 ② $\frac{19}{6}$ ③ $\frac{10}{3}$

④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{11}{3}$

풀이 전략 코사인법칙을 이용하여 선분 BC의 길이와 $\cos B$의 값을 구하고 삼각형의 닮음을 이용하여 선분 BD의 길이를 구한 후, 다시 코사인법칙을 이용하여 선분 AD의 길이를 구한다.

풀이 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos A=16+25-2\times4\times5\times\frac{1}{8}=36$$

이므로 $\overline{BC}=6$이고, $\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\cos B$이므로

$$\cos B=\frac{4^2+6^2-5^2}{2\times4\times6}=\frac{9}{16}$$

한편, 선분 AD가 $\angle BAC$의 이등분선이므로 $\overline{BD}:\overline{CD}=\overline{AB}:\overline{AC}=4:5$

즉, $\overline{BD}=6\times\frac{4}{9}=\frac{8}{3}$

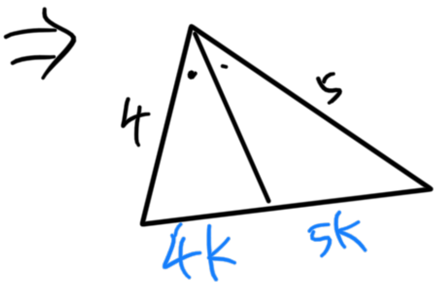
따라서 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AD}^2=\overline{AB}^2+\overline{BD}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{BD}\times\cos B=16+\frac{64}{9}-2\times4\times\frac{8}{3}\times\frac{9}{16}=\frac{100}{9}$$

이므로

$$\overline{AD}=\frac{10}{3}$$

답 ③



이므로

$$4k\cdot 5^2 + 5k\cdot 4^2 = 9k(20k^2 + \overline{AD}^2)$$

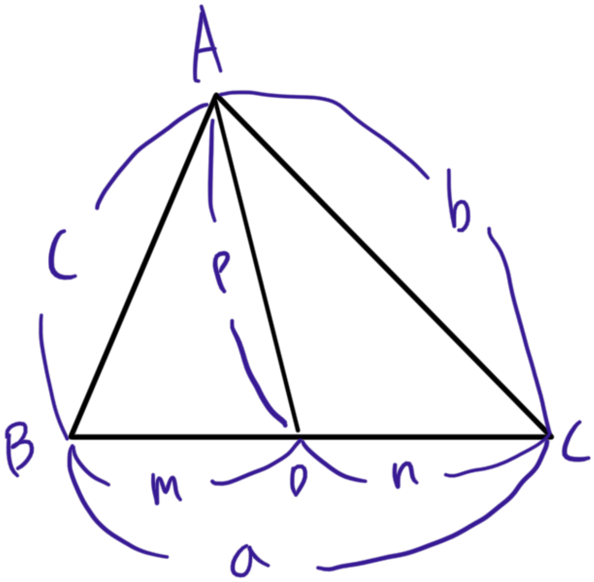
$$\therefore 20 - 20k^2 = \overline{AD}^2$$

$$(9k)^2 = 16+25-2\cdot 4\cdot 5\cdot \frac{1}{8} = 36.$$

$$k^2 = \frac{4}{9}$$

$$\therefore \overline{AD} = \frac{10}{3}$$

실질적인 계산은 별로 줄지 않았다고 보일 수 있으나, 알아둬서 나쁠 건 없다고 생각됨.
증명? 제2 코사인법칙을 두번 사용해서 코사인값을 제거하며 식을 정리.



$\triangle ABD$ 와 $\triangle ABC$. $\angle B$를 중심으로.

$$\cos\angle B = \frac{m^2+c^2-p^2}{2mc}$$

$$\cos\angle B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$

$$\Rightarrow \frac{m^2+c^2-p^2}{\cancel{2}m\cancel{c}} = \frac{a^2+c^2-b^2}{\cancel{2}a\cancel{c}}$$

$$am^2+ac^2-ap^2 = a^2m+mc^2-mb^2$$

$$mb^2+(a-m)c^2 = a^2m+ap^2-am^2$$

$$mb^2+nc^2 = a(am-m^2+p^2)$$

$$\therefore mb^2+nc^2 = a(mn+p^2)$$