행렬의 연산

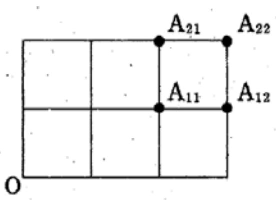
1. 이차정사각행렬 A의 $(i,\ j)$성분 a_{ij}가 아래와 같이 정의될 때, 행렬 A의 모든 성분의 합은?[3점-1004-교육청]

$$a_{ij}=\begin{cases} i-1 & (i>j) \\ i+j & (i=j) \\ i-2j & (i<j) \end{cases}$$

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

2. 이차정사각행렬 A 의 $(i,\ j)$ 성분 a_{ij} 를 상용로그 $\log(20^{i}\times 30^{j})$ 의 지표라 할 때, 행렬 A 의 모든 성분의 합을 구하시오. (단, $i=1,\ 2,\ \ j=1,\ 2$ 이다.)[3점-1010-교육청]

3. 그림과 같이 바둑판 모양의 길이 있다. 행렬 P의 (i,j)성분 a_{ij}를



$a_{ij}=(O$지점에서 A_{ij}지점으로 가는 최단 경로의 수$)$

$(i=1,2,\ j=1,2)$

로 정의하자. 이 때, 행렬 P는?[3점-1003-비상]

① $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$　② $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$　③ $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$
④ $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 12 \end{pmatrix}$　⑤ $\begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

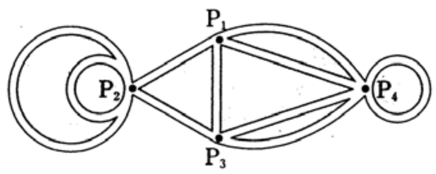
4. 이차정사각행렬 A의 (i,j)성분을 x에 대한 방정식 $\sin(i+j)x=\dfrac{2}{3}\,(0\le x\le 2\pi)$의 실근의 개수로 정의할 때, 행렬 A의 모든 성분의 합은?[4점-1005-종로]

① 20　② 22　③ 24
④ 26　⑤ 28

5. 그림과 같이 네 지점 P_1, P_2, P_3, P_4를 연결하는 도로망에 대하여 사차정사각행렬 A의 $(i,\ j)$성분 $a_{ij}\ (i=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ j=1,\ 2,\ 3,\ 4)$를

$$a_{ij}=\begin{cases} i=j\text{이면 } \mathrm{P}_i\text{지점에만 직접 연결된 원형 도로의 개수} \\ i\neq j\text{이면 } \mathrm{P}_i\text{지점과 } \mathrm{P}_j\text{지점을 직접 연결하는 도로의 개수} \end{cases}$$

라 하자. 예를 들어 $a_{21}=1,\ a_{22}=2$이다. 이때 행렬 A^2의 $(1,\ 1)$성분과 $(4,\ 4)$성분의 합을 구하시오.[4점-1004-종로]



6. 이차정사각행렬 A 의 (i,j) 성분 $a_{ij}\,(i=1,2,\ \ j=1,2)$ 는 두 도형 $x^2+y^2=\dfrac{i+j}{2}$, $|x|+|y|=\sqrt{ij}$ 의 서로 다른 교점의 개수로 정의한다. 이때 행렬 A 의 모든 성분의 합을 구하시오.

[4점-1010-종로]

7. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $A-2B$의 역행렬은?[2점–1009–중앙]

① $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$
④ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

8. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $A(A+B)$의 모든 성분의 합은?[2점–2010–대수능]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

9. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$에 대하여 $2(X-4A)=B-2X$를 만족시키는 행렬 X의 모든 성분의 합은?[2점–1005–메가]

① -7 ② -4 ③ -1
④ 2 ⑤ 5

10. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$에 대하여 $2(X-2A)=B-X$를 만족시키는 행렬 X의 모든 성분의 합은?
[2점–1010–비상]

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

11. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $BA-B$는?[2점–1009–대성]

① $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$
④ $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

12. 세 행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $A(2B+C)$의 모든 성분의 합은?[2점–1008–종로]

① 25 ② 26 ③ 27
④ 28 ⑤ 29

13. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix}1&0\\2&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&0\\1&-6\end{pmatrix}$일 때, $2A+B$의 모든 성분의 합은?[2점-1008-비상]

① 10 ② 11 ③ 12
④ 13 ⑤ 14

14. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2\\-1&0\end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $AB-A$의 모든 성분의 합은?[2점-1006-대성]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

15. 행렬 $A=\begin{pmatrix}-2&3\\0&-1\end{pmatrix}$에 대하여 A^2+3A의 모든 성분의 합은?[2점-1007-종로]

① -4 ② -1 ③ 2
④ 5 ⑤ 8

16. $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$일 때, 행렬 A^2B-A의 2행 1열의 성분은?[2점-1003-종로]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

17. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix}1&a\\2&b\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2&c\\-1&2\end{pmatrix}$에 대하여 $AB=O$일 때, 세 상수 a, b, c의 합 $a+b+c$의 값은? (단, O는 영행렬이다.)

[2점-1004-종로]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

18. 행렬 $A=\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix}$에 대하여 $A+2B=A^2$을 만족시키는 행렬 B의 모든 성분의 합은?[2점-1004-메가]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

19. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여 $AX+B=O$를 만족시키는 행렬 X의 모든 성분의 합은? (단, O는 영행렬이다.)[2점-1003-비상]

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

20. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$에 대하여 $A-X=AB$를 만족시키는 행렬 X의 모든 성분의 합은?[2점-1010-대성]

① -28 ② -27 ③ -26
④ -25 ⑤ -24

21. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$에 대하여 $A+X=3B+2X$를 만족시키는 행렬 X는?[2점-1004-교육청]

① $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 9 & 11 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -9 & -11 \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -9 & -11 \end{pmatrix}$
④ $\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -9 & 11 \end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 9 & -11 \end{pmatrix}$

22. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$에 대하여 등식 $2A-X=A+2B+X$를 만족시키는 행렬 X의 모든 성분의 합은?
[2점-1011-대성]

① 0 ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 4

23. 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 B가 $A+B=2E$를 만족시킬 때, 행렬 $A-B$의 모든 성분의 합은? (단, E는 단위행렬이다.)
[2점-1006-평가원]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

24. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $(A+B)^{10}$ 의 모든 성분의 합은?[3점-1008-종로]

① 14 ② 16 ③ 18
④ 20 ⑤ 22

25. 행렬 A, B가 $A+B=\begin{pmatrix}1 & -2\\1 & -3\end{pmatrix}$, $A-B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\-3 & 1\end{pmatrix}$을 만족할 때, 행렬 A^2-B^2의 모든 성분의 합은?[2점-1003-중앙]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

26. 행렬 $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\2 & 1\end{pmatrix}$에 대하여 행렬 B가 $AB+A=\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}$를 만족시킬 때, 행렬 B의 모든 성분의 합은?[2점-1008-대성]

① -1 ② 0 ③ 1
④ 2 ⑤ 3

27. 두 행렬 A, B가

$$A+B=\begin{pmatrix}3 & 1\\4 & 4\end{pmatrix},\ B-A=\begin{pmatrix}1 & 1\\2 & 4\end{pmatrix}$$

를 만족시킬 때, 행렬 B^2-A^2의 모든 성분의 합을 구하시오.
[3점-1007-메가]

28. 두 이차정사각행렬 A, B에 대하여

$$A-B=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix},\ 3A+B=\begin{pmatrix}11 & 6\\10 & 7\end{pmatrix}$$

이 성립할 때, 행렬 A의 모든 성분의 합은?[2점-1005-비상]

① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

29. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\-4 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\-4 & -1\end{pmatrix}$에 대하여 $X+Y=2A$, $X-Y=4B$일 때, 행렬 X의 모든 성분의 곱을 구하시오.[2점-1008-중앙]

30. 행렬 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}$에 대하여 행렬 A^3의 모든 성분의 합은?

[2점-1007-메가]

① -4 ② -2 ③ 0
④ 2 ⑤ 4

31. 이차정사각행렬 A의 $(i,\ j)$성분 a_{ij}가

$$a_{ij}=i-j\ (i=1,2,\ j=1,2)$$

이다. 행렬 $A+A^2+A^3+\cdots+A^{2010}$의 $(2,\ 1)$의 성분은?

[4점-2010-대수능]

① -2010 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2010

32. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & \frac{3}{2} & 5\end{pmatrix}$에 대하여 행렬 AB의 모든 성분의 합은?[3점-1006-평가원]

① 5 ② 10 ③ 15
④ 20 ⑤ 25

33. 두 행렬 A, B가 등식

$$A+B=\begin{pmatrix}3 & 0\\0 & 3\end{pmatrix},\ A^2-B^2=\begin{pmatrix}3 & 6\\9 & 12\end{pmatrix}$$

를 만족할 때, 행렬 A의 모든 성분의 합은?[3점-1005-대성]

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

34. 두 이차정사각행렬 A, B가

$$A-B=\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{pmatrix},\ A^2-B^2=\begin{pmatrix}10 & -6\\8 & 14\end{pmatrix}$$

를 만족시킬 때, 행렬 $A+B$의 모든 성분의 합을 구하시오.[3점-1009-대성]

35. $A=\begin{pmatrix}a & b\\1 & b\end{pmatrix}$일 때, $A^2=\begin{pmatrix}-2 & 6\\-2 & 6\end{pmatrix}$을 만족하는 a, b에 대하여 $a-b$의 값은?[3점-1003-중앙]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

36. 행렬 A의 성분 중 최댓값과 최솟값의 차를 $\ll A\gg$라 하자. $A=\begin{pmatrix}-2 & 2\\a & 3\end{pmatrix}$에 대하여 $\ll A^2\gg=29$를 만족시키는 양수 a의 값을 구하시오.[3점-1005-중앙]

37. 집합 $X=\{x|-10\le x\le 10,\ x$ 는 정수$\}$에 대하여 집합 Y를

$$Y=\left\{A \,\middle|\, A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix},\ a\in X,\ b\in X,\ c\in X\right\}$$

라 하자. 이 때 집합 $Z=\left\{A \,\middle|\, A^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ A\in Y\right\}$의 원소의 개수를 구하시오.[3점–1006–종로]

38. 행렬 $A=\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 A^8의 모든 성분의 합을 구하시오.[3점–1010–비상]

39. 두 행렬 $A=\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $A^{12}+B^{12}$의 모든 성분의 합은?[3점–1003–교육청]

① 0 ② 4 ③ 8
④ 16 ⑤ 32

40. 행렬 $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 2 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}^{10}$ 의 모든 성분의 합을 S라 할 때, $3^{11}S$의 값을 구하시오.[3점–1003–종로]

41. 행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에 대하여 $A\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $A^2\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$일 때, $abcd$의 값을 구하시오.[3점–1003–교육청]

42. 행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에 대하여 $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $A^2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 15 \\ 11 \end{pmatrix}$일 때, $abcd$의 값을 구하시오.[4점–1003–중앙]

43. 행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에 대하여 등식 $a+b=a+c=b+d=12$가 성립할 때, $A^2=A+(144-a)E$가 성립하도록 하는 실수 a의 값을 구하여라. (단, E는 단위행렬이다.)[3점-1005-비상]

44. 이차정사각행렬 $\begin{pmatrix} a & b \\ m & n \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} c & d \\ p & q \end{pmatrix}$에 대하여 다음 두 등식이 성립한다.

$\begin{pmatrix} a & b \\ m & n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} c & d \\ p & q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$를 만족하는 네 실수 x, y, z, w에 대하여 $x+y+z+w$의 값을 구하시오.[3점-1003-종로]

45. 이차정사각행렬 A, B에 대하여 $A*B=\dfrac{AB+BA}{2}$로 정의한다. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이다.)[3점-1009-종로]

<보 기>

ㄱ. $A*E=A$

ㄴ. $A*B=B*A$

ㄷ. $A*(B+C)=(A*B)+(A*C)$ (단, 행렬 C는 이차정사각행렬이다.)

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

46. 이차 정사각행렬 A, B가 $A+B=O$, $AB=E$를 만족할 때, $\sum_{n=1}^{30}(A^n+B^n)$을 간단히 하면? (단, O는 영행렬, E는 단위행렬이다.)[3점-1003-중앙]

① $-30E$ ② $-2E$ ③ O
④ $2E$ ⑤ $30E$

47. 행렬 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여 자연수 m, n은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $A^m=A^n$
(나) m, n은 100 이하의 서로 다른 자연수이다.

$|m-n|$의 최댓값을 p, 최솟값을 q라 할 때, $p+q$의 값을 구하여라.
[4점][2010 3월 교육청]

48. 두 이차정사각행렬 A, B에 대하여 $A+B=E$일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬, O는 영행렬이다.)[3점-1010-대성]

<보 기>

ㄱ. $AB=BA$

ㄴ. $A^2-B^2=O$이면 $A=B$이다.

ㄷ. $A^2-B^2=E$이면 $A^2+B^2=E$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

49. 이차 정사각행렬 A, B에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이다.)[4점−1008−대성]

<보기>

ㄱ. $AB=A+B$이면 $AB=BA$이다.
ㄴ. $AB=B$이면 $A^2B^2=B^2$이다.
ㄷ. $A^2B^2=E$이면 $AB=E$이다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

50. 두 이차정사각행렬 A, B에 대하여

$$A+B=E,\ A^2=O$$

일 때, 다음 중 행렬 B^{20}과 같은 것은? (단, O는 영행렬이고, E는 단위행렬이다.)[3점−1008−비상]

① $19B-E$　② $19B-20E$　③ $20B-E$
④ $20B-19E$　⑤ $20B-21E$

51. 영행렬이 아닌 두 이차정사각행렬 A, B가 $AB=A$, $A^2B=O$를 모두 만족시킬 때, 옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은? (단, O는 영행렬이다.)[3점−1005−비상]

<보 기>

ㄱ. $AB=BA$　ㄴ. $(AB)^2=A^2B^2$
ㄷ. $AB^{2010}A=O$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ　⑤ ㄴ, ㄷ

52. 이차정사각행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$가 $A^2=E$를 만족시킬 때, 두 수 b, c의 곱 bc의 최댓값은? (단, E는 단위행렬이고, a, b, c, d는 실수이다.)[4점−1003−비상]

① $\frac{1}{2}$　② 1　③ 2
④ $2\sqrt{3}$　⑤ 4

53. 행렬 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}^n$의 (1, 2)성분은 $2^4-2^5+2^6-2^7+2^8$이고 (1, 1)성분은 a이다. $a+n$의 값을 구하시오. (단, n은 자연수이다.)

[4점−1009−평가원]

54. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$이 있다. 등식

$$(A+AB+B)^{20}=xA+yB$$

를 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $\log_6 xy$의 값을 구하시오.

[4점−1003−비상]

55. 이차정사각행렬 A가 다음 조건을 만족한다.

> (가) $A^3+A^2+A+E=O$
> (나) 행렬 A의 모든 성분의 합이 5이다.

행렬 A^7+A^6의 모든 성분의 합은? (단, E는 단위행렬이고, O는 영행렬이다.)[4점-1009-종로]

① -9 ② -7 ③ 0
④ 7 ⑤ 9

56. 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$이 있다. 2 이상의 자연수 n과 양수 k에 대하여 등식 $A^n=kA$가 성립할 때, 자연수 n의 최솟값을 p라 하고, 그 때의 k의 값을 q라 하자. $p+q$의 값을 구하시오.
[3점-1005-메가]

57. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬

$$A^{10}+A^9B+A^8B^2+\cdots+AB^9+B^{10}$$

의 (2, 1)성분을 구하시오. [4점-1005-메가]

58. [표1]은 두 과일가게 P, Q에서 판매하는 품목의 단가를 나타낸 것이고, [표2]는 갑, 을 두 사람이 사려고 하는 품목의 개수를 나타낸 것이다.

