제 2 교시

2024학년도 TAEO 1회 문제지

수학 영역

홀수형

성명	

수험 번호					—				

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

이 불꽃이 저 태양보다 뜨거울 테니

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형(홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

2024 TAEO 1회 문제지

제 2 교시

수학 영역

홀수형

5지선다형

1. $\left(\dfrac{4}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{4}}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\left(2^{2-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}} = \boxed{2}$

2. 함수 $f(x)=2x^2+3$ 에 대하여 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{\sqrt{x}-1}$ 의 값은? [2점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}\times(\sqrt{x}+1)$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\times(\sqrt{x}+1)$

$=f'(1)\times2$

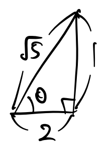
$=2(4)=\boxed{8}$

3. $\cos\left(\dfrac{1}{2}\pi+\theta\right)=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ 이고 $\cos\theta>0$ 일 때, $\tan\theta$ 의 값은? [3점]

① -2 ② $-\dfrac{1}{2}$ ③ 1 ④ $\dfrac{5}{2}$ ⑤ $\dfrac{7}{2}$

$-\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ $\sin\theta<0,\ \cos\theta>0$

$\therefore \tan\theta<0$



$\tan\theta=-\dfrac{1}{2}$

4. 함수

$$f(x)=\begin{cases}7x-2a & (x\le a)\\ ax+4 & (x>a)\end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 상수 a 의 값의 합은? [3점] ↳ $x=a$ 만 확인!

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f(a^-)=7a-2a=5a$

$f(a^+)=a^2+4$

$a^2+4=5a,\ a=1,4$

$4+1=\boxed{5}$

5. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$7a_1=a_5,\ \underbrace{a_2+a_3+a_4}_{3a_3}=24$$

일 때, a_2의 값은? [3점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

$a_3=8$

$7(a_3-2d)=a_3+2d$

$7(8-2d)=8+2d$

$16d=48,\ d=3$

$\therefore a_2=a_3-d=\boxed{5}$

6. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_2^x f(t)dt=x^2-ax+2$$

를 만족시킬 때, $f(a)$의 값은? [3점]

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

$x=2$ 대입 → $0=4-2a+2$, $a=3$

양변 미분 → $f(x)=2x-a$

$\therefore f(a)=a=\boxed{3}$

7. 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열 $\{a_n\}$이

$$\sum_{k=1}^{5}\left(-\sqrt{a_k}+2\sqrt{a_{k+2}}\right)=-\frac{31}{16}$$

을 만족시킬 때, a_2의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$-\sqrt{a_k}+2\sqrt{a_{k+2}}$

$=-\sqrt{a_k}+2\sqrt{a_{k+1}\times\frac{1}{4}}$

$=-\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}$

$\sum_{k=1}^{5}\left(-\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}\right)=-\sqrt{a_1}+\sqrt{a_6}$

$=-\sqrt{a_1}+\sqrt{a_1\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^5}$

$=\sqrt{a_1}\left(-1+\frac{1}{2^5}\right)$

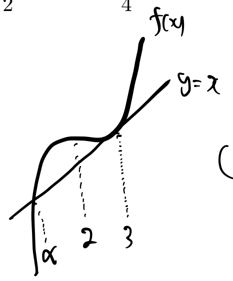
$=\frac{-31}{32}\sqrt{a_1}\ =-\frac{31}{16}$

$\therefore \sqrt{a_1}=2,\ a_1=4$

$a_2=a_1\times\frac{1}{4}=\boxed{1}$

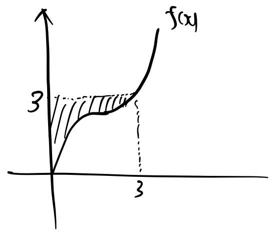
8. 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 $x=3$에서 접한다. $f'(2)=0$일 때, $\int_0^3 f^{-1}(x)dx$의 값은? [3점]

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{7}{4}$ ③ 2 ④ $\frac{9}{4}$ ⑤ $\frac{5}{2}$



(실근합) = 2+2+2
= α+3+3

∴ α=0



$f(x)=a(x-2)^3+b$ & $f(3)=3$ & $f'(3)=1$

↳ $f(x)=\frac{1}{3}(x-2)^3+\frac{8}{3}$

$\int_0^3 f^{-1}(x)dx = 3\cdot3-\int_0^3 f(x)dx$

$=\frac{9}{4}$

9. 자연수 n에 대하여 x에 대한 방정식

$$x^{n+1}-64^{\frac{1}{n}}=0$$

의 실근 중 양수인 것을 a_n이라 하자. $a_1\times\cdots\times a_n$이 정수가 되도록 하는 모든 n의 값의 합은? [4점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

$x^{n+1}=64^{\frac{1}{n}} \Rightarrow x=64^{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n+1}}=2^{\frac{6}{n(n+1)}}$

$\therefore a_n=2^{\frac{6}{n(n+1)}}=2^{6(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})}$

