확장된 이항계수

著 : 雀
sukita1729@gmail.com

Ⅰ. 이항계수와 다항계수

이항계수는 $(x+y)^n$의 전개식에서 각 항의 계수를 구하는 과정에서 등장하였다 :

$$(x+y)^n = \sum_{r=0}^{n} f(n,\, r) \cdot x^r y^{n-r}$$

여기서 $x^r y^{n-r}$의 계수 $f(n,\, r)$을 이항계수라 하고, 조합을 이용하면 이변수함수 f가 다음과 같음을 쉽게 알 수 있다.

$$f(n,\, r) := {}_n\mathrm{C}_r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

즉, 이항계수를 이용하면

$$n \in \mathbb{N},\ (x+y)^n = \sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r \cdot x^r y^{n-r}$$

이고, 이를 이항정리라 한다. 일반적으로 $y=1$일 때 다음과 같은 형태의 이항정리를 자주 사용한다.

$$(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r \cdot x^r$$

이를 확장하여 $\left[\sum_{r=1}^{k} a_r\right]^n$의 전개식에서 각 항의 계수를 다항계수라고 하며, 여기에서 파생된 다항정리는 다음과 같다.

$$n \in \mathbb{N},\ \left[\sum_{r=1}^{k} a_r\right]^n = \sum \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!} \cdot a_1^{n_1} a_2^{n_2} \cdots a_k^{n_k} = \sum \binom{n}{n_j}_{1 \le j \le k} \cdot \prod_{i=1}^{k} a_i^{n_i} \ \left(\sum_i n_i = n\right)$$

직관적인 이해를 위해 다음과 같이 $k=3$일 때의 다항정리를 생각해보면 편하다.

$$n \in \mathbb{N},\ (x+y+z)^n = \sum \frac{n!}{p!q!r!} x^p y^q z^r \ \ (n = p+q+r)$$

$\left[\sum_{r=1}^{k} a_r\right]^n$ 의 전개식에서 $a_1^{n_1} a_2^{n_2} \cdots a_k^{n_k}$의 계수를 생각할 때, 처음 곱해지는 $\sum_{r=1}^{k} a_r$에서 a_i $(1 \le i \le k)$를 선택할 수 있으므로 이러한 방법의 수를 모두 합하면 다음 등식이 성립함을 알 수 있다.

$$\binom{n}{n_j}_{1 \le j \le k} = \binom{n}{n_1,\ n_2,\ \cdots,\ n_k} = \sum_{i=1}^{k} \binom{n-1}{n_1,\ n_2,\ \cdots,\ n_{i-1},\ n_i - 1,\ n_{i+1},\ \cdots,\ n_k}$$

Ⅱ. 이항정리의 적용 예

이항정리를 이용하면 이항계수 또는 다항계수의 여러 성질들을 증명할 수 있다. 다음은 고등 교육과정 수준 내에서 잘 알려진 성질들로, 대부분 $(1+x)^n$의 전개식에 값을 대입하거나 이 전개식의 양변을 미분 또는 적분하여 얻을 수 있다. 비교적 간단한 내용에 해당하므로 자세한 증명은 독자들에게 맡기도록 하겠다.

(1) $\sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r = 2^n$

(2) $\sum_{r=0}^{n} (-1)^r \cdot {}_n\mathrm{C}_r = 0$

(3) $\sum_{r=0}^{[n/2]} {}_n\mathrm{C}_{2r} = \sum_{r=0}^{[(n-1)/2]} {}_n\mathrm{C}_{2r+1} = 2^{n-1}$

(4) $\sum_{r=0}^{n} ({}_n\mathrm{C}_r)^2 = {}_{2n}\mathrm{C}_n$

(5) $\sum_{k=0}^{n} {}_k\mathrm{C}_r = {}_{n+1}\mathrm{C}_{r+1}$

(6) $\sum_{k=0}^{r} {}_{n+k}\mathrm{C}_k = {}_{n+r+1}\mathrm{C}_r$

(7) $\sum_{r=0}^{n} r \cdot {}_n\mathrm{C}_r = n \cdot 2^{n-1}$

(8) $\sum_{r=0}^{n} r^2 \cdot {}_n\mathrm{C}_r = n(n+1) \cdot 2^{n-2}$

(9) $\sum_{r=0}^{n} \frac{{}_n\mathrm{C}_r}{r+1} = \frac{2^{n+1}}{n+1}$

(10) $\sum_{r=0}^{n} (-1)^{r+1} \cdot \frac{{}_n\mathrm{C}_r}{r+1} = 0$

한편 이항정리는 다음과 같이 정의된 수열 $\{e_n\}$이 위로 유계임을 보이는 데에도 사용된다. (수열이 위로 유계인 것은 어떤 $M \in \mathbb{R}$이 존재하여 $\forall i \in dom(e),\ e_i \le M$인 것이다.)

