Curve) 접할선과 볼록성 - 무료배포 부교재

Curve 1.1) 볼록성과 접할선 (1) : 기본 지식 배우기 2

기본지식 1) 접할선의 위치관계 2

기본지식 2) 곡선 외부의 점에서 그을 수 있는 접선의 개수 3

Curve 1.2) 볼록성과 접할선 (2) : 상황의 단계적 심화 4

상황의 단계적 심화 (1) : $(-\infty,\ a)$, $(a,\ \infty)$, $(a,\ b)$에서 볼록성이 일정 4

상황의 단계적 심화 (2) : 볼록성이 바뀔 때의 접선의 개수 6

상황의 단계적 심화 (3) : 접선 개수를 제한하는 점근선 7

상황의 단계적 심화 (4) : 공통접선 7

상황의 종합 9

Curve 1.3) 볼록성과 접할선 (3) : 수식으로 다루기 10

접할선의 위치관계를 수식으로 증명하기 10

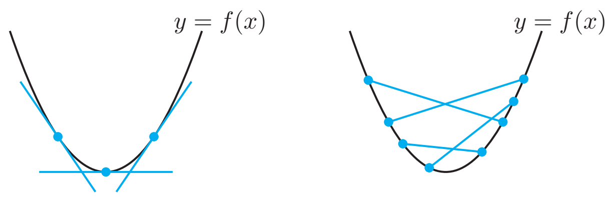
접선의 개수를 수식으로 분석하기 10

01 접할선과 볼록성 (1) : 기본 지식 배우기

기본지식 1) 접할선의 위치관계

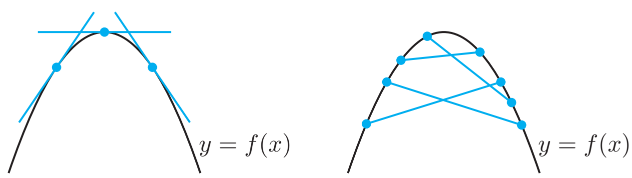
접선은 할선의 극한으로써 정의됩니다. 그런데 볼록성은 할선과 곡선의 위치관계를 통해 정의되어 있습니다. 따라서 접선과 곡선의 위치관계 또한 탐구해볼만 합니다. 함께 알아봅시다.[1]

1) 증명은 이 단원의 맨 마지막에 다룹니다.

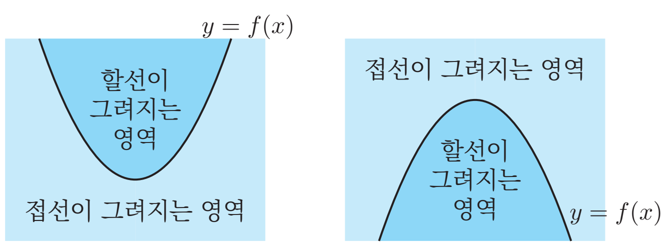


실수 전체의 집합에서 $f''(x)>0$인 함수 $y=f(x)$에 대하여, 그림과 같이 접선은 항상 곡선 아래 영역인 $y<f(x)$에 그려지고, 할선은[2] 항상 곡선 위 영역인 $y>f(x)$에 그려집니다.

2) 여기에서 할선은 직선 전체가 아닌, 곡선 위의 두 점 A, B를 잡았을 때 선분 AB를 말합니다.



실수 전체의 집합에서 $f''(x)<0$인 함수 $y=f(x)$에 대하여 그림과 같이 접선은 항상 곡선 위쪽 영역인 $y>f(x)$에 그려지고, 할선은 항상 곡선 아래쪽 영역인 $y<f(x)$에 그려집니다.

