지금부터 보실 행동강령과 해설은 아드레날린을 통해 다른 기출 문제에서도 보실 수 있습니다!

자세한 내용은

https://orbi.kr/00043463424

에서 확인해주세요! 판매 페이지 링크는

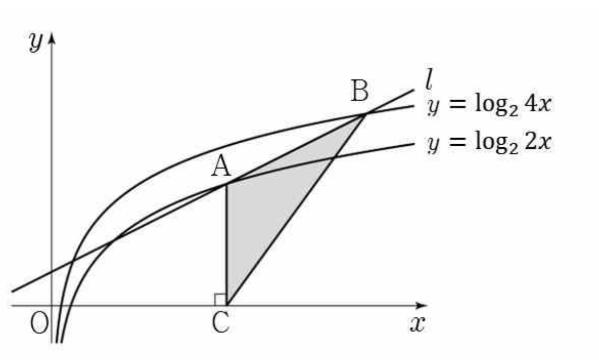
https://atom.ac/books/9395

입니다. 감사합니다!

아드레날린 ex
공통

1. 기울기가 $\frac{1}{2}$인 직선 l이 곡선 $y=\log_2 2x$와 서로 다른 두 점에서 만날 때, 만나는 두 점 중 x좌표가 큰 점을 A라 하고, 직선 l이 곡선 $y=\log_2 4x$와 만나는 두 점 중 x좌표가 큰 점을 B라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{5}$일 때, 점 A에서 x축에 내린 수선의 발 C에 대하여 삼각형 ACB의 넓이는?
〔2022년 7월 11〕

① 5 ② $\frac{21}{4}$ ③ $\frac{11}{2}$ ④ $\frac{23}{4}$ ⑤ 6



1. 정답 ⑤ 〔2022년 7월 11〕

1) 함수 보이면 관찰, 그림 있으면 그림 보면서

기울기가 $\frac{1}{2}$인 직선 l이 있는데 그림과 같이 $y=\log_2 2x$와 두 점, $y=\log_2 4x$와 두 점에서 만나고 있습니다.

이때 각각 만나는 두 점 중 x좌표가 큰 점을 A, B라고 하는데 $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{5}$이라네요.

일단 기울기가 $\frac{1}{2}$인 직선 위의 두 점이니 A부터 B까지의 기울기 역시 $\frac{1}{2}$입니다. $\frac{y\text{증가량}}{x\text{증가량}}=\frac{1}{2}$이라는 거죠.

x증가량을 $2k$라 하면 y증가량은 k이겠네요. 이때 선분 AB를 한 변으로 하는 직각삼각형을 만들어보세요.

그리고 $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{5}$이면 바로 피타고라스를 쓸 수 있겠죠? $k^2+(2k)^2=5k^2=(2\sqrt{5})^2=20$이고 $k=2$입니다.

결국 A와 B의 x좌표는 4만큼 차이가 나고, y좌표는 2만큼 차이가 난다는 뜻이겠네요.

A의 x좌표를 a라 하면 $\mathrm{A}(a,\ \log_2 2a)$, $\mathrm{B}(a+4,\ 2+\log_2 2a)$이죠? 그런데 이때 B의 y좌표는

$\log_2 4(a+2)$이기도 합니다. 두 개가 같아야 하니까 $2+\log_2 2a=\log_2 4a+16$이고 $8a=4a+16$이니까

$a=4$이네요.

마지막으로 ACB의 넓이는 $\frac{1}{2}\times$(B의 x좌표 − A의 x좌표)$\times$(A의 y값)이죠? 이때 A와 B의 x좌표의

차이는 4이고, $a=4$이니까 A의 y값은 3입니다. 넓이는 6이고 답은 ⑤번이네요

2. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=\dfrac{1}{2}$ 인 삼차함수 $f(x)$에

에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<-2) \\ f(x)+8 & (x\geq -2) \end{cases}$$

라 하자. 방정식 $g(x)=f(-2)$의 실근이 2뿐일 때,
함수 $f(x)$의 극댓값은?

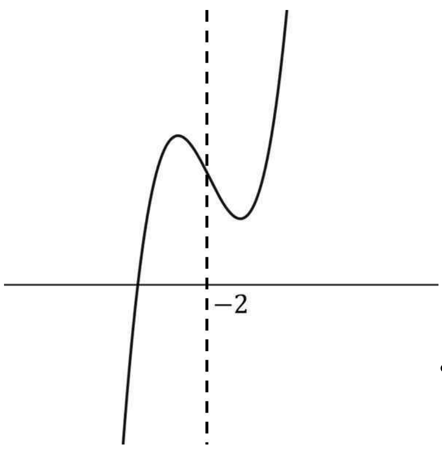
① 3 ② $\dfrac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\dfrac{9}{2}$ ⑤ 5

2. 정답 ③ 〔2022년 7월 13〕

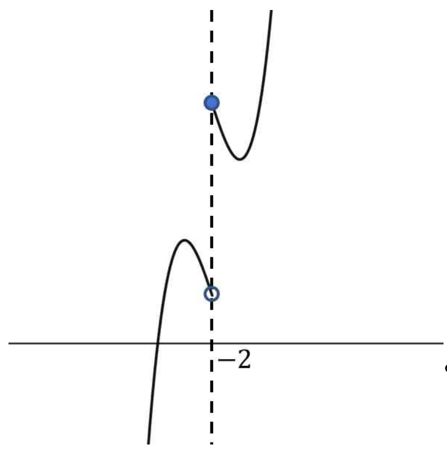
1) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기, 문제해석

최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=\frac{1}{2}$인 삼차함수 $f(x)$가 있는데 함수 $g(x)$가

$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<-2) \\ f(x)+8 & (x\geq -2) \end{cases}$ 랍니다. $x<-2$일 때는 $g(x)=f(x)$이다가 $x=-2$ 이후부터는 갑자기 8만큼 위로 올라가는 함수죠? 뭐 대충 그려볼까요?

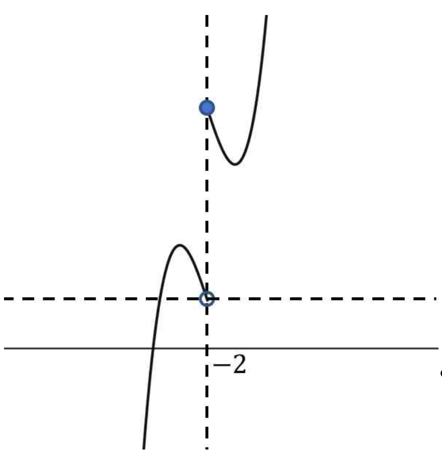


이게 $f(x)$이라면



이렇게 $x\geq -2$ 부분을 위로 올려버리면 됩니다. 이런 함수네요.