과일가게 \ 품목	사과	배	감
P	800	900	500
Q	900	700	600

[표 1]

품목 \ 고객	갑	을
사과	5	4
배	3	5
감	4	3

[표2]

이를 각각 행렬로 나타내어

$$A=\begin{pmatrix} 800 & 900 & 500 \\ 900 & 700 & 600 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

이라 할 때, 행렬 AB로부터 알 수 있는 것은?[3점-1005-종로]

① 갑은 P에서 구입하는 것이 Q에서 구입하는 것보다 500원 저렴 하다.
② 갑은 Q에서 구입하는 것이 P에서 구입하는 것보다 300원 저렴 하다.
③ 을은 P에서 구입하는 것이 Q에서 구입하는 것보다 500원 저렴 하다.
④ 을은 Q에서 구입하는 것이 P에서 구입하는 것보다 100원 저렴 하다.
⑤ 을은 Q에서 구입하는 것이 P에서 구입하는 것보다 300원 저렴 하다.

59. 어느 회사의 두 공장 A, B의 직원들을 다음과 같이 인사 이동시킨다고 한다.

> 매년 초에 A공장 직원의 20%는 B공장으로, 동시에 B공장 직원의 10%는 A공장으로 이동시킨다.

2009년 말의 A공장과 B공장의 직원수는 각각 500명이었다.
행렬 $A=\begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.2 & 0.9 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} 500 \\ 500 \end{pmatrix}$이라 할 때, 다음 중 2011년 말의 B공장의 직원의 수를 나타내는 것은? (단, 이 기간 중 입사 또는 퇴사하는 사람은 없다.)[4점-1010-대성]

① 행렬 A^2C의 (1, 1)성분 ② 행렬 A^2C의 (2,1)성분
③ 행렬 B^2C의 (1,1)성분 ④ 행렬 B^2C의 (2,1)성분
⑤ 행렬 $2AC$의 (1,1)성분

60. 좌표평면 위에 있는 두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$와 행렬 $P=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$는 일대일 대응 관계에 있다. 즉, 두 점은 하나의 행렬로 나타낼 수 있고, 하나의 행렬은 각 열을 좌표로 하는 2 개의 점으로 나타낼 수 있다. 행렬 $M=\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$에 대하여 두 행렬 M 과 P 의 곱 $MP=P_1$ 이라 하고 행렬 P_1의 각 열을 좌표로 하는 두 점 A_1, B_1과 원점 O를 이용하여 삼각형 $\mathrm{A_1OB_1}$을 만든다. 또 $MP_1=P_2$라 하고 행렬 P_2 의 각 열을 좌표로 하는 두 점 A_2, B_2와 원점 O를 이용하여 삼각형 $\mathrm{A_2OB_2}$를 만든다. 이와 같은 방법으로 삼각형 $\mathrm{A_1OB_1}$, $\mathrm{A_2OB_2}$, $\mathrm{A_3OB_3}$, $\cdots$ 을 만들면
$\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{A_1OB_1}=\angle\mathrm{A_2OB_2}=\angle\mathrm{A_3OB_3}=\cdots$ 이다. 두 점 A, B 의 좌표가 각각 $(2,\ 4)$, $(4,\ 2)$일 때, 삼각형 $\mathrm{A_4OB_4}$ 의 넓이를 구하시오.[4점-1003-비상]

61. 다음은 행렬 $A=\begin{pmatrix} 3 & -8 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 8 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ 에 대하여 A^n을 B와 C로 나타내는 과정이다.

> 두 행렬 B와 C를 더하면
> $B+C=\begin{pmatrix} -2 & 8 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=2E$
> 이다. 즉,
> $2A^n=A^n(B+C)=A^nB+A^nC$
> 이고,
> $A^nB=A^{n-1}AB=\boxed{\text{(가)}}A^{n-1}B=\cdots=\boxed{\text{(나)}}B$
> $A^nC=A^{n-1}AC=\boxed{\text{(다)}}A^{n-1}C=\cdots=\boxed{\text{(라)}}C$
> 이므로
> $A^n=\boxed{\text{(마)}}B+\boxed{\text{(바)}}C$
> 이다.

위의 과정에서 (나), (마), (바)에 알맞은 것은?[3점-1003-종로]

	(나)	(마)	(바)
①	$(-1)^n$	$\dfrac{(-1)^n}{2}$	$\dfrac{1}{2}$
②	$(-1)^n$	$(-1)^n$	1
③	$(-1)^{n+1}$	$\dfrac{(-1)^n}{2}$	$\dfrac{1}{2}$
④	$(-1)^{n-1}$	$(-1)^n$	1
⑤	$(-1)^{n-1}$	$\dfrac{(-1)^n}{2}$	$\dfrac{1}{2}$

62. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여 집합 S, T 를
$S=\{A,\ B\}$,
$T=\{X^mY^nZ^k \mid X\in S,\ Y\in S,\ Z\in S,\ m,\ n,\ k\text{는 자연수}\}$
라 하자. 집합 T 의 원소의 개수를 구하시오.[4점-1003-비상]

63. 집합 S를

$$S=\left\{X \,\middle|\, X=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix},\ a,\, b\text{는 실수}\right\}$$

라 할 때, 집합 S에 대한 설명 중 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[3점-1007-메가]

> <보 기>
>
> ㄱ. $X\in S$, $Y\in S$이면 $X+Y\in S$이다.
> ㄴ. $X\in S$이면 $X^2\in S$이다.
> ㄷ. $X^2\in S$이면 $X\in S$이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

64. 집합 $P=\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ x & y \end{pmatrix} \middle| \, x+y=1,\ x,\ y\text{는 실수}\right\}$에 대한 설명 중 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[4점-1004-대성]

<보 기>

ㄱ. $A\in P,\ B\in P$이면 $AB=A$이다.
ㄴ. $A\in P,\ B\in P$이면 $(A+B)^2=2(A+B)$이다.
ㄷ. $A\in P,\ B\in P,\ C\in P$이면
$(A+B+C)^{2011}=3^{2010}(A+B+C)$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

65. 두 이차정사각행렬 A, B에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이고, O는 영행렬이다.)

[4점-1009-대성]

<보 기>

ㄱ. $AB=-BA$이면 $A^2B^2=(AB)^2$이다.
ㄴ. $A^2=E,\ AB=A$이면 $BA=A$이다.
ㄷ. $A+B=E,\ AB=O$이면 $A^3+B^3=E$이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

66. 행렬 $A=\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$을 다음과 같이 정의하자.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

좌표평면에서 점 P_n의 좌표를 $(x_n,\ y_n)$이라 할 때, 삼각형 $\mathrm{OP}_n\mathrm{P}_{n+1}$의 넓이를 $S(n)$이라 하자.
$S(1)+S(2)+S(3)+\cdots+S(2010)$의 값은? (단, O는 원점이다.)

[4점-1005-메가]

① 670 ② 1005 ③ 1340
④ 2010 ⑤ 2680

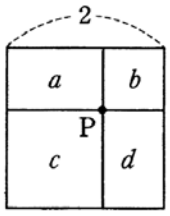
67. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 20 & 9 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$에 대하여 집합 X를

$$X=\{(x,\ y)\,|\,(x^2+y^2)A-(x+y)E=B,\ x,\ y\text{는실수}\}$$

라 하자. 좌표평면에서 집합 X의 두 원소가 나타내는 점을 각각 P, Q 라 하고 원점을 O 라 할 때, 삼각형 OPQ 의 넓이는? (단, E는 단위행렬이다.)[4점-1010-대성]

① $\sqrt{7}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{10}$
④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $\sqrt{14}$

68. 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형의 내부에 점 P가 있다. 점 P를 지나고 정사각형의 각 변에 평행인 두 선분을 그어 만들어지는 네 부분의 넓이를 각각 a, b, c, d라 하자.



점 P에 이차정사각행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$를 대응시킬 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[4점 –1005–종로]

<보 기>

ㄱ. 행렬 A가 단위행렬이 되는 점 P가 있다.

ㄴ. 행렬 A의 역행렬이 존재하지 않는 점 P가 있다.

ㄷ. 행렬 A에 대하여 $A^2=\dfrac{3}{2}A$가 되는 점 P가 존재한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

69. 이차정사각형렬 $M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 M'을 $M'=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$로 정의한다. 또 이차정사각행렬 전체의 집합 M의 두 부분집합 S, T를 $S=\{A \mid A=A'\}$, $T=\{B \mid B=-B'\}$라 하자. 이때 옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?
[4점–1006–종로]

<보 기>

ㄱ. 집합 $S\cap T$의 원소는 1개 뿐이다.

ㄴ. $X\in T$이면 $X^2\in S$이다.

ㄷ. $X\in S$, $Y\in T$이면 $XY\in T$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

70. 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$에 대하여 집합 M을

$$M=\{X \mid AX-XA=O\}$$

라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, O는 영행렬이다.)[4점–1010–비상]

<보 기>

ㄱ. $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}\in M$

ㄴ. $X\in M$, $Y\in M$이면 $XY\in M$이다.

ㄷ. $X\in M$, $Y\in M$이고 $AX=YA$이면 $X=Y$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

71. 집합 $X=\{1, 2, 3\}$을 정의역과 공역으로 하는 일대일 대응 f에 대하여 3×3행렬 A는

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f(1) \\ f(2) \\ f(3) \end{pmatrix}$$

을 만족시킨다. $f(1)=3$이고 $A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값이 3일 때, 행렬 $A^2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$은? (단, 행렬 A의 각 행에 있는 3개의 성분 중 하나만 1이고 나머지는 0이다.)[4점–1007–대성]

① $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

④ $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

역행렬

1. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$에 대하여 등식 $AX=B$를 만족시키는 행렬 X의 모든 성분의 합은?[2점-1005-대성]

① 9　② 10　③ 11　④ 12　⑤ 13

2. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여 등식

$$AX=B$$

을 만족시키는 행렬 X의 모든 성분의 합은?[2점-1006-종로]

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

3. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $A^{-1}B$의 모든 성분의 합은?[2점-1009-종로]

① 4　② 5　③ 6　④ 7　⑤ 8

4. 행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$일 때, 행렬 $(E-A)A^{-1}$는? (단, E는 단위행렬이다.)[2점-1007-대성]

① $\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$　② $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$　③ $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$　④ $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$　⑤ $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

5. 두 이차정사각행렬 A, B에 대하여 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$, $AB=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$이 성립할 때, $A+B^{-1}$는?[2점-1004-대성]

① $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$　② $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$　③ $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 15 \end{pmatrix}$　④ $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$　⑤ $\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

6. 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$에 대하여 A^2+A^{-1}은?[2점-1010-중앙]

① $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}$　② $\begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$　③ $\begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 10 & 14 \end{pmatrix}$　④ $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$　⑤ $\begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 12 & 14 \end{pmatrix}$

7. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$일 때, 행렬 AB^{-1}의 모든 성분의 합은?[2점-1010-대성]

① -4　② -2　③ 0
④ 2　⑤ 4

8. 역행렬을 갖는 이차정사각행렬 A에 대하여 등식

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}A^{-1}$$

가 성립할 때, 행렬 A^2의 모든 성분의 합은?[2점-1010-종로]

① -1　② 0　③ 1
④ 2　⑤ 3

9. 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$일 때, 행렬 $A(A^{-1}+B^{-1})B$를 구하면?[2점-1005-종로]

① $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$　② $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$　③ $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$
④ $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$　⑤ $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

10. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $(ABA^{-1})^5$ 의 $(1,\ 1)$ 성분은?[3점-1010-비상]

① 20　② 40　③ 60
④ 80　⑤ 100

11. 행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여 $A^{-1}BA=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$을 만족시키는 행렬 B의 모든 성분의 합은?[2점-1010-메가]

① 3　② 4　③ 5
④ 6　⑤ 7

12. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$에 대하여 등식 $AX=B$를 만족하는 행렬 X의 모든 성분의 합은?[2점-1011-중앙]

① -5　② -3　③ 0
④ 3　⑤ 5

13. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여 $AX=BA$를 만족시키는 행렬 X의 모든 성분의 합은? [2점-1010-비상]

① -4 ② -2 ③ 0
④ 2 ⑤ 4

14. 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$일 때, 등식 $A^2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -7 \\ 2 \end{pmatrix}$를 만족시키는 x, y에 대하여 $x+y$의 값은?[3점-1008-중앙]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

15. 역행렬이 존재하는 두 이차정사각행렬 A, B에 대하여 $A^{-1}B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$일 때, 행렬 $B^{-1}A$의 모든 성분의 합은?
[2점-1010-교육청]

① -1 ② 0 ③ 1
④ 2 ⑤ 3

16. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $A^{-1}B$의 모든 성분의 합은?[2점-1011-대전교]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

17. 이차정사각행렬 A에 대하여

$$A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}=2E$$

을 만족할 때, 행렬 A의 모든 성분의 합은? (단, E는 단위행렬이다.)[2점-1011-종로]

① -4 ② -2 ③ 0
④ 2 ⑤ 4

18. 두 행렬 A, B에 대하여 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A+B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$일 때, 행렬 B의 역행렬의 모든 성분의 합은?[2점-1005중앙]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

19. 두 행렬 A, B에 대하여 $A-B=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$일 때,

$AX=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $BX=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$을 만족시키는 행렬 X는?

[2점–1009–평가원]

① $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$

④ $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

20. 행렬 $A=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $A^{-1}(2A+B)$의 모든 성분의 합을 구하시오.[3점–1007–교육청]

22. 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 B는 $B^{-1}A^{-1}=\begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$을 만족할 때, 행렬 $A+B$의 모든 성분의 합을 구하시오.

[3점–1003–중앙]

23. 두 이차정사각행렬 A,B가

$$A(B+E)=2E,\quad BA=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

을 만족시킬 때, 행렬 A의 모든 성분의 합을 구하시오.
(단, E는 단위행렬이다.)[3점–1011–대성]

24. 행렬 $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$에 대하여 $A^n=A^{-1}$를 만족시키는 자연수 n의 최솟값은?[3점–1006–대성]

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

25. 이차정사각행렬 A가 $A=2A^{-1}$를 만족시킬 때, $A^2+A^4+A^6+A^8+A^{10}$의 모든 성분의 합을 구하시오.

[3점–1010–메가]

26. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & a \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$에 대하여 $AB+A^{-1}=E$ 가 성립할 때, 상수 a의 값은? (단, E는 단위행렬이다.)[3점-1003-교육청]

① -1 ② 0 ③ 1
④ 2 ⑤ 3

27. 모든 성분의 합이 24인 이차정사각행렬 A가 $2A^2-A=2E$를 만족시킬 때, 행렬 $2A-E$의 역행렬의 모든 성분의 합을 구하시오. (단, E는 단위행렬이다.)[3점-1006-평가원]

28. 행렬$A=\begin{pmatrix} a & -1 \\ b & -2 \end{pmatrix}$에 대하여 $A=A^{-1}$ 가 성립하고, 행렬 $A-xE$가 역행렬을 갖지 않을 때, 양수 x 의 값은?
(단, a, b 는 실수이고, E 는 단위행렬이다.)[3점-1010-대성]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

29. 행렬 $A=\begin{pmatrix} a+\sqrt{2} & 2a+\sqrt{2} \\ b & \frac{\sqrt{2}}{2}a \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않도록 하는 두 양의 유리수 a, b에 대하여 ab의 값은?[3점-1008-비상]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{3}{4}$
④ 1 ⑤ $\frac{3}{2}$

30. 이차정사각행렬 A가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $A^2-A+E=O$
(나) $A^2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}-A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

행렬 A^{-1}의 모든 성분의 합은? (단, E는 단위행렬이고, O는 영행렬이다.)[3점-1006-대성]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

31. 이차정사각행렬 A에 대하여

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix},\ A\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

이 성립할 때, 행렬 A의 모든 성분의 합은?[3점-1010-종로]

① -7 ② -4 ③ -1
④ 4 ⑤ 7

32. 역행렬을 갖는 이차정사각행렬 A에 대하여

$$A+A^{-1}=2E,\ A\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$$

일 때, 행렬 $A\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$의 모든 성분의 합은? (단, E는 단위행렬이다.)