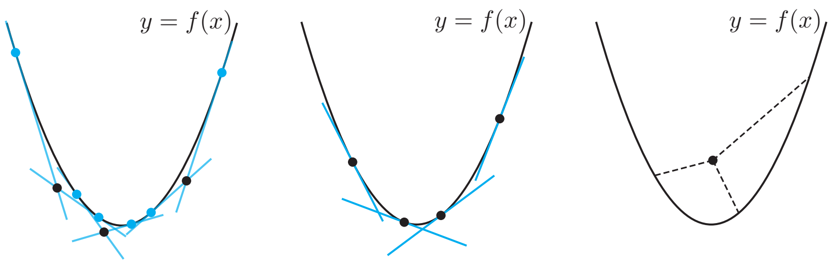


이와 같이 할선이 그려지는 영역과 접선이 그려지는 영역은 곡선을 기준으로 분리되어 있습니다. 한편 위로 볼록일 때와 아래로 볼록일 때 '할선과 곡선의 위치관계'는 '접선과 곡선의 위치관계'와 정반대입니다. 따라서 한 상황만 다룬다면 나머지 상황은 자연스럽게 알 수 있을 것입니다. 따라서 한동안 아래로 볼록한 상황만을 다루겠습니다.

기본지식 2) 곡선 외부의 점에서 그을 수 있는 접선의 개수

곡선 외부의 점에서 그을 수 있는 접선의 개수를 알아봅시다.[3)]

3) 증명은 이 단원의 맨 마지막에 다룹니다.

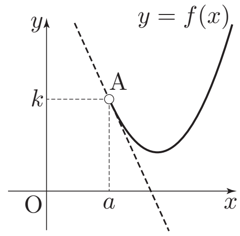


(a) (b) (c)

아래로 볼록할 때, 접선이 그려지는 영역에 포함된 점에서는 (a)와 같이 곡선에 접선을 2개 그을 수 있습니다. 곡선에 포함된 점에서는 (b)와 같이 곡선에 접선을 1개 그을 수 있습니다. 할선이 그려지는 영역에 포함된 점에서는 (c)와 같이 곡선에 접선을 그을 수 없습니다.

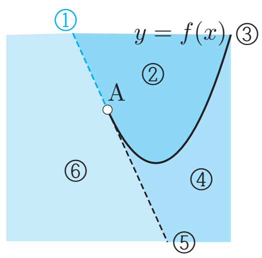
02 접할선과 볼록성 (2) : 상황의 단계적 심화

상황의 단계적 심화 (1) : $(-\infty,\ a)$, $(a,\ \infty)$, $(a,\ b)$에서 볼록성이 일정

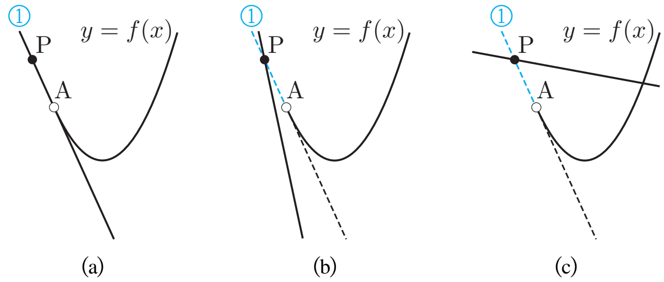


구간의 한 쪽 끝 또는 양 쪽 끝이 실수로 제한된 경우를 다루어봅시다. 논의를 시작하기에 앞서, $f(a)$도 정의되지 않고 $f'(a)$도 정의되지 않으므로 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$를 생각할 수 없는 상황입니다. 따라서 이를 대체하여 $\lim_{x\to a+} f(x) = k$, $\lim_{x\to a+} f'(x) = m$일 때 직선 $y = m(x-a)+k$를 생각해봅시다. 편의상 이 가상의 접선을 점선이라 부르고 그리겠습니다.[4)]

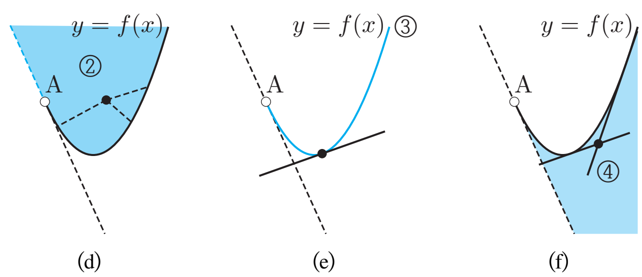
4) 여기서는 도함수의 극한이 존재하지 않는 그 함수는 생각하지 않습니다 ($x^2 \sin \frac{1}{x}$ 등).



