2016학년도 대학수학능력시험 6월 모의평가
정답 및 해설 (A형)

• 2교시 수학 영역 •

[A 형]

1	④	**2**	⑤	**3**	①	**4**	③	**5**	②
6	④	**7**	①	**8**	③	**9**	④	**10**	③
11	⑤	**12**	②	**13**	⑤	**14**	②	**15**	④
16	②	**17**	①	**18**	①	**19**	⑤	**20**	③
21	③	**22**	11	**23**	10	**24**	19	**25**	2
26	9	**27**	3	**28**	15	**29**	8	**30**	120

1. 정답 ④

$A+2B=\begin{pmatrix}1&2\\1&0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0&1\\3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4\\7&4\end{pmatrix}$

따라서 행렬 $A+2B$의 $(1,2)$성분은 4

2. 정답 ⑤

$8^{\frac{1}{3}}+9^{\frac{1}{2}}=(2^3)^{\frac{1}{3}}+(3^2)^{\frac{1}{2}}=2+3=5$

3. 정답 ①

$\lim_{n\to\infty}\left\{6+\left(\frac{5}{9}\right)^n\right\}=6+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{9}\right)^n=6+0=6$

4. 정답 ③

$a_{13}=a_{11}+2d=a_{11}+14$

$\therefore\ a_{13}-a_{11}=14$

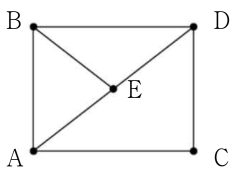
5. 정답 ②

$\log_2 5+\log_2\frac{4}{5}=\log_2 5+\log_2 4-\log_2 5$

$=\log_2 4=2$

6. 정답 ④

그림과 같이 주어진 그래프의 꼭짓점을 A, B, C, D, E 라 할 때, 그래프를 행렬로 나타내면 다음과 같다.



$$\begin{array}{c|ccccc} & A & B & C & D & E \\ \hline A & 0&1&0&1&1\\ B & 1&0&1&0&1\\ C & 0&1&0&1&1\\ D & 1&0&1&0&0\\ E & 1&1&1&0&0\end{array}$$

따라서 모든 성분의 합이 3인 행의 개수는 4개

[다른 풀이]

모든 성분의 합이 3인 행의 개수는 한 꼭짓점으로부터 연결된 길이가 1인 경로의 개수가 3개라는 것을 의미하므로 A, B, D, E 총 4개

7. 정답 ①

$\lim_{x\to1}(x-1)=0$ 이므로, 주어진 식의 극한값이 존재하기 위해서는 $\lim_{x\to1}(4x-a)=0$ 이어야 한다.

$\lim_{x\to1}(4x-a)=4-a=0$

$\therefore\ a=4$

$\lim_{x\to1}\frac{4x-4}{x-1}=4$

$\therefore\ b=4$

8. 정답 ③

$\sum_{k=1}^{11}(5a_k+b_k)=5\sum_{k=1}^{11}a_k+\sum_{k=1}^{11}b_k=5\times4+24=44$

9. 정답 ④

$\lim_{x\to-1}f(x)=1$, $\lim_{x\to1+0}f(x)=3$

$\lim_{x\to-1}f(x)+\lim_{x\to1+0}f(x)=1+3=4$

10. 정답 ③

$(A^{-1})^{-1}=A=\frac{1}{a}\begin{pmatrix}a&0\\1&1\end{pmatrix}$ 이므로

$\frac{a+2}{a}=3$

$\therefore\ a=1$

11. 정답 ⑤

$\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{h}=2\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}$

$=2f'(1)$

$f'(x)=2x+8$ 이므로

$f'(1)=10$

$\therefore\ 2f'(1)=20$

12. 정답 ②

$S_n=\frac{a_1(3^n-1)}{3-1}=\frac{a_1}{2}(3^n-1)$

$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1}{2}\frac{3^n-1}{3^n}=\frac{a_1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)=\frac{a_1}{2}=5$