$a_1\times a_2\cdots\times a_n=2^{6(1-\frac{1}{n+1})}$

$=2^{\frac{6n}{n+1}} \Rightarrow$ 정수

$n+1$이 6의 약수

$n+1=1,2,3,6$

$n=\cancel{0},1,2,5$

$1+2+5=8$

10. 함수 $f(x)=2x^3-6x^2-18x$와 사차함수 $g(x)$에 대하여 함수

$$h(x)=|f(x)-g'(t)(x-t)-g(t)|$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 실수 t의 값이 3, 6뿐이고 $g(4)=-90$일 때, $g(5)$의 값은? [4점]

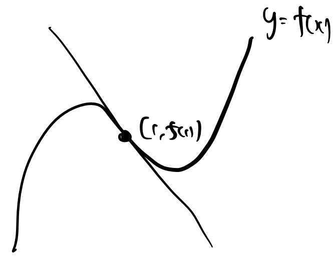
① -110 ② -112 ③ -114 ④ -116 ⑤ -118

$h(x)=|f(x)-((t,g(t))$에서의 접선$)| \Rightarrow$ 미분가능

∴ $(t,g(t))$에서 접선 = $f(x)$의 변곡접선

$f'(x)=6x^2-12x-18$

$f''(x)=12x-12=0 \to x=1,\ f'(1)=-24,\ f(1)=-22$

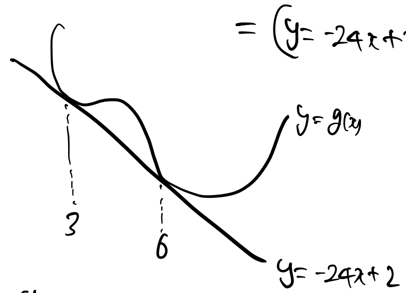


$y=f'(1)(x-1)+f(1)$

$=-24x+2$

$((3,g(3))$에서의 접선$)=((6,g(6))$에서의 접선$)$

$=(y=-24x+2)$



$g(x)=k(x-3)^2(x-6)^2-24x+2$

$g(4)=k\cdot(4)-94=-90$

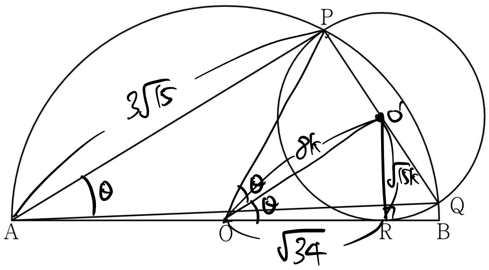
$k=1$

$g(5)=k\cdot4\cdot1-118$

$=-114$

11. 그림과 같이 중심이 O이고 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 반원 위의 두 점 P, Q에 대해 선분 PQ를 지름으로 하는 원이 선분 AB와 점 R에서 접한다. $\overline{AP}=3\sqrt{15}$, $\overline{OR}=\sqrt{34}$, $\sin\angle PAQ=\frac{\sqrt{15}}{8}$ 일 때, $\overline{AQ}$의 값은? [4점]

θ



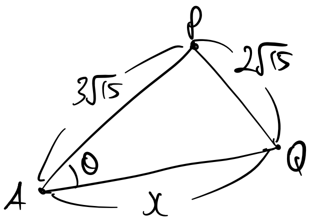
① $\sqrt{15}$ ② $2\sqrt{15}$ ③ $3\sqrt{15}$ ④ $4\sqrt{15}$ ⑤ $5\sqrt{15}$

$\sin\theta=\frac{\sqrt{15}}{8}$, $\cos\theta=\frac{7}{8}$

$(8k)^2=(\sqrt{34})^2+(\sqrt{15}k)^2$

$\hookrightarrow k=1$

$\therefore \overline{OP}=\sqrt{15}$



코사인 법칙) $(2\sqrt{15})^2=(3\sqrt{15})^2+x^2-2\cdot x\cdot 3\sqrt{15}\cdot\cos\theta$

$2^2\cdot 15=3^2\cdot 15+x^2-\frac{21}{4}\sqrt{15}x$

$x^2-\frac{21}{4}\sqrt{15}x+5\cdot 15=0$

$4x^2-21\sqrt{15}x+20(\sqrt{15})^2=0$

4 $-5\sqrt{15}$

1 $-4\sqrt{15}$

$\therefore x=4\sqrt{15}$

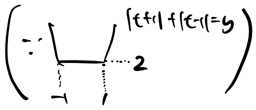
12. 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$인 사차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여
> $g(x)=|f(x)+1|+|f(x)-1|$ 이다.
>
> (나) $f(-1)=-1$, $g(1)=2$
>
> (다) 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 오직 $x=a$에서 불연속이다.

방정식 $f(x)=\frac{2\sqrt{15}}{9}x$이 서로 다른 3개의 실근을 가질 때, $f(a)\times g(a)$의 값은? [4점]

① $\frac{\sqrt{15}}{9}$ ② $\frac{2\sqrt{15}}{9}$ ③ $\frac{\sqrt{15}}{3}$ ④ $\frac{4\sqrt{15}}{9}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{15}}{9}$

$g(x)=|f(x)+1|+|f(x)-1|\geq 2$



(나)에서, $g(-1)=g(1)=2$

$\therefore g(x)=\frac{1}{2}(x+1)^2(x-1)^2+2$

(가)를 해석하자.