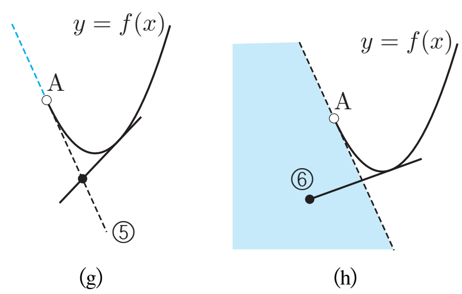
그러면 점선, 곡선, 점 A로 인해 좌표평면을 6개의 영역으로 나누어 생각할 수 있습니다. 각 영역별로 알아봅시다.



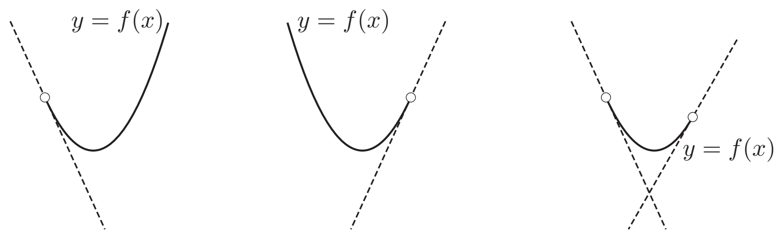
점선에서 x좌표가 a보다 작은 부분(그림에서 색칠된 점선)인 ①에서는 곡선에 접선을 그을 수 없습니다. P를 지나는 직선의 기울기가 m이라면 (a)와 같이 직선이 점선을 그대로 따라가게 됩니다. 이러한 직선은 $x=a$가 정의역에 포함되어 있었다면 $(a,\ f(a))$에서의 접선이겠지만, 주어진 상황에서 $x=a$는 곡선의 정의역에 포함되어 있지 않습니다. 따라서 기울기가 m이면 직선은 곡선 $y=f(x)$에 접하지 않습니다. (b)와 같이 기울기가 m보다 작다면 곡선과 만나지 않으므로 접선이 아닙니다. (c)와 같이 기울기가 m보다 크다면 곡선의 위쪽 영역을 지나므로 접선이 아닙니다.



(a)와 같이 점선과 곡선 위쪽에 있는 경우인 ②에서는 곡선에 접선을 그을 수 없습니다. (b)와 같이 곡선에 포함된 경우인 ③에서는 곡선에 접선을 1개 그을 수 있습니다. (c)와 같이 점선보다는 위쪽, 곡선보다는 아래쪽인 ④에서는 곡선에 접선을 2개 그을 수 있습니다.



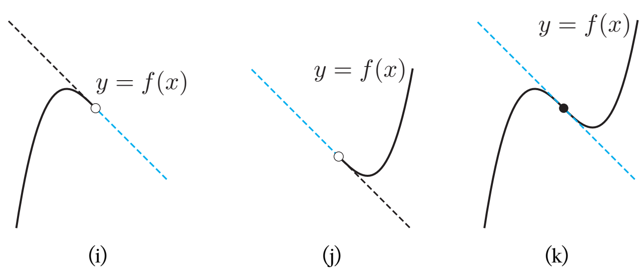
(a)와 같이 점선에서 x좌표가 a보다 큰 부분(그림에서 검은색 점선)인 ⑤에서는 곡선에 접선을 1개 그을 수 있습니다. (b)와 같이 점선보다 아래쪽인 ⑥에서는 곡선에 접선을 1개 그을 수 있습니다. 지금까지 살펴본 내용에 따르면 점선과 곡선을 넘나들 때마다 그을 수 있는 접선의 개수가 달라짐을 알 수 있습니다.



