이계도함수의 활용 : 접선 개수 판별

Pabloff / 수학 칼럼

접선의 개수에서 고려해야 하는 것

1. 곡선의 오목과 볼록　　2. 가능한 접선의 최대/최소 기울기

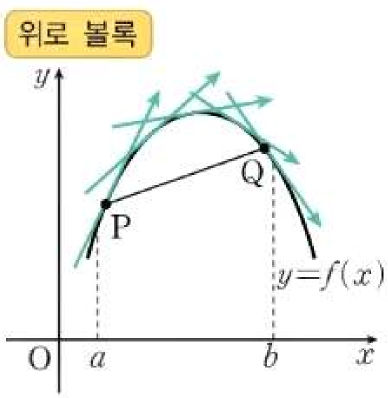
1. 곡선의 오목과 볼록

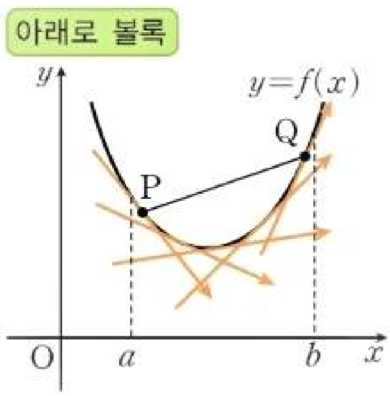
오목과 볼록에 대한 정의

곡선 $y=f(x)$위의 임의의 두 점 P, Q에 대하여
두 점 P, Q 사이에 있는 곡선 부분이 선분 PQ보다 항상 위/아래 쪽에 있을 때
곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 위로/아래로 볼록 혹은 아래로/위로 오목하다고 한다.

여기서 얻어 낼 수 있는 접선의 성질

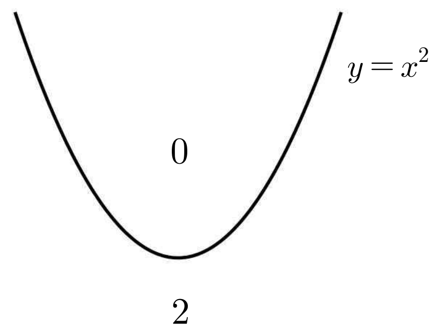
접선은 할선의 극한으로 정의됩니다.
즉, 위로 볼록에서 할선에 극한을 취해보면 **접선이 무조건 곡선의 윗부분에**
아래로 볼록에서 할선에 극한을 취해보면 **접선이 무조건 곡선의 아랫부분에**
그려진다는 것을 알 수 있습니다.





이를 통해 우리가 알 수 있는 것은 곡선 안쪽의 점에서는 접선을 그을 수 없고, 곡선 위 또는 바깥부분의 점에서만 접선을 그을 수 있다는 것입니다.

예시로 $y=x^2$의 그래프를 들 수 있습니다.



곡선을 기준으로 곡선 내에서는 그을 수 있는 접선이 0개이고 곡선 밖에서는 그을 수 있는 접선이 2개임을 알 수 있습니다.

결론1 : 이계도함수를 통해 변곡점을 구해서 곡선의 오목/볼록을 정확히 파악한 후, 곡선의 바깥과 안을 구분하여 접선의 개수를 판별해야 한다.

2. 가능한 접선의 최대/최소 기울기

이계도함수의 또 다른 의미

함수 $f(x)$ ⇒ 도함수 $f'(x)$ ⇒ 이계도함수 $f''(x)$

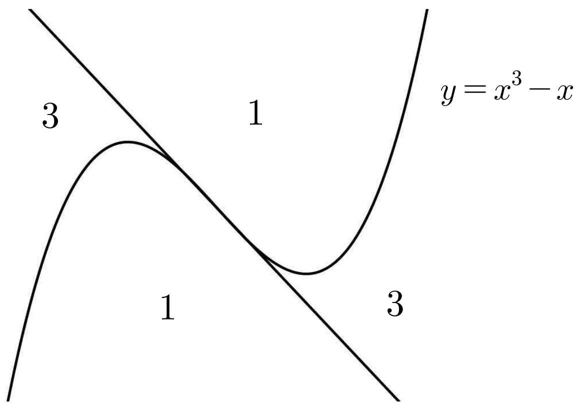
함수 $f(x)$의 입장에서 도함수 $f'(x)$는 접선의 기울기에 대한 정보 제공
함수 $f(x)$의 입장에서 이계도함수 $f''(x)$는 오목/볼록에 대한 정보 제공
한편, 도함수 $f'(x)$의 입장에서 이계도함수 $f''(x)$는 극대/극소에 대한 정보 제공

즉, 이계도함수의 변곡점은 오목/볼록인 닫힌 구간 내에서
접선의 기울기가 최대/최소인 지점입니다.

