중학도형

맑은 개념

INTO THE MATH

Collector's Edition

송지은 편저

smart is sexy
Orbi.kr

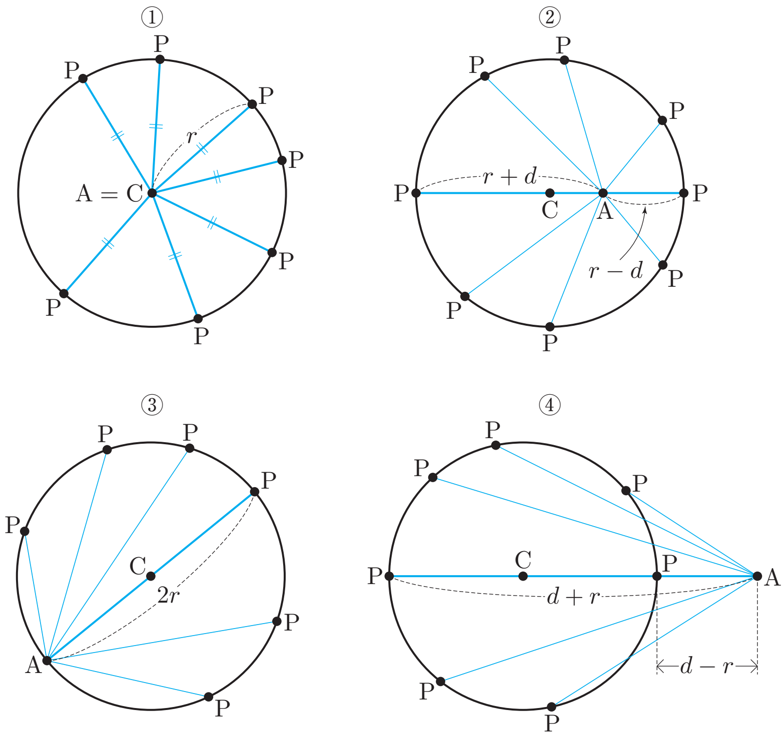
orbibooks

04 원 Part 3

평면에서의 원과 점, 원과 직선, 두 원, 두 원에 동시에 접하는 직선에 대하여 배워봅시다.

원과 점

어떤 점을 A라 하고 중심이 C인 원에 대하여 $\overline{AC} = d$라 합시다. 그러면 점 A의 위치에 따른 $\overline{AP}$의 범위는 다음과 같습니다.



① A가 원의 중심 C와 일치 : $\overline{AP} = r$

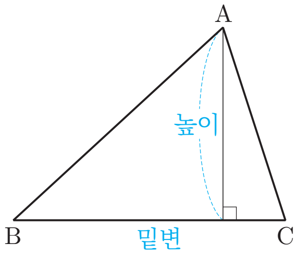
② A가 C가 아닌 원 내부의 점 : $r - d \leq \overline{AP} \leq r + d$

③ A가 원 위의 점 : $0 \leq \overline{AP} \leq 2r$

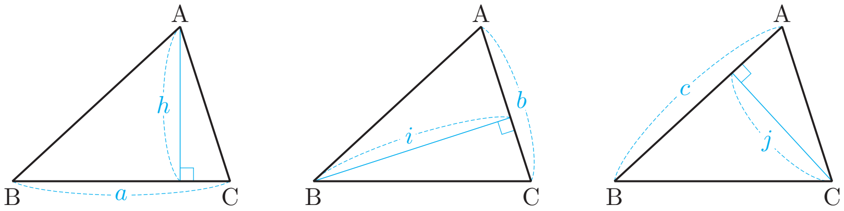
④ A가 원 외부의 점 : $d - r \leq \overline{AP} \leq d + r$

즉 점 A의 위치와 관계없이, $|d - r| \leq \overline{AP} \leq d + r$라 할 수 있습니다.