이때 $g(x)=f(-2)$의 실근이 2뿐이라고 합니다. 일단 그림을 보세요. $f(-2)$는 $g(x)$의 $x=-2$에서의 좌극한값이에요. 지금 그 선을 그으면

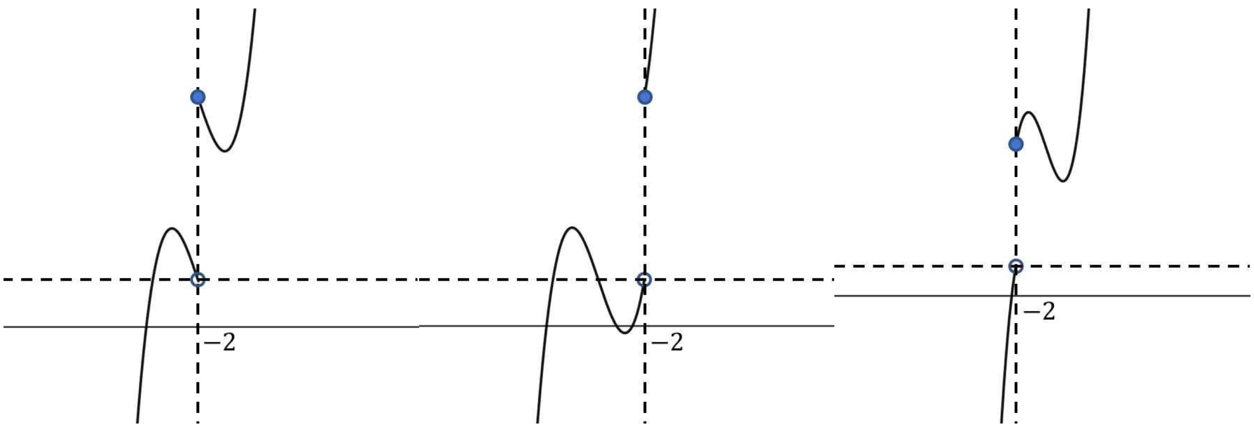


이렇게 오히려 $x=-2$보다 작은 부분에서만 만나게 되죠. 일단 이런 경우는 제외해야 합니다.

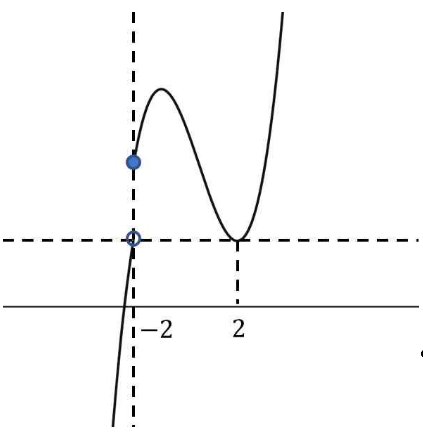
이제 막 $x=-2$를 긋고 $g(x)$를 그린 후에 조건을 만족시키는지 확인해보세요. 이때 $x=-2$보다 큰 부분인 $x=2$에서만 만나야 하고 $x=-2$보다 작은 부분에서는 만날 수 없어요.

그러면 $x=-2$를 어디에 잡아야 할까요? 일단 $y=f(x)$와 $y=f(-2)$가 몇 개의 점에서 만나는지에 따라 달라질 것 같아요. $g(x)$도 $f(x)$와 관련이 있으니까 저거에 따라 상황이 달라질 수 있겠죠?

만약 3개의 점에서 만난다면



다 조건을 만족시키지 못하네요. 그런데 맨 오른쪽 그림 보세요. 이거 $x \geq -2$ 부분만 잘 조정하면 $x=2$에서만 만나도록 할 수 있을 것 같은데요?



이런 식으로 말이죠. 이러면 $f(-2)$와 $x=2$에서만 접하게 할 수 있잖아요.

일단 $f(-2)=g(2)=f(2)+8$입니다. 그리고 $g'(2)=f'(2)=0$이네요.

2) 함수 구하기 - 차함수

그러면 $y=f(x)+8$ 그래프는 $y=f(-2)$에 접하니까 차함수에 의해 $f(x)+8=(x-2)^2(x-k)+f(-2)$라고 할 수 있습니다. 넘기면 $f(x)=(x-2)^2(x-k)+f(-2)-8$이네요. 일단 $x=-2$를 넣으면

$f(-2)=16(-2-k)+f(-2)-8$이고 $16(-k-2)=8$이니까 $k=-\dfrac{5}{2}$입니다.

$f(x)=(x-2)^2\left(x+\frac{5}{2}\right)+f(-2)-8$인데 $f(0)=\frac{1}{2}$이라고 했었죠? 따라서 $f(0)=\frac{1}{2}=f(-2)+2$이고

$f(-2)=-\frac{3}{2}$입니다. $f(x)=(x-2)^2\left(x+\frac{5}{2}\right)-\frac{19}{2}$이네요.

이제 극댓값을 구해봅시다. 미분하면

$f(x)=2(x-2)\left(x+\frac{5}{2}\right)+(x-2)^2=(x-2)(3x+3)=3(x-2)(x+1)$입니다. $x=-1$에서 극대네요. 따라서

극댓값은 $f(-1)=4$입니다. 답은 ③번이네요.

3. 길이가 14인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 점 C를 $\overline{\mathrm{BC}}=6$이 되도록 잡는다. 점 D가 호 AC 위의 점일 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, 점 D는 점 A와 점 C가 아닌 점이다.) 〔2022년 7월 14〕

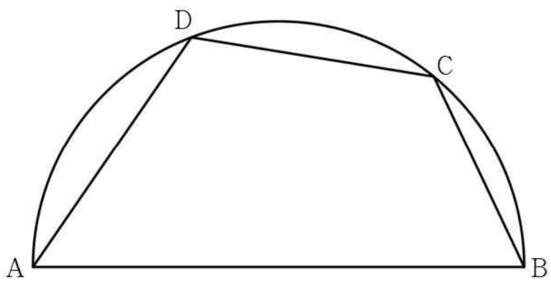
<보 기>

ㄱ. $\sin(\angle \mathrm{CBA})=\dfrac{2\sqrt{10}}{7}$

ㄴ. $\overline{\mathrm{CD}}=7$일 때, $\overline{\mathrm{AD}}=-3+2\sqrt{30}$

ㄷ. 사각형 ABCD의 넓이의 최댓값은 $20\sqrt{10}$이다.

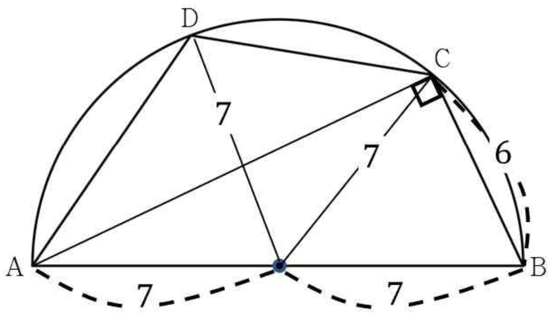
① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



3. 정답 ⑤〔2022년 7월 14〕

1) 그림 있으면 그림 보면서

그림에 다 표시해봅시다. 대충



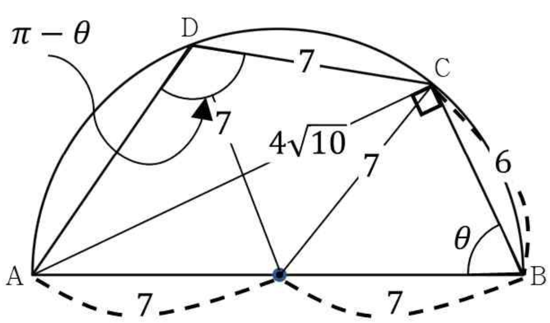
이렇게 할 수 있을 것 같아요. $\overline{\mathrm{AC}}$는 피타고라스로 구할 수 있겠네요. $14^2=\overline{\mathrm{AC}}^2+6^2$이고 $\overline{\mathrm{AC}}=4\sqrt{10}$입니다.