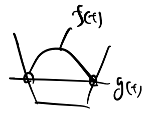
모든 t, $g(t)=|f(t)+1|+|f(t)-1|$

$\downarrow$ ($y=|x+1|+|x-1|$ 과 $y=g(t)$의 교점 x좌표)

$\|$

$f(t)$

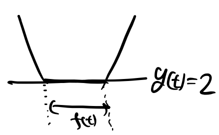
i) $t\neq\pm1$, $g(t)>2$ 이므로



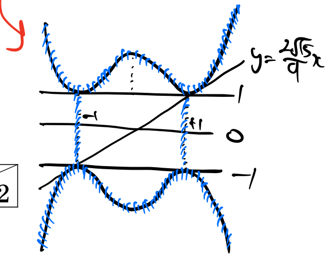
$f(t)=\pm\frac{1}{2}g(t)$

$=\pm\left(\frac{1}{4}(t-1)^2(t+1)^2+1\right)$

ii) $t=\pm1$, $g(t)=2$ 이므로

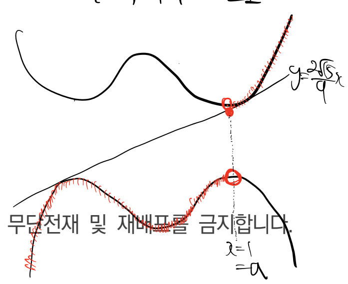


$-1\leq f(t)\leq 1$



$f(-1)=-1$, $f(x)=\frac{2\sqrt{15}}{9}x$ 실근 3개

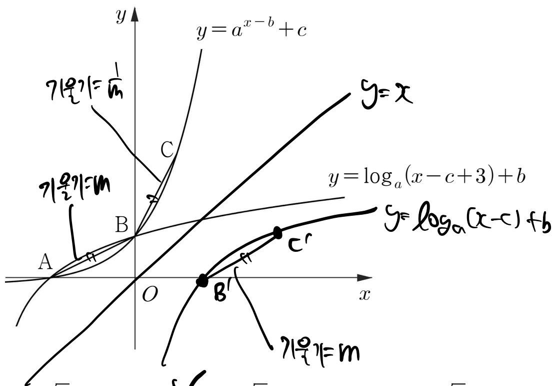
$f(x)$ 불연속 1개 이므로



$\therefore f(a)\cdot g(a)=\frac{2\sqrt{15}}{9}\times 2$

▨: $f(x)$ 가능

13. 그림과 같이 두 곡선 $y=a^{x-b}+c$와 $y=\log_a(x-c+3)+b$가 서로 다른 두 점 A, B에서 만난다. 곡선 $y=a^{x-b}+c$ 위의 점 C$(1,3)$에 대하여 $\overline{AB}=\overline{BC}$이고 두 직선 AB와 BC의 기울기의 곱이 1일 때, a의 값은? (단, a, b, c는 상수이다.) [4점]

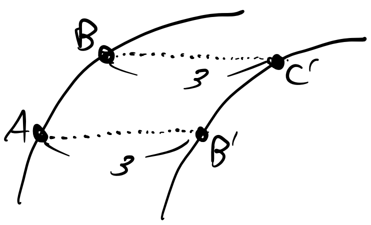


① $1+\sqrt{2}$ ② $1+\sqrt{3}$ ③ $2+\sqrt{2}$
④ $2+\sqrt{3}$ ⑤ $2+\sqrt{5}$

$\overline{AB}=\overline{B'C'}$ & $\overleftrightarrow{AB}\,//\,\overleftrightarrow{B'C'}$

A의 대응점 B'

B의 대응점 C'



$C'(3,1) \rightarrow B(0,1)$

$A(-2,0)$

A, B, C가 $y=a^{x-b}+c$ 위에 있음

$0=a^{-2-b}+c$ $\quad c=-a^{-2-b}$ $\quad a^{-b}(a^{-2}-1)=-1$

$1=a^{-b}+c$ $\quad =1-a^{-b}$ $\quad \Rightarrow a^{-b}(1-a)=-2$

$3=a^{1-b}+c$ $\quad =3-a^{1-b}$

$\therefore \frac{-1}{a^{-2}-1}=\frac{-2}{1-a}$

↳ $a=1+\sqrt{3}$

14. 최고차항의 계수가 a인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases}|x+a| & (x\ge 0)\\ f(x) & (x<0)\end{cases}$$

라 하자. 함수

$$h(x)=\left|\int_0^x g(t)dt-k\right|$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 실수 k의 값이 18뿐일 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a는 상수이다.) [4점]

〈 보 기 〉

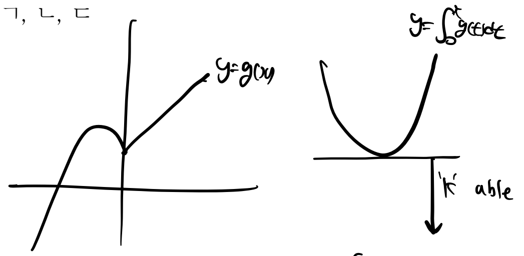
ㄱ. $a<0$

ㄴ. 함수 $f(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 세 점에서 만난다.