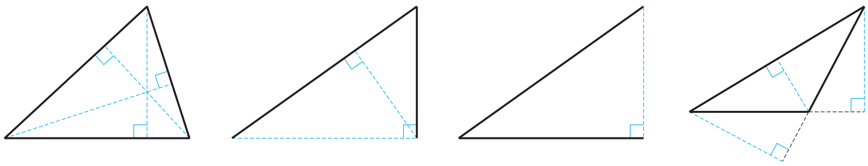
삼각형의 넓이



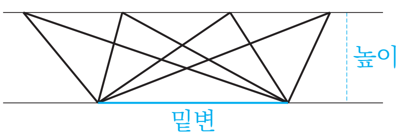
삼각형의 넓이를 구하려면 '밑변의 길이'와 '높이'를 알아야 합니다. '삼각형의 세 변 중에서 넓이를 구하기 위해 선택한 변'을 삼각형의 **밑변**이라고 합니다. 예를 들어 삼각형 ABC에서 BC를 밑변으로 취할 수 있습니다. 삼각형에서 **높이**는 '밑변을 포함하는 직선과 밑변을 대변으로 갖는 꼭짓점 사이의 거리'를 말합니다. 예를 들어 밑변 BC를 대변으로 갖는 꼭짓점은 A이므로, 높이는 직선 BC와 A 사이의 거리입니다.



밑변의 길이가 a, 높이가 h인 $\triangle$ABC의 넓이는 $\frac{1}{2}ah$입니다. 이때 $\triangle$ABC의 다른 변을 밑변으로 잡아도 넓이를 구할 수 있습니다. 밑변의 길이가 각각 b, c이고 높이가 각각 i, j일 때 $\triangle$ABC의 넓이는 각각 $\frac{1}{2}bi$, $\frac{1}{2}cj$이고, 어느 방법으로 구하든 넓이의 값은 서로 같습니다.



예각삼각형은 어느 변을 밑변으로 잡더라도 높이의 보조선이 삼각형 내부에 그려집니다. 직각삼각형은 빗변을 밑변으로 잡으면 높이의 보조선이 삼각형 내부에 그려지고, 다른 변을 밑변으로 잡으면 빗변이 아닌 나머지 한 변의 길이가 높이입니다. 둔각삼각형은 둔각의 대변을 밑변으로 잡으면 높이의 보조선이 삼각형 내부에 그려지고, 둔각이 아닌 각의 대변을 밑변으로 잡으면 높이의 보조선이 삼각형 외부에 그려집니다.



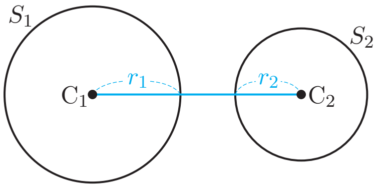
그림과 같이 밑변과 높이가 같은 삼각형은 모양이 다르더라도 넓이가 같습니다.

두 개의 원

반지름이 r_1, r_2인 두 원 S_1, S_2에 대하여 두 원의 중심 사이의 거리를 d라 하면 위치관계는 다음과 같습니다. (단, 그림에서는 $r_1 > r_2$)[22)]

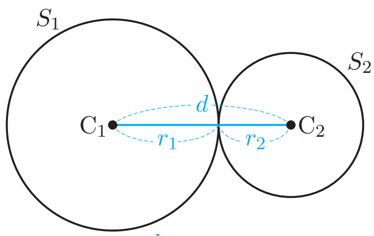
22) $r_1 = r_2$인 경우 ①, ②, ③은 동일하고, ④, ⑤와 같은 경우는 존재하지 않으며, ⑥의 경우 두 원이 일치합니다.

① 만나지 않는다.



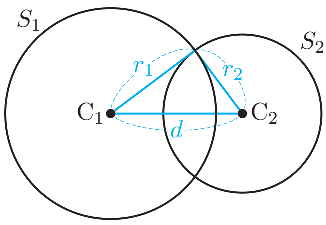
$d > r_1 + r_2$

② 한 점에서 외접한다.



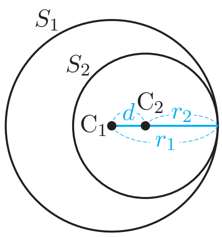
$d = r_1 + r_2$

③ 두 점에서 만난다.



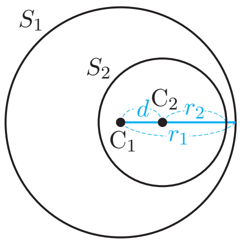
$r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$

④ 한 점에서 내접한다.