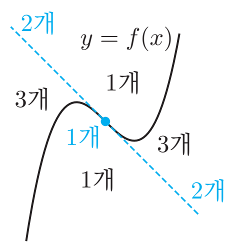
지금까지는 구간의 왼쪽 끝만 제한된 경우를 살펴보았습니다. 그러나 오른쪽만 제한된 경우이든, 양쪽이 모두 제한된 경우이든 어느 구간 끝이 제한된 경우에는 끝점에서의 가상 접선(점선)을 그려야 합니다. 그렇게 그린 점선(들)과 곡선에 의해 구분되는 영역에 따라, 그 영역에 포함된 점에서 곡선에 그을 수 있는 접선의 개수가 달라집니다.

상황의 단계적 심화 (2) : 볼록성이 바뀔 때의 접선의 개수

$y=f(x)$가 $x=a$에서 볼록성이 바뀌는 경우를 알아봅시다.



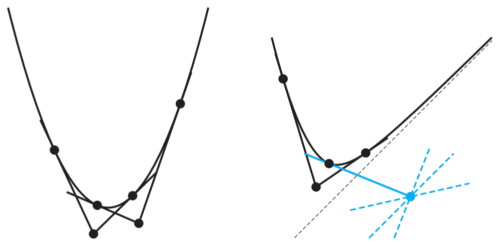
$(-\infty,\ a)$에서 위로 볼록한 경우에는 구분의 기준이 (a)와 같고, $(a,\ \infty)$에서 아래로 볼록한 경우에는 구분의 기준이 (b)와 같습니다. 이 둘을 종합하면 (c)와 같이 두 점선이 일치하게 그려지면서 접선 개수의 구분 기준선들이 나타납니다.



이때 점선 또한 접선(변곡점에서의 접선)이 되므로 그을 수 있는 개수를 영역별로 다시 세어주면 그림과 같습니다.

상황의 단계적 심화 (3) : 접선 개수를 제한하는 점근선

곡선이 점근선[5]을 갖는 경우 외부 점에서 그을 수 있는 접선 개수가 달라집니다.

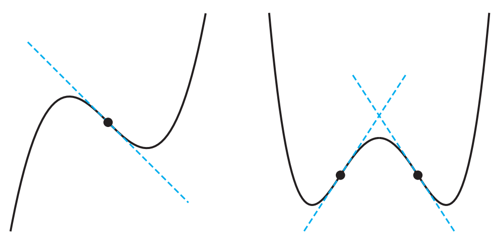


(l) (m)

점근선 건너의 영역에서 접선도 긋지 못하는 것은 아닙니다. 그러나 그을 수 있는 접선의 개수에 제한이 생기게 됩니다. (a)와 같이 점근선이 없는 경우 곡선 아래 영역에서 어느 점을 잡아도 접선을 두 개 그을 수 있는 데 반해, (b)와 같이 점근선이 있는 경우 점근선이 구분하는 영역 건너에서는 접선을 하나밖에 긋지 못합니다.

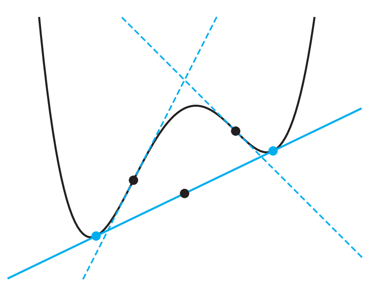
5) 여기서 말하는 점근선은 가로점근선이든, 세로 점근선이든, 일반적인 점근선이든 관계없습니다. 다만 모두 곡선과 점근선이 만나지 않는 상황을 가정합시다.

상황의 단계적 심화 (4) : 공통접선



(n) (o)

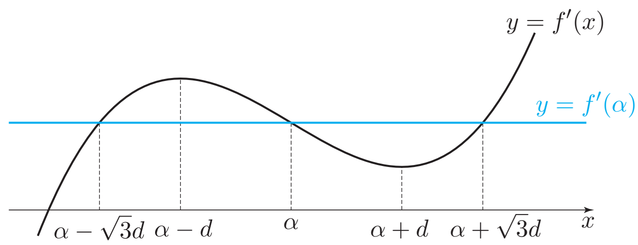
공통접선은 접선의 개수를 판단하기 곤란하게 만드는 요소입니다. 심화 (2)에서는 (a)와 같이 한 번만 변곡했기 때문에 변곡점에서의 접선을 제외하고는 접선개수에 변화가 생기는 지점이 없었지만, (b)와 같이 두 번 변곡하는 경우에는 접선이 그려지는 영역이 서로 겹칠 수 있으므로 두 영역에 걸쳐 동시에 접하는 접선이 존재할 가능성이 있습니다.