[3점-1011-대성]

① 3 ② 2 ③ 1
④ 0 ⑤ -1

33. 역행렬이 존재하는 두 이차정사각행렬 A, B에 대하여

$$A+B^{-1}=\begin{pmatrix}3&-1\\0&5\end{pmatrix},\ A^{-1}+B=\begin{pmatrix}5&1\\0&3\end{pmatrix}$$

이 성립할 때, 다음 중 행렬 $AB+B^{-1}A^{-1}$와 같은 것은? (단, E는 단위행렬이다.)[3점-1006-종로]

① $7E$ ② $9E$ ③ $11E$
④ $13E$ ⑤ $15E$

34. 영행렬이 아닌 이차정사각행렬 A가 $A^2=O$를 만족시킬 때, 행렬 $E-A$의 역행렬은 $pA+qE$이다. 두 실수 p, q의 합 $p+q$의 값은? (단, O는 영행렬이고, E는 단위행렬이다.)

[3점-1004-메가]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

35. 실수 t에 대하여 $\begin{pmatrix}1&t\\-t&1+t\end{pmatrix}$의 역행렬에서 2행 2열의 성분의 최댓값은?[3점-1003-종로]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1
④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

36. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$이 있다. 다음 중 실수 θ의 값에 관계없이 행렬 $X=\sin\theta A+\cos\theta E$의 역행렬과 항상 같은 행렬은?[3점-1003-교육청]

① $\sin\theta A+\cos\theta E$ ② $\sin\theta A-\cos\theta E$
③ $-\sin\theta A+\cos\theta E$ ④ $\cos\theta A+\sin\theta E$
⑤ $\cos\theta A-\sin\theta E$

37. 두 이차정사각행렬 A, B에 대하여 등식

$$AB=\begin{pmatrix}0&-1\\1&2\end{pmatrix},\ A^{-1}B=\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}$$

가 성립할 때, 행렬 A^2의 모든 성분의 합은? (단, A^{-1}는 A의 역행렬이다.)[3점-1003-비상]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

38. 이차정사각행렬 A, B, C가

$$AB^2C=AB=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix},\ CBA=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

을 만족할 때, 행렬 B의 모든 성분의 합은?[3점-1011-대전교]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

39. 두 이차정사각행렬 $A,\ B$에 대하여 $A^2=O,\ B=\frac{1}{2}A+E$ 가 성립할 때, 행렬 $B^{2011}+(B^{-1})^{2011}$의 모든 성분의 합은? (단, O는 영행렬이고, E는 단위행렬이다.)[4점-1010-비상]

① -4 ② 0 ③ 4
④ 8 ⑤ 12

40. 이차방정식 $x^2+10x-1=0$의 두 실근을 $\alpha,\ \beta$라 하자. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} \beta & 1 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $(AB)^{-1}$의 모든 성분의 합을 구하시오.[3점-1010-대성]

41. 실수 k와 행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$에 대하여, 행렬 $A-kE$의 역행렬이 존재하지 않도록 하는 k의 값을 $k_1,\ k_2$라 할 때, ${k_1}^2+{k_2}^2$의 값은? (단, E는 단위행렬이다.)[3점-1007-교육청]

① 37 ② 38 ③ 39
④ 40 ⑤ 41

42. 행렬 $\begin{pmatrix} t & t+1 \\ 2t & t^2+t \end{pmatrix}$가 역행렬을 갖지 않도록 하는 모든 t의 값의 합은?[3점-1006-평가원]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

43. 두 행렬 $A,\ B$가 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} a+1 & b \\ 4b & a+1 \end{pmatrix}$ 일 때, 행렬 AB의 역행렬이 존재하지 않도록 하는 두 양수 $a,\ b$에 대하여 $a-2b$의 값은?[3점-1005-중앙]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

44. 임의의 실수 a에 대하여 행렬 $\begin{pmatrix} a+2 & 1 \\ b & a-3 \end{pmatrix}$의 역행렬이 항상 존재하도록 하는 정수 b의 최댓값은?[3점–1010–중앙]

① -7 ② -6 ③ -5
④ -4 ⑤ -3

45. 두 이차 정사각행렬 A, B 에 대하여 옳은 것만을 <보기> 에서 있는 대로 고른 것은? (단, E 는 단위행렬, O는 영행렬이다.)

[3점–1011–중앙]

<보 기>

ㄱ. $A \neq O$이고 $AB = O$이면 $B = O$이다.
ㄴ. $A^2 - 2A + E = O$이면 $A - E$ 의 역행렬은 존재하지 않는다.
ㄷ. $AB^2 = B^2A$이면 $AB = BA$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

46. 집합 $S = \{X \mid X^{-1} = X,\ X$ 는 이차정사각행렬$\}$에 대하여 집합 S에 속하는 두 원소 A, B가 $(AB)^{-1} = AB$ 를 만족할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?(단, E 는 단위행렬이다.)[3점–1010–중앙]

<보 기>

ㄱ. $(AB)^2 = E$ ㄴ. $AB = BA$
ㄷ. $A - B$ 의 역행렬이 존재하면 $A = -B$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

47. 집합 M 을

$M = \{A \mid A^3 = -E,\ A$는 이차정사각행렬$\}$

이라 정의할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E 는 단위행렬이다.)[3점–1010–비상]

<보 기>

ㄱ. $-E \in M$ 이다.
ㄴ. $A \in M$ 이면 $-A \in M$ 이다.
ㄷ. $A \in M$ 이면 $A^{-1} \in M$ 이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

48. 두 이차정사각행렬 A, B에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? (단, O는 영행렬이고, E는 단위행렬이다.)

[3점–1010–대성]

<보 기>

ㄱ. $AB=O$이면 $(A+B)^2=A^2+B^2$이다.
ㄴ. $B\neq O$이고 $AB=O$이면 A의 역행렬은 존재하지 않는다.
ㄷ. $A^2=A$이면 $A+4E$는 역행렬을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

49. 두 이차정사각행렬 A, B에 대하여 다음 두 조건이 성립한다.

(가) $A=B^2$
(나) A의 역행렬은 $2A$이다.

이때 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이다.)[3점–1004–종로]

<보 기>

ㄱ. $AB=BA$ ㄴ. $B^4=2E$
ㄷ. $(AB)^4$의 모든 성분의 합은 $\frac{1}{4}$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

50. 두 이차정사각행렬 A, B에 대하여

$$A-B=E,\ A^2=A$$

가 성립할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이다.)[3점–1009–종로]

<보 기>

ㄱ. $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$
ㄴ. $B^2=B$
ㄷ. 행렬 B의 역행렬이 존재하면 $B=-E$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

51. 다음 두 조건을 모두 만족시키는 실수 x, y에 대하여 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$가 나타내는 도형의 길이의 최댓값은?

[3점–1004–교육청]

(가) $x^2+y^2\leq 9$
(나) 행렬 $\begin{pmatrix} m & y \\ 1 & x-3 \end{pmatrix}$은 역행렬이 존재하지 않는다.

(단, m은 실수이다.)

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

52. 이차정사각행렬 A가 $A^2+E=O$을 만족시킬 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이고, O는 영행렬이다.)[3점-1010-교육청]

<보 기>

ㄱ. $A+A^{-1}=O$
ㄴ. A^3-E의 역행렬이 존재한다.
ㄷ. 모든 실수 k에 대하여 $A+kE$의 역행렬이 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

53. 두 이차정사각행렬 A, B에 대하여 $AB=BA$이기 위한 충분조건을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이다.)[4점-1010-종로]

<보 기>

ㄱ. $A+B=E$ ㄴ. $AB=A+B$
ㄷ. $AB=A-B+E$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

54. 이차정사각행렬 A, B에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이다.)[3점-1010-메가]

<보 기>

ㄱ. $A^4=E$이면 $A=E$ 또는 $A=-E$이다.
ㄴ. $(AB)^{-1}=A^{-1}B^{-1}$이면 $AB=BA$이다.
ㄷ. $A^{2011}=A^7=E$이면 $A=E$이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

55. 이차정사각행렬 A, B에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬, O는 영행렬이다.)
[3점-1008-중앙]

<보기>

ㄱ. A^2의 역행렬이 존재하면 A의 역행렬도 존재한다.
ㄴ. A^3의역행렬이 존재하지 않으면 A의 역행렬도 존재하지 않는다.
ㄷ. $A^2=O$이면 $E+A$의 역행렬은 $E-A$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

56. 두 이차정사각행렬 A, B에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이다.)[3점-1004-종로]

<보 기>

ㄱ. $A^4=E$, $A^7=E$이면 $A=E$이다.
ㄴ. $A^2B=E$이면 $A^3B=BA^3$이다.
ㄷ. $A^{-1}BA^{-1}=E$이면 $AB=BA$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

57. $-1<a<2$인 실수 a에 대하여 행렬 $A=\begin{pmatrix} a+1 & 3 \\ b-1 & 2a \end{pmatrix}$가 역행렬을 갖지 않도록 하는 정수 b가 존재할 때, 정수 b의 최솟값과 최댓값을 각각 m, M이라 하자. 이 때, $m+M$의 값은? [4점-1003-중앙]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

58. 두 수 a, b는 집합 $S=\{x\,|\,x$는 10 이하의 자연수$\}$의 원소이다. 행렬 $A=\begin{pmatrix} a & -1 \\ -2b & 5 \end{pmatrix}$의 역행렬 A^{-1}의 모든 성분이 자연수가 되도록 a, b를 정할 때, 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는?[3점-1005-메가]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

59. 두 이차정사각행렬 A, B가 다음 조건을 모두 만족시킨다.

(가) A의 역행렬이 존재하고, $A\neq kE$ (k는 실수)이다.
(나) $A^2=B$이고 $B^2=8A$이다.

이때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이다.)[4점-1009-중앙]

<보 기>

ㄱ. $AB=BA$
ㄴ. B의 역행렬이 존재한다.
ㄷ. $A-2E$의 역행렬이 존재하면 $2A+B$의 역행렬은 존재하지 않는다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

60. 두 실수 a, b가 다음 조건을 만족시킬 때, 좌표평면에서 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$가 나타내는 도형의 넓이는?[4점-1009-대성]

(가) $a^2+b^2<1$
(나) 임의의 실수 θ에 대하여 행렬 $\begin{pmatrix} a-\sin\theta & ab-\cos^2\theta \\ 1 & b-\sin\theta \end{pmatrix}$는 항상 역행렬을 갖는다.

① $\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{1}{2}$ ② $\pi-1$ ③ $\dfrac{\pi}{2}+1$
④ $\pi-\dfrac{1}{2}$ ⑤ $\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{3}{2}$

61. 영행렬이 아닌 두 이차정사각행렬 A, B 에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, O 는 영행렬이고, E 는 단위행렬이다.) [4점-1008-비상]

<보 기>

ㄱ. $A(A-B)=B(A-B)$이면 $(A-B)^2=O$이다.
ㄴ. $2AB-A+2B=O$이면 행렬 $A+E$의 역행렬은 $E-2B$이다.
ㄷ. $A^nB^n=(AB)^n$이면 $AB=BA$이다. (단, $n=2, 3, 4, \cdots$)

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

62. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & a+1 \end{pmatrix}$이 다음 두 조건을 만족한다.

(가) $(a-1)^2+b^2 \le 5$
(나) AB 의 역행렬이 존재하지 않는다.

이때, 정수 a, b 의 순서쌍 (a, b)의 개수를 구하시오.
[4점-1006-종로]

63. 역행렬이 존재하는 이차정사각행렬 A 에 대하여 두 등식

$$\begin{pmatrix} 1 & k \\ 2 & 4 \end{pmatrix}A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & k \\ 2 & 3 \end{pmatrix}A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

가 성립할 때, 행렬 A의 모든 성분의 합을 구하시오. (단, k는 실수이다.) [3점-1004-메가]

64. 행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & k \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$과 이차정사각행렬 B에 대하여 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, O는 영행렬이다.)
[3점-1004-교육청]

<보 기>

ㄱ. $k=0$일 때, A^{-1}이 존재한다.
ㄴ. $k=1$일 때, $AB=O$이면 $B=O$이다.
ㄷ. $k=4$일 때, $AB=O$이면 영행렬이 아닌 행렬 B가 존재한다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

65. 두 이차정사각행렬 A, B는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $A^2=2A+E$
(나) $AB=2E$
(다) 행렬 A의 모든 성분의 합은 7이다.

행렬 B의 모든 성분의 합은? (단, E는 단위행렬이다.) [4점-1003-교육청]

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

66. 이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$에 대하여 행렬 $A_f=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$라 하자. 행렬 $P=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$에 대하여 $PA_fP=A_f$이고, $A_f=A_f^{-1}$이 성립한다고 할 때, $f(x)$의 최솟값은? (단, $a>0$)[4점-1005-종로]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

67. 좌표평면 위에서 부등식 $x^2+y^2<1$을 만족하는 영역에 존재하는 임의의 서로 다른 두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$에 대하여 행렬 $M=\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$라 하자. 행렬 $M+kE$의 역행렬이 항상 존재하기 위한 양수 k의 최솟값은? (단, E는 단위행렬이다.)[4점-1007-교육청]

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2
④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 4

68. 세 실수 a, b, c에 대하여 두 행렬 A, B를 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} a & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$라 하자. $b^2+c^2\neq 0$이고 행렬 A의 역행렬이 존재하지 않을 때, 항상 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, O는 영행렬이다.)[4점-1005-중앙]

<보 기>

ㄱ. $A+B$의 역행렬이 존재한다.
ㄴ. $(AB)^3=A^3B^3$
ㄷ. $A^3=O$이면 $B^3=O$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

69. 실수를 성분으로 하는 이차정사각행렬 A, B에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, O는 영행렬이다.)[4점-1005-메가]

<보 기>

ㄱ. $A^2+B^2=O$이면 $A=O$ 또는 $B=O$이다.
ㄴ. 행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$의 역행렬 A^{-1}가 존재하지 않으면 $A^2=(a+d)A$이다.
ㄷ. $A\neq O$, $A^3+A=O$이면 역행렬 A^{-1}가 존재한다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

70. 두 이차정사각행렬 A, B에 대하여 $A^2B^2=E$일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이다.)

[4점–1004–메가]

<보 기>

ㄱ. $A^4B^4=E$　　ㄴ. $AB=BA$
ㄷ. $(AB)^{-1}=BA$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄷ

71. 두 이차정사각행렬 A, B에 대하여 $AB=BA$를 만족할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, O는 영행렬이다.)[4점–1007–종로]

<보 기>

ㄱ. 행렬 B의 역행렬이 존재하면 $AB^{-1}=B^{-1}A$이다.
ㄴ. $A^nB=BA^n$ (n은 자연수)
ㄷ. $AB=BA=O$이면 $A=O$또는 $B=O$이다.

① ㄱ　②ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

72. 서로 다른 두 이차정사각행렬 A, B가 $A^2-A+E=O$, $B^2-B+E=O$를 만족시킨다고 한다. 이 때 옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬, O는 영행렬이다.)

[4점–1006–종로]

<보 기>

ㄱ. $AB=E$　　ㄴ. $A^3=B^3$
ㄷ $A^{-1}=-B^2$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

73. 이차정사각행렬 A, B에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, O는 영행렬이고, E는 단위행렬이다.)
[4점–1003–교육청]

<보 기>

ㄱ. $A^2=E$, $B^2=E$이면 $(ABA)^2=E$이다.
ㄴ. $A^2=O$, $B^2=O$이면 $AB=O$이다.
ㄷ. $(A+E)^2=O$, $AB=A$이면 $B=E$이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

74. 두 이차정사각행렬 A, B가 $A+BA=2E$, $AB+BA=-A+B$를 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이다.)[4점-1004-교육청]

<보 기>

ㄱ. A^{-1}이 존재한다.
ㄴ. $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$
ㄷ. $A+B=4E$

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

75. 역행렬을 가지는 두 이차정사각행렬 A, B에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이다.)