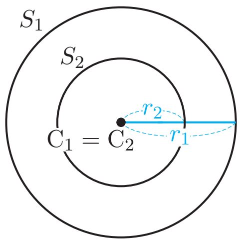
$d = r_1 - r_2$

⑤ 내부에 있으면서 중심이 일치하지 않는다.



$d < r_1 - r_2$

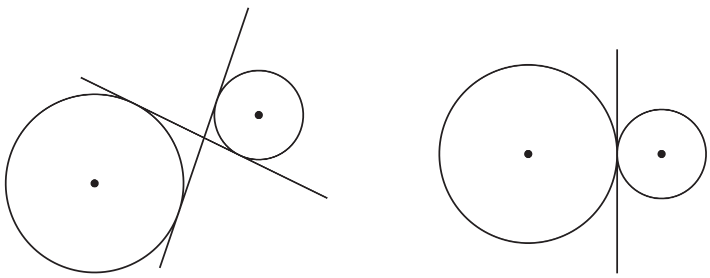
⑥ 내부에 있으면서 중심이 일치한다.



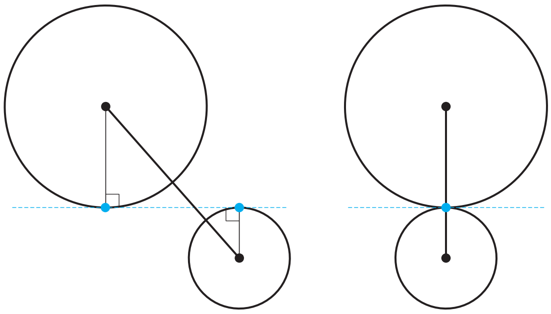
$d = 0$

두 개의 원에 동시에 접하는 직선(공통접선, 내접과 외접)

서로 내접하지 않는 두 원에 대하여, 두 원의 외부의 공통영역에 있는 한 점을 P라 합시다. P를 지나고 두 원에 동시에 접하는 직선(공통접선)에 대하여 알아봅시다.



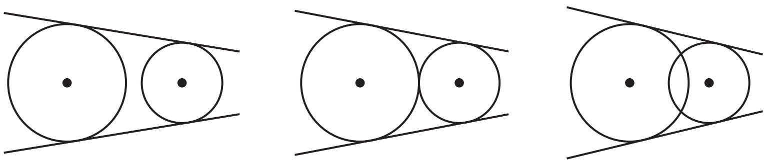
두 원이 만나지 않거나 외접할 때, 어떤 직선이 두 원의 사이에 끼이면서 접할 수 있습니다. 이를 직선이 두 원에 내접한다고 부르기로 합시다.



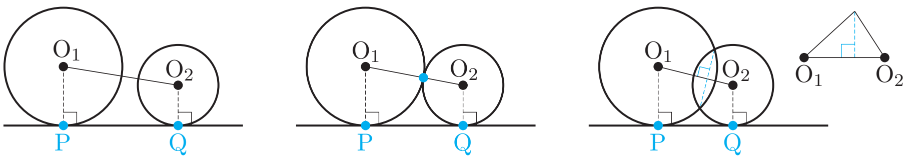
(a) (b)

한 직선이 두 원에 내접하는 상황을 좀 더 보기 편안한 그림으로 나타내면 (a), (b)와 같습니다. 두 원 중 한 원은 직선의 위쪽에, 나머지 한 원은 직선의 아래쪽에 놓이게 됩니다. 즉 직선이 두 원에 내접하는 경우, 두 원은 직선을 기준으로 서로 반대편에 위치하게 됩니다.

두 가지 경우에서 합동 또는 닮음비를 이용하여 각각의 길이를 구하는 과정을 물을 수 있습니다.

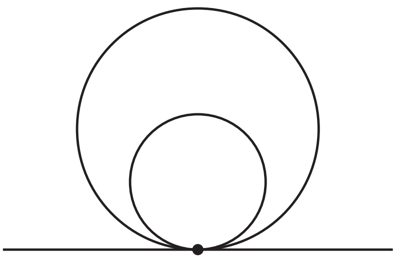


두 원이 만나지 않거나 외접하거나 두 점에서 만날 때, 어떤 직선은 두 원의 사이에 끼이지 않으면서 접할 수 있습니다. 이를 직선이 두 원에 외접한다고 부르기로 합시다.