사각형 ABCD는 지금 원에 내접하는 형태이죠? 마침 ㄱ에서 $\angle\mathrm{CBA}$에 대하여 물어보는데 $\angle\mathrm{CBA}=\theta$라고 하면 $\angle\mathrm{ADC}=\pi-\theta$입니다.

ㄱ에서 $\sin(\angle\mathrm{CBA})=\dfrac{2\sqrt{10}}{7}$이냐고 물어보네요. 바로 할 수 있겠죠? $\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{AB}}}=\dfrac{4\sqrt{10}}{14}=\dfrac{2\sqrt{10}}{7}$ 맞네요. ㄱ은 맞습니다.

2) 삼각형은 정해져 있다 - 두 변의 길이와 한 각, 각 변환

ㄴ에서 $\overline{\mathrm{CD}}=7$일 때 $\overline{\mathrm{AD}}=-3+2\sqrt{30}$이냐고 물어봅니다. 일단

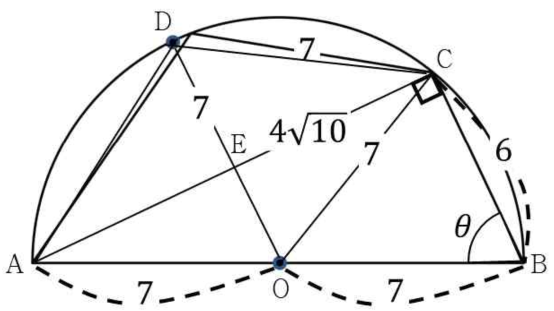


이렇게 되죠? 일단 우리가 구해야 하는 건 $\overline{\mathrm{AD}}$인데 삼각형 ADC에서 두 변의 길이인 7과 $4\sqrt{10}$을 알고 있어요. 이때 $\cos\theta=\dfrac{3}{7}$이니까 $\cos(\pi-\theta)$를 각 변환해서 코사인법칙을 사용하면 되겠죠? 일단 예각인 θ를 설정하고 반시계방향으로 π만큼 움직인 다음에 예각인 θ를 빼면 그곳에서 x값은 음수입니다. 이때 $\overline{\mathrm{AD}}=k$라 하면 $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta=-\dfrac{3}{7}=\dfrac{k^2+49-160}{2\times k\times 7}$이고 $k^2+6k-111=0$입니다. 이건 근의 공식을 써야겠네요. $-3\pm\sqrt{120}=-3\pm2\sqrt{30}$인데 k는 음수가 될 수

없으니까 $k=-3+2\sqrt{30}$ 이네요. ㄴ은 맞습니다.

ㄷ에서 사각형 ABCD의 넓이의 최댓값을 물어보네요. 일단 사각형 ABCD를 삼각형 ADC와 삼각형 ABC로 쪼갤 수 있어요. 이때 ABC의 넓이는 $12\sqrt{10}$ 으로 결정되어 있죠? 그럼 나머지 삼각형 ADC의 넓이가 최대가 되는 점 D를 찾으면 되겠네요.

삼각형 ADC의 넓이는 $\frac{1}{2}\times$(선분 AC의 길이)$\times$(D에서 선분 AC까지의 길이)인데 이미 선분 AC의 길이는 $4\sqrt{10}$ 으로 결정되어 있어요. 그러면 결국 D에서 선분 AC까지의 길이를 최대로 늘려야 한다는 거예요. 원 위에서 최대가 되려면 점 D에서 내린 수선의 발이 선분 AC에 있도록 점 D를 설정하면 되겠네요.



이렇게 말이죠.

삼각형 AEO와 삼각형 ABC는 닮음이네요? 그러면 $7:\overline{\mathrm{EO}}=14:6$이고 $\overline{\mathrm{EO}}=3$입니다. $\overline{\mathrm{DO}}=7$이니까 $\overline{\mathrm{DE}}=4=$D에서 선분 AC까지의 길이이죠? 따라서 삼각형 ADC의 넓이의 최댓값은 $8\sqrt{10}$ 입니다. 아까 구해놓은 삼각형 ABC의 넓이 $12\sqrt{10}$ 와 합치면 $20\sqrt{10}$ 이네요. ㄷ도 맞습니다. 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이고 답은 ⑤번입니다.

4. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x+2) & (x<0) \\ \displaystyle\int_0^x tf(t)dt & (x \ge 0) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. 실수 a에 대하여 함수 $h(x)$를

$$h(x)=|g(x)-g(a)|$$

라 할 때, 함수 $h(x)$가 $x=k$에서 미분가능하지 않은 실수 k의 개수가 1이 되도록 하는 모든 a의 값의 곱은?
〔2022년 7월 15〕

① $-\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ② $-\frac{7\sqrt{3}}{6}$ ③ $-\sqrt{3}$

④ $-\frac{5\sqrt{3}}{6}$ ⑤ $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

4. 정답 ① 〔2022년 7월 15〕

1) 정적분의 위끝에 변수가 있는 경우, 문제해석, 미분가능은 연속 확인+미분계수 확인

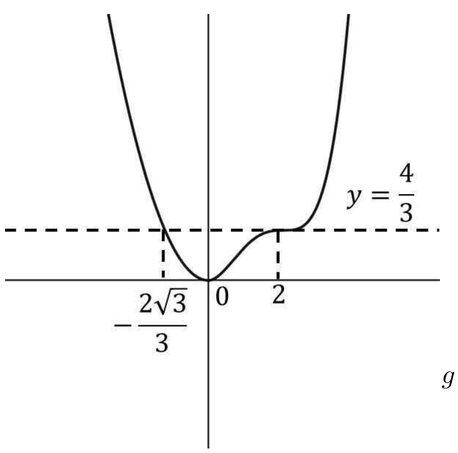
일단 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수인데 $g(x)=\begin{cases} f(x+2) & (x<0) \\ \int_0^x tf(t)dt & (x \geq 0) \end{cases}$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하답니다. 일단 $x=0$을 제외하고는 모두 다항함수니까 미분가능하죠? $x=0$에서만 확인해보면 되겠어요.