이항정리에 의해

$$e_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^k$$

이고 $k \geq 2$이므로

$$\binom{n}{k}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^k = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k\cdot k!} = \prod_{i=1}^{k}\frac{n-i+1}{ni} < \frac{1}{k!} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

이다. (단, $\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$)

$$\therefore \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^k < 2+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right) = 3-\frac{1}{n} < 3.$$

또한 수열 $\{e_n\}$은 단조증가 수열임을 보일 수 있으므로 단조수렴정리에 의해 수열 $\{e_n\}$은 수렴하고, 이를 자연상수 e라 한다. 즉 자연상수 e의 정의 중 하나는 다음과 같다.

$$e := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

조금 심화된 적분 테크닉을 결합하면 다음 등식도 증명이 가능하다.

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\cdot\frac{{}_n\mathrm{C}_i}{i} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

pf) $(1-x)^n$의 이항전개식

$$(1-x)^n = {}_n\mathrm{C}_0 - {}_n\mathrm{C}_1\cdot x^1 + {}_n\mathrm{C}_2\cdot x^2 - \cdots + {}_n\mathrm{C}_n\cdot(-1)^n\cdot x^n$$

에서

$$\frac{1-(1-x)^n}{x} = {}_n\mathrm{C}_1 - {}_n\mathrm{C}_2\cdot x^1 + {}_n\mathrm{C}_3\cdot x^2 - \cdots + {}_n\mathrm{C}_n\cdot(-1)^n\cdot x^{n-1}$$

이고, 양변을 0부터 1까지 정적분하면

$$\int_0^1\frac{1-(1-x)^n}{x}dx = \int_0^1\left[{}_n\mathrm{C}_1 - {}_n\mathrm{C}_2\cdot x^1 + {}_n\mathrm{C}_3\cdot x^2 - \cdots + {}_n\mathrm{C}_n\cdot(-1)^n\cdot x^{n-1}\right]dx,$$

$$\int_0^1 \left[{}_n\mathrm{C}_1 - {}_n\mathrm{C}_2 \cdot x^1 + {}_n\mathrm{C}_3 \cdot x^2 - \cdots + {}_n\mathrm{C}_n \cdot (-1)^n \cdot x^{n-1} \right] dx$$

$$= \left[{}_n\mathrm{C}_1 \cdot x^1 - \frac{{}_n\mathrm{C}_2}{2} \cdot x^2 + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot {}_n\mathrm{C}_n \cdot x^n \right]_0^1$$

$$= {}_n\mathrm{C}_1 - \frac{1}{2} \cdot {}_n\mathrm{C}_2 + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot {}_n\mathrm{C}_n = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \cdot \frac{{}_n\mathrm{C}_i}{i}$$

이다. 한편

$$\int_0^1 \frac{1-(1-x)^n}{x} dx = \int_0^1 \frac{1-t^n}{1-t} dt \quad (x = 1-t,\ dx = -dt)$$

$$= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} t^k dt = \left[x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n} \right]_0^1$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

이므로

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \cdot \frac{{}_n\mathrm{C}_i}{i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

이 성립한다. ■

Ⅲ. 확장된 이항계수

앞에서 $n \in \mathbb{N}$에 대하여

$$(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r \cdot x^r$$

임을 살펴보았다. 그렇다면 n이 실수일 때는 어떻게 될까? 실수 α에 대하여 $(1+x)^\alpha$을 전개할 수 있을까?

결론부터 말하자면, 가능하다. 하지만 $\alpha \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$인 경우 $(1+x)^\alpha$는 다항식이 아님이 알려져 있으므로 이는 무한급수로 전개되어야 한다. 즉,

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} g(\alpha, n) \cdot x^n$$

이고 여기서 x^n의 계수 $g(\alpha, n)$을 확장된 이항계수라 한다. $(1+x)^{\alpha}$를 위 식과 같이 전개할 수 있는 근거는 테일러 정리이고, 위 식은 실제로 $(1+x)^{\alpha}$의 맥클로린 급수($x=0$ 근방에서의 테일러 급수)와 동일하다. 이때 테일러 급수

$$T_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

을 이용하여 $(1+x)^{\alpha}$를 $a=0$에서 전개하면 확장된 이항계수 $g(\alpha, n)$은 다음과 같이 정의된다.

$$g(\alpha, n) := \begin{cases} \dfrac{1}{k!}\displaystyle\prod_{i=0}^{k-1}(\alpha - i) & (k \neq 0) \\ 0 & (k=0) \end{cases}$$

놀랍게도 확장된 이항계수는 이항계수 ${}_n\mathrm{C}_k$와 동일한 방법으로 정의된다. 즉 정의식의 형태가 이항계수 ${}_n\mathrm{C}_k$와 동일하므로, 이러한 이변수함수 g를 $\binom{n}{k}$라 표현한다.

