Glasser's Master Theorem

著 : 雀
sukita1729@gmail.com

(1) 이상적분 (Improper Integration)

- 이상적분은 적분구간의 끝 값이 특정 실수값 또는 $\pm\infty$로 접근할 때의 정적분이다. (양끝값이 모두 극한으로써 작용할 수도 있다.)

- 즉,

$$\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx, \quad \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$$

$$\lim_{c\to b-}\int_a^c f(x)dx, \quad \lim_{c\to a+}\int_c^b f(x)dx$$

등과 같은 정적분이다. (Apostol, T (1967), Calculus, Vol. 1 (2nd ed.), Jon Wiley & Sons.) 또한 기호의 남용(abuse of notation)에 의해 적분구간에 $\pm\infty$ 등을 포함하여 쓰기도 한다.

- 예를 들어, $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{b}+\frac{1}{1}\right) = 1$이다.

- 또한, $\frac{1}{\sqrt{x}}$의 경우 $x=0$에서 정의되지 않지만 구간 $[0,1]$에서의 이상적분은 정의 가능하다. 즉,

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{a\to0+}\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{a\to0+}(2-2\sqrt{a}) = 2$$

이다. 이상적분을 극한으로 변환하여 계산할 때 극한이 발산하면 이상적분이 발산한다고 하고, 대표적인 예시로 $\frac{1}{x}$를 0부터 1까지 적분한 이상적분은 발산한다. 이상적분의 정의에 따른 극한이 수렴할 경우 그 수렴값을 이상적분의 값으로 한다.

- 적분구간의 내점에서 함수가 무한대로 발산하는 등 유계가 아닌 구간이 존재하면, 그 점을 기점으로 적분구간을 쪼갠 후 적분을 진행해야 한다. 예를 들어,

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}dx = \lim_{s\to0-}\int_{-1}^s \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}dx + \lim_{t\to\infty}\int_t^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}dx$$

$$= \lim_{s \to 0-} 3(1 - \sqrt[3]{s}) + \lim_{t \to 0+} 3(1 - \sqrt[3]{t}) = 3 + 3 = 6.$$

- 그러나 이와 비슷한 $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x} dx$는 0을 기점으로 한 각각의 적분이 모두 발산하므로 동일한 논리로 계산할 수 없다. (기함수의 적분을 생각하면 직관적으로 0이겠지만 값이 정의되지 않는다.)

(2) 코시 주요값 (Cauchy Principal Value)

- 오귀스탱 루이 코시가 도입한 코시 주요값은 일반적인 정적분으로 값을 구할 수 없는 일부 이상적분의 값을 구하는 방법 중 하나이다.

[def] 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$가 $x = x_0$ 근처에서 발산한다고 하자. 그러면 $a < x_0 < b$에서의 적분

$$\int_a^b f(x) dx$$

는 리만 적분 또는 르벡 적분으로서 그 값이 존재하지 않을 수 있다. 그러나 만약 다음과 같은 극한이 수렴한다면, 이를 코시 주요값으로 정의한다.

$$P\int_a^b f(x) dx := \lim_{\epsilon \to 0+} \left[\int_a^{x_0 - \epsilon} f(x) dx + \int_{x_0 + \epsilon}^{b} f(x) dx \right]$$

앞서 언급된 $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x} dx$는 코시 주요값을 적용하면

$$\lim_{a \to 0+} \left(\int_{-1}^{-a} \frac{1}{x} dx + \int_a^1 \frac{1}{x} dx \right) = 0$$

과 같이 계산할 수 있다. 코시 주요값은

$$PV\int f(x) dx, \quad \mathrm{p.v.}\int f(x) dx, \quad \int_L^* f(z) dz$$

등으로 표기한다.