먼저 연속부터 확인해봅시다. $f(2)=0$이네요. 그리고 미분계수도 확인해봅시다. 미분하면 $g'(x)=\begin{cases} f'(x+2) & (x<0) \\ xf(x) & (x \geq 0) \end{cases}$이니까 $f'(2)=0$입니다. 이러면 $f(x)$의 식이 결정이 되죠? $x=2$에서 x축에 접하는 형태인데 최고차항의 계수가 1이니까 $f(x)=(x-2)^2$입니다. $g(x)=\begin{cases} x^2 & (x<0) \\ \int_0^x t(t-2)^2dt & (x \geq 0) \end{cases}$이고

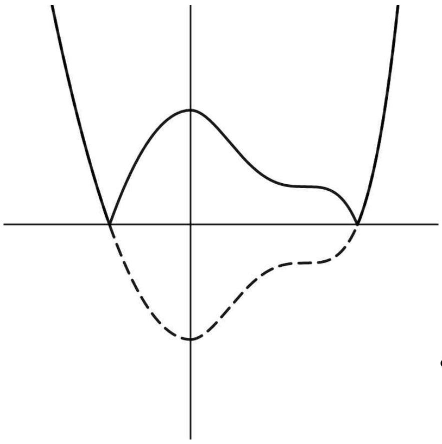
$g(x)=\begin{cases} x^2 & (x<0) \\ \frac{1}{4}x^4-\frac{4}{3}x^3+2x^2 & (x \geq 0) \end{cases}$입니다.

이때 $h(x)=|g(x)-g(a)|$이 $x=k$에서 미분가능하지 않은 실수 k의 개수가 1이 되도록 하는 모든 a의 값의 곱을 구하랍니다. 그러니까 다시 말하면 한 점에서만 미분불가능하게 만드는 a를 구하라는 거죠?

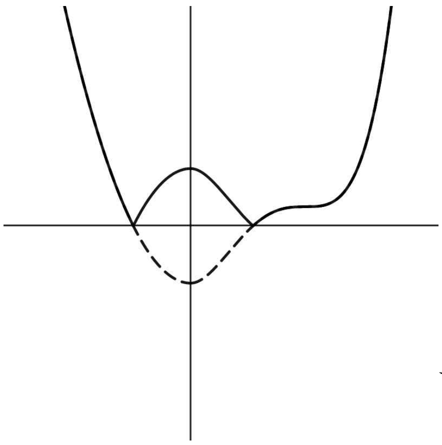
함수부터 분석해봅시다. 일단 $g(x)$를 $g(a)$만큼 내립니다. 이 함수는 당연하게도 $x=a$에서 함숫값 0을 가지게 됩니다. 그리고 절댓값을 씌우는 거예요.



$g(x)$의 그래프입니다. 만약 $g(a)$가 $y=\frac{4}{3}$보다 크다면?

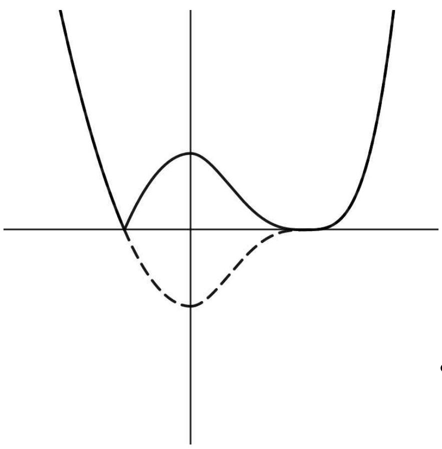


이렇게 두 점에서 미분불가능하게 되겠죠. 만약 작다면?



그때도 이렇게 두 점에서 미분불가능하게 됩니다. $g(a)=0$이라면

미분가능하구요. 아까 위에서 봤죠? $g(a)=\dfrac{4}{3}$이라면



이렇게 정확히 한 점에서만 미분불가능하게 됩니다.

$g(a)=\dfrac{4}{3}$가 되는 a는 방금 위에서 봤듯이 $a=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$과 $a=2$이죠. 곱은 $-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$입니다. 답은 ①번이네요.

5. 최고차항의 계수가 3인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=x^2\int_0^x f(t)dt-\int_0^x t^2 f(t)dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 극값을 갖지 않는다.
(나) 방정식 $g'(x)=0$의 모든 실근은 0, 3이다.

$\int_0^3 |f(x)|dx$의 값을 구하시오. 〔2022년 7월 20〕

5. 정답 8 〔2022년 7월 20〕

1) 정적분의 위끝에 변수가 있는 경우

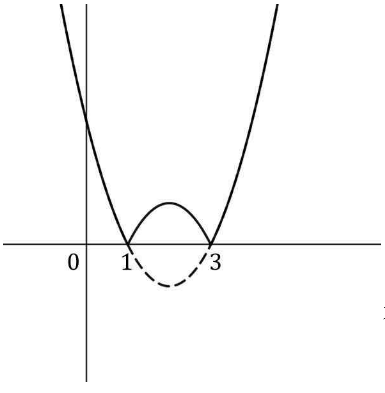
$f(x)$가 최고차항의 계수가 3인 이차함수인데 $g(x)=x^2\int_0^x f(t)dt-\int_0^x t^2f(t)dt$라고 합니다. 일단 $x=0$을 넣으면 $g(0)=0$이네요. 그리고 미분하면 $g'(x)=2x\int_0^x f(t)dt$이구요. $g'(0)=0$입니다.

이때 (가)조건에서 $g(x)$는 극값을 갖지 않는다고 합니다. 그런데 (나)조건에서 $g'(x)=0$의 모든 실근은 0, 3이라고 하네요. 일단 극값을 갖기 위해서는 도함수의 부호가 변화해야 합니다. 다시 말해서 x축을 가로질러 가야 한다는 거죠.

그런데 $g(x)$의 인수가 홀수 개일 때, 예를 들어 $g(x)$가 $(x-k)$라는 인수를 하나만 가지고 있다면 $g(x)$는 $x=k$에서 x축을 가로지르게 됩니다. 이러면 도함수의 부호가 변화하여 극값을 가지게 되죠.

그러면 도함수의 함숫값은 0인데 극값을 갖지 않는다는 건? 접해서 부호가 변화하지 않게 된다는 거겠네요. 정확히 말하면 인수가 짝수 개여야 한다는 거죠. $f(x)$는 최고차항의 계수가 3인 이차함수니까 그걸 적분한 $\int_0^x f(t)dt$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고, 거기다 $2x$가 하나 더 있으니까 $g'(x)$는 최고차항의 계수가 2인 사차함수입니다. 총 인수가 최대 네 개에요.

그런데 일단 x, $(x-3)$은 무조건 가져야 합니다. 이때 각각의 인수가 홀수 개라면 도함수의 부호가 변화하게 되겠죠. 그러면 각각 두 개를 가져야 하겠네요. $g'(x)=2x\int_0^x f(t)dt=2x^2(x-3)^2$이고 $\int_0^x f(t)dt=x(x-3)^2$입니다. $f(x)=3(x-1)(x-3)$이네요. 이제 $\int_0^3 |f(x)|dx$를 구해야 합니다.



결국 $\int_0^1 3(x-1)(x-3)dx+\int_1^3 -3(x-1)(x-3)dx$이죠?

2) 이차함수와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이

여기서 1부터 3까지 정적분한 건 $y=-3(x-1)(x-3)$과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이입니다. 따라서 $\frac{3}{6}\times(3-1)^3=4$입니다. $\int_0^1 3(x-1)(x-3)dx=\left[x^3-6x^2+9x\right]_0^1=4$이구요. 답은 8이네요.

6. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} a_k = 17n$
(나) $\left\vert a_{n+1} - a_n \right\vert = 2n - 1$

$a_2 = 9$일 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{10} a_{2n}$의 값을 구하시오. 〔2022년 7월 21〕

6. 정답 180 〔2022년 7월 21〕

1) 조건해석, 자연수 보이면 숫자 넣기, 시그마 펼치기

(가)조건에서 $\sum_{k=1}^{2n} a_k = 17n$라네요. 펼치면 $a_1 + \cdots + a_{2n} = 17n$이라는 거죠?

여기서 시그마와 관련한 한 성질을 사용해봅시다. $a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1}$에서 $a_1 + \cdots + a_n$을 빼면 a_{n+1}이 나오겠죠? 그러면 모든 자연수 n에 대하여 성립하는 $a_1 + \cdots + a_{2n} = 17n$에서 n 대신 $n+1$을 넣어도 성립합니다. 그러면 $a_1 + \cdots + a_{2n} + a_{2n+1} + a_{2n+2} = 17n + 17$이 됩니다. 빼면 결국 $a_{2n+1} + a_{2n+2} = 17$이 나오네요.

(나)조건에서 $|a_{n+1} - a_n| = 2n-1$라고 합니다. 거기에 $a_2 = 9$일 때 $\sum_{n=1}^{10} a_{2n} = a_2 + a_4 + \cdots + a_{20}$을 구하라네요. 짝수항만 더하라는 걸 보니 홀수항과 짝수항이 뭔가 다른가봐요. 뭐 암튼 $a_{2n+1} + a_{2n+2} = 17$과 $|a_{n+1} - a_n| = 2n-1$의 n에 숫자를 넣어가면서 확인해보면 되겠죠?

$n=1$과 $n=2$를 각각 넣으면 $a_3 + a_4 = 17$이고 $|a_3 - a_2| = 3$입니다. $a_2 = 9$이므로 $|a_3 - 9| = 3$이고, $a_3 = 12$이거나 $a_3 = 6$이네요. 이러면 케이스를 나눠야겠어요.

2) 케이스 분류

2-1) $a_3 = 12$일 때

$a_3 = 12$이면 $a_4 = 5$입니다. 다시 $n=2$와 $n=3$을 각각 넣으면 $a_5 + a_6 = 17$이고 $|a_4 - a_3| = 5$입니다. 그런데 $|a_4 - a_3| = 5$은 아니네요? $a_4 - a_3 = 7$이잖아요.

2-2) $a_3 = 6$일 때

$a_3 = 6$이면 $a_4 = 11$입니다. 다시 $n=2$와 $n=3$을 각각 넣으면 $a_5 + a_6 = 17$이고 $|a_4 - a_3| = 5$입니다. 일단 $a_4 - a_3 = 5$니까 절댓값 씌운 것도 같습니다.

$|a_{n+1} - a_n| = 2n-1$에 $n=4$를 넣으면 $|a_5 - a_4| = 7$입니다. 이러면 또 경우가 나뉘네요. $a_5 = 18$과 $a_5 = 4$가 가능합니다. 다만 $a_5 = 18$일 경우 $a_5 + a_6 = 17$에 의하여 $a_6 = -1$인데 $|a_{n+1} - a_n| = 2n-1$에 $n=5$를 넣으면 $|a_6 - a_5| = 9$를 만족시키지 못합니다. 따라서 $a_5 = 4$이고 $a_6 = 13$입니다.

지금까지 정리해보죠. $a_2=9$, $a_3=6$, $a_4=11$, $a_5=4$, $a_6=13$입니다. 짝수항의 규칙을 파악해보세요.
9에서부터 2씩 증가하는 형태죠? 그러면 $a_8=15$ 아닐까요? 딱 하나만 더 해보고 맞으면 일반화해버립시다.

$a_7+a_8=17$입니다. 그리고 $|a_7-a_6|=11$이니까 $a_7=24$ 혹은 $a_7=2$이네요. 그런데 $a_7=24$이라면 $a_7+a_8=17$에 의하여 $a_8=-7$인데 $|a_8-a_7|=13$를 만족시키지 못합니다. 따라서 $a_7=2$이고 $a_8=15$입니다. 맞죠? 바로 갑시다.

짝수항은 $a_2=9$부터 시작해서 2씩 증가하는 형태니까 $a_{2n}=2n+7$이네요.

$\sum_{n=1}^{10} a_{2n}=a_2+a_4+\cdots+a_{20}=\dfrac{(9+27)}{2}\times 10=180$입니다.

7. 삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ 0)$에서의 접선의 방정식을 $y=g(x)$라 할 때, 함수 $h(x)$를

$$h(x)=|f(x)|+g(x)$$

라 하자. 함수 $h(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 곡선 $y=h(x)$ 위의 점 $(k,\ 0)$ $(k\neq 0)$에서의 접선의 방정식은 $y=0$이다.
(나) 방정식 $h(x)=0$의 실근 중에서 가장 큰 값은 12이다.

$h(3)=-\dfrac{9}{2}$일 때, $k\times\{h(6)-h(11)\}$의 값을 구하시오.

(단, k는 상수이다.) 〔2022년 7월 22〕

7. 정답 121 〔2022년 7월 22〕

1) 절댓값 함수, 문제해석

삼차함수 $f(x)$가 있는데 $f(x)$ 위의 원점에서 접선의 방정식을 $y=g(x)$라고 한답니다. 일단 $f(0)=0$이죠? 그리고 원점에서 접선의 방정식은 $f'(0)x$입니다. $g(x)=f'(0)x$이네요.

이때 $h(x)=|f(x)|+f'(0)x$이라고 합니다. 일단 $h(0)=f(0)=0$입니다.

(가)조건에서 $y=h(x)$ 위의 점 $(k,\ 0)$ $(k\neq 0)$에서의 접선의 방정식은 x축이라고 합니다. 다시 말하면 $|f(x)|+f'(0)x$와 x축이 $x=k$에서 접한다고 할 수도 있지만, 우리가 절댓값과 절댓값이 없는 함수를 더한 함수를 직접적으로 다루기는 어려워요.

그러니까 넘겨서 파악을 하죠. $y=|f(x)|+f'(0)x$와 $y=0$이 $x=k$에서 접한다는 건 $y=|f(x)|$와 $y=-f'(0)x$가 $x=k$에서 접한다는 것으로 해석할 수 있습니다. 이걸 그래프 상에서 보면 $f(x)$에 절댓값을 씌워 올린 함수와 원점에서의 접선의 방정식을 $(-)$를 곱해서 부호를 바꿔버린 함수가 $x=k$에서 접한다는 거죠.

일반적으로 절댓값이 씌워져 있으면 함부로 미분할 수 없습니다. 다만 $|f(x)|$는 삼차함수에 절댓값을 씌운 형태니까 x축 아래에 있는지, 위에 있는지 아니면 x축에 있는지에 따라서 경우가 달라집니다.