[4점-1011-대전교]

<보 기>

ㄱ. $ABA=E$이면 $AB=BA$이다.
ㄴ. $A^{-1}+B^{-1}=E$이면 $AB=BA$이다.
ㄷ. $AB=BA$이면 $A^{-1}(B+B^{-1})A=B+B^{-1}$이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

76. 영행렬이 아닌 두 이차정사각행렬 A, B에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, O는 영행렬이고, E는 단위행렬이다.) [4점][2010년 7월 교육청]

<보 기>

ㄱ. $AB=O$이면 $A^2B^2=O$
ㄴ. $A+B=E$이면 $AB=BA$
ㄷ. $A^2=O$이면 행렬 $A+E$의 역행렬이 존재하지 않는다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

77. 이차정사각행렬 A, B, P가

$$AP=P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix},\quad BP=P\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

를 만족시킨다. P가 역행렬을 가질 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[4점-1006-평가원]

<보 기>

ㄱ. $a=c$이고, $b=d$이면 $A=B$이다.
ㄴ. $AB=BA$
ㄷ. $A-B$가 역행렬을 가지면 $a\neq c$이고, $b\neq d$이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

78. 두 이차정사각행렬 A, B에 대하여

$$A^2+2A+4E=O,\ B^2-B+E=O$$

가 성립할 때, 옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이고, O는 영행렬이다.)[4점-1008-종로]

<보 기>

ㄱ. $A^2-4B^2=2A+4B$
ㄴ. $A^3B^3=B^3A^3$
ㄷ. 행렬 AB는 역행렬을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

79. 이차정사각행렬 A, B, C에 대하여 $ABC=E$이고 $ACB=E$일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이다.)[4점-1009-평가원]

<보 기>

ㄱ. $A=E$이면 $B=E$이다.
ㄴ. $AB=BA$
ㄷ. 모든 자연수 n에 대하여 $A^nB^nC^n=E$이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

80. 이차정사각행렬 $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에 대하여 $S(X)$, $D(X)$를 각각

$$S(X)=a+d,\ D(X)=ad-bc$$

라 하자. 두 이차정사각행렬 A, B에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이고, A^{-1}는 A의 역행렬이다.)[4점-1003-비상]

<보 기>

ㄱ. $A^2=2A$이고 $D(A)\neq 0$이면 $S(A)=4$이다.
ㄴ. $D(AB)=D(A)=D(E)$이면 $S(A)=S(B)$이다.
ㄷ. $S(A)=D(A)=2$이면 $S(A+A^{-1})=3$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

81. 다음 조건을 항상 만족시키는 집합 N만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, O는 영행렬이다.)[4점-1003-중앙]

$A\in N$이고 $B\in N$일 때, $AB=O$이면 $A=O$ 또는 $B=O$이다.

<보 기>

ㄱ. $N=\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} \middle|\ x,\ y\text{는 실수}\right\}$
ㄴ. $N=\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \middle|\ x,\ y\text{는 실수}\right\}$
ㄷ. $N=\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ y & -x \end{pmatrix} \middle|\ x,\ y\text{는 실수}\right\}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

82. 좌표평면에서 다음 조건을 만족시키는 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$가 나타내는 도형의 전체의 길이는?[4점-1005-대성]

> (가) 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$는 원 $x^2+y^2=16$ 위의 점이다.
> (나) 원 $(x-2)^2+y^2=1$ 위의 임의의 점 $\mathrm{Q}(c,\ d)$에 대하여 행 렬 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$는 역행렬을 갖는다.

① $\frac{8}{3}\pi$ ② 4π ③ $\frac{16}{3}\pi$
④ 6π ⑤ $\frac{20}{3}\pi$

83. 원 O_1: $(x-2)^2+y^2=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$와 원 O_2: $(x-m)^2+(y-n)^2=1$ 위의 점 $\mathrm{Q}(c,\ d)$에 대하여 행렬 M을 $M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$라 정의하자. $0 \le m \le 2$ 일 때, 행렬 M의 역행렬이 존재하지 않도록 하는 두 점 P, Q가 존재하기 위한 점 $(m,\ n)$이 좌표평면에 나타내는 영역의 넓이는?[4점-1008-비상]

① $3\sqrt{2}$ ② $\frac{7\sqrt{2}}{2}$ ③ $3\sqrt{3}$
④ $\frac{7\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $4\sqrt{3}$

84. 다음 조건을 만족시키는 이차정사각행렬 A의 집합을 M이라고 하자.

> ㈎ 행렬 A의 모든 성분은 실수이고, $(1,1)$성분은 양수이다.
> ㈏ 행렬 $P=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$에 대하여 $AP=PA$이다.

옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[4점-1005-대성]

<보 기>

ㄱ. 행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$이면 $A \in M$이다.
ㄴ. $A \in M$, $B \in M$이면 $AB \in M$이다.
ㄷ. $A \in M$이면 $A^{-1} \in M$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

85. $A^n=E$를 만족시키는 자연수 n이 존재하는 이차정사각행렬 A에 대하여 두 집합 S, T를

$$S=\{A^p \mid p\text{는 자연수}\},\ T=\{(A^{-1})^q \mid q\text{는 자연수}\}$$

로 정의한다. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이다.)[4점-1007-대성]

<보 기>

ㄱ. n의 최솟값이 3일 때, $S=T$이다.
ㄴ. n의 최솟값이 k일 때, S의 원소의 개수는 k이다.
ㄷ. $S \neq T$인 행렬 A가 존재한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

86. 1×2 행렬을 원소로 갖는 집합 S와 2×1 행렬을 원소로 갖는 집합 T가 다음과 같다.

$S=\{(a\ b)\mid a+b\neq0\}$, $T=\left\{\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \middle| pq\neq0\right\}$

집합 S의 원소 A에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[4점−2010−대수능]

<보 기>

ㄱ. 집합 T의 원소 P에 대하여 PA는 역행렬을 갖지 않는다.
ㄴ. 집합 S의 원소 B와 집합 T의 원소 P에 대하여 $PA=PB$이면 $A=B$이다.
ㄷ. 집합 T의 원소 중에는 $PA\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$을 만족하는 P가 있다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

87. 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & a \end{pmatrix}$에 대하여 $(kA)^{-1}=\dfrac{k}{100}A$가 성립하도록 두 상수 a, k의 값을 정할 때, a^2+k^2의 값을 구하시오.
[4점−1010−종로]

연립일차방정식의 풀이

1. 역행렬이 존재하는 두 이차정사각행렬 A, B가 $A\begin{pmatrix}2&3\\3&4\end{pmatrix}=B$를 만족시킬 때, x, y에 관한 연립방정식 $B\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$의 해를 $x=\alpha$, $y=\beta$라 하자. $\alpha+\beta$의 값은?[3점-1011-대성]

① 13　　② 11　　③ 9
④ 7　　⑤ 5

2. x, y에 대한 연립방정식

$$\begin{pmatrix}k&1\\3&k-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

의 해를 $x=\alpha$, $y=\beta$라 하자. $\alpha\neq\beta$이고 $\alpha\beta\neq0$일 때, $\dfrac{\beta}{\alpha}$의 값은?

[3점-1011-중앙]

① -3　　② -2　　③ -1
④ 2　　⑤ 3

3. 0이 아닌 두 실수 a, b에 대하여 두 집합 A, B를 다음과 같이 정의하자.

$$A=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}2&1\\a&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right\}$$

$$B=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}a&b\\b&-a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$A-B\neq\phi$일 때, 다음 중 항상 옳은 것은? [3점-1010-비상]

① $a-2b=0$　　② $a+2b=0$　　③ $a-b=-1$
④ $a-b=1$　　⑤ $a+b=1$

4. x, y에 대한 연립방정식 $\begin{pmatrix}1&-2\\a&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$에 대하여 $x=b$, $y=9$가 이 연립방정식을 만족시킬 때, 두 상수 a, b의 합 $a+b$의 값을 구하시오.[3점-1009-평가원]

5. $A=\begin{pmatrix}2&a\\1&b\end{pmatrix}$일 때, 두 실수 p, q에 대하여 연립방정식 $A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$는 한 쌍의 해를 갖고, $A^3=-A$를 만족할 때, $a+b$의 값은?[3점-1011-종로]

① -7　　② -5　　③ 3
④ 3　　⑤ 5

6. 행렬로 나타낸 연립방정식

$$\begin{pmatrix}2&-3\\3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\7\end{pmatrix}$$

의 해가 $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$일 때, 좌표평면 위의 점 $(a,\,b)$에서 직선 $2x+y=2$까지 거리는?[3점-1006-종로]

① $\sqrt{2}$　　② $\sqrt{3}$　　③ $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$
④ $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$　　⑤ $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

7. x, y에 관한 연립방정식 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$를 만족시키는 자연수 x, y가 존재하도록 하는 실수 k의 값은?[3점-1005-중앙]

① -2 ② -1 ③ 1
④ 2 ⑤ 3

8. 행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & a \end{pmatrix}$에 대하여 x, y에 대한 연립방정식 $A^2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix}$의 해가 무수히 많을 때, 두 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은?[3점-1004-메가]

① -4 ② -2 ③ 0
④ 2 ⑤ 4

9. x, y에 대한 연립방정식

$$\begin{pmatrix} a & -3 \\ -3 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3x-y \\ 2y \end{pmatrix}$$

가 $x=0$, $y=0$ 이외의 해를 갖도록 하는 자연수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수를 구하시오.[3점-1003-교육청]

10. 두 종류의 수도꼭지 P, Q를 한 번씩 누를 때마다 각각 pL, qL의 물이 나온 후 자동으로 멈춘다고 한다. 두 수도꼭지 P, Q를 각각 15번씩 누르면 총 60L의 물이 나오고, 수도꼭지 P를 12번, 수도꼭지 Q를 20번 누르면 총 68L의 물이 나온다고 한다. 이때, 등식

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}=\frac{1}{a}\begin{pmatrix} b & -1 \\ -b+2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 17 \end{pmatrix}$$

을 만족시키는 두 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은? (단, 물이 나오는 도중에는 수도꼭지를 다시 누르지 않는다.)[3점-1004-메가]

① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

11. x, y에 관한 연립방정식 $\begin{pmatrix} a+1 & 1 \\ b & a-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$이 임의의 실수 a에 대하여 한 쌍의 해만 갖도록 하는 정수 b의 최댓값은?

[3점-1008-중앙]

① -3 ② -2 ③ -1
④ 1 ⑤ 2

12. 다음 표는 당근사과주스 A와 당근사과주스 B를 1컵 만드는데 필요한 당근과 사과의 양을 나타낸 것이다.

(단위 : kg)

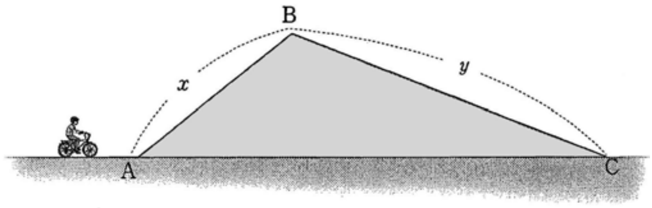
	당근	사과
당근사과주스 A	0.6	0.5
당근사과주스 B	0.3	0.4

당근 45kg과 사과 42kg을 모두 사용하여 당근사과주스 A를 x컵, 당근사과주스 B를 y컵 만들려고 한다. x와 y의 값을 구하는 식을 다음과 같이 행렬로 나타낼 때, $a-b$의 값은?[4점-1007-종로]

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} a & -3 \\ b & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 450 \\ 420 \end{pmatrix}$$

① 3 ② 6 ③ 9
④ 12 ⑤ 15

13. 같은 그림과 같이 A 와 B 사이의 거리가 $x$km , B와 C 사이의 거리가 $y$km 인 언덕길을 자전거를 타고 왕복하였다.



오르막은 시속 20km , 내리막은 시속 40km 의 일정한 속력으로 달렸더니 A 에서 B 를 거쳐 C 로 갈 때는 1시간이 걸렸고, C 에서 B 를 거쳐 A 로 되돌아 올 때는 1시간 15분이 걸렸다. 이때, 등식 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{a}\begin{pmatrix} b & -1 \\ -1 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 40 \\ 50 \end{pmatrix}$을 만족시키는 두 상수 a, b 에 대하여 a^2+b^2 의 값을 구하시오.[4점-1005-비상]

14. 이차정사각행렬 A는 다음 두 조건을 만족한다.

(가) $A^2-A+E=O$	(나) $A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

연립방정식 $(A+E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$의 해를 $x=\alpha$, $y=\beta$라고 할 때, $\alpha+\beta$의 값은? (단, O는 영행렬이고, E는 단위행렬이다.)

[4점-1007-교육청]

① 0 ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 4

15. 두 집합

$X=\left\{(x,\ y) \,\middle|\, \begin{pmatrix} a+1 & 2a+5 \\ 2 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$,

$Y=\{(x,\ y) \mid y=x+1\}$

에 대하여 $X \cap Y \neq \phi$이 되도록 하는 실수 a의 값은?

[4점-1004-메가]

① -5 ② -2 ③ 0
④ 2 ⑤ 5

16. 두 집합

$A=\left\{(x,\ y) \,\middle|\, \begin{pmatrix} a & 4 \\ b & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$, (단, a, b는 상수)

$B=\{(x,\ y) \mid (x-5)^2+y^2=9\}$

에 대하여 $A \cap B \neq \phi$일 때, $10(a-b)$의 최댓값을 구하시오.

[4점-1007-메가]

17. x, y 에 대한 연립방정식 $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$가 $x^2+y^2=1$을 만족시키는 해를 가질 때, 양수 k 의 값은?[3점-1005-비상]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

18. 두 집합

$$A=\left\{(x,\ y)\left|\begin{pmatrix}7 & a\\ 3 & b+a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix},\ a,\ b\text{는 양수}\right.\right\}$$

$$B=\{(x,\ y)\mid(x-3)^2+y^2=4\}$$

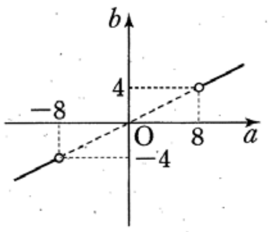
에 대하여 집합 $A\cap B$의 원소가 1개일 때, $2ab$의 값을 구하시오.
[3점-1010-대성]

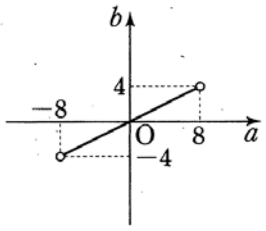
19. 두 집합

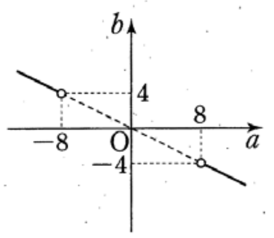
$$A=\left\{(x,\ y)\left|\begin{pmatrix}6 & a\\ 3 & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix},\ x,\ y\text{는 실수}\right.\right\},$$

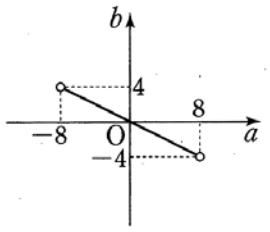
$$B=\{(x,\ y)\mid(x-5)^2+y^2=9,\ x,\ y\text{는 실수}\}$$

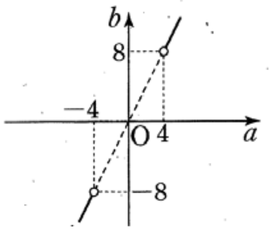
일 때, $n(A\cap B)=2$가 되도록 하는 두 실수 $a,\ b$에 대하여 점 $(a,\ b)$가 그리는 도형을 좌표평면에 나타낸 것은? (단, $n(X)$는 집합 X의 원소의 개수이다.)[4점-1009-중앙]

①


②


③


④


⑤


20. 이차정사각행렬 A에 대하여 두 연립방정식

$$A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ -2\end{pmatrix},\ (A+E)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}$$

이 모두 무수히 많은 해를 갖는다고 한다.