$\therefore\ a_1=10$

13. 정답 ⑤

$y=g(x)$ 위의 점 $(2,\ g(2))$에서의 접선의 방정식은

$y=g'(2)(x-2)+g(2)=f(2)(x-2)+g(2)$

$=1\cdot(x-2)+g(2)=x-2+g(2)$

이 접선의 y절편이 -5이므로

$-5=-2+g(2)$

$\therefore\ g(2)=-3$

그러므로 이 접선의 x절편은

$0=x-5$

$\therefore\ x=5$

[다른 풀이]

접선의 기울기 $g'(2)=f(2)=1$ 이므로

y절편이 -5일 때, x절편은 5가 된다.

14. 정답 ②

점 $P_n(\sqrt{n},\ n)$ 을 지나고 직선 $y=\sqrt{n}x$ 와 수직인 직선의 방정식은 $y=-\frac{1}{\sqrt{n}}(x-\sqrt{n})+n$ 이므로

$Q_n((n+1)\sqrt{n},\ 0)$, $R_n(0,\ n+1)$

$S_n=\frac{1}{2}\times(n+1)\sqrt{n}\times(n+1)$

따라서 $\sum_{n=1}^{5}\frac{2S_n}{\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{5}\left\{\frac{2}{\sqrt{n}}\times\frac{(n+1)^2\sqrt{n}}{2}\right\}$

$=\sum_{n=1}^{5}(n+1)^2=\sum_{n=1}^{5}(n^2+2n+1)$

$=\frac{5\times6\times11}{6}+2\times\frac{5\times6}{2}+5\ =90$

15. 정답 ④

함수 $y=\log_3 x$ 의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프 $y=f(x)$는 $y=\log_3(x-a)+2$ 이다. 그러므로 $f^{-1}(x)$는

$x=\log_3(y-a)+2$

$x-2=\log_3(y-a)$

$3^{x-2}=y-a$

$y=3^{x-2}+a$

이므로, $a=4$ 이다.

16. 정답 ②

수열 $\{a_n\}$이 공차가 6인 등차수열이므로

$a_2=a_1+6$, $a_8=a_1+42$

$a_2,\ a_k,\ a_8$ 이 이 순서대로 등차수열을 이루므로,

$a_k=\frac{a_2+a_8}{2}=\frac{2a_1+48}{2}=a_1+24$

이고, $a_1+24=a_1+4\cdot6$ 이므로 $a_k=a_5$ 이다.

즉, $k=5$

한편, $a_1,\ a_2,\ a_5$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로,

$(a_1+6)^2=a_1(a_1+24)$

${a_1}^2+12a_1+36={a_1}^2+24a_1$

$12a_1=36$

이므로, $a_1=3$ 이다.

그러므로, $k+a_1=5+3=8$

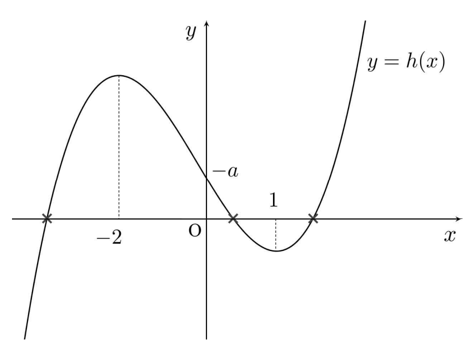
17. 정답 ①

함수 $y=h(x)$를 $h(x)=f(x)-g(x)$ 라 하자.

$h(x)=2x^3+3x^2-12x-a$

방정식 $f(x)=g(x)$의 근은 함수 $y=h(x)$와 x축과의 교점의 x좌표와 같다.

즉, 함수 $y=h(x)$의 그래프가 아래 그림과 같이 x축의 양의 부분과 서로 다른 두 점에서 만나고, 동시에 x축의 음의 부분과 한 점에서 만나야 한다.