(a) (b) (c)

한 직선이 두 원에 외접하는 상황을 좀 더 보기 편안한 그림으로 나타내면 (a), (b), (c)와 같습니다. 두 원은 직선을 기준으로 서로 같은 편에 위치하게 됩니다.



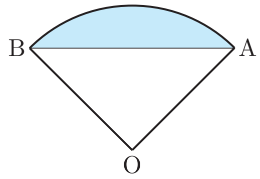
두 원이 내접할 때, 이 두 원의 공통접선은 외접하는 공통접선뿐입니다.

02 여러가지 평면기하 (1) : 기본도형 리뷰

실전적 측면에서 원, 거리, 삼각형, 닮음을 돌아봅시다.

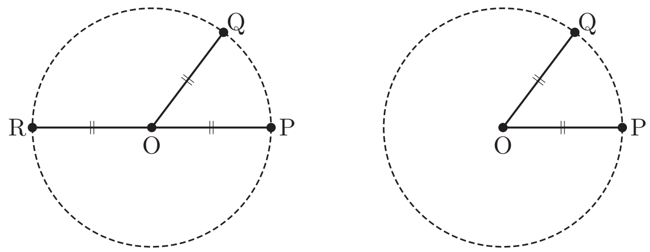
원에 관련된 정보

활꼴의 넓이

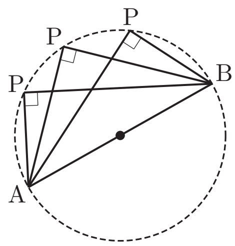


활꼴의 넓이인 $\frac{1}{2}r^2\theta - \frac{1}{2}r^2\sin\theta = \frac{r^2}{2}(\theta - \sin\theta)$를 외워두면 계산 단축에 유용합니다.

원의 발견



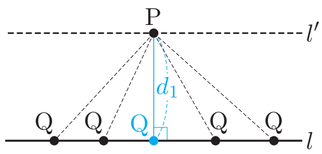
문제에서 한 점 O에 대하여 $\overline{OP} = \overline{OQ} = \overline{OR}$이 주어지면 세 점은 중심이 O이고 반지름이 $\overline{OP}$인 원 위의 점임을 이용할 수 있습니다. 오른쪽 그림과 같이 두 점만 주어지더라도 원을 생각할 수 있을 것입니다.



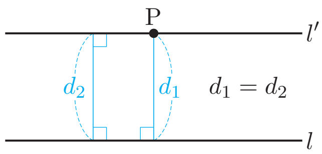
한 선분 AB가 고정되어 있을 때 어떤 점 P가 $\angle APB = \frac{\pi}{2}$를 만족시키면 P는 AB를 지름으로 하는 원 위의 점입니다. 이는 $\angle APB$를 원주각으로 해석해서도 얻을 수 있고, 삼각형 PAB의 외심이 빗변 위에 있음을 이용해서도 얻을 수 있습니다.

거리를 다루는 역발상

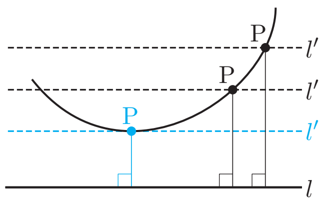
'직선과 직선 사이의 거리'로 '점과 직선 사이의 거리'를 구할 수 있다



직선 l 위에 있지 않은 점 P에 대하여 P를 지나고 l과 평행한 직선을 l'이라 합시다. 이때 P와 l 사이의 거리를 d_1이라 하고, 두 직선 l과 l' 사이의 거리를 d_2라 하면, $d_2 = d_1$으로 정의됩니다. 이는 P와 l 위의 점 Q 사이의 거리의 최솟값이 d_1이기 때문입니다.

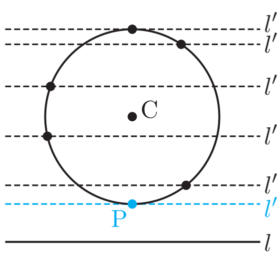


이를 역으로 이용하면 점 P에서 직선 l에 수선의 발을 내리지 않고도 P와 l 사이의 거리 d_1을 구할 수 있습니다. 점 P를 지나고 l에 평행한 직선 l'을 그린 후, l과 l' 사이의 거리 d_2를 구하는 것입니다. 그러면 $d_2 = d_1$이므로 자연스럽게 d_1의 값을 구할 수 있습니다.