이때 방정식 $(A-E)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\ -4\end{pmatrix}$를 만족하는 해 $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p\\ q\end{pmatrix}$에 대하여 $p+q$의 값을 구하시오. (단, E는 단위행렬이다.)
[4점-1008-종로]

21. 연립방정식 $\begin{pmatrix}2 & -\sin\theta\\ \sin\theta & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=-\cos\theta\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$가 $x=y=0$ 이외의 해를 가질 때, $\sin\theta$의 값은? (단, $0<\theta<\pi$)
[3점-1007-종로]

① $-\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

22. $x,\ y$에 대한 연립방정식 $\begin{pmatrix}2+m & 1\\ 8-m & 1+n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$가 $x=0,\ y=0$ 이외의 해를 갖도록 하는 두 정수 $m,\ n$에 대하여 m^2+n^2의 최솟값은?[4점-1010-비상]

① 7 ② 8 ③ 9
④ 10 ⑤ 11

23. $0<a<1$, $0<b<1$일 때, x, y에 대한 연립방정식 $\begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-b & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$가 $x=y=0$ 이외에도 해를 가질 때, k의 최댓값은?[4점-1003-종로]

① -1　② 0　③ 1
④ 2　⑤ 3

24. x, y에 대한 연립방정식

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$$

가 $x=0$, $y=0$ 이외의 해를 갖도록 하는 모든 실수 k의 값의 합은?

[4점-1006-평가원]

① -3　② -1　③ 0
④ 1　⑤ 3

25. 행렬로 나타낸 x, y에 대한 연립방정식

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 6 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

가 $x=0, y=0$ 이외의 해를 갖도록 하는 모든 a값의 곱은?

[3점-1011-대전교]

① -20　② -18　③ -16
④ -14　⑤ -12

26. x, y에 대한 연립방정식 $\begin{pmatrix} a-1 & 1 \\ b-4 & 1-a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$이 $x=y=0$ 이외의 해를 갖도록 하는 두 실수 a, b에 대하여 $a+b$의 최댓값은?[4점-1004-교육청]

① $\frac{21}{4}$　② $\frac{11}{2}$　③ $\frac{23}{4}$
④ 6　⑤ $\frac{25}{4}$

27. 어느 고등학교 3학년 학생 n명을 대상으로 수학과 영어 과목에 대한 방과 후 교육활동을 실시하기 위해 희망조사를 하였다. 1차에 희망한 n명의 학생을 대상으로 2차 희망조사를 하였더니 학생 수가 표와 같았고, 1, 2차 각 조사에서 수학과 영어 과목을 동시에 희망한 학생은 없었다.

(단위:명)

구분	1차	2차
수학	a	c
영어	b	d
계	n	n

1차 조사에서 수학을 희망한 학생 중 4%가 2차 조사 때 영어로, 영어를 희망한 학생 중 12%가 2차 조사 때 수학으로 과목을 바꾸어 희망하였다. $\frac{1}{25}A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$일 때, 행렬 A의 모든 성분의 합을 구하시오.[4점-1004-교육청]

28. 다음은 어느 회사에서 두 제품 (가), (나)를 각각 한 개씩 생산하는 데 필요한 P, Q 원자재의 양과 제품의 판매 가격을 나타낸 것이다.

제품 \ 구분	P(kg)	Q(kg)	판매 가격(만 원)
(가)	4	2	120
(나)	3	4	100

이 회사에서 P 원자재 70kg과 Q 원자재 60kg을 모두 사용하여 (가)와 (나) 제품을 만들려고 한다. 제품 (가), (나)는 각각 x(개), y(개) 만들 수 있고, 만들어진 제품들이 모두 판매되었을 때 전체 판매 가격을 p(만 원)라 하자. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 70 \\ 60 \end{pmatrix}$, $(p) = B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$가 성립할 때, 두 행렬 B, A의 곱 $BA = (m \quad n)$이다. 이때, $m+n$의 값을 구하시오.[4점-1010-중앙]

29. 두 가게 P, Q에서 판매하는 치약과 비누의 1개 당 가격은 <표 1>과 같고, 갑과 을이 매월 구입해야 할 치약과 비누의 개수는 <표 2>와 같다.

(단위 : 원)

	치약	비누
P	1800	2400
Q	1200	3000

(단위 : 원)

	갑	을
치약	1	2
비누	1	1

갑이 x개월, 을이 y개월 동안 치약과 비누를 가게 P에서만 구입할 경우 갑과 을이 지불할 금액의 합은 51000원이고, 가게 Q에서만 구입할 경우 갑과 을이 지불할 금액의 합은 48000원이다. 이때, 행렬을 이용하여 x, y의 값을 구하는 과정에서 다음 등식을 얻었다.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\frac{1}{7}\begin{pmatrix} a & -10 \\ -7 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 85 \\ 80 \end{pmatrix}$$

상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.[4점-1005-대성]

30. 연립방정식 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ p & q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$의 해를 $x=a$, $y=b$라 하고, 연립방정식 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$의 해를 $x=c$, $y=d$라 하자. 그리고 연립방정식 $\begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$의 해를 $x=u$, $y=v$라 하자. 좌표평면에서 세 점 A(a, b), B(c, d), C(u, v)를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심이 원점이 되도록 상수 p, q의 값을 정할 때, $p+q$의 값은? (단, $p^2 \neq q^2$)[4점-1010-메가]

① $-\frac{1}{3}$ ② $-\frac{2}{3}$ ③ -1
④ $-\frac{4}{3}$ ⑤ $-\frac{5}{3}$

31. 어느 회사에서는 응시자의 추론능력시험과 공간지각능력시험의 원점수를 변환하여 사용한다. 추론능역시험의 원점수가 x, 공간지각능력시험의 원점수가 y일 때, 두 가지 변환점수 p와 q는 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

응시자 A, B, C의 각 변환점수가 표와 같을 때, 응시자 A, B, C의 추론능력시험의 원점수를 각각 a, b, c라 하자. a, b, c의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

변환점수 \ 응시자	A	B	C
p	45	50	45
q	40	50	50

[4점-2010-대수능]

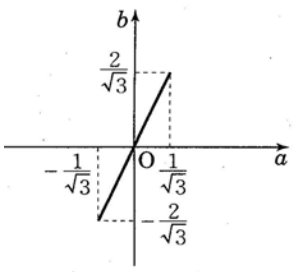
① $a>b>c$ ② $a>c>b$ ③ $b>a>c$
④ $b>c>a$ ⑤ $c>b>a$

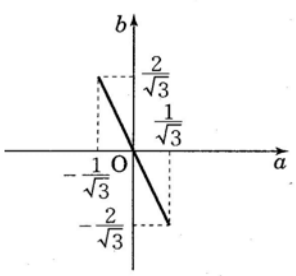
32. x, y에 대한 연립방정식 $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$가 무수히 많은 해를 가질 때, 이 연립방정식의 해를 $x=\alpha$, $y=\beta$라 하자. 다음 조건을 만족시키는 순서쌍 (α, β)의 개수를 구하시오. (단, k는 실수이다.)[3점-1010-교육청]

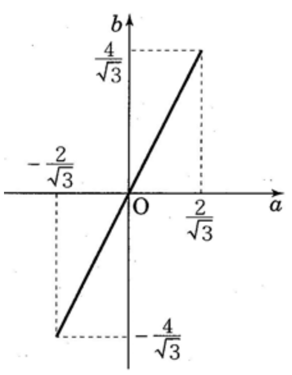
(가) α, β는 모두 정수이다.
(나) $\alpha^2+\beta^2 \le 200$

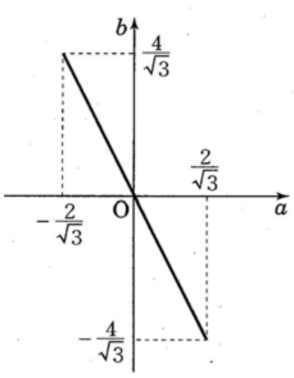
33. 다음 조건을 만족시키는 실수 a, b에 대하여 (a, b)가 나타내
는 도형을 좌표평면 위에 나타낸 것은?[4점-1010-대성]

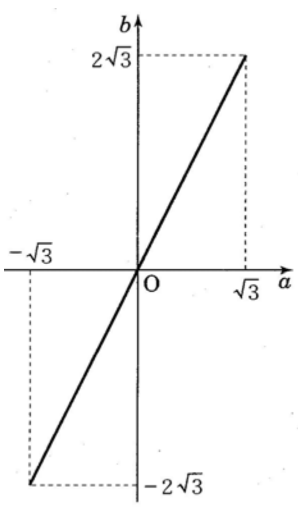
(가) 직선 $y=ax+b$는 원 $x^2+y^2=1$과 만난다.
(나) x, y에 대한 연립방정식 $\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$은 $x=0$, $y=0$ 이외의 해를 갖는다.

①


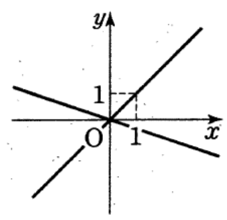
②


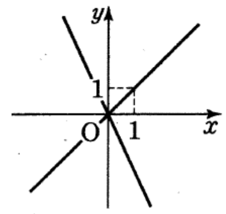
③


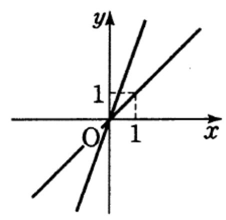
④


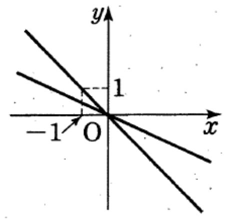
⑤


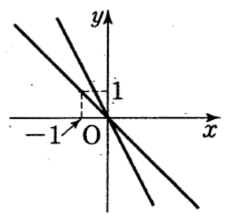
34. 연립방정식 $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$를 만족하는 실수 해 x, y가 $x^2+y^2=0$인 것 이외에도 존재할 때, 점 (x, y)가 나타내는 도형을 좌표평면 위에 바르게 나타낸 것은?[4점-1004-종로]

①


②


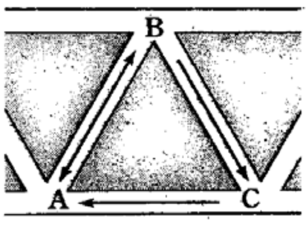
③


④


⑤


그래프와 행렬

1. 아침 7시 종로 마을의 세 교차로 A, B, C에 차량 정체로 인하여 교통이 통제되고 있다. 교차로 A에서는 교차로 B방향으로만, 교차로 B에서는 교차로 A, C양방향으로, 교차로 C에서는 교차로 A방향으로만 차량 통행이 가능하다. 이를 행렬을 사용하여 나타내면 (가)와 같다. 이후 몇 개의 교차로 통행이 개선되어 (나)의 행렬과 같은 상황이 되었다.



(가) $\begin{array}{c|c} \text{에서\로} & \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$ (나) $\begin{array}{c|c} \text{에서\로} & \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$

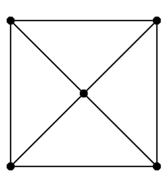
이 때 개선된 도로의 상황에 대한 설명 중 옳은 것은?

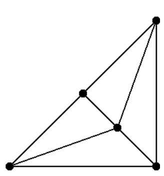
[3점-1003-종로]

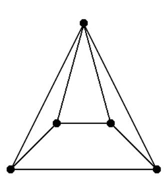
① 교차로 A에서 직접 교차로 C를 거쳐 교차로 B로 갈 수 있다.
② 교차로 A에서 교차로 B로 다른 교차로를 지나지 않고 직접 갈 수 없다.
③ 교차로 A에서 교차로 C로만 다른 교차로를 지나지 않고 직접 갈 수 없고 다른 교차로끼리는 모두 직접 갈 수 있다.
④ 교차로 B에서 교차로 C로와 교차로 C에서 교차로 B로 중 적어도 하나는 직접 갈 수 없다.
⑤ 교차로 C에서 교차로 B로 다른 교차로를 지나지 않고 직접 갈 수 없다.

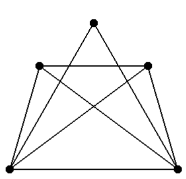
2. 다음 <보기> 중에서 서로 연결 상태가 같은 그래프를 모두 찾아라.

<보 기>

ㄱ.


ㄴ.


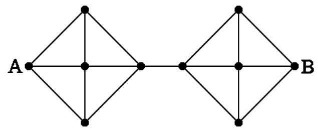
ㄷ.


ㄹ.


3. 8개의 꼭짓점을 갖는 그래프가 가질 수 있는 변의 개수의 최댓값은?

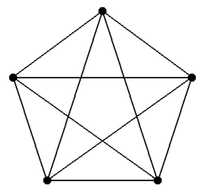
① 16 ② 20 ③ 24
④ 28 ⑤ 32

4. 오른쪽 그림과 같은 그래프가 있다. 꼭짓점 A에서 한번 지난 꼭짓점을 지나지 않고 꼭짓점 B로 가는 경로는 모두 몇 가지인가?

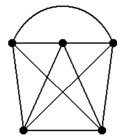


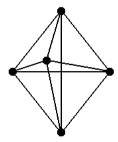
① 36 ② 49 ③ 64
④ 81 ⑤ 100

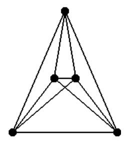
5. 오른쪽 그래프와 연결 상태가 같은 그래프만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?



<보 기>

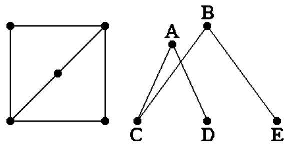
ㄱ.


ㄴ.


ㄷ.


① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

6. 오른쪽 두 그래프는 연결 상태가 같지 않은 그래프이다. 두 그래프의 연결 상태가 같게 하기 위해서 필요한 변을 옳게 짝지은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?



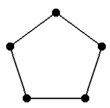
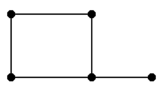
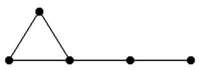
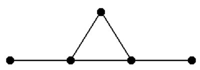
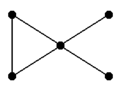
<보 기>

ㄱ. AE, BD　　ㄴ. CD, DE
ㄷ. BD, DE

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄷ

7. 그래프를 나타내는 행렬이 오른쪽과 같을 때, 이 그래프로 가능한 것은?

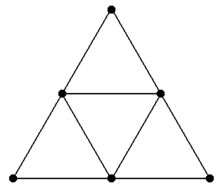
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

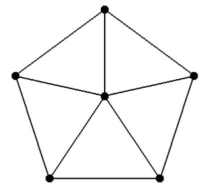
①

②

③

④

⑤


8. 그래프를 나타내는 행렬이 오른쪽과 같을 때, 꼭짓점 A에서 한 번 지난 꼭짓점을 지나지 않고 꼭짓점 E로 가는 모든 경로의 개수를 구하여라.

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} A & B & C & D & E & F \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

9. 다음 그래프 G_1, G_2를 나타내는 행렬을 각각 P, Q라 할 때, 행렬 $P-Q$의 모든 성분의 합은?


[그래프 G_1]


[그래프 G_2]

① -4　② -2　③ 0
④ 2　⑤ 4

10. 4개의 꼭짓점 A, B, C, D를 갖고, 변의 집합이 {AB, AD, BD, CD}인 그래프를 G라 한다. 그래프 G를 나타내는 행렬이 될 수 있는 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

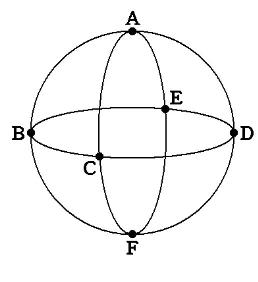
<보 기>

ㄱ. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$　ㄴ. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

ㄷ. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

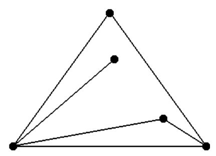
① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ　⑤ ㄴ, ㄷ

11. 오른쪽 그림과 같은 그래프가 있다. 꼭짓점 A에서 한 번 지난 꼭짓점을 지나지 않고 A가 아닌 모든 꼭짓점을 지나 다시 A로 돌아오는 경로는 모두 몇 가지인가?



① 16　② 24
③ 32　④ 40
⑤ 52

12. 다음은 그래프와 이 그래프를 나타내는 행렬을 구한 것이다.



$$\begin{pmatrix} 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & d & 1 & e & f \\ g & h & i & j & k \\ l & 1 & m & n & o \\ p & 1 & q & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

다음 <보기> 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $e+f+h=3$ ㄴ. $g=0$
ㄷ. $c\times l=0$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

13. 전국 탁구 대회를 앞두고 K고등학교의 4명의 탁구 선수 A, B, C, D와 L고등학교의 4명의 탁구 선수 P, Q, R, S가 만나서 서로 다른 학교 선수끼리 10세트의 연습 단식경기를 하려고 한다. 각 고등학교의 선수들이 경기할 세트의 수는 다음과 같다.