먼저 $f(k)=0$인 경우입니다. 이 경우는 두 가지 경우가 존재합니다.
인수가 하나만 있어서 접어 올렸을 때 $|f(x)|$의 좌우 미분계수가 달라지는 경우와
인수가 두 개 이상이 있어서(x축에 접하여) $|f(x)|$의 좌우 미분계수가 0으로 같아지는 두 가지 경우가 있습니다.

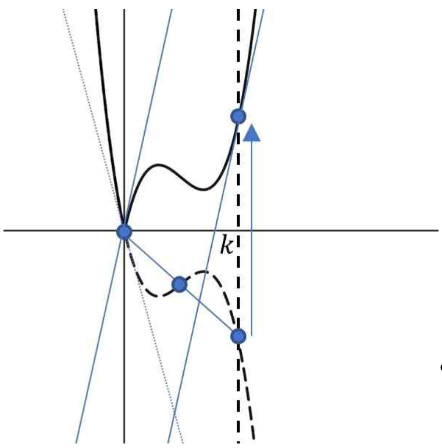
그런데 인수가 하나만 있는 경우는 불가능합니다. 이러면 말이 안 되거든요.
$g(x)=f'(0)x$는 $x=k$에서 좌우의 미분계수가 같습니다. 일차함수니까요. 그런데 인수가 하나만 있으면 $|f(x)|$의 $x=k$에서의 미분계수는 좌우가 달라집니다. 그러면 둘을 더하면 값 또한 좌우가 달라지게 되죠. 이런 상황에서 x축에 접한다고 표현할 수 있을까요? 접한다는 건 좌우의 미분계수가 0이라는 거니까 말이 되지 않습니다.

인수가 두 개 이상이 있다면($f(x)$가 $a(x-k)^2(x-b)$의 형태이거나 $f(x)=a(x-k)^3$의 형태인 경우) $|f(x)|$의 $x=k$에서의 미분계수가 0이 되니까 결국 $f'(0)=0$이 됩니다. $f(0)=0$이고 $f'(0)=0$이니까 $f(x)$는 x^2이라는 인수를 가져야겠죠? $k=0$입니다. 이러면 $k\neq 0$이라는 것에 위반되죠? 따라서 $f(k)\neq 0$입니다.

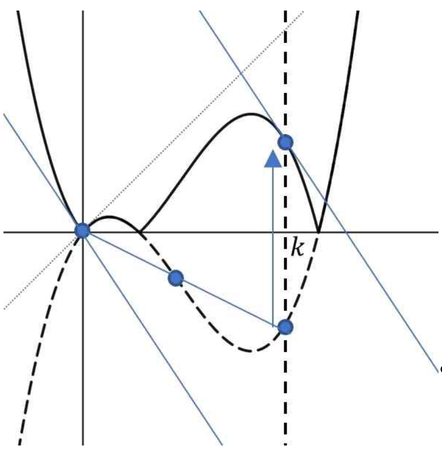
2) 1) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

$f(k)<0$인 경우 위로 접어 올라가서 접선의 기울기 값도 부호가 반대로 바뀌고 $-f'(k)+f'(0)=0$가 됩니다. $f'(k)=f'(0)$이네요. 이 말은 결국 $f(x)$의 $x=k$에서의 접선과 $x=0$에서의 접선은 평행하다는 거에요.

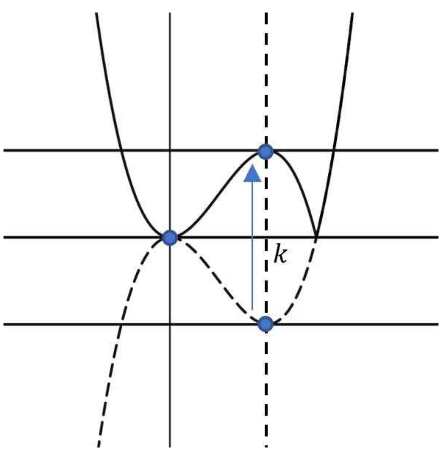
이때 $f'(0)<0$이라면 $f'(k)<0$입니다. 그러면 $f(x)$에 절댓값을 씌우고 $x=0$에서의 접선의 기울기의 부호를 바꿔도 $f'(k)=f'(0)$가 유지됩니다. 두 접선은 평행하므로 $x=k$에서 접하는 상황이 나올 수 없습니다.



이렇게 말이죠. $f'(0)>0$이어도 마찬가지입니다.



이렇게 말이죠. $f'(0)=0$이라면 $f'(k)=f'(0)=0$인데 이 역시 평행하므로 $y=-f'(0)x=0$(즉, x축)과 $y=|f(x)|$는 $x=k$에서 접할 수 없습니다.

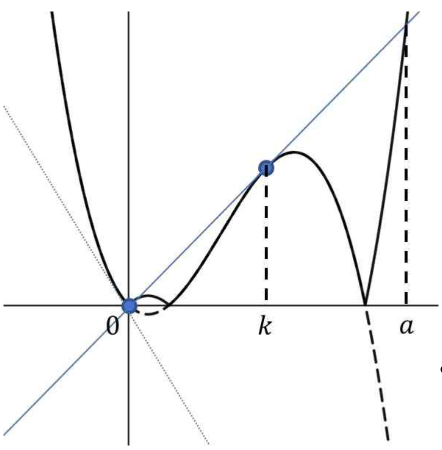


그러면 남은 건 $f(k) > 0$인 경우네요. $x=k$에서 $|f(x)| = f(x)$으로 그냥 그대로 있으니까 접선의 기울기 값도 $f'(x)$와 같게 됩니다. 따라서 $f'(k) = -f'(0)$이네요. 이것도 마찬가지로 $f'(0)$의 부호에 따라 나눠볼게요.

$f'(0) > 0$이라면 $f'(k) < 0$입니다. 절댓값을 씌워 올리면 $f(k) > 0$이니까 $f'(k) < 0$는 그대로 유지되고 $y = -f'(0)x$는 부호가 바뀌어 최고차항의 계수가 음수인 직선이 됩니다. 그런데 $x=k$에서의 $y = |f(x)|$의 접선과 $y = -f'(0)x$이 평행하므로 접할 수 없습니다.

$f'(0) = 0$이라면 $f'(k) = f'(0) = 0$인데 이건 아까 평행해서 못 만난다고 했었죠?

$f'(0) < 0$이라면 $f'(k) > 0$입니다. 이러면



이렇게 $x=k$에서 접하는 게 가능해집니다.

(나)조건에서 $h(x) = 0$의 실근, 즉 $h(x)$와 x축이 만나는 점의 x좌표 중에서 가장 큰 값이 12라고 합니다. $a = 12$이죠?

3) 함수 구하기 - 차함수

$y = -f'(0)x$는 $y = f(x)$와는 $x = 0$에서 그냥 만나고 $x = k$에서는 접하네요. 그리고 $y = -f'(0)x$가 $y = -f(x)$와는 $x = 12$에서는 그냥 만나니까 사실상 $y = f'(0)x$와 $y = f(x)$는 $x = 0$에서 접하고 $x = 12$에서 그냥 만납니다. 차함수에 의하여 $f(x) + f'(0)x = ax(x-k)^2$이고 $f(x) - f'(0)x = ax^2(x-12)$이네요. 두 함수는 이차항부터는 같으므로 $2k = 12$이고 $k = 6$입니다.