$h'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$ 이므로

함수 $y=h(x)$의 그래프는 $x=-2$에서 극댓값 $20-a$를 갖고, $x=1$에서 극솟값 $-7-a$를 갖는다.

그래프가 x축의 양의 방향과 만나기 위해서는 극솟값이 0보다 작아야하고, 그래프가 x축의 음의 방향

과 만나기 위해서는 극댓값이 0보다 커야하며, 양근과 음근 사이에 또 다른 양근을 갖기 위해서는 $x=0$에서의 함숫값인 $-a$가 0보다 커야한다. 즉,

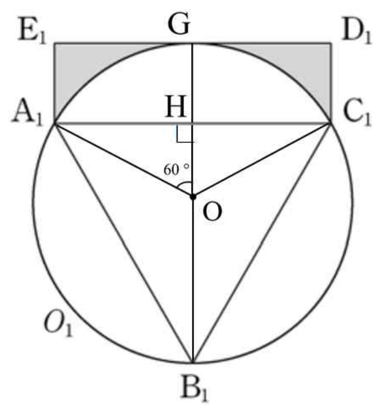
$$20-a>0\,,\quad -a>0\,,\quad -7-a<0$$

이므로, 위의 부등식을 연립하면,

$$-7<a<0$$

가 되어, 주어진 조건을 만족하는 모든 정수 a의 개수는 6개다.

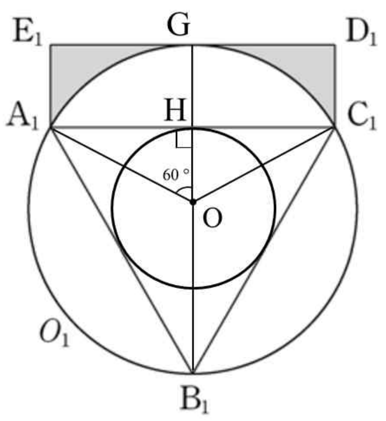
18. 정답 ①



원 O_1의 중심을 O, 점 O에서 선분 A_1C_1, 선분 E_1D_1에 내린 수선의 발을 각각 H, G라고 하자. 점 O는 정삼각형 $A_1B_1C_1$의 외심이자 무게중심이므로 $\angle A_1OC_1=120^\circ$ 이고 $\angle A_1OH=60^\circ$ 이다.

$\overline{OA_1}=2$ 이므로 삼각비에 의해 $\overline{OH}=1$, $\overline{HA_1}=\sqrt{3}$ 이고 $\overline{A_1C_1}=2\sqrt{3}$ 이다.
$\overline{OG}=2$ 이므로 $\overline{GH}=1$ 이고 따라서
사각형 $E_1A_1C_1D_1$ 의 넓이는 $2\sqrt{3}$
활꼴 A_1GC_1 의 넓이는 부채꼴 OA_1C_1 의 넓이에서 삼각형 OA_1C_1 의 넓이를 빼면 된다. 따라서 활꼴의 넓이는 $\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$ 이다.

$\therefore$ 색칠된 부분의 넓이 $=3\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi$



삼각형 $A_1B_1C_1$에 내접하는 원의 반지름은 선분 OH의 길이와 같기 때문에 1이다.

R_1에 그려진 원 O_1의 반지름의 길이는 2이므로 닮음비는 $2:1$이고 넓이비는 $4:1$이다. 따라서 색칠되는 영역의 넓이는 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열을 이룬다.

$$\therefore\quad \frac{3\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi}{1-\frac{1}{4}}=4\sqrt{3}-\frac{16}{9}\pi$$