㈎ K고등학교 : 선수 A는 1개의 세트, 선수 B는 2개의 세트, 선수 C는 3개의 세트, 선수 D는 4개의 세트의 경기를 한다.
㈏ L고등학교 : 선수 P, Q, R는 각각 2개의 세트의 경기를 하고, 선수 S는 4개의 세트의 경기를 한다.

두 학교 선수들이 연습 경기할 상대 선수를 배정하는 방법의 수를 구하여라.

14. 다음 조건을 만족시키는 그래프에서 꼭짓점에 연결된 변의 개수가 1, 2, 3인 꼭짓점의 개수를 각각 a, b, c라 한다. $a<b<c$를 만족시키는 양의 정수 a, b, c에 대하여 $a+2b+4c$의 값을 구하여라.

㈎ 꼭짓점의 개수는 12이다.
㈏ 변의 개수는 15이다.
㈐ 각 꼭짓점에 연결된 변의 개수는 1 또는 2 또는 3이다.

15. 오른쪽 행렬은 어떤 그래프를 나타내는 행렬이다. 이 그래프에 대한 <보기>의 설명 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

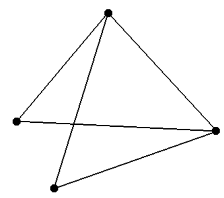
$$\begin{pmatrix} 0&1&0&0&0&1 \\ 1&0&1&0&1&1 \\ 0&1&0&1&1&0 \\ 0&0&1&0&1&1 \\ 0&1&1&1&0&1 \\ 1&1&0&1&1&0 \end{pmatrix}$$

<보 기>

ㄱ. 꼭짓점의 개수는 6이다.
ㄴ. 변의 개수는 12이다.
ㄷ. 변이 꼭짓점에서만 만나도록 한 평면 위에 그릴 수 있다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

16. 다음은 오른쪽 그래프에 대한 설명이다.



㈎ 그래프를 나타내는 행렬의 모든 성분의 합은 a이다.
㈏ 각 꼭짓점에서 한 꼭짓점을 거쳐 다시 출발한 꼭짓점으로 돌아오는 방법의 수는 b이다.

이때, $a+b$의 값을 구하여라.

지수

1. $\sqrt[3]{8} \div 2^{-2}$ 의 값은?[2점1010–교육청]

① 2 ② 4 ③ 8
④ 16 ⑤ 32

2. $a^{\frac{1}{3}} = 0.5$ 일 때, $\log_a \frac{1}{4}$ 의 값은?[2점–1003–종로]

① -6 ② $\frac{2}{3}$ ③ 1
④ 6 ⑤ 15

3. $4^{\frac{3}{2}} \times 16^{-\frac{3}{4}}$ 의 값은?[2점–1009–종로]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ 2 ⑤ 4

4. $\sqrt[3]{\sqrt[4]{8}} \times \sqrt[4]{2}$ 를 계산하면?[2점–1008–중앙]

① $2^{\frac{1}{2}}$ ② $2^{\frac{2}{3}}$ ③ 2
④ $2^{\frac{5}{4}}$ ⑤ $2^{\frac{3}{2}}$

5. $\left(\sqrt[3]{2} \times 2^2 \div \sqrt{2^3}\right)^{\frac{6}{5}}$ 을 계산하면?[2점–1003–중앙]

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2
④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 4

6. $\sqrt[4]{\sqrt[3]{16}} \times \sqrt[3]{4}$ 의 값은?[2점–1010–중앙]

① $2^{\frac{1}{3}}$ ② $2^{\frac{1}{2}}$ ③ 2
④ $2^{\frac{4}{3}}$ ⑤ $2^{\frac{3}{2}}$

7. $\sqrt[3]{2}\times\sqrt[4]{\sqrt[3]{(-4)^4}}$ 의 값은?[2점-1010-대성]

① -4 ② -3 ③ -2
④ 2 ⑤ 3

8. $\sqrt[4]{5}\div\sqrt[3]{5\sqrt{5}}=5^k$의 값은?[2점-1010-비상]

① $-\frac{1}{4}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

9. $2^{\frac{2}{3}}\times 5^{-\frac{1}{3}}\times 10^{\frac{4}{3}}$ 의 값은?[2점-1003-교육청]

① 2 ② 5 ③ 10
④ 20 ⑤ 40

10. $2^{-\frac{1}{3}}\times 3^{\frac{2}{3}}\times 6^{\frac{1}{3}}$ 의 값은?[2점-1005-대성]

① $\frac{4}{3}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ 2
④ $\frac{8}{3}$ ⑤ 3

11. $\sqrt{2\sqrt{2}}\div\sqrt[3]{4}$ 의 값은?[2점-1011-대성]

① $\sqrt[12]{2}$ ② $\sqrt[6]{2}$ ③ $\sqrt[4]{2}$
④ $\sqrt[3]{2}$ ⑤ $\sqrt{2}$

12. $4^{\frac{2}{3}}\div 18^{\frac{1}{3}}\times 72^{\frac{1}{3}}$ 을 간단히 하면?[2점-1007-종로]

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2
④ 3 ⑤ 4

13. $\sqrt[5]{3^2}=\sqrt{9^k}$ 일 때, 상수 k의 값은?[2점-1004-교육청]

① $\frac{3}{10}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{7}{10}$

14. 두 실수 a, b에 대하여 $a=\sqrt[3]{2}$, $b^3=3$일 때, $(ab)^6$의 값은?
[2점-1008-비상]

① 24 ② 27 ③ 32
④ 36 ⑤ 40

15. $\left\{\left(\frac{9}{4}\right)^{-\frac{3}{4}}\right\}^{\frac{2}{3}}$ 의 값은?[2점-1010-대성]

① $\frac{2}{9}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{3}{4}$
④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

16. $3^x=4$일 때, $\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{x}{2}}$ 의 값은?[2점-1004-종로]

① $\frac{1}{27}$ ② $\frac{1}{16}$ ③ $\frac{1}{9}$
④ $\frac{1}{8}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

17. $\sqrt[3]{24}-\frac{\sqrt[6]{9}}{3}+\sqrt[3]{-\frac{8}{9}}$ 의 값은?[2점-1008-대성]

① $\frac{\sqrt[3]{2}}{3}$ ② $\frac{\sqrt[3]{3}}{3}$ ③ $\frac{2\sqrt[3]{2}}{3}$
④ $\frac{2\sqrt[3]{3}}{3}$ ⑤ $\sqrt[3]{3}$

18. $2^x=9$, $5^y=4$일 때, 5^{xy}의 값을 구하시오.[3점-1003-비상]

19. 두 실수 a, b가 $5^a=3$, $5^b=10$을 만족시킬 때, $\frac{a}{b}$의 값은?

[3점–1010–비상]

① $\log 2$ ② $\log 3$ ③ $2\log 2$
④ $\log 5$ ⑤ $2\log 3$

20. $2^a=5^b=10$일 때, $\frac{ab}{a+b}$의 값은?[3점–1008–중앙]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

21. 두 실수 a, b에 대하여

$$8^{\frac{1}{a}}=27^{\frac{1}{b}}=36$$

일 때, $a+b$의 값은?[3점–1004–메가]

① 3 ② $\frac{5}{2}$ ③ 2
④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 1

22. 양의 실수 a에 대하여 $a^2+a^{-2}=3$일 때, a^3+a^{-3}의 값은?

[3점–1005–메가]

① $3\sqrt{3}$ ② $5\sqrt{3}$ ③ $\sqrt{5}$
④ $2\sqrt{5}$ ⑤ $3\sqrt{5}$

23. 0이 아닌 세 실수 a, b, c가 $\frac{a+b}{4}=\frac{b+c}{7}=\frac{c+a}{9}$를 만족시킬 때, $(2^a\times 2^b)^{\frac{1}{c}}$의 값은?[3점–1004–교육청]

① $\sqrt[4]{2}$ ② $\sqrt[3]{2}$ ③ $\sqrt[3]{4}$
④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 4

24. $P_n=3^{\frac{1}{n(n+1)}}$에 대하여 $P_1\times P_2\times P_3\times\cdots\times P_{2010}=3^k$일 때, 상수 k의 값은? (단, n은 자연수이다.)[3점–1004–교육청]

① $\frac{2009}{2010}$ ② $\frac{2010}{2011}$ ③ 1
④ $\frac{2011}{2010}$ ⑤ $\frac{2010}{2009}$

25. $a=\log_2(2+\sqrt{3})$일 때, $4^a+\dfrac{4}{2^a}$의 값을 구하시오.

[3점–1006–평가원]

26. 1보다 큰 실수 a에 대하여 $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=3$일 때, $a^2-a^{-2}=p\sqrt{5}$이다. 자연수 p의 값을 구하시오.[3점–1010–대성]

27. a, b이 1이 아닌 양수일 때, $a^m=b^n$, $a^p=b^q$을 만족시키는 자연수 m, n, p, q에 대하여 다음 중 항상 성립하는 것은?

[3점–1005–메가]

① $mp=nq$ ② $mq=np$ ③ $mn=pq$
④ $m+n=p+q$ ⑤ $m+q=n+p$

28. $\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2}}=2^{\frac{q}{p}}$일 때, $p+q$의 값은? (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)[3점–1005–종로]

① 5 ② 11 ③ 17
④ 23 ⑤ 29

29. $4^x=2^y$을 만족하는 0이 아닌 두 실수 x, y에 대하여, $\dfrac{y}{x}+\dfrac{2x}{y}$의 값은?[3점–1011–대전교]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

30. $2^a=3^b=5^c$이고 $ab=1$일 때, $5^{(a+b)c}$의 값은?

[3점–1005–종로]

① $\dfrac{1}{2}$ ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 6

31. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=4$일 때, $a^x=b^y=3$을 만족시키는 두 양수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하시오.[3점-1008-비상]

32. $2^{x+2}=9$일 때, $2^{\frac{x}{2}}-2^{-\frac{x}{2}}$의 값은?[3점-1003-중앙]

① $\frac{2\sqrt{3}}{5}$ ② $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ ③ $\frac{3\sqrt{3}}{5}$
④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

33. 등식 $\frac{2^{3a}+2^{-a}}{26a-2^{-a}}=-\frac{5}{3}$를 만족시키는 상수 a의 값은?

[3점-1004-메가]

① $-\log_2\sqrt{3}$ ② $-\log_2\sqrt{5}$ ③ $-\log_2\sqrt{6}$
④ $-\log_2 3$ ⑤ $-\log_2\sqrt{10}$

34. $3^{2x}=5$를 만족시키는 실수 x에 대하여 $\frac{3^{3x}+3^{-3x}}{3^x+3^{-x}}=k$이다. $10k$의 값을 구하시오.[3점-1010-대성]

35. $a=\sqrt{3}$이고 $x=a^a$, $y=(a^a)^a$, $z=a^{a^a}$일 때, 세 실수 x, y, z의 대소 관계로 옳은 것은?[3점-1007-대성]

① $x<y<z$ ② $x<z<y$ ③ $y<x<z$
④ $y<z<x$ ⑤ $z<x<y$

36. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}\times\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[4]{2}}=\sqrt[a]{2^b}$일 때, $a-b$의 값은? (단, a, b는 서로소인 자연수이다.)[3점-1006-대성]

① -3 ② -1 ③ 1
④ 3 ⑤ 5

37. $1 \le m \le 3$, $1 \le n \le 8$인 두 자연수 m, n에 대하여 $\sqrt[3]{n^m}$ 이 자연수가 되도록 하는 순서쌍 (m, n)의 개수는?[3점-1009-평가원]

① 6 ② 8 ③ 10
④ 12 ⑤ 14

38. $512^{\frac{1}{8}}$ 의 세제곱근 중 실수인 것을 x 라 할 때, x^n이 1000 이하의 자연수가 되도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합은?
[4점-1005-비상]

① 48 ② 56 ③ 64
④ 72 ⑤ 80

39. $a = \frac{1}{2}(8^{40} + 8^{-40})$일 때, $\sqrt[n]{a + \sqrt{a^2 - 1}}$ 의 값이 정수가 되도록 하는 2 이상의 자연수 n의 개수를 구하시오.[4점-1004-메가]

40. $a = 4^4 \times 8^8$일 때, $\frac{a}{2^n}$ 의 n제곱근 중에서 자연수인 것이 존재하도록 하는 2이상의 자연수 n의 개수는?[4점-1005-중앙]

① 13 ② 11 ③ 9
④ 7 ⑤ 5

41. 두 집합 $A = \{a \mid a$는 유리수$\}$, $B = \{2^a \mid a \in A\}$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[4점-1007-메가]

<보 기>

ㄱ. $x \in A$이면 $2^x \in A$이다.
ㄴ. $A \cap B \ne \phi$
ㄷ. 집합 B는 곱셈에 대하여 닫혀 있다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

42. 어떤 특정 방사성 핵종의 원자수가 방사성 붕괴에 의해서 원래의 수의 반으로 줄어드는데 걸리는 시간을 반감기라고 한다. 따라서 반감기가 T (시간)인 어떤 방사성 핵종의 원래의 원자수가 M_0일 때, t시간 후의 원자수 M은 $M = M_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$으로 계산된다. 현재 원자수가 N_0인 어떤 핵종의 200시간 후의 원자수와 500시간 후의 원자수의 비가 8 : 1일 때, 이 핵종의 반감기는?
[3점-1007-종로]

① 37.5시간 ② 75시간 ③ 80시간
④ 100시간 ⑤ 210시간

43. 어떤 종을 100 dB(데시벨)의 크기로 타종한 후 t초가 지났을 때 소리의 크기를 $f(t)$dB이라고 하면 관계식

$f(t)=100\cdot a^{-\frac{t}{5}}$ (단, a는 상수)

이 성립한다고 한다. 이 종을 100 dB의 크기로 타종한 후 5초가 지났을 때 소리의 크기는 이 종을 100 dB의 크기로 타종한 후 10초가 지났을 때 소리의 크기의 몇 배인가?[3점-1011-중앙]

① a　② $2a$　③ $5a$　④ a^2　⑤ a^5

44. 햇빛에 민감한 피부를 가진 규리의 피부가 햇빛에 노출된 후 피부에 홍반이 발생하기까지 걸리는 시간은 다음 표와 같이 자외선 지수에 따라 다르다고 한다.

자외선 지수	피부에 홍반이 발생하기까지 걸리는 시간(분)
1	110
3	80

자외선 지수가 x일 때 규리의 피부가 햇빛에 노출된 후 피부에 홍반이 발생하기까지 걸리는 시간 $f(x)$(분)은 다음과 같다고 가정하자.

$f(x)=a^{x-k}+20$(단, $a>0$, k는 상수)

자외선 지수가 7인 경우, 규리의 피부가 햇빛에 노출된 후 피부에 홍반이 발생하기까지 걸리는 시간은?[4점-1005-중앙]

① $\frac{140}{3}$분　② 47분　③ $\frac{142}{3}$분　④ $\frac{143}{3}$분　⑤ 48분

45. 정부는 증가하는 인구에 대비해서 어떤 지역에 신도시를 조성하였다. 자료에 의하면 새로 조성된 신도시의 인구는 해마다 일정한 비율로 증가하여 신도시가 조성된 지 5년 후에는 x명, 10년 후에는 y명이 되었다고 한다. 이 신도시가 조성된 지 7년 후의 인구가 $x^{1-\alpha}y^{\alpha}$명일 때, α의 값은?[4점-1003-비상]

① $\frac{2}{5}$　② $\frac{4}{5}$　③ $\frac{6}{5}$　④ $\frac{6}{7}$　⑤ $\frac{10}{7}$

46. 양수기로 물을 끌어올릴 때, 펌프의 1분당 회전수 N, 양수량 Q, 양수할 높이 H와 양수기의 비교회전도 S 사이에는 다음과 같은 관계가 있다고 한다.