그러나 공통접선은 '사차함수'이거나 '이미 문제에서 주어진 상황'이 아니면 출제되기가 어렵습니다. 공통접선의 존재 자체를 수식으로 밝히기가 어렵기 때문입니다. 따라서 우리는 사차함수가 언제 공통접선을 갖는지, 그 공통접선은 어떻게 구하는지를 탐구해봅시다.

사차함수에서의 공통접선

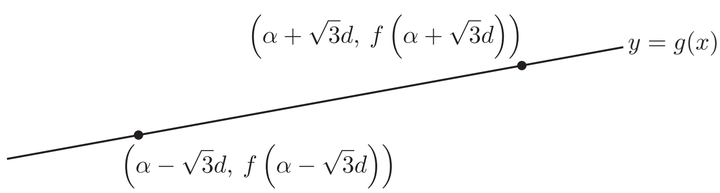
사차함수가 두 개의 변곡점을 가지면 반드시 공통접선을 가집니다. 이를 증명해봅시다.



사차함수 $f(x)$가 두개의 변곡점을 가지면 $f'(x)$는 두 극점을 가집니다. 두 극점의 x좌표를 각각 $\alpha-d$, $\alpha+d$라 하면 $f'(x)=f'(\alpha)$의 세 근은 각각 다음과 같습니다.

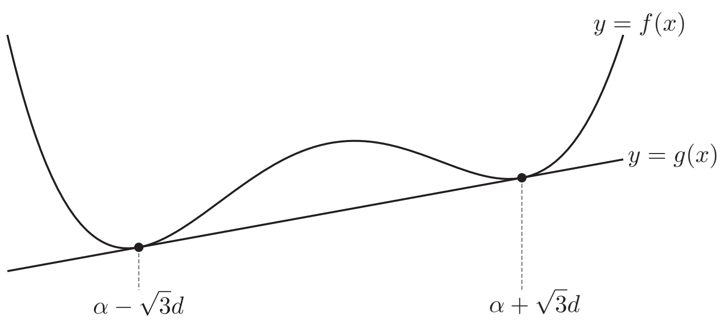
$$\alpha-\sqrt{3}d,\ \alpha,\ \alpha+\sqrt{3}d$$

이때 $\int_{\alpha-\sqrt{3}d}^{\alpha+\sqrt{3}d} f'(x)\,dx$의 값은 대칭성에 의해 $f'(\alpha)\times 2\sqrt{3}d$이고, 이는 도함수의 정적분이므로 $f\left(\alpha+\sqrt{3}d\right)-f\left(\alpha-\sqrt{3}d\right)$와 같습니다.

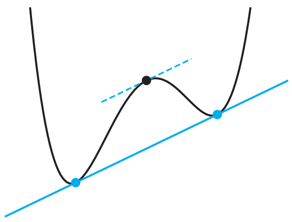


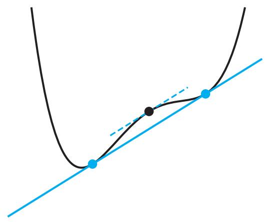
이때 두 점 $\left(\alpha-\sqrt{3}d,\ f\left(\alpha-\sqrt{3}d\right)\right)$, $\left(\alpha+\sqrt{3}d,\ f\left(\alpha+\sqrt{3}d\right)\right)$를 지나는 직선을 생각해봅시다. 직선의 방정식을 $y=g(x)$라 하면 다음이 성립합니다.

$$g'(x)=\frac{f\left(\alpha+\sqrt{3}d\right)-f\left(\alpha-\sqrt{3}d\right)}{2\sqrt{3}d}=\frac{f'(\alpha)\times\left(2\sqrt{3}d\right)}{2\sqrt{3}d}=f'(\alpha)$$