$f(x) + f'(0)x = ax(x-6)^2$와 $f(x) - f'(0)x = ax^2(x-12)$를 더해서 정리하면

$f(x) = ax(x^2 - 12x + 18)$, $a < 0$입니다. 이때 $h(3) = -\frac{9}{2}$인데 $f(3) = -27a > 0$이므로

$h(3) = -27a + 3f'(0) = 27a = -\frac{9}{2}$이고 $a = -\frac{1}{6}$입니다. $f(x) = -\frac{1}{6}x(x^2 - 12x + 18)$이네요.

여기서 $k=6$이고 $h(6)=0$, $h(11)=-\frac{121}{6}$이므로 $k\times\{h(6)-h(11)\}=121$입니다.

확통

8. 두 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$, $Y=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 X에서 Y로의 함수 f의 개수는? 〔2022년 7월 확통 28〕

(가) $\sqrt{f(1)\times f(2)\times f(3)}$의 값은 자연수이다. (나) 집합 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1 < x_2$이면 $f(x_1) \leq f(x_2)$이다.

① 84 ② 87 ③ 90 ④ 93 ⑤ 96

8. 정답 ② 〔2022년 7월 확통 28〕

1) 확통은 상황이해 후 기준잡고 분류, 문제해석

$X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$, $Y=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$가 있는데 조건을 만족시키는 $f\ :\ X\to\ Y$를 구하랍니다.

(가)조건에서 $\sqrt{f(1)\times f(2)\times f(3)}$의 값은 자연수라네요. 자연수가 뭐가 있을까요? 일단 $f(1)\sim f(3)$이 가질 수 있는 값은 1부터 5까지 5개에요. 그런데 루트를 씌웠을 때 자연수가 될 수 있는 건 적죠. 1부터 천천히 나열해볼게요.

1 4 9 16 25 36 49 64 81 100 121까지네요. $5\times5\times5=125$이니까 125 이하의 수만 가능합니다.
$(f(1),\ f(2),\ f(3))$의 형태로 나열해보면

1의 경우 (1, 1, 1)이죠. 뭐 이런 식으로 가능한 경우들을 나열해보면 되겠어요.

이때 (나)조건에서 집합 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1<x_2$이면 $f(x_1)\le f(x_2)$이랍니다. 이거는 중복조합이잖아요? 중복을 허용하여 두 개의 함숫값을 고르면 x값의 상대적인 크기에 따라 자동으로 함숫값이 분류되는 시스템이죠. 그러면 아까 구한 자연수의 나열에 따라 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 결정한 후, 가장 큰 $f(3)$의 값에 따라 $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$를 결정하면 되겠어요. 가봅시다.

1의 경우 (1, 1, 1)입니다. 이러면 $1\le f(4)\le f(5)\le f(6)$이죠? $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$는 1부터 5까지 5개의 값 중에서 중복을 허용하여 3개를 고르면 되니까 ${}_5H_3={}_7C_3=35$입니다.

4의 경우 (1, 1, 4)가 가능합니다. $4\le f(4)\le f(5)\le f(6)$이고 $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$는 4부터 5까지 2개의 값 중에서 중복을 허용하여 3개를 고르면 되니까 ${}_2H_3={}_4C_3=4$입니다.

또한 (1, 2, 2)도 가능합니다. $2\le f(4)\le f(5)\le f(6)$이고 $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$는 2부터 5까지 4개의 값 중에서 중복을 허용하여 3개를 고르면 되니까 ${}_4H_3={}_6C_3=20$입니다.

9의 경우 (1, 3, 3)가 가능합니다. $3\le f(4)\le f(5)\le f(6)$이고 $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$는 3부터 5까지 2개의 값 중에서 중복을 허용하여 3개를 고르면 되니까 ${}_3H_3={}_5C_3=10$입니다.

16의 경우 (1, 4, 4)가 가능합니다. $4\le f(4)\le f(5)\le f(6)$이고 $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$는 4부터 5까지 2개의 값 중에서 중복을 허용하여 3개를 고르면 되니까 ${}_2H_3={}_4C_3=4$입니다.

$(2,\ 2,\ 4)$도 가능하네요. $4 \le f(4) \le f(5) \le f(6)$이고 $f(4),\ f(5),\ f(6)$는 4부터 5까지 2개의 값 중에서 중복을 허용하여 3개를 고르면 되니까 ${}_2H_3 = {}_4C_3 = 4$입니다.

25는 $(1,\ 5,\ 5)$가 가능합니다. $5 \le f(4) \le f(5) \le f(6)$이고 이건 무조건 $f(4) = f(5) = f(6) = 5$이네요. 경우의 수는 1입니다.

36은 $(3,\ 3,\ 4)$가 가능합니다. $4 \le f(4) \le f(5) \le f(6)$이고 $f(4),\ f(5),\ f(6)$는 4부터 5까지 2개의 값 중에서 중복을 허용하여 3개를 고르면 되니까 ${}_2H_3 = {}_4C_3 = 4$입니다.

49는 불가능하죠? 64는 $(4,\ 4,\ 4)$가 가능합니다. $4 \le f(4) \le f(5) \le f(6)$이고 $f(4),\ f(5),\ f(6)$는 4부터 5까지 2개의 값 중에서 중복을 허용하여 3개를 고르면 되니까 ${}_2H_3 = {}_4C_3 = 4$입니다.

81은 불가능합니다. 100은 $(4,\ 5,\ 5)$가 가능합니다. $5 \le f(4) \le f(5) \le f(6)$이고 이건 무조건 $f(4) = f(5) = f(6) = 5$이네요. 경우의 수는 1입니다.

121도 불가능합니다. 따라서 구하는 경우의 수는 $35+4+20+10+4+4+1+4+4+1=87$입니다. 답은 ②번이네요.

9. 두 연속확률변수 X와 Y가 갖는 값의 범위는 각각 $0 \leq X \leq a$, $0 \leq Y \leq a$이고, X와 Y의 확률밀도함수를 각각 $f(x)$, $g(x)$라 하자. $0 \leq x \leq a$인 모든 실수 x에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는

$$f(x) = b,\ g(x) = \mathrm{P}(0 \leq X \leq x)$$

이다. $\mathrm{P}(0 \leq Y \leq c) = \frac{1}{2}$일 때, $(a+b) \times c^2$의 값을 구하시오.

(단, a, b, c는 상수이다.) 〔2022년 7월 확통 29〕

9. 정답 5 〔2022년 7월 확통 29〕

1) 확률의 총합은 1이다, 정적분 관찰

일단 연속확률변수 X, Y가 있는데 $0 \le X \le a$, $0 \le Y \le a$일 때 확률밀도함수를 $f(x)$, $g(x)$라 한답니다. 그 함수는 $f(x) = b$, $g(x) = \mathrm{P}(0 \le X \le x)$라네요.