ㄷ. 함수 $\int_0^x g(t)dt$가 $x=-3$에서 극대일 때, $f'(0)\le -7$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

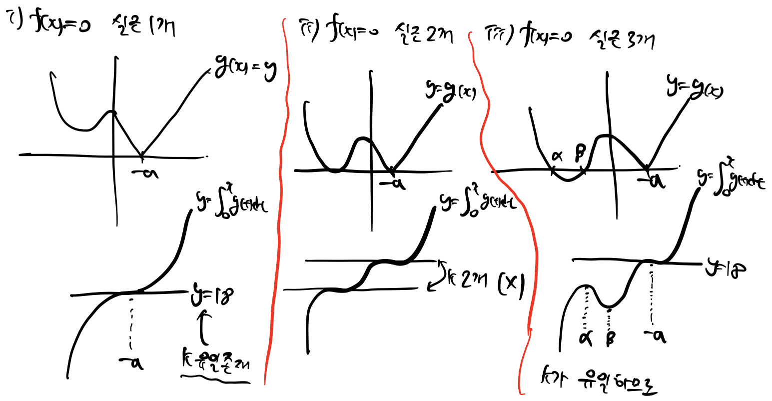
① $a>0$ 이면,



$\therefore$ (×)

ㄱ. (○)

② $a<0$

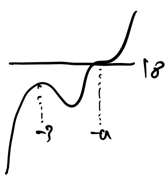


$\int_0^{\alpha} g(t)dt \le 18$

i)에 의해, ㄴ. (×)

ㄷ. $\int_0^t g(t)dt$가 $x=-3$에서 극대 ⇒ iii)만 가능

ㄷ. (○)



$\int_0^{-a} g(t)dt=18 \Rightarrow a=-6$

$f(x)=-6x^3+bx^2+cx+6$

$f(-3)=0$ & $\int_0^{-3} g(t)dt \le 18 \Rightarrow c \le -7$, $f'(0)=c$

15. 모든 항이 정수인 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 수열 $\{c_n\}$이

$$c_n = a_n b_n$$

이고 수열 $\{c_n\}$과 자연수 r이 다음 조건을 만족시킨다.

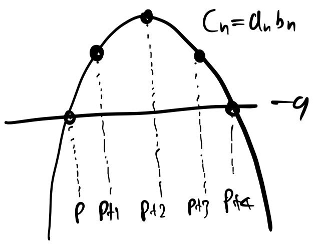
> (가) $c_n = -9$인 자연수 n의 개수는 2이고, $c_n > -9$인 자연수 n의 개수는 3이다.
> (나) $c_{r+5} = r$

$a_1 > b_1$일 때, a_1의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M+m$의 값은? [4점]

① 18 ② 21 ③ 24 ④ 27 ⑤ 30

✓

(가)에 의해



a_n, b_n 중 공차가 양수인 것을 A_n, 음수인 것을 B_n 이라고 하자.

공차가 정수이므로, $n=p$ 에서 $n=p+4$로 넘어갈 때, 4의 배수 만큼 더해지거나 빼져야 한다.

$9 = 1\times 9 = 3\times 3$

$\begin{cases} A_p = 9 \rightarrow A_{p+4} = 13, \cdots \\ B_p = -1 \rightarrow B_{p+4} = -3, -7, \cdots \end{cases} \Rightarrow C_{p+4} \neq -9\ (\times)$

$\begin{cases} A_p = 3 \rightarrow A_{p+4} = 7, 11, 15 \cdots \\ B_p = -3 \rightarrow B_{p+4} = -7, -11, \cdots \end{cases} \Rightarrow C_{p+4} \neq -9\ (\times)$

$\begin{cases} A_p = 1 \rightarrow A_{p+4} = 5, 9, 13, \cdots \\ B_p = -9 \rightarrow B_{p+4} = -13, \cdots \end{cases} \Rightarrow C_{p+4} \neq -9\ (\times)$

$\begin{cases} A_p = -1 \rightarrow A_{p+4} = 3, 7, 11, \cdots \\ B_p = +9 \rightarrow B_{p+4} = 5, 1, -3, -7, -11, \cdots \end{cases}$

$\begin{cases} A_p = -3 \rightarrow A_{p+4} = 1, 5, 9, \cdots \\ B_p = 3 \rightarrow B_{p+4} = -1, -5, -9 \cdots \end{cases}$ $\begin{matrix} 1 \\ -9 \end{matrix}$ or $\begin{matrix} 9 \\ -1 \end{matrix}$

$\begin{cases} A_p = -9 \rightarrow A_{p+4} = -5, -1, 3, 7, 11, \cdots \\ B_p = 1 \rightarrow B_{p+4} = -3, -7, -11, \cdots \end{cases}$

$\therefore \begin{pmatrix} A_p, A_{p+1} \cdots A_{p+4} \\ B_p, B_{p+1} \cdots B_{p+4} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 9 & 6 & 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 & 6 & 9 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 & -6 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 & -6 & -3 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

$\therefore r = 3,\ C_8 = 3$

$a_1 > b_1$ 이므로, $a_n = -3n + 27$

$a_n = -n + 9$

$a_n = -3n + 21$

$a_n = -n + 7$

$\therefore a_1 = 24, 8, 18, 6$

$24 + 6 = \boxed{30}$

단답형

16. $\log_3 108 - 2\log_3 2$의 값을 구하시오. [3점]