(3) Cauchy-Schlömilch Transformation

- Cauchy-Schlömilch Substitution 또는 Cauchy-Schlömilch Transformation은

$$u = x - \frac{1}{x}$$

일 때

$$PV\int_{-\infty}^{\infty} F(u)dx = PV\int_{-\infty}^{\infty} F(x)dx$$

임을 이용하는 치환이다. ($F(u)du$가 아니라 $F(u)dx$임에 유의하라.)

pf) $u = x - \frac{1}{x}$, $x^2 - ux - 1 = 0$에서

$$x_{\pm} = \frac{u \pm \sqrt{u^2+4}}{2} \quad \text{(복부호동순)}$$

이고

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(u)dx = \int_{-\infty}^{0-} F(u)dx_{-} + \int_{0+}^{\infty} F(u)dx_{+} = \int_{-\infty}^{\infty} F(u)({x_{-}}' + {x_{+}}')du$$

이다. 한편

$${x_{\pm}}' = \frac{1}{2}\left(1 \pm \frac{u}{\sqrt{u^2+4}}\right)$$

이므로 ${x_{-}}' + {x_{+}}' = 1$이고

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(u)dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(u)({x_{-}}' + {x_{+}}')du = \int_{-\infty}^{\infty} F(u)du$$

이다. (Glasser, M. L. (1983). A remarkable property of definite integrals. mathematics of computation, 561-563.)

(4) Glasser's Master Theorem

- (3)번의 $u = x - \frac{1}{x}$를

$$u = x - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{a_j}{x - C_j} \quad \cdots \quad [1]$$

로 대체해도

$$PV\int_{-\infty}^{\infty} F(u)dx = PV\int_{-\infty}^{\infty} F(x)dx \ \cdots \ [2]$$

가 성립한다는 것이 알려져 있다. (여기서 $\{a_j\}$는 양의 실수열, C_j는 양의 실수이다.)

pf) 일반성을 잃지 않고 $C_1 < C_2 < C_3 \cdots$라 하자. 이때 식 [1]은 x에 대하여 다음과 같은 n차식으로 환원된다.

$$x^n - \left(u - \sum_{j=1}^{n-1} C_j\right)x^{n-1} + \ \cdots \ = 0$$

대수학의 기본정리에 의해 이 방정식은 복소 범위에서 (중복을 포함하여) n개의 근을 가지고, n개의 근 $x_i \in \mathbb{C}$ $(1 \le i \le n)$에 대하여 근과 계수의 관계에 의해

$$x_1 + x_2 + \ \cdots \ + x_n = u - \sum_{j=1}^{n-1} C_j$$

가 성립한다. 따라서

$$x_1' + x_2' + \ \cdots \ + x_n' = 1$$

이고,

$$I = \left(\int_{-\infty}^{C_1^-} dx_1 + \int_{C_1^+}^{C_2^-} dx_2 + \ \cdots \ + \int_{C_{n-1}^+}^{\infty} dx_n\right)F(u)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} F(u)(x_1' + x_2' + \ \cdots \ + x_n')du = \int_{-\infty}^{\infty} F(u)du$$

이다. 이와 같은 논리를 그대로 적용하면 다음과 같은 치환을 적용해도 식 [2]가 성립한다.

$$u = x - \sum_j a_j \cot\left[(x - C_j)^{-1}\right]$$

위 정리를 이용하면 특정한 값으로 수렴하는 아주 복잡한 적분식을 만들어낼 수 있다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{u^2+1} du = \left[\tan^{-1}x\right]_{-\infty}^{\infty} = \pi$$

이므로

$$u = x - \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$$

를 대입하여 Glasser's Master Theorem을 적용하면

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(x - \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right)^2 + 1} dx = \pi$$

이고, 식을 전개하여 짝수차항만 추출하면 다음의 정적분을 얻는다.

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{14} - 15x^{12} + 82x^{10} - 190x^8 + 184x^6 - 60x^4 + 16x^2}{x^{16} - 20x^{14} + 156x^{12} - 616x^{10} + 1388x^8 - 1792x^6 + 1152x^4 - 224x^2 + 16} dx = \frac{\pi}{2}$$

이와 같이 복잡한 정적분이 주어졌을 때 Glasser's Master Theorem을 이용하기 위해 식을 변형하여 역추적을 하는 것도 하나의 방법이다. (이를 이용하지 않는다면 복소적분과 매우 복잡한 계산과정을 거쳐야할 것이다.)

예제) Glasser's Master Theorem을 이용하여 다음 식이 성립함을 증명하시오.

$$\int_0^{\infty} \frac{x^8 - 4x^6 + 9x^4 - 5x^2 + 1}{x^{12} - 10x^{10} + 37x^8 - 42x^6 + 26x^4 - 8x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{2}$$

Glasser, M. L. (1983). A remarkable property of definite integrals. mathematics of computation, 561-563.