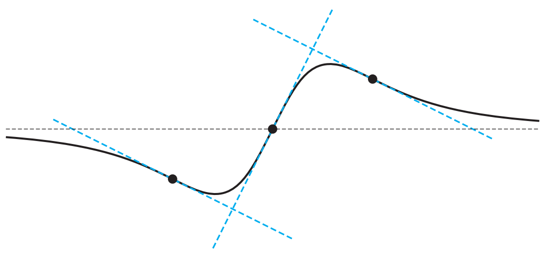
이때 $f'(\alpha)=f'\left(\alpha-\sqrt{3}d\right)=f'\left(\alpha+\sqrt{3}d\right)$이므로, 곡선 $y=f(x)$는 직선 $y=g(x)$와 점 $\left(\alpha-\sqrt{3}d,\ f\left(\alpha-\sqrt{3}d\right)\right)$에서 접하고, 동시에 점 $\left(\alpha+\sqrt{3}d,\ f\left(\alpha+\sqrt{3}d\right)\right)$에서 접합니다. 따라서 $y=g(x)$는 공통접선입니다.



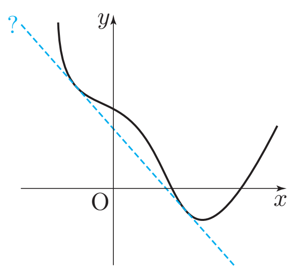


이를 정리하면, 사차함수는 기울기가 '두 변곡점에서의 기울기의 평균값($= f'(\alpha)$)인 공통 접선을 가집니다. 이는 달리 말하면, 두 개의 변곡점을 갖는 사차함수에 적당히 일차함수를 빼서 두 2중근을 갖도록 함수식을 변형할 수 있다는 의미가 됩니다.

상황의 종합



변곡접선, 점근선, 곡선이 접선의 개수를 구분하는 기본적인 기준입니다.

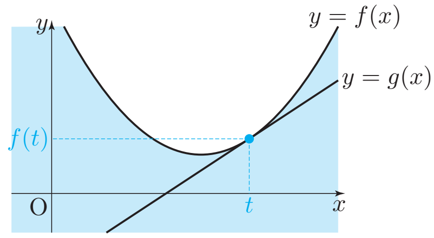


공통접선 또한 접선의 개수를 구분하는 기준이기는 하지만, 사차함수에서는 공통접선의 존재 여부, 공통접선이 존재할 때의 공통 접선의 기울기 및 접점을 모두 알 수 있는데 반해, 초월함수는 수식으로 공통접선의 존재조차 밝히기 쉽지 않습니다. 따라서 이러한 상황을 출제하기는 어렵습니다.[6)]

6) 만약 초월함수의 공통접선을 묻는 문제가 출제된다면 공통접선을 쉽게 찾을 수 있도록 특별한 장치가 되어 있을 것입니다.

03 접할선과 볼록성 (3) : 수식으로 다루기

접할선의 위치관계를 수식으로 증명하기



접선은 색칠된 영역에만 존재할 수 있으며, 곡선으로 구분된 영역 너머로 넘어갈 수 없음을 증명해봅시다. 아래로 볼록일 때를 증명하면, 위로 볼록일 때도 증명할 수 있을 것입니다.

증명을 시작하기 전에 우리의 목표를 점검해봅시다. 우리는 접선이 영역 $y \le f(x)$에만 존재함을 증명해야 합니다. 이는 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 방정식을 $y=g(x)$라 할 때, $t \ne x$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x) < f(x)$임을 증명하는 것과 같습니다.[7)]

7) 또는 모든 실수 x에 대하여 $g(x) \le f(x)$이고 등호는 $x=t$일 때에만 성립함을 보여도 됩니다.

우선 주어진 상황을 수식으로 나타내어야 합니다. 주어진 상황에서는 곡선과 접선이 등장하므로, 접선의 방정식을 세워봅시다. $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 방정식을 $y=g(x)$라 할 때, $h(x)=f(x)-g(x)$라 할 수 있습니다.