$\log_3 108 - \log_3 4$

$= \log_3 \frac{108}{4}$

$= \log_3 27 = \boxed{3}$

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x) = 10x^4 + 6x^2$이고 $f(-1) = 3$일 때, $f(1)$의 값을 구하시오. [3점]

$f(x) = 2x^5 + 2x^3 + C$

$f(-1) = -4 + C = 3$

$\boxed{C = 7}$

$f(1) = 4 + C = \boxed{11}$

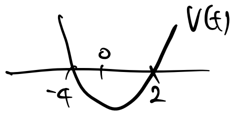
18. 수직선 위를 움직이는 P의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=6t^2+12t-48$$

이다. 점 P가 시각 $t=0$일 때부터 움직이는 방향이 바뀔 때까지 움직인 거리를 구하시오. [3점]

$V(t)=6(t^2+2t-8)$

$=6(t+4)(t-2)$



$\int_0^2 |V(t)|dt$

$=\int_0^2 -V(t)dt=\int_0^2 -6t^2-12t+48$

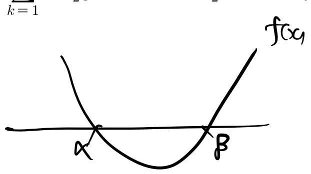
$=\left[-2t^3-6t^2+48t\right]_0^2$

$=-16-24+96$

$=\boxed{56}$

19. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 방정식 $f(x^k+k)=0$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(k)$라 하자.

$\sum_{k=1}^{6} \log_2 g(k)=4+\log_2 3$일 때, $f(1)$의 값을 구하시오. [3점]



$x^k+k=\alpha,\beta \Rightarrow x^k=\alpha-k,\ \beta-k$

① $k=$ 홀수, $g(k)=2$

② $k=$ 짝수

즉 k가 커지면 $g(k)$는 $4\to3\to2\to1\to0$ 순으로 변함

$\log_2 g(1)\times\cdots\times g(6)$

$=\log_2 2^4\cdot 3$

$\therefore g(2)\cdot g(4)\cdot g(6)=2\cdot3$

$g(2)\to 3,\ g(4)\to 2,\ g(6)\to 1$

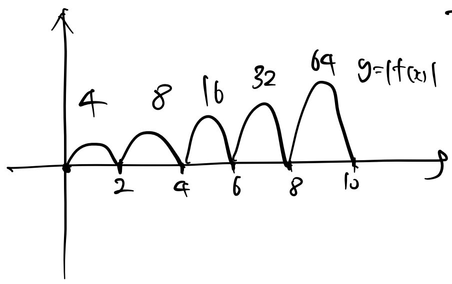
$\hookrightarrow \alpha=2,\ \beta=6\quad f(x)=(x-2)(x-6)\quad f(1)=\boxed{5}$

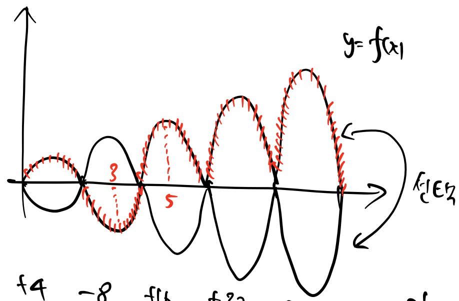
20. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0 \leq x < 2$ 에서 $\lvert f(x)\rvert = \lvert 3x(x-2)\rvert$ 이다.
(나) 모든 실수 x에 대하여 $2\lvert f(x)\rvert = \lvert f(x+2)\rvert$ 이다.

$\int_0^{10} f(x)\,dx=108$일 때, $\int_3^5 f(x)\,dx$의 값을 구하시오. [4점]

$\frac{3}{6}\cdot 2^3=4$





$+4\quad -8\quad +16\quad +32\quad +64 \to \int_0^{10} f(x)dx = 108$

$\int_3^5 f(x)dx=-4+8$

$=\boxed{4}$

21. 양의 상수 a, $b\left(0<b\le\frac{3}{2}\right)$에 대하여 닫힌구간 $[0,\,12]$에서 정의된 두 함수

$$f(x)=a\sin\left(\frac{\pi}{3}x\right),\quad g(x)=a\sin\left(\frac{\pi}{3}(x-b)\right)$$

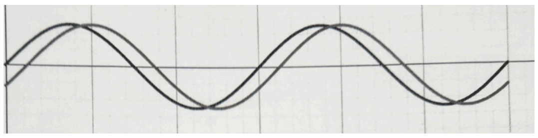
가 있다. 실수 t에 대하여 두 집합

$$\mathrm{A}=\{x\,|\,f(x)=t\},\quad \mathrm{B}=\{x\,|\,g(x)=t\}$$

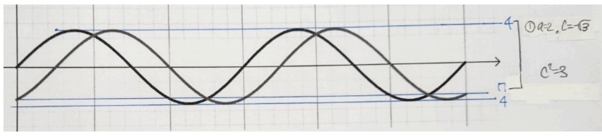
라 하자. $n(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=h(t)$일 때, $h(2)+h(c)=11$이다. c^2의 값이 α 또는 $\beta\,(\alpha<\beta)$일 때, $\alpha+\beta$의 값을 구하시오. [4점]