19. 정답 ⑤

식 (*)의 양변에 S_n을 더하여 정리하면
$S_{n+1}+1=2^n(S_n+1)$
이다. 위 식의 양변에 밑이 2 인 로그를 취하면
$\log_2(S_{n+1}+1)=n+\log_2(S_n+1)$ 이다.
$b_n=\log_2(S_n+1)$ 이라 하면 $b_1=1$ 이고
$b_{n+1}=\boxed{\ n\ }+b_n$
이다. 수열 $\{b_n\}$의 일반항을 구하면

$$b_n=\frac{n^2-n+2}{2}\qquad (n\geq 1)$$

이므로

$$S_n=2^{\frac{n^2-n+2}{2}}-1\qquad (n\geq 1)$$

이다. 그러므로 $a_1=1$ 이고, $n\geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n&=S_n-S_{n-1}\\ &=2^{\frac{n^2-n+2}{2}}-2^{\boxed{\frac{n^2-3n+4}{2}}}\\ &=2^{\boxed{\frac{n^2-3n+4}{2}}}\times(2^{n-1}-1)\end{aligned}$$

이다.

20. 정답 ③

$1\leq a\leq 20$, $1\leq b\leq 20$ 이므로
$0\leq f(a)\leq 1$, $0\leq f(b)\leq 1$ 이다.

① a, b 모두 한 자리 수일 때

$$f(ab)=f(a)f(b)+2=0\cdot 0+2=2$$

그러나 한 자리 수끼리 곱해서 나올 수 있는 수는 최대 두 자리 수이므로 $f(ab)$ 는 2가 될 수 없다.

② a는 두 자리, b는 한 자리 수일 때

$$f(ab)=f(a)f(b)+2=1\cdot 0+2=2$$

두 자리 수와 한 자리 수를 곱한 수가 세 자리 수가 되어야 하므로, 이를 만족하는 순서쌍은

$(20,5), (20,6), \cdots, (20,9)$
$(19,6), (19,7), \cdots, (19,9)$
$(18,6), (18,7), \cdots, (18,9)$
$(17,6), (17,7), \cdots, (17,9)$
$(16,7), (16,8), (16,9)$
$(15,7), (15,8), (15,9)$
$(14,8), (14,9)$
$(13,8), (13,9)$
$(12,9)$

이므로, $a+b$ 의 최솟값은 21 이다.

③ a는 한 자리, b는 두 자리 수일 때
위의 ②번의 경우와 대칭적이므로 마찬가지로 $a+b$ 의 최솟값은 21 이다.

④ a, b 모두 두 자리 수 일 때

$$f(ab)=f(a)f(b)+2=1\cdot 1+2=3$$

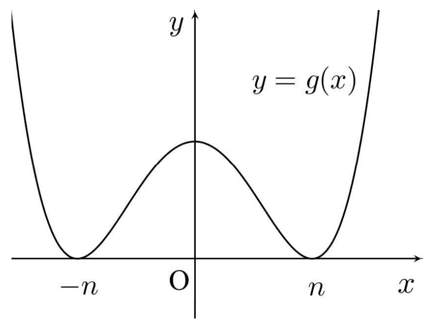
그러나 20 이하의 두 자리 수끼리 곱해서 나올 수 있는 수는 최대 세 자리 수이므로 $f(ab)$ 는 3이 될 수 없다.

그러므로, $a+b$ 의 최솟값은 21 이다.

21. 정답 ③

$f(n)=0$ 이므로, $f(x)$ 는 $x-n$ 을 인수로 갖는다. 그러므로 사차함수 $y=(x+n)f(x)$ 의 그래프는 x축과 $x=-n, n$ 에서 만난다. 그런데 모든 실수 x에 대하여 $(x+n)f(x)\geq 0$ 이어야 하므로, 함수 $y=(x+n)f(x)$ 의 그래프가 x축보다 아래쪽으로 내려가지 않아야 한다.