$h(t)=0,\ h'(t)=0,\ h''(t)=f''(t)>0$이므로 $(t,\ h(t))$는 극소점입니다. 또한 모든 실수 x에 대하여 $h''(x)=f''(x)>0$이므로 $h'(x)$는 증가함수입니다. 따라서 $x<t$이면 $h'(x)<0$, $x>t$이면 $h'(x)>0$입니다. 그러므로 x와 t의 대소관계와 관계없이 다음이 성립합니다.

$$\int_t^x h'(y)\,dy = h(x)-h(t) = h(x) > 0$$

따라서 임의의 실수 x에 대하여 $h(x) \ge 0$이고, 이는 $x \ne t$인 임의의 실수 x에 대하여 $g(x) < f(x)$임을 의미합니다.

접선의 개수를 수식으로 분석하기

실수 전체의 집합에서 $f''(x)>0$인 함수 $f(x)$에 대하여, 곡선 아래쪽 영역에 있는 점을 $\mathrm{A}(a,\ b)$라 하고 점 A에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선과의 접점의 x좌표를 t라 합시다. 우리의 목표는 t의 개수를 구하는 것입니다. 그러려면 먼저 상황에 맞는 관계식을 세워야 합니다.

점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 방정식은 $y-f(t)=f'(t)(x-t)$입니다. 이 접선이 점 A를 지나므로 $b-f(t)=f'(t)(a-t)$입니다. 따라서 t에 대한 방정식 $f(t)+(a-t)f'(t)-b=0$의 실근의 개수가 점 A에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 개수입니다.

이 방정식을 풀이하기 위해 $g(t)=f(t)+(a-t)f'(t)-b$라 하면 $g'(t)=(a-t)f''(t)$인데, t의 값에 관계없이 $f''(t)>0$이므로 $g'(t)=0$인 t는 $t=a$로 유일합니다. $g'(t)$의 부호를 조사하면 $g'(t)$의 부호는 $t<a$에서 $(+)$, $t>a$에서 $(-)$이므로 $g(t)$는 $t=a$에서

극대이고, 다른 극점은 존재하지 않습니다. 따라서 $t<a$에서 $g(t)$는 증가함수이고, $t>a$에서 $g(t)$는 감소함수입니다.

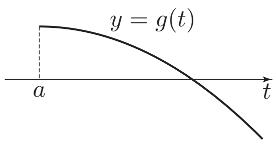
한편 극댓값인 $g(a)$에 대한 정보를 구하면, A가 영역 $y<f(x)$에 포함되어 있으므로 $b<f(a)$입니다. 따라서 $f(a)-b>0$이므로 $g(a)>0$입니다. 지금까지 얻은 $t\ge a$에서의 $g(t)$의 정보들을 정리하면 다음과 같습니다.[8]

① $t=a$일 때 최댓값 $g(a)$를 갖고, a와 b에 관계없이 $g(a)>0$이다.

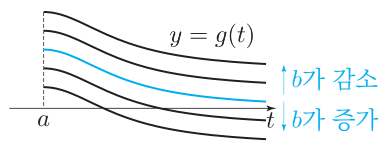
② $t\ge a$에서 감소한다.

8) $t>a$일 때만 먼저 생각한 후 $t<a$일 때는 나중에 생각하려는 것입니다.

이때 감소한다고 해서 $-\infty$로 발산하는 것은 아니므로 가로점근선이 존재할 수 있습니다. 따라서 이를 고려하여 경우를 나누면 다음과 같습니다.



(a)

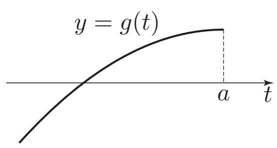


(b)

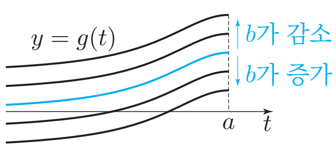
(a)와 같이 $\lim_{t\to\infty} g(t)=-\infty$인 경우, a와 b의 값에 관계 없이 $t>a$에서 방정식 $g(t)=0$의 근이 항상 존재합니다. 이러한 경우 점 $(a,\ b)$의 위치에 관계 없이 x좌표가 a보다 큰 점 $(t,\ f(t))$에 접하는 접선을 하나 그을 수 있습니다.