$h(t)=\left\{\begin{matrix} y=f(x) \\ y=g(x)\end{matrix}\right\}$ 와 $y=t$가 만나는 서로 다른 점의 개수

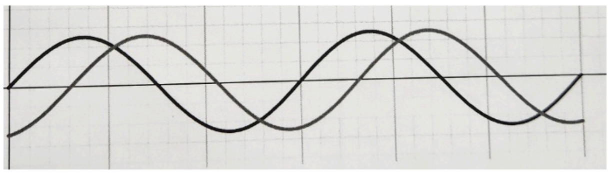
① $0<b<1 \Rightarrow (\times)$



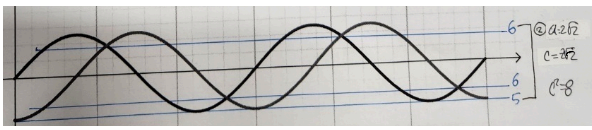
② $b=1 \Rightarrow a=2,\ c=-\sqrt{3}$



③ $1<b<\frac{3}{2} \Rightarrow (\times)$



④ $b=\frac{3}{2} \Rightarrow a=2\sqrt{2},\ c=-2\sqrt{2}$



$\therefore c^2=3$ or 8

$3+8=\boxed{11}$

22. 사차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$g(x)=\lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{(t-x)(t-2x+a)} = \lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}\times\frac{1}{(t-2x+a)}$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\ge 0$이다.
>
> (나) $\{x\,|\,f(x)+g(x)=5\}=\{g(a),\ g(a+1),\ g(a+k)\}$
> (단, $k>1$이다.)

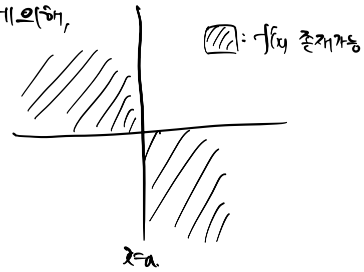
상수 k에 대하여 $|f(3k^2)|$의 값을 구하시오. [4점]

$x\ne a,\ g(x)=f'(x)\cdot\frac{1}{a-x}\ge 0$ ……㉠

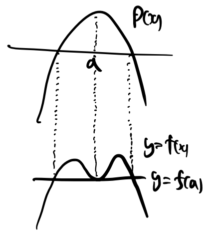
$x=a,\ g(x)=\lim_{t\to a}\frac{f(t)-f(a)}{(t-a)^2}=P(a)\ge 0$

↳ $f(x)=(x-a)^2P(x)+f(a)$

㉠ 에 의해,



i) $P(a)>0$ 인 경우



↳ ㉠에 모순

ii) $P(a)=0$ 인 경우

$f(x)=(x-a)^3(Ax+B)+f(a)$

㉠에 의해, $f(x)=A(x-a)^4+C$ $(C=f(a))$ $(A<0)$

$g(x)$를 다시 정리하면,

$x\ne a,\ g(x)=-4A(x-a)^2$

$x=a,\ g(x)=0$

$\therefore \forall x,\ g(x)=-4A(x-a)^2$

$f(x)+g(x)=5$ 의 세 실근 : $x=0,\ -4A,\ -4Ak^2$

↓ $A(x-a)^4-4A(x-a)^2+C=5$

└ $x=a$ 대칭

but 실근개수가 홀수

$\therefore x=a$가 근에 포함 → $C=5$

$A(x-a)^2(x-a-2)(x-a+2)=0$

$\{a-2,\ a,\ a+2\}=\{0,\ -4A,\ -4Ak^2\}$

$a=2,\ A=-\frac{1}{2}\ \ k=\sqrt{2}$

$\therefore \boxed{123}$

$f(3k^2)=f(6)=-128+5=-123$

> * 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

홀수형

5지선다형

23. $\lim_{x \to 4} \frac{e^{x-4}-1}{\sqrt{x}-2}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$$\lim_{x \to 4} \frac{(e^{x-4}-1)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \times (\sqrt{x}+2)$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{e^{x-4}-1}{x-4} \times (\sqrt{x}+2)$$

$$= 2+2 = 4$$

24. 곡선 $y=x^3+6\ln x$ 의 변곡점에서의 접선의 기울기는? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$y' = 3x^2 + \frac{6}{x}$

$y'' = 6x + \frac{-6}{x^2} \Rightarrow (1, 1)$

$y'_{x=1} = 9$

25. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\pi k}{2n}+1\right)\cos\left(\frac{\pi k}{2n}\right)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\frac{\pi k}{2n}=x_k$, $\Delta x_k=\frac{\pi}{2n}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\pi k}{2n}+1\right)\cdot\cos\frac{\pi k}{2n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\pi}\cdot\Delta x_k\sum_{k=1}^{n}(x_k+1)\cdot\cos x_k$

$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x+1)\cos x\,dx$

$=\frac{2}{\pi}\left[(x+1)\cdot\sin x+\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+1+0-1\right)$

$=\boxed{1}$

26. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시간 $t\,(t\geq 0)$에서의 위치 $(x,\ y)$가

$x=2t+\cos t,\ y=\sin t$

이다. 점 P의 속력의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값은? [3점]