즉, 함수 $y=(x+n)f(x)$ 는 아래 그림과 같이 x축과 $x=-n, n$ 에서 접해야 한다.



$$(x+n)f(x)=(x+n)^2(x-n)^2$$

이므로

$$f(x)=(x+n)(x-n)^2$$

이다.

$$f'(x)=(x-n)^2+2(x+n)(x-n)=(x-n)(3x+n)$$

이므로, 극댓값 a_n은 $x=-\frac{n}{3}$ 에서 갖는다. 즉,

$$a_n=f\left(-\frac{n}{3}\right)=\frac{33}{27}n^3$$

이므로, a_n이 자연수가 되도록 하는 자연수 n의 최솟값은 3이다.

22. 정답 11

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+7}{x-1}=\frac{2^2+7}{2-1}=\frac{11}{1}=11$$

23. 정답 10

$f'(x)=3x^2+10$, $f'(0)=10$

24. 정답 19

$$\sum_{k=1}^{10}(2k+a)=2\cdot\frac{10\cdot 11}{2}+10a=110+10a=300$$

$10a=190$, $a=19$

25. 정답 2

방정식 $\begin{pmatrix}2a & -1\\ 8 & a-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$이 무수히 많은 해를

갖기 위해서는 행렬 $\begin{pmatrix}2a & -1\\ 8 & a-4\end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않아야 한다. 즉,

$$2a(a-4)+8=2a^2-8a+8=2(a-2)^2=0$$

이므로, $a=2$

26. 정답 9

무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=0$이다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+9n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}+9=0+9=9$$

27. 정답 3

$f'(x)=x^2-9=(x+3)(x-3)$ 이므로
구간 $-3\le x\le 3$ 에서 $f'(x)\le 0$이 되어 함수 $y=f(x)$가 감소한다. 그러므로 a의 최댓값은 3이다.

28. 정답 15

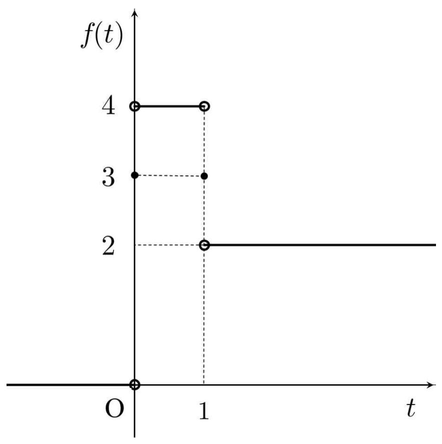
$$2^{f(x)}\le 8 \iff f(x)\le 3$$

의 해가 $x\le -4$ 이므로, $f(-4)=3$ 이다.
$f(-5)=0$ 이므로,

$$f(x)=3x+15\ ,\quad f(0)=15$$

29. 정답 8

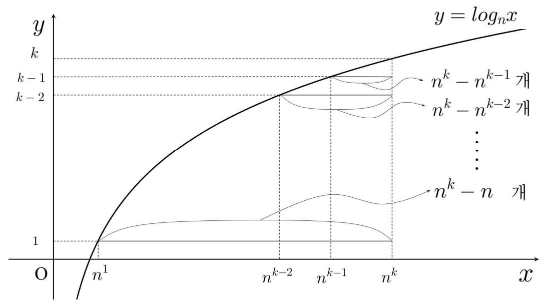
실수 t에 대하여 함수 $f(t)$의 그래프는 다음과 같다.



이차함수 $f(t)$에 대하여 함수 $f(t)g(t)$가 모든 실수에서 연속이려면 $f(t)$가 불연속인 t에서 $g(t)$가 0이 되어야 한다. 즉, $f(t)$가 $t=0,1$에서 불연속이므로 $g(0)=g(1)=0$이어야 한다.
그러므로 $g(t)=t(t-1)$ 이고,
$f(3)+g(3)=2+6=8$ 이다.

30. 정답 120

① $a<n^k$ 일 때
주어진 조건을 만족하는 영역을 xy좌표평면에 나타내면 그림과 같다.