$S=NQ^{\frac{1}{2}}H^{-\frac{3}{4}}$

(단, N, Q, H의 단위는 각각 rpm, m^3/분, m이다.)

펌프의 1분당 회전수가 일정한 양수기에 대하여 양수량이 24, 양수할 높이가 5일 때의 비교회전도를 S_1, 양수량이 12, 양수할 높이가 10일 때의 비교회전도를 S_2라 하자. $\frac{S_1}{S_2}$의 값은?

[3점-1009-평가원]

① $2^{\frac{3}{4}}$　② $2^{\frac{7}{8}}$　③ 2　④ $2^{\frac{9}{8}}$　⑤ $2^{\frac{5}{4}}$

47. A, B 두 제품만을 생산하는 공장이 있다. 1990년 이 공장의 전체 생산량 중 A제품의 생산량이 차지하는 비율은 65%이었다.
이 공장에서 2010년까지 A제품의 생산량은 매년 전년도보다 3%씩 증가하였고 같은 기간 동안 이 고장의 전체 생산량은 매년 전년도보다 2%씩 증가하였다면 2010년에 전체 생산량 중 A제품의 생산량이 차지하는 비율은 몇 %인가? (단, $1.03^{20}=1.8$, $1.02^{20}=1.5$로 계산한다.)[4점–1003–중앙]

① 70%　② 72%　③ 74%
④ 76%　⑤ 78%

48. 광원에서 단위 시간에 나오는 빛의 양을 ‘광도’(단위는 cd)라 하고, 그 빛이 관찰 지점에서 측정되는 밝기를 ‘조도’(단위는 lx)라고 한다. 광도가 I인 등대로부터 x m 떨어진 곳에서 측정되는 조도를 L이라 할 때, 다음이 성립한다.

$$L=\frac{I\cdot 10^{-kx}}{x^2}\quad (\text{단, } k\text{는 기상상태에 따른 상수})$$

광도 $I=10^7$(cd)인 A 등대에서 1000 m 떨어진 곳에서 측정한 조도 $L=4\times10^{-6}$(lx)일 때, 같은 광도인 A 등대에서 500 m 떨어진 곳에서 측정한 조도는?[4점–1008–비상]

① $8\cdot10^{-4}$(lx)　② $8\cdot10^{-3.5}$(lx)　③ $8\cdot10^{-2.5}$(lx)
④ $8\cdot10^{-4.5}$(lx)　⑤ $8\cdot10^{-3}$(lx)

지수함수

1. 실수 전체의 집합에서 양의 실수의 집합으로 대응되는 함수 $f(x)$ 가 임의의 실수 a, b 에 대하여 $f(ab)=\{f(b)\}^a$ 을 만족할 때, $f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{1}{6}\right)$ 의 값은? (단, $f(1)=64$)

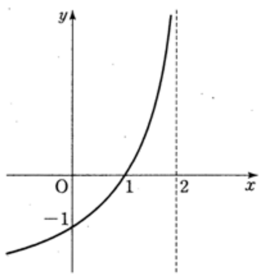
[3점−1007−교육청]

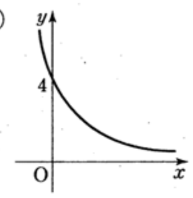
① 12 ② 13 ③ 14
④ 15 ⑤ 16

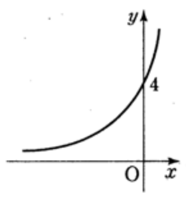
2. 상수 a 가 $1<a\le 2$ 일 때, 집합 $\{x\mid -1\le x\le 2\}$ 에서 정의된 함수 $f(x)=\dfrac{a^{x+1}}{3^{x-1}}+a^{-x}$ 의 최댓값은?[3점−1004−종로]

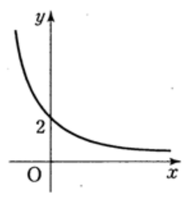
① $\dfrac{a}{3}+1$ ② $a+9$ ③ $3a+1$
④ $\dfrac{a^3}{3}-\dfrac{1}{a^2}$ ⑤ $\dfrac{a^3}{3}+\dfrac{1}{a^2}$

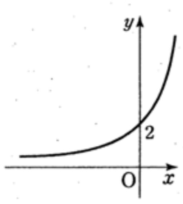
3. 그림은 일차함수 $f(x)$에 대하여 $y=\log_2\dfrac{1}{f(x)}$ 의 그래프를 나타낸 것이다. 이때 $y=2^{f(x)}$ 의 그래프를 바르게 나타낸 것은?
[3점−1006−종로]

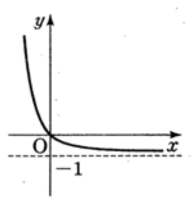


①


②


③


④


⑤


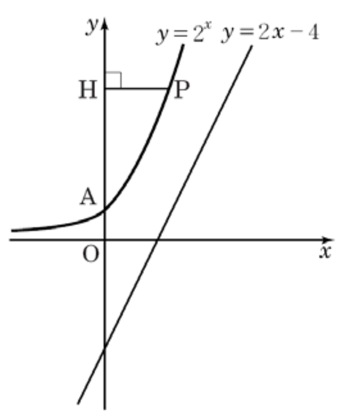
4. 함수 $f(x)=-3^{2x}+k\cdot 3^x+1$의 최댓값이 26일 때, 양의 실수 k의 값을 구하시오.[3점−1008−비상]

5. $0\le x\le 1$인 범위에서 함수 $f(x)=4^{1-x}$ 의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 할 때, $M+m$ 의 값은?[3점−1008−종로]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

6. 그림과 같이 곡선 $y=2^x$ 위의 한 점 $\mathrm{P}(a,\ 2^a)$에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하자. 점 $\mathrm{A}(0,\ 1)$에 대하여 $\overline{\mathrm{PH}}:\overline{\mathrm{AH}}=1:2$일 때, 점 P에서 직선 $y=2x-4$까지의 거리는? (단, $a>0$)

[3점−1007−대성]

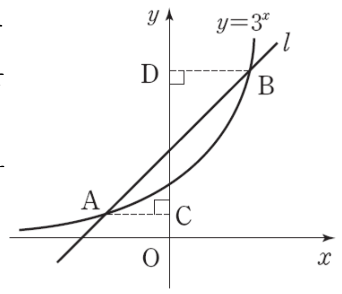


① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2
④ $\sqrt{5}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

7. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)=2^{ax+b}$ 이 다음 두 조건을 모두 만족시킬 때, a^2+b^2 의 값을 구하시오. (단, a, b 는 상수이다.)[3점–1004–교육청]

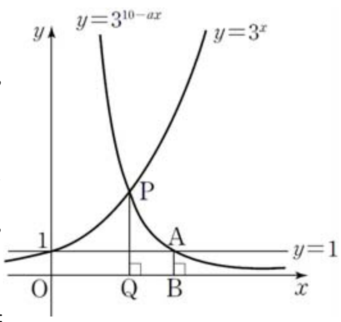
> (가) $f\left(\frac{5}{2}\right)=2\sqrt{2}$
>
> (나) 임의의 실수 x, y 에 대하여 $f(x+y)=2f(x)f(y)$ 이다.

8. 그림과 같이 기울기가 1인 직선 l이 함수 $y=3^x$ 의 그래프와 만나는 두 점을 A, B라 하고, 두 점 A, B에서 y축에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=4\sqrt{2}$ 일 때, $\dfrac{\overline{\mathrm{OD}}}{\overline{\mathrm{OC}}}$ 의 값은?[3점–1010–비상]



① 45 ② 54 ③ 63 ④ 72 ⑤ 81

9. 그림과 같이 두 곡선 $y=3^x$, $y=3^{10-ax}$ 이 만나는 점을 P라 하고, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 Q라고 하자. 또 직선 $y=1$이 곡선 $y=3^{10-ax}$ 과 만나는 점을 A라 하고, 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 B라 하자. $\overline{\mathrm{OQ}}:\overline{\mathrm{QB}}=5:2$일 때, 양수 a의 값은?[3점–1008–비상]



① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

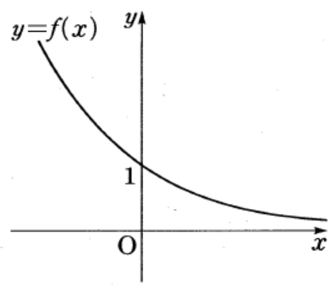
10. 이차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$와 지수함수 $g(x)=a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$이 다음 세 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(3)=-5$
>
> (나) $g(3)=\frac{1}{3}$
>
> (다) 모든 실수 x에 대하여 $f(3-x)=f(3+x)$이다.

$2\le x\le 5$일 때, 함수 $y=(g\circ f)(x)$의 최솟값은?
[3점–1008–대성]

① 1 ② $\sqrt[3]{3}$ ③ $\sqrt[3]{9}$ ④ $3\sqrt[3]{3}$ ⑤ $3\sqrt[3]{9}$

11. 그림은 지수함수 $f(x)=a^x$의 그래프이다. $0<p<q$일 때, 항상 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, f^{-1}는 f의 역함수이다.)
[3점–1004–메가]



<보 기>

> ㄱ. $f(p)<f(f(p))$
>
> ㄴ. $f(f(p))<f(f(q))$
>
> ㄷ. $f^{-1}(p)<f^{-1}(q)$

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

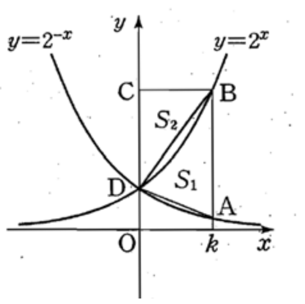
12. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $-2 \le x \le 0$일 때, $f(x)=\lvert x+1 \rvert -1$
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)+f(-x)=0$
(다) 모든 실수 x에 대하여 $f(2-x)=f(2+x)$

$-10 \le x \le 10$에서 $y=f(x)$의 그래프와 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프의 교점의 개수는?[4점-1010-교육청]

① 2　② 3　③ 4　④ 5　⑤ 6

13. 그림과 같이 두 함수 $y=2^{-x}$, $y=2^x$의 그래프가 직선 $x=k$ $(k>0)$와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 B에서 x축에 평행한 직선을 그어 y축과 만나는 점을 C라 하자. 또, 두 함수 $y=2^{-x}$,$y=2^x$의 그래프가 만나는 점을 D라 하고, $\triangle$ABD의 넓이와 $\triangle$BCD의 넓이를 각각 S_1, S_2라 하자. $S_1=\frac{9}{8}S_2$일 때, 양수 k의 값을 구하시오.[4점-1005-중앙]



14. 두 함수 $f(x)=\frac{a^x+a^{-x}}{2}$, $g(x)=\frac{a^x-a^{-x}}{2}$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, a는 1이 아닌 양수이다.)[4점-1009-종로]

<보 기>

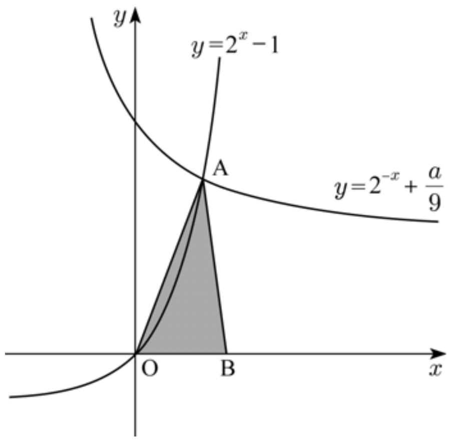
ㄱ. $y=f(x)g(x)$는 y축 대칭인 함수이다.
ㄴ. $\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2=1$
ㄷ. $y=\frac{f(x)}{g(x)}$의 치역은 $\{y \mid -1<y<1\}$이다.
(단, $g(x)\neq 0$)

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

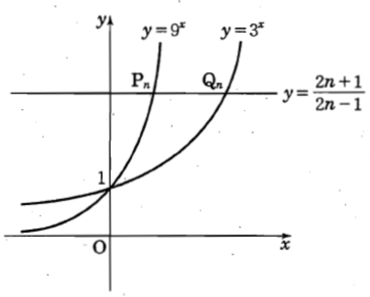
15. 좌표평면에서 지수함수 $y=a^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동시킨 후, x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동시킨 그래프가 점 $(1, 4)$를 지난다. 양수 a의 값은? [3점-2010-대수능]

① $\sqrt{2}$　② 2　③ $2\sqrt{2}$　④ 4　⑤ $4\sqrt{2}$

16. 그림과 같이 두 곡선 $y=2^x-1$, $y=2^{-x}+\frac{a}{9}$의 교점을 A라 하자. 점 B의 좌표가 $(4,\ 0)$일 때, 삼각형 AOB의 넓이가 16이 되도록 하는 양수 a의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)
[4점–1003–교육청]

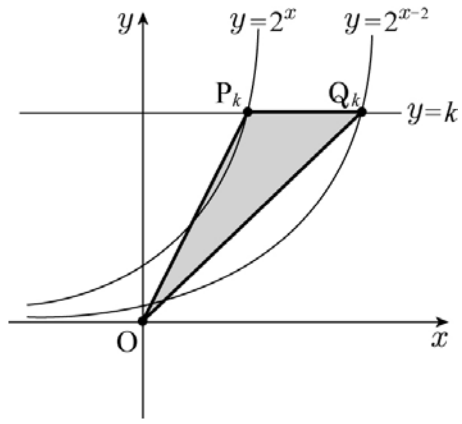


17. 그림과 같이 직선 $y=\frac{2n+1}{2n-1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이 두 곡선 $y=9^x$, $y=3^x$과 만나는 점을 각각 P_n, Q_n이라 하자.
$\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1}+\overline{\mathrm{P}_2\mathrm{Q}_2}+\overline{\mathrm{P}_3\mathrm{Q}_3}+\cdots+\overline{\mathrm{P}_{40}\mathrm{Q}_{40}}$의 값은?[4점–1005–대성]

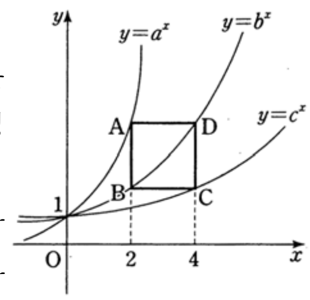


① $\frac{2}{3}$　② 1　③ $\frac{4}{3}$
④ $\frac{5}{3}$　⑤ 2

18. 그림과 같이 두 곡선 $y=2^x$, $y=2^{x-2}$과 직선 $y=k$의 교점을 각각 P_k, Q_k라 하고, 삼각형 $\mathrm{OP}_k\mathrm{Q}_k$의 넓이를 A_k라 하자.
$A_1+A_4+A_7+A_{10}$의 값을 구하시오. (단, k는 자연수이고, O는 원점이다.)[3점–1010–교육청]

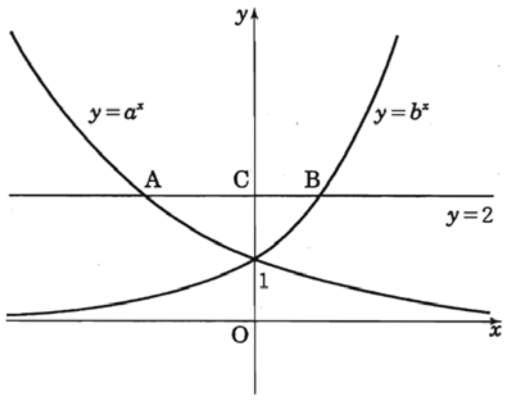


19. 그림과 같이 세 곡선 $y=a^x$, $y=b^x$, $y=c^x$ 위의 네 점 A, B, C, D를 꼭짓점으로 하고, 한 변의 길이가 2인 정사각형 ABCD가 있다.
$\log_2 a+\log_2 b-\log_2 c$의 값은? (단, 정사각형 ABCD의 각 변은 좌표축에 평행하다.)[4점–1004–종로]



① $\frac{1}{2}$　② $\frac{3}{4}$　③ 1
④ $\frac{5}{4}$　⑤ $\frac{3}{2}$

20. 그림과 같이 두 곡선 $y=a^x$, $y=b^x$ 이 있다. 직선 $y=2$ 가 이 두 곡선과 만나는 점을 각각 A, B 라 하고 y 축과 만나는 점을 C 라 할 때, $\overline{AC}>\overline{BC}$ 이다.