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

$\frac{dx}{dt}=2-\sin t$

$\frac{dy}{dt}=\cos t$

$|\vec{V}|=\sqrt{(2-\sin t)^2+\cos^2 t}$

$=\sqrt{5-4\sin t}$

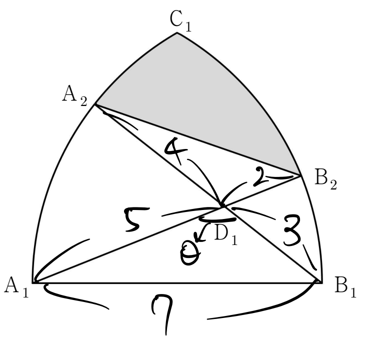
$\therefore\ M=\sqrt{9}=3$

$m=\sqrt{5-4}=1$

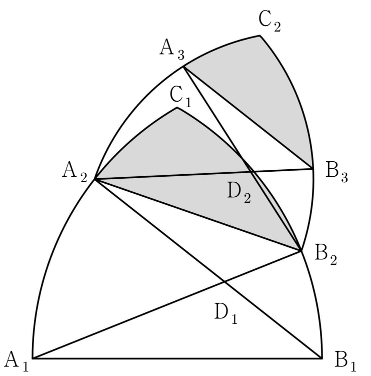
$3+1=\boxed{4}$

27. 그림과 같이 길이가 7인 선분 A_1B_1을 반지름으로 하고 중심이 각각 A_1, B_1인 두 원이 만나는 점 중 한 점을 C_1이라 하자. 호 A_1C_1 위의 점 A_2, 호 B_1C_1 위의 점 B_2에 대하여 두 선분 A_1B_2, A_2B_1이 만나는 점을 D_1이라 하자. $\overline{A_1D_1}=5$, $\overline{D_1B_1}=3$일 때, 선분 A_2B_2와 두 호 A_2C_1, C_1B_2로 둘러싸인 ◠ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 $\overline{A_2B_2}:\overline{A_2D_2}:\overline{D_2B_2}=7:5:3$이 되도록 점 D_2를 잡자. 그림 R_1를 얻은 것과 같은 방법으로 세 점 A_3, B_3, C_2를 잡고 두 호 A_2C_2, B_2C_2를 그린 후 ◠ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]

R_1



R_2



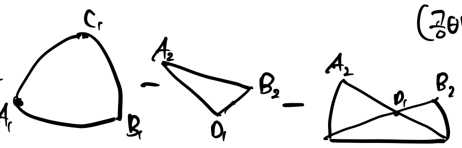
⋮ ⋮

① $\frac{35}{6}\left(\frac{7}{3}\pi-2\sqrt{3}\right)$ ② $\frac{35}{6}\left(\frac{7}{3}\pi-3\sqrt{3}\right)$ ③ $\frac{49}{6}\left(\frac{7}{3}\pi-\sqrt{3}\right)$

④ $\frac{49}{6}\left(\frac{7}{3}\pi-2\sqrt{3}\right)$ ⑤ $\frac{49}{6}\left(\frac{7}{3}\pi-3\sqrt{3}\right)$

$\cos\theta=\frac{5^2+3^2-7^2}{2\times5\times3}=-\frac{1}{2}$, $\theta=\frac{2}{3}\pi \rightsquigarrow \overline{A_2B_2}=2\sqrt{7}$

(공비) $=\left(\frac{2\sqrt{7}}{7}\right)^2$

$S_1=$ 

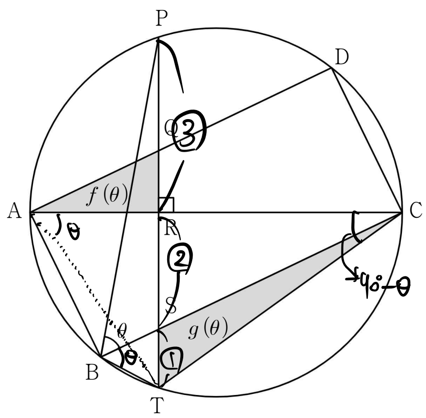
$=\frac{49}{6}\pi+\frac{1}{2}\cdot7^2\cdot\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{1}{2}\cdot4\cdot2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$-\left(\frac{1}{2}\cdot7^2\cdot\frac{1}{3}\pi-\frac{1}{2}\cdot5\cdot3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$=\frac{49}{6}\pi-\frac{21}{2}\sqrt{3}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{49}{6}\pi-\frac{21}{2}\sqrt{3}}{1-\left(\frac{2\sqrt{7}}{7}\right)^2}=\frac{49}{6}\left(\frac{7}{3}\pi-3\sqrt{3}\right)$

28. 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원에 내접하는 직사각형 ABCD가 있다. 호 AD 위의 점 P를 지나고 선분 AC에 수직인 직선과 세 선분 AD, AC, BC, 원이 만나는 점을 각각 Q, R, S, T라 하자. $\overline{TB}:\overline{BP}=1:5$이고 $\angle CBP=\theta$일 때, 삼각형 QAR의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 CST의 넓이를 $g(\theta)$라 하자.
$\lim_{\theta\to0}\frac{g(\theta)}{\theta^4\times f(\theta)}=k$일 때, k의 값은? [4점]



① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

$\overline{PC}=\overline{TC} \Rightarrow \angle PBC=\angle CBT$ (원주각)

