# 46

2021학년도 수능(가형) 30번

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)=f(\sin^2 \pi x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

| |
|---|
| (가) $0<x<1$에서 함수 $g(x)$가 극대가 되는 $x$의 개수가 3이고, 이때 극댓값이 모두 동일하다. |
| (나) 함수 $g(x)$의 최댓값은 $\frac{1}{2}$이고 최솟값은 0이다. |

$f(2)=a+b\sqrt{2}$일 때, $a^2+b^2$의 값을 구하시오. (단, $a$와 $b$는 유리수이다.) [4점]29

sol1)

$0<x<1$ 일 때 $y=\sin^2\pi x$ 는 $x=\frac{1}{2}$ 에서 극값 가짐.

$\longrightarrow g(x)$는 $x=\frac{1}{2}$ 에서 극값 가짐

$f$가 $x=\alpha$ 에서 극대, $x=\beta$에서 극소.

$\longrightarrow g(x)$는 $\sin^2\pi x=\alpha$ , $\sin^2\pi x=\beta$ 인 $x$에서 극값 가짐.

$0<x<1$ 일 때 극값 $x$ 개수 : 3

$\longrightarrow$ 극값 개수 최소 : 5개

$\therefore 0<\alpha<\beta<1$

$y=\sin^2\pi x$ 와 $y=\alpha, \beta, 1$ 과 만나는 점의 좌표

: $x_1$ $x_2$ $\frac{1}{2}$ $x_3$ $x_4$ (크기순)

$\longrightarrow x_1, \frac{1}{2}, x_4$ 에서 극대

$\sin^2\pi x_1=\sin^2\pi x_4=\alpha$

# 46



$g(x_1)=g\left(\frac{1}{2}\right)=g(x_k) \longrightarrow f(\alpha)=f(1)=\frac{1}{2}$

$\therefore f(x)-\frac{1}{2}=(x-\alpha)^2(x-1)$

$\therefore \beta=\frac{\alpha+2}{3}$

i) $f(\beta)=f\left(\frac{\alpha+2}{3}\right)=0$

$\alpha=-\frac{1}{2}$ : 모순

$\longrightarrow f(0)=0$

$\longrightarrow \alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $(\because \alpha>0)$

$\therefore f(x)=\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2(x-1)+\frac{1}{2}$

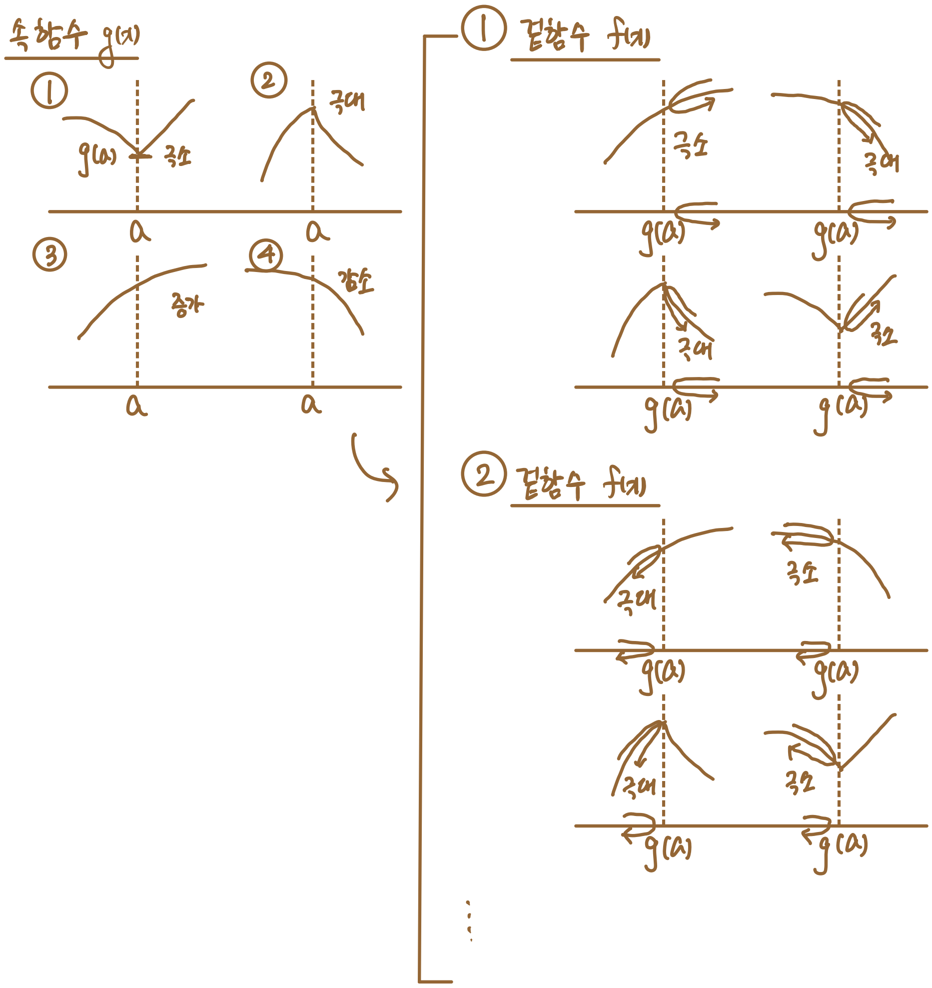
$\therefore f(2)=5-2\sqrt{2}$

$\therefore a^2+b^2=29$

# 46

2021학년도 수능(가형) 30번

* 참고 : 합성함수의 해석



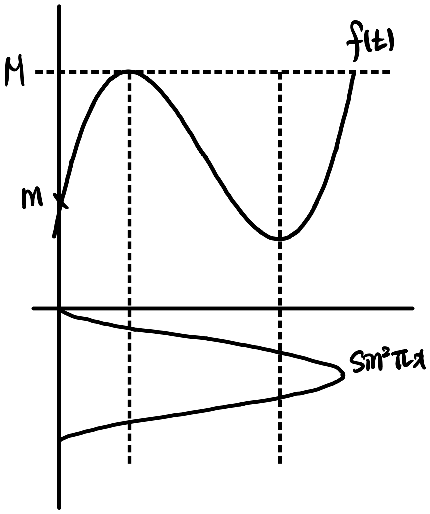

→ 겉함수의 성질을 그대로 따라간다.

# 46

2021학년도 수능(가형) 30번

sol2)

⋮




$\longrightarrow M = \frac{1}{2},\ m = 0$

⋮