일단 $f(x)$는 직선의 형태입니다. 확률의 총합은 1인데 이건 밑변의 길이가 a이고 높이가 b인 직사각형의 넓이를 구하는 것과 같으니까 $ab = 1$이네요.

$g(x)$는 $g(x) = \mathrm{P}(0 \le X \le x)$라고 합니다. 일단 0부터 x까지의 X의 확률밀도함수 $f(x)$의 정적분 값은 bx이죠? 밑변의 길이가 x이고 높이가 b이니까요. $g(x) = bx$이네요.

$g(x)$도 마찬가지로 확률의 총합이 1이므로 0부터 a까지의 정적분 값이 1이 나와야 합니다. 이거는 밑변의 길이가 a이고 높이가 $ab(=1)$인 삼각형의 넓이를 구하는 것과 같으니까 $\frac{a}{2} = 1$입니다. $a = 2$이네요.

$b = \frac{1}{2}$입니다.

이때 $\mathrm{P}(0 \le Y \le c) = \frac{1}{2}$라네요. 이것도 마찬가지로 밑변의 길이가 c이고 높이가 $bc\left(= \frac{c}{2}\right)$인 삼각형의 넓이이니까 $\frac{c^2}{4}$입니다. 이게 $\frac{1}{2}$이니까 $c^2 = 2$이네요. 따라서 $(a+b) \times c^2 = \left(2 + \frac{1}{2}\right) \times 2 = 5$입니다.

10. 각 면에 숫자 1, 1, 2, 2, 2, 2가 하나씩 적혀 있는 정육면체 모양의 상자가 있다. 이 상자를 6번 던질 때, n $(1 \le n \le 6)$번째에 바닥에 닿은 면에 적혀 있는 수를 a_n이라 하자. $a_1 + a_2 + a_3 > a_4 + a_5 + a_6$일 때, $a_1 = a_4 = 1$일 확률은 $\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) 〔2022년 7월 확통 30〕

10. 정답 133 〔2022년 7월 확통 30〕

1) 조건부확률 A일 때 B일 확률 $= \dfrac{P(A\cap B)}{P(A)} = \dfrac{A\text{이고 }B\text{일 경우의 수}}{A\text{일 경우의 수}}$

각 면에 숫자 1, 1, 2, 2, 2, 2이 하나씩 적혀 있는 정육면체 모양의 상자가 있답니다. 그냥 주사위죠? 1이 2개, 2가 4개가 있는 주사위가 있답니다. 이걸 6번 던져서 n번째에 바닥에 있는 수를 a_n이라고 한다네요. 이때 $a_1+a_2+a_3>a_4+a_5+a_6$일 때 $a_1=a_4=1$일 확률을 구하랍니다. 구하는 확률은

$\dfrac{a_1=a_4=1}{a_1+a_2+a_3>a_4+a_5+a_6}$입니다.

일단 분모부터 구해봅시다. 일단 왼쪽 3개와 오른쪽 3개가 있는데 3개의 숫자가 가능한 경우는 3, 4, 5, 6이 가능합니다. 3은 (1, 1, 1)일 때, 4는 (1, 1, 2)일 때 가능하고, 5는 (1, 2, 2)일 때 가능하고, 6은 (2, 2, 2)일 때 가능하죠. 이때 주사위에서 1을 뽑을 확률은 $\dfrac{1}{3}$이고 2를 뽑을 확률은 $\dfrac{2}{3}$이니까 뽑고 순서를 배열해주면 되겠죠? (1, 1, 2)의 경우 (1, 1, 2)도 가능하지만 (2, 1, 1)도 가능하고 (1, 2, 1)도 가능하니까요.

3은 $\left(\dfrac{1}{3}\right)^3=\dfrac{1}{27}$, 4는 ${}_3C_2\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\times\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{6}{27}$, 5는 ${}_3C_1\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^1\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{12}{27}$, 6은 $\left(\dfrac{2}{3}\right)^3=\dfrac{8}{27}$입니다.

$a_1+a_2+a_3>a_4+a_5+a_6$가 되려면 (4, 3), (5, 3), (6, 3), (5, 4), (6, 4), (6, 5)가 되어야 합니다.

먼저 (4, 3)의 경우 $\dfrac{1}{27}\times\dfrac{6}{27}=\dfrac{6}{3^6}$입니다. (5, 3)의 경우 $\dfrac{1}{27}\times\dfrac{12}{27}=\dfrac{12}{3^6}$입니다. (6, 3)의 경우 $\dfrac{1}{27}\times\dfrac{8}{27}=\dfrac{8}{3^6}$입니다. (5, 4)의 경우 $\dfrac{6}{27}\times\dfrac{12}{27}=\dfrac{72}{3^6}$입니다. (6, 4)의 경우 $\dfrac{6}{27}\times\dfrac{8}{27}=\dfrac{48}{3^6}$입니다. (6, 5)의 경우 $\dfrac{8}{27}\times\dfrac{12}{27}=\dfrac{96}{3^6}$입니다. 총 $\dfrac{6+12+8+72+48+96}{3^6}=\dfrac{242}{3^6}$이네요.

이제 $a_1=a_4=1$인 확률을 구해봅시다. 왼쪽 오른쪽 다 1이 존재해야 하니까 가능한 경우는 (4, 3), (5, 3), (5, 4)이네요.

이때는 조심해야 해요. 왜냐하면 각각의 첫 번째 숫자가 1로 고정되어 있기 때문에 이거는 빼고 생각해야 하거든요. (4, 3)의 경우 왼쪽의 4는 (1, 1, 2) 중에서 첫 번째의 경우가 1이기 때문에 나머지에서 1, 2를

뽑으면 됩니다. 확률은 ${}_2C_1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{27}$ 입니다. 오른쪽의 3은 그냥 $\frac{1}{27}$이죠. 따라서 $\frac{4}{3^6}$ 입니다.

(5, 3)의 경우 왼쪽의 5는 (1, 2, 2) 중에서 첫 번째의 경우가 1이기 때문에 나머지에서 2, 2를 뽑으면 됩니다. 확률은 $\left(\frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{27}$ 입니다. 오른쪽의 3은 그냥 $\frac{1}{27}$이죠. 따라서 $\frac{4}{3^6}$ 입니다.

(5, 4)의 경우 왼쪽의 5는 (1, 2, 2) 중에서 첫 번째의 경우가 1이기 때문에 나머지에서 2, 2를 뽑으면 됩니다. 확률은 $\left(\frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{27}$ 입니다. 오른쪽의 4는 (1, 1, 2) 중에서 첫 번째의 경우가 1이기 때문에 나머지에서 1, 2를 뽑으면 됩니다. 확률은 ${}_2C_1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{27}$ 입니다. 총 $\frac{16}{3^6}$ 이네요.

$\frac{4+4+16}{3^6} = \frac{24}{3^6}$ 입니다.

구하는 확률은 $\dfrac{\frac{24}{3^6}}{\frac{242}{3^6}} = \frac{24}{242} = \frac{12}{121}$ 입니다. $p = 121$, $q = 12$이므로 $p + q = 133$이네요.