(b)와 같이 $\lim_{t\to\infty} g(t)=k$인 경우, 즉 $y=g(t)$의 가로점근선이 존재하는 경우, a가 고정되어 있더라도 b의 값이 바뀌면 $g(a)$의 값이 바뀌므로[9] b의 값에 따라 방정식 $g(t)=0$이 $t>a$에서 근을 가질 수도, 가지지 않을 수도 있습니다. 이는 a가 변하더라도 마찬가지입니다. 따라서 $y=g(t)$의 가로점근선이 존재하는 경우, 점 A$(a,\ b)$의 위치에 따라 $y=f(x)$에 그을 수 있는 접선의 개수가 1 또는 0으로 달라질 수 있습니다.

9) 단 b의 값이 변함에 따라 의해 y축 방향으로 평행이동될 뿐입니다. g'이 같으므로 그래프의 모양은 동일합니다.

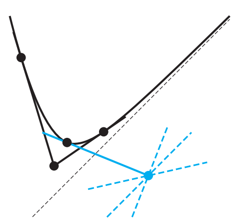


(c)

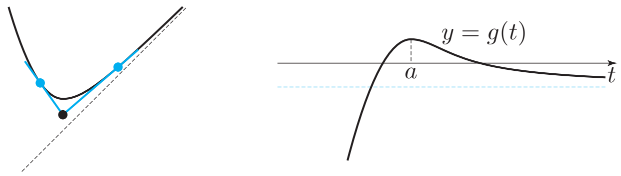


(d)

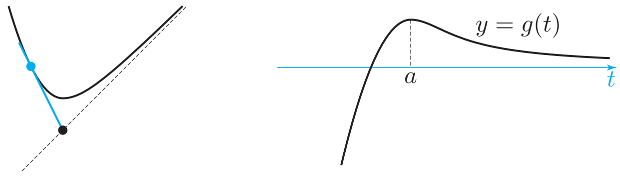
$t<a$에서도 마찬가지입니다. $y=g(t)$의 가로점근선 유무를 확인하고, 점 $(a,\ b)$의 위치에 따른 접선의 개수를 셀 수 있습니다.



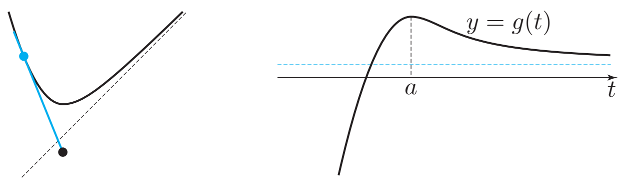
그런데 $y = f(x)$가 어떤 조건을 만족시킬 때 $y = g(x)$가 가로점근선을 가질까요? 그것은 바로 $y = f(x)$가 점근선을 가지는 경우입니다. 곡선 $y = f(x)$가 $x \to -\infty$일 때에는 점근선이 존재하지 않고, $x \to \infty$일 때에는 점근선이 존재하는 상황에서, 점 $(a,\ b)$를 옮겨가며 $y = g(t)$의 상황을 확인해봅시다.



점 $(a,\ b)$가 점근선 위쪽 영역에 포함된 경우, 가로점근선이 x축의 아래쪽에 존재하므로 $g(t) = 0$의 근이 2개 존재합니다.



점 $(a,\ b)$이 점근선에 포함된 경우, $y = g(t)$의 가로점근선이 x축이 되어 $g(t) = 0$의 근이 1개 존재합니다.



b가 더 작아지면, 즉 점 $(a,\ b)$가 점근선 아래쪽 영역에 포함된 경우, $(a,\ b)$가 점근선에 포함된 경우에서와 $y = g(t)$의 그래프의 모양은 바뀌지 않고 극댓값이자 최댓값인 $g(a)$만 커지게 되어 가로점근선이 x축보다 위에 놓이게 되며, $g(t) = 0$의 근이 1개 존재합니다.