이는 점 P가 고정되어 있지 않고, 점 Q가 직선 l 위를 움직이는 복잡한 상황에서 유용합니다. P가 움직임에 따라 l'이 어떻게 움직이는지를 따지고, l과 l'의 거리의 최솟값만 구하면 해결할 수 있기 때문입니다.

원 위를 움직이는 점 P와 직선 l 위를 움직이는 점 Q 사이의 거리



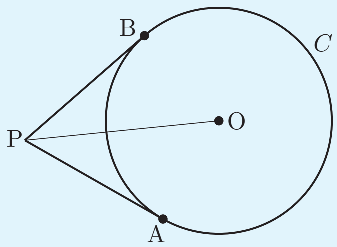
중심이 C이고 반지름의 길이가 r인 원 위를 움직이는 점 P와 원과 만나지 않는 직선 l 사이의 거리의 최솟값을 구해봅시다. 점 P가 원 위를 움직임에 따라 P를 지나고 l에 평행한 직선 l'의 양상은 그림과 같으며, l과 l'의 거리 d_2가 최소일 때는 l'이 그림의 색칠된 직선일 때입니다. 이때 C에서 l에 내린 수선의 발을 H라 하고, 선분 CH와 l'이 만나는 점을 A라 하고, $\overline{\mathrm{CH}} = d$라 하면, $d_2 = d - r$입니다.

예제 22 풀이

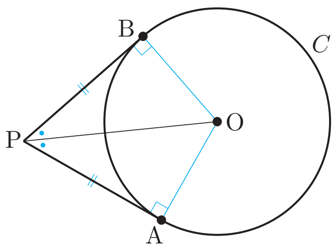
원 C의 중심 O와 원 C 외부의 점 P에 대하여 P에서 C에 그은 두 접선의 각 접점을 각각 A, B라 할 때, 다음을 증명하세요.

① $\overline{\mathrm{PA}} = \overline{\mathrm{PB}}$

② OP가 $\angle\mathrm{APB}$를 이등분한다.



① 풀이



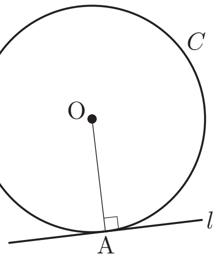
선분 OA, OB, OP를 그으면 OAP는 $\angle\mathrm{A} = 90°$ 인 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의해 $\mathrm{PA} = \sqrt{\overline{\mathrm{OP}}^2 - \overline{\mathrm{OA}}^2}$ 이고, OPB는 $\angle\mathrm{B} = 90°$ 인 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의해 $\mathrm{PB} = \sqrt{\overline{\mathrm{OP}}^2 - \overline{\mathrm{OB}}^2}$ 입니다. 이때 $\overline{\mathrm{OA}} = \overline{\mathrm{OB}}$이므로 $\overline{\mathrm{PA}} = \overline{\mathrm{PB}}$입니다.[40)]

40) 예제 21과 동일한 아이디어를 쓰기 위해 피타고라스 정리를 썼지만, $\triangle\mathrm{OBP} \equiv \triangle\mathrm{OAP}$ (RHS 합동)임을 이용해도 됩니다.

② 풀이

①에서 $\triangle\mathrm{OAP} \equiv \triangle\mathrm{OBP}$ 입니다. (SSS 합동) 따라서 $\angle\mathrm{APO} = \angle\mathrm{BPO}$ 입니다.

예제 21. 중심이 O인 원 C 위의 점 A를 지나고 OA에 수직인 직선 l에 대하여 원 C와 직선 l은 한 점 A에서만 만남을 증명하세요.



예제 22. 원 C의 중심 O와 원 C 외부의 점 P에 대하여 P에서 C에 그은 두 접선의 각 접점을 각각 A, B라 할 때, 다음을 증명하세요.

① $\overline{\mathrm{PA}} = \overline{\mathrm{PB}}$

② OP가 $\angle\mathrm{APB}$를 이등분한다.