(${}_n\mathrm{C}_k$와 $\binom{n}{k}$는 근본적으로 동일하지만, 후자는 n이 복소수도 될 수 있다.)

이를 다시 쓰면

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \cdot x^n$$

이며, 위 등식은 $|x|<1$일 때만 성립한다는 것이 알려져 있고 이를 이항급수라고 부른다. 일반적으로 테일러 급수에는 수렴반경이라는 것이 존재하여, 해당 무한급수가 수렴하는 x값에 대해서만 전개식이 성립한다. ($e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$의 경우 복소평면 전체에서 우변의 급수가 수렴한다.)

Ⅳ. 확장된 이항계수의 성질

확장된 이항계수의 대표적인 성질 세 가지는 다음과 같다. $n, k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$에 대하여,

(1) $\binom{-n}{k} = (-1)^k \cdot {}_n\mathrm{H}_k$

(2) $\binom{1/2}{k} = \dfrac{(-1)^{k-1}}{k \cdot 2^{2k-1}} \times {}_{2k-2}\mathrm{C}_{k-1}$ $(k > 1)$

(3) $\binom{\alpha}{k} = \binom{\alpha-1}{k-1} + \binom{\alpha-1}{k}$

pf)

(1) 확장된 이항계수의 정의에 의해

$$\binom{-n}{k} = \frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}(-n-i) = \frac{(-1)^k}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}(n+i) = (-1)^k \cdot \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

$$= (-1)^k \cdot {}_{n+k-1}\mathrm{C}_k = (-1)^k \cdot {}_n\mathrm{H}_k \ ■$$

(2) 확장된 이항계수의 정의에 의해

$$\binom{1/2}{k} = \frac{1}{k!}\prod_{i=1}^{k-1}\left(\frac{1}{2}-i\right) = \frac{1}{k! \cdot 2^k}\prod_{i=0}^{k-1}(1-2i) = \frac{(-1)^{k+1}}{k! \cdot 2^k}\prod_{i=1}^{k-1}(2i-1)$$

$$= \frac{(-1)^{k-1}}{k! \cdot 2^k} \cdot \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2k-3)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2k-2)} \cdot [2 \times 4 \times \cdots \times (2k-2)]$$

$$= \frac{(-1)^{k-1}}{k! \cdot 2^{2k-1}} \cdot \frac{(2k-2)!}{(k-1)!} = \frac{(-1)^{k-1}}{k \cdot 2^{2k-1}} \cdot \frac{(2k-2)!}{(k-1)!(k-1)!}$$

$$= \frac{(-1)^{k-1}}{k \cdot 2^{2k-1}} \times {}_{2k-2}\mathrm{C}_{k-1} \ ■$$

(3) 확장된 이항계수의 정의에 의해

$$\binom{\alpha-1}{k-1} + \binom{\alpha-1}{k} = \frac{1}{(k-1)!}\prod_{i=0}^{k-2}(\alpha-i-1) + \frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}(\alpha-i-1)$$

$$= \frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-2}(\alpha-i-1) \cdot (k+\alpha-k) = \frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}(\alpha-i)$$

$$= \binom{\alpha}{k} \ ■$$

확장된 이항계수를 이용하면 일반적인 접근으로는 보이기 힘들거나 조합론적 증명의 구축에 있어서 복잡성을 요구하는 명제들을 증명할 수 있다. 가령,

$$\sum_{k=0}^{n} {}_{2k}\mathrm{C}_{k} \times {}_{2n-2k}\mathrm{C}_{n-k} = 4^n$$

임을 이항급수 두 개를 이용하여 상대적으로 쉽게 보일 수 있다.

pf) $(1-4x)^{-\frac{1}{2}}$, $(1-4x)^1$의 전개식을 생각하자. 이를 이항급수로 전개하면

$$(1-4x)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} \cdot (-4x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \prod_{i=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2} - i \right) \cdot \frac{(-4x)^n}{n!} \right\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \prod_{i=0}^{n-1} (2i+1) \cdot \frac{4^n x^n}{2^n n!} \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \cdot \frac{4^n x^n}{n!} \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} {}_{2n}\mathrm{C}_{n} \cdot x^n$$

이다. 한편

$$(1-4x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1}{n} \cdot (-4x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \prod_{i=0}^{n-1} (-1-i) \cdot \frac{(-4x)^n}{n!} \right\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ n! \times \frac{4^n x^n}{n!} \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^n$$

이므로,

$$\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} {}_{2n}\mathrm{C}_{n} \cdot x^n \right\}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^n$$

에서 x^n의 계수를 비교하면

$$4^n = \sum_{k=0}^{n} {}_{2k}\mathrm{C}_{k} \times {}_{2n-2k}\mathrm{C}_{n-k}$$

를 얻는다. ■