$\overline{PR}=\overline{RT}$ & $\overline{TB}:\overline{BP}=\overline{TS}:\overline{SP}=1:5$ 이므로

$\overline{TS}:\overline{SR}:\overline{RP}=1:2:3$

$\triangle AQR \backsim \triangle SCR \Rightarrow \frac{\triangle RSC}{f(\theta)}=\left(\frac{\overline{RC}}{\overline{AR}}\right)^2$

$\frac{g(\theta)}{\triangle RSC}=\frac{1}{2}$

$\Downarrow$

$\frac{g(\theta)}{f(\theta)}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{\overline{RC}}{\overline{AR}}\right)^2$

$\overline{TC}=2\sin\theta$

$\overline{RC}=2\sin^2\theta$

$\overline{AR}=2-2\sin^2\theta$

$\lim_{\theta\to0}\frac{g(\theta)}{\theta^4\times f(\theta)}=\lim_{\theta\to0}\frac{1}{\theta^4}\times\frac{1}{2}\left(\frac{2\sin^2\theta}{2-2\sin^2\theta}\right)^2$

$=\lim_{\theta\to0}\frac{1}{2\theta^4}\times\frac{\sin^4\theta}{(\cos^2\theta)^2}$

$=\boxed{\frac{1}{2}}$

단답형

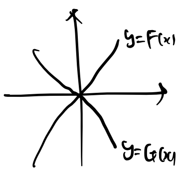
29. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$, $g(x)<0$이다.
>
> (나) $f(0)+g(0)=0$, $f(3)=e^{27}$, $g(3)=-\frac{1}{2}$
>
> (다) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\int_0^x g(t)dt-g(x)\int_0^x f(t)dt$
>
> $=3x^2\left(\int_0^x f(t)dt\right)\left(\int_0^x g(t)dt\right)$이다.

$\int_0^3 f(t)dt=k$일 때, $\ln k=a-\ln b$이다. $a+b$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 자연수이다.) [4점]

$\int_0^x f(t)dt=F(x)$, $\int_0^x g(t)dt=G(x)$ 라고 하자.

$F'(x)=f(x)>0$, $G'(x)=g(x)<0$, $F(0)=G(0)=0$ 이므로,



(다)에서 $f(x)G(x)-g(x)\cdot F(x)=3x^2F(x)G(x)$

$\to \frac{f(x)}{F(x)}-\frac{g(x)}{G(x)}=3x^2\quad(x\neq0)$

양변을 적분하면,

$\ln|F(x)|-\ln|G(x)|=x^3+C\quad(x\neq0)$

$\ln\left|\frac{F(x)}{G(x)}\right|=x^3+C\quad(x\neq0)$

㉠ $\cdots\cdots \frac{F(x)}{G(x)}=-e^{x^3+C}\quad(x\neq0)\quad(\because \frac{F(x)}{G(x)}<0)$

$x\to0^+$을 하면,

$\lim_{x\to0^+}\frac{F(x)}{G(x)}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{F(x)-F(0)}{x-0}}{\frac{G(x)-G(0)}{x-0}}=\frac{F'(0)}{G'(0)}=\frac{f(0)}{g(0)}=-e^C$

$\therefore e^C=1$, $C=0$

㉠에 $x=3$ 대입 $\to F(3)=-e^{27}G(3)$

(다)에 $x=3$ 대입 $\to e^{27}G(3)+\frac{1}{2}F(3)=27F(3)G(3)$

연립하면, $F(3)=\frac{e^{27}}{54}=k$

$\therefore \ln k=27-\ln 54$ $\quad 27+54=\boxed{81}$

30. 함수 $f(x)=|2x^2-3x-5|e^x-k|x+1|$가 다음 조건을 만족시킨다.

> 함수 $|f(x)|$가 세 점에서 미분가능하지 않도록 하는 0이 아닌 실수 k의 집합은 $\{k|k=c_1,\ k\geq c_2\}$이다. (단, $c_1<c_2$)

$c_1\times c_2=pe^q$일 때, $2(p+q)$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 유리수이다.) [4점]

$|f(x)|$의 미분가능성 판단

i) $x=-1$

$\lim_{x\to-1}\frac{|x+1|\times|\,|2x-5|e^x-k\,|}{(x+1)}$

$k=\frac{7}{e}\to x=-1$에서 미분가능

$k\neq\frac{7}{e}\to x=-1$에서 미분불가

ii) $x\neq-1$

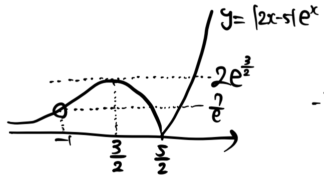
$|f(x)|=|x+1|\times|\,|2x-5|e^x-k\,|$

$x\neq-1$ 에서 미분가능성에 영향 X

$\therefore x\neq-1$ 에서의 $|f(x)|$의 미분가능성

$\Updownarrow$

$|\,|2x-5|e^x-k\,|$의 미분가능성



$\therefore c_1=\frac{7}{e}$

$c_2=2e^{\frac{3}{2}}$

$c_1\times c_2=14e^{\frac{1}{2}}$

$2(14+\frac{1}{2})=\boxed{29}$

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.