그리고 <u>곡선 밖의 한 점에서 곡선 위의 임의의 점과 이은 선분의 기울기가 접선의 기울기의 최댓값보다 크거나 최솟값보다 작다면 접선을 그을 수 없는 상태입니다.</u>

<u>즉, 변곡점에서의 접선을 기준으로 접선 개수가 달라집니다.</u>

예시로 $y=x^3-x$의 그래프를 들 수 있습니다.



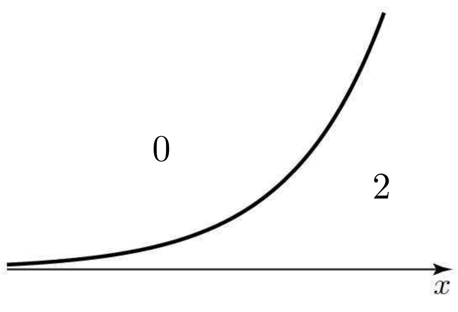
변곡접선을 기준으로 나눠진 구역에서 곡선의 바깥 부분과 안쪽 부분과 가능한 접선의 최대/최소 기울기에 따라 접선의 개수가 달라지는 것을 알 수 있습니다.

점근선

곡선이 점근선에 가까워진다는 말의 의미는
그 곡선의 접선의 기울기가 점근선의 기울기에 한없이 가까워진다는 말과 같습니다.

즉, 점근선의 기울기도 접선의 기울기의 최대/최소에 대한 정보를 주고 있습니다.
<u>따라서, 점근선을 고려해서 접선의 개수를 구해야합니다.</u>

예시로 $y=e^x$의 그래프를 들 수 있습니다.



곡선의 바깥부분에서 점근선을 기준으로 점근선 아랫부분은 접선의 기울기가 0보다 커야하기 때문에 접선을 1개밖에 그을 수가 없습니다. 반면 점근선 윗부분은 접선 2개를 문제없이 그을 수 있습니다.

결론2 : 변곡접선의 기울기와 점근선의 기울기를 고려해서 접선의 최대/최소 기울기를 파악한 후 접선의 개수를 파악해야한다.

결론1, 결론2를 고려하여 접선이 그려질 수 있는 부분과 아닌 부분을 그림을 통해 파악한다면 손쉽게 한 점에서 그을 수 있는 접선의 개수를 파악할 수 있습니다.

(예외적으로 공통접선이 생기는 경우가 있는데, 이때는 공통접선 위의 점들에 한해서 접선의 개수를 하나 덜 세주면 됩니다. 다만, 공통접선은 최소한 변곡점이 두 개 이상이어야 생길 수 있으므로 수능 수준의 문제에서는 공통접선이 없거나 많아봤자 한 개 수준으로 나올 것으로 예상합니다. 위 내용들을 잘 응용한다면 공통접선의 존재여부도 충분히 따질 수 있습니다. 연습 문제의 141130이 왜 공통접선이 존재하지 않는지 위 내용들을 이용해 추론해보기를 권합니다.)

적용 가능한 킬러 문제 (연습용)

기출 - 2014학년도 수능 수학 (가)형 30번

1. 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=f(x)e^{-x}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 점 $(1, g(1))$과 점 $(4, g(4))$는 곡선 $y=g(x)$의 변곡점이다.
(나) 점 $(0, k)$에서 곡선 $y=g(x)$에 그은 접선의 개수가 3인 k의 값의 범위는 $-1<k<0$이다.

$g(-2)\times g(4)$ 의 값을 구하시오. [4점]

자작 문제 - 2020학년도 MC THE MATH 모의고사 30번

2. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$와 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $g(x)=\dfrac{f(x)}{e^x}$ 이고 함수 $g(x)$의 최솟값은 $-4e$이다.
>
> (나) 방정식 $\ln|f(x)|-3\ln 2=0$ 의 근은 3개다.

함수 $|g(x-3)-mx-n|$ 가 미분 불가능한 점의 개수를 $h(m)$라 할 때, 함수 $h(m)$가 불연속인 점의 개수가 3개인 음수 n의 최댓값은 ae^b 이다. a^2b의 값을 구하시오. (단, a와 b는 유리수이다.) [4점]

자작 문제 - 2021학년도 6월 MC THE MATH 모의고사 20번

3. 함수 $f(x)=\dfrac{x^2+ax+b}{e^x}$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

함수 $f(x)-px-q$의 그래프가 x축과 두 점에서 접하도록 하는 어떤 실수 p, q가 존재한다.

$f(1)=\dfrac{6}{e}$ 일 때, 가능한 a의 범위는 $\alpha<a<\beta$, $\gamma<a<\delta$이다. $\alpha+\beta+\gamma+\delta$의 값을 구하시오. [4점]

답 : 72, 16, -8