$b=1$ 일 때, 부등식을 만족하는 a의 개수 : n^k-n
$b=2$ 일 때, 〃 : n^k-n^2
$b=3$ 일 때, 〃 : n^k-n^3

⋮

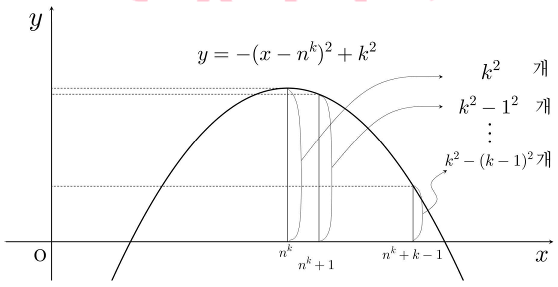
$b=k-2$ 일 때, 〃 : n^k-n^{k-2}
$b=k-1$ 일 때, 〃 : n^k-n^{k-1}

이를 만족하는 순서쌍 (a,b)의 개수는

$$\sum_{i=1}^{k-1}(n^k-n^i)=(k-1)n^k-\frac{n(n^{k-1}-1)}{n-1}$$

이다.

② $a\ge n^k$ 일 때
주어진 조건을 만족하는 영역을 xy좌표평면에 나타내면 그림과 같다.



$a=n^k$일 때, 부등식을 만족하는 b의 개수 : k^2
$a=n^k+1$ 일 때, 〃 : k^2-1^2
$a=n^k+2$ 일 때, 〃 : k^2-2^2

⋮

$a=n^k+k-1$ 일 때, 〃 : $k^2-(k-1)^2$
$a=n^k+k$ 일 때, 〃 : $k^2-k^2=0$

이를 만족하는 순서쌍 (a,b)의 개수는

$$\sum_{i=1}^{k}\{k^2-(i-1)^2\}=\sum_{i=1}^{k}k^2-\sum_{i=1}^{k}(i-1)^2$$
$$=\sum_{i=1}^{k}k^2-\sum_{i=1}^{k-1}i^2=k^3-\frac{k(k-1)(2k-1)}{6}$$

①과 ②에 의하여 주어진 조건을 만족하는 순서쌍 (a,b)의 총 개수는

$$(k-1)n^k-\frac{n(n^{k-1}-1)}{n-1}+k^3-\frac{k(k-1)(2k-1)}{6}$$

이다.

i) $n=2$일 때, 순서쌍 (a,b)의 총 개수는

$$(k-1)2^k-2(2^{k-1}-1)+k^3-\frac{k(k-1)(2k-1)}{6}$$

이고, 이때 $k=5$이면 총 193개이지만, $k=6$이면 419개가 되어 $n=2$일 때 순서쌍의 총 개수가 300 이상이 되는 k의 최솟값은 6이다. 즉, $f(2)=6$

ii) $n=3$일 때, 순서쌍 (a,b)의 총 개수는

$$(k-1)3^k-\frac{3(3^{k-1}-1)}{2}+k^3-\frac{k(k-1)(2k-1)}{6}$$

이고, 이때 $k=4$이면 총 254개이지만, $k=5$이면 947개가 되어 $n=3$일 때 순서쌍의 총 개수가 300 이상이 되는 k의 최솟값은 5이다. 즉, $f(3)=5$

iii) $n=4$일 때, 순서쌍 (a,b)의 총 개수는

$$(k-1)4^k-\frac{4(4^{k-1}-1)}{3}+k^3-\frac{k(k-1)(2k-1)}{6}$$

이고, 이때 $k=3$이면, 총 130개이지만, $k=4$이면 734개가 되어 $n=4$일 때 순서쌍의 총 개수 300 이상이 되는 k의 최솟값은 4이다. 즉, $f(4)=4$

i), ii), iii)에 의하여

$$f(2)\times f(3)\times f(4)=6\times 5\times 4=120$$