임의의 서로 다른 두 실수 x_1, x_2에 대하여

$(x_2-x_1)\{f(x_2)-f(x_1)\}>0$

을 만족시키는 함수 $f(x)$ 만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

[4점–1006–대성]

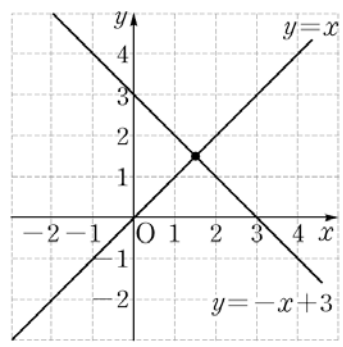
<보 기>

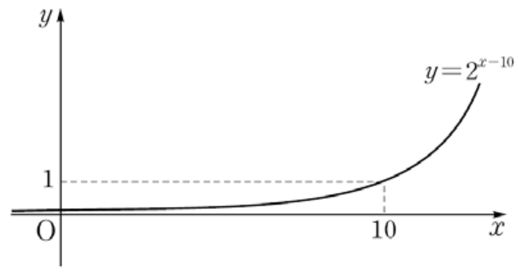
ㄱ. $f(x)=\left(\dfrac{b}{a}\right)^x$　　ㄴ. $f(x)=\log_{\frac{a}{b}} x$

ㄷ. $f(x)=(ab)^x$

① ㄱ　② ㄴ　③ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 한 점 $A(x,\ y)$에서 만날 때, 정수 a, b에 대하여 점 $A(x,\ y)$가 두 부등식 $a \le x < a+1$, $b \le y < b+1$이 나타내는 영역에 속하면 $\langle f(x),\ g(x) \rangle = a+b$로 정의하자. 예를 들어, 오른쪽 그림과 같이 두 직선 $y=-x+3$과 $y=x$의 교점의 좌표는 $\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$이므로 $\langle -x+3,\ x \rangle = 1+1=2$이다. 다음은 지수함수 $y=2^{x-10}$의 그래프를 나타낸 것이다.





$\langle 2^{x-10},\ 2^{-2x+10}-3 \rangle$의 값은?[4점–1010–메가]

① 3　② 4　③ 5
④ 6　⑤ 7

22. $a>0$, $b>0$일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[4점–1007–메가]

<보 기>

ㄱ. $x>0$일 때, $a>b$이면 $a^x>b^x$이다.

ㄴ. $x<0$일 때, $a^x>b^x$이면 $a<b$이다.

ㄷ. $x>0$일 때, $a^x>b^x$이면 $a^{\frac{1}{x}}<b^{\frac{1}{x}}$이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

23. 두 함수 $f(x)=3^x+\log_3 k$, $g(x)=-3^{x+1}+\log_{\frac{1}{3}} k$가 있다. 직선 $y=n$이 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프 중 어느 것과도 만나지 않도록 하는 정수 n의 개수는 9이다. 자연수 k의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오.[4점-1010-대성]

24. 감소하는 두 곡선 $y=a^x$, $y=(2a)^x$이 제1사분면에서 직선 $y=2-x$와 만나는 점을 각각 $P(x_1,\ y_1)$, $Q(x_2,\ y_2)$라 하자. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[4점-1007-종로]

<보 기>

ㄱ. $0<a<\frac{1}{2}$　　ㄴ. $x_1<x_2$

ㄷ. $\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2-x_1}>1$

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

25. 세 실수 a, b, c가 다음 등식을 만족시킨다.

$$2^a=\frac{1}{a},\ \ 2^{\frac{1}{b}}=b,\ \ 3^{\frac{1}{c}}=c$$

이때 세 실수 a, b, c의 대소 관계를 옳게 나타낸 것은?
[4점-1005-비상]

① $a<b<c$　② $a<c<b$　③ $b<a<c$
④ $b<c<a$　⑤ $c<b<a$

26. 방정식 $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{3x}=9^{3-x}$의 해를 구하시오.

[3점][2010년 7월 교육청]

27. $-1\le x\le 1$일 때, 함수 $y=2\cdot 3^x-9^x$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. 이때, $M+m$의 값은?[3점-1008-중앙]

① -2　② -1　③ 0
④ 1　⑤ 2

28. 지수방정식 $\frac{16^x}{2}=2^{x+3}$을 만족시키는 x의 값은?

[3점][2010년6월 평가원]

① $\frac{1}{3}$　② $\frac{2}{3}$　③ 1
④ $\frac{4}{3}$　⑤ $\frac{5}{3}$

29. 지수방정식 $4^x - a\times 2^x + 8 = 0$의 두 근이 모두 -1이상인 정수일 때, 모든 a의 값의 곱을 구하시오.[4점-1007-종로]

30. 방정식 $4^x - 7\cdot 2^x + 12 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $2^{\alpha+\beta}$ 의 값은?[3점-1006-대성]

① 4 ② 7 ③ 10
④ 12 ⑤ 15

31. x에 대한 방정식 $9^x - a\cdot 3^{x+1} + 8 = 0$이 서로 다른 두 실근 α, β를 갖는다. $\beta = 2\alpha$일 때, a^4의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.)[3점-1010-대성]

32. 지수방정식 $(2^x - 8)(3^{2x} - 9) = 0$의 두 실근을 α, β라 할 때, $\alpha^2 + \beta^2$의 값을 구하시오.[3점-1009-평가원]

33. 지수부등식 $(3^x - 5)(3^x - 100) < 0$을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합은?[3점-2010-대수능]

① 5 ② 7 ③ 9
④ 11 ⑤ 13

34. x에 대한 방정식 $2^{\sin^2 x} + 5\cdot 2^{\cos^2 x} = 7$을 만족하는 서로 다른 실근의 개수를 구하시오. (단, $0 \le x \le 2\pi$)[3점-1009-종로]

35. 부등식 $3^{x+1}-9^{x} \geq \frac{8}{9}$ 을 만족시키는 정수 x의 개수는?

[3점-1010-비상]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

36. 부등식

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} \leq \left(\frac{1}{27}\right)^{x-1}$$

을 만족시키는 모든 자연수 x의 합을 구하시오.[3점-1005-대성]

37. 지수부등식 $2^{-2x}-5\cdot 2^{-x}+4 \leq 0$의 해가 $\alpha \leq x \leq \beta$일 때, $10(\beta-\alpha)$의 값을 구하시오.[3점-1009-중앙]

38. 지수부등식 $4^{x}-a\cdot 2^{x+2}+b<0$ 의 해가 일차부등식 $|2x-3|<1$ 의 해와 같을 때, 두 상수 a, b 의 곱 ab 의 값을 구하시오.[3점-1006-종로]

39. 두 집합

$$A=\{x|3^{2x}-4\cdot 3^{x+1}+27<0\}$$
$$B=\{x|2^{2x}-a\cdot 2^{x}+b<0\}$$

에 대하여 $A=B$일 때, 두 실수 a,b에 대하여 $a+b$의 값은?

[3점-1011-대성]

① 6 ② 8 ③ 10
④ 12 ⑤ 14

40. 모든 실수 x에 대하여 부등식 $9^{x}+3^{x+1}-3>k$가 항상 성립하도록 하는 정수 k의 최댓값은?[4점-1010-종로]

① -6 ② -5 ③ -4
④ -3 ⑤ -2

41. $0 < a < b$인 두 실수 a, b에 대하여 $a^{100} \le a^x b^{x-100} \le b^{100}$을 만족시키는 정수 x의 개수를 구하시오.[3점-1004-대성]

로그

1. $\left(\log_3 \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-2}$ 의 값은?[2점-1007-메가]

① $\dfrac{1}{4}$ ② $\dfrac{1}{2}$ ③ $\sqrt{2}$
④ 2 ⑤ 4

2. $4^{-\log_3 \frac{1}{9}}$ 의 값은?[2점-1009-중앙]

① $\dfrac{1}{16}$ ② $\dfrac{1}{8}$ ③ $\sqrt{2}$
④ 8 ⑤ 16

3. $9^{\frac{1}{2}} \times \log_3 \sqrt[6]{9}$ 의 값은?[2점-1005중앙]

① $\dfrac{1}{3}$ ② $\dfrac{1}{2}$ ③ 1
④ $\sqrt{3}$ ⑤ 3

4. $4^{\frac{3}{2}} \times \log_3 \sqrt{3}$ 의 값은?[2점-2010-대수능]

① 5 ② 4 ③ 3
④ 2 ⑤ 1

5. $\log_{\sqrt{3}} 4 \times \log_{16} 3$ 의 값은?[2점-1011-종로]

① $\dfrac{1}{2}$ ② $\dfrac{2}{3}$ ③ 1
④ $\dfrac{4}{3}$ ⑤ $\dfrac{3}{2}$

6. $\log_4 27 \times \log_9 2\sqrt{2}$ 의 값은?[2점-1007-대성]

① 1 ② $\dfrac{9}{8}$ ③ $\dfrac{5}{4}$
④ $\dfrac{3}{2}$ ⑤ 2

7. $\log_4 5 \cdot \log_5 8$의 값은?[2점-1011-중앙]

8. $\log_3 \sqrt{54} - \log_9 6$의 값은?[2점-1005-메가]

① 1 ② 0 ③ -1
④ -2 ⑤ -3

9. $\log_5 250 - \dfrac{1}{\log 5}$의 값은?[2점-1010-종로]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

10. $\log_3 6 - 4\log_3 \sqrt[4]{2}$의 값은?[2점-1004-대성]

① $\log_3 2$ ② 1 ③ $1+\log_3 2$
④ 2 ⑤ 3

11. $\log_3 6 - \log_3 \sqrt{12}$의 값은?[2점-1003-비상]

① $\dfrac{1}{3}$ ② $\dfrac{1}{2}$ ③ $\dfrac{2}{3}$
④ 2 ⑤ 3

12. $\log_2 6 - \log_2 3\sqrt{2}$의 값은? [2점-1010-비상]

① $\dfrac{1}{3}$ ② $\dfrac{1}{2}$ ③ 1
④ $\dfrac{4}{3}$ ⑤ $\dfrac{3}{2}$

13. $\log_2\sqrt{32}-\log_4\sqrt{8}$ 의 값은?[2점-1008-종로]

① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{5}{4}$ ③ $\frac{7}{4}$
④ $\frac{9}{4}$ ⑤ $\frac{11}{4}$

14. $\log_2 5+\log_4\frac{1}{100}$ 의 값은?[2점-1005-비상]

① 2 ② $\frac{1}{2}$ ③ $-\frac{1}{2}$
④ -1 ⑤ -2

15. $\log_6(\sqrt[3]{4}\times\sqrt[3]{9})$ 의 값은?[2점-1006-대성]

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1
④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

16. $(\sqrt[3]{3})^6+\frac{\log_2 9}{\log_2 3}$ 의 값은?[2점-1005-종로]

① 5 ② 7 ③ 9
④ 11 ⑤ 13

17. $(\log_2 6)^2+2\log_6 2\cdot\log_6 3+(\log_6 3)^2$ 의 값은?
[2점-1004-메가]

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2
④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

18. $\log_3 6+\log_3 2-\log_3 4$ 의 값은?[2점-1009-평가원]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

19. $\sqrt[3]{27}+\log_3\sqrt{81}$ 의 값은?[2점-1011-대전교]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

20. $\log_2(2+\sqrt{2})-\log_2(\sqrt{2}+1)$ 의 값은?[2점-1006-종로]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\sqrt{2}$
④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

21. $\frac{1}{\sqrt[3]{8}}\times\log_3 81$의 값은?[2점-1006-평가원]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

22. $\log_3\left(\sqrt{3^3}\cdot\sqrt[3]{3}\right)^2$ 의 값은?[2점-1007-교육청]

① 3 ② $\frac{10}{3}$ ③ $\frac{11}{3}$
④ 4 ⑤ $\frac{13}{3}$

23. $\log_5 3\times\left(\log_3\sqrt{5}-\log_{\frac{1}{9}}125\right)$의 값은?[2점-1003-교육청]

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 1
④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

24. $\log_2 3-\log_2\frac{9}{2}+\log_2 12$의 값을 구하시오.

[2점-1004-교육청]

25. $\frac{1}{2}\log_2\frac{16}{7}+\log_2\sqrt{7}$ 의 값은?[2점-1009-대성]

① $\log_2 7-2$ ② 2 ③ $\log_2 7$
④ 4 ⑤ $\log_2 7+2$

26. $\log_2\frac{1}{\sqrt{5}+1}+\log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{5}-1)$의 값은?[2점-1010-메가]

① -2 ② -1 ③ $-\frac{1}{2}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

27. $a=\log_3 2$, $b=\log_3\frac{1}{5}$ 일 때, 3^{3a-b}의 값을 구하시오.

[3점-1004-메가]

28. $1<x<2^4$ 과 $0<y\le\log_2 x$ 를 동시에 만족시키는 두 자연수 x, y 의 순서쌍 $(x,\ y)$ 의 개수는?[2점-1004-대성]

① 32 ② 33 ③ 34
④ 35 ⑤ 36

29. $1<a<b<10$인 자연수 a, b에 대하여 $\log_a b$가 자연수가 되게 하는 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는?[3점-1005-종로]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

30. 1보다 크고 100보다 작은 두 자연수 a, b에 대하여 $\log_a b=\log_b a^4$을 만족시키는 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는?

[3점-1005중앙]

① 6 ② 8 ③ 10
④ 12 ⑤ 14

31. 부등식 $\log_3 \frac{1}{10} < n < \log_2 10$을 만족시키는 모든 정수 n의 값의 합은?[3점-1005중앙]

① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

32. 부등식 $n < \log_4 2010 < n+1$ 을 만족하는 자연수 n 의 값을 구하여라.[3점-1006-종로]

33. $(\log_4 243 + \log_8 81)\log_3 64$ 의 값을 구하시오.[3점-1011-대성]

34. 자연수 $N = 2^4 \cdot 3^2$의 모든 양의 약수들을 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n$ 이라 할 때, $\log_{12} a_1 + \log_{12} a_2 + \log_{12} a_3 + \cdots + \log_{12} a_n$ 의 값은?

[3점-1008-대성]

① 6 ② 8 ③ 12
④ 15 ⑤ 18

35. $x^3 = 1$의 한 허근을 ω라 하자.

$$P = (1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega^3)\cdots(1+\omega^{2010})$$

일 때, $\log_2 P$ 의 값을 구하시오.[3점-1008-대성]

36. $2^a = 3^b = 5^c$일 때, $\frac{a}{b} + \frac{a}{c}$의 값은? (단, $abc \neq 0$)

[3점-1010-대성]

① $\log_5 3$ ② $\log_5 6$ ③ $\log_2 5$
④ $\log_2 10$ ⑤ $\log_2 15$

37. 1이 아닌 세 양수 x, y, z에 대하여 $x^2=y^3=z^4$이 성립할 때, $\log_x y+\log_y z+\log_z x$의 값은?[3점-1007-종로]

① $\frac{21}{8}$ ② $\frac{37}{12}$ ③ $\frac{27}{8}$

④ $\frac{41}{12}$ ⑤ 4

38. 두 실수 a, b에 대하여 $5^{a+b}=4$, $2^{a-b}=6$이 성립할 때, $5^{a^2-b^2}$의 값을 구하시오.[3점-1005-대성]

39. $a=\log_2 9$, $b=\log_3 5$일 때, $2^a\times 9^b$의 값을 구하시오.

[3점-1010-대성]

40. 1보다 크고 100보다 작은 두 자연수 a, b에 대하여 $\log_a b^4=\log_b a^9$이 성립할 때, $a+b$의 최댓값을 구하시오.

[3점-1009-중앙]

41. 부등식 $x+y\le 1$을 만족시키는 두 실수 x, y에 대하여

$10^x=t-5,\ 10^y=t-8$

일 때, 모든 정수 t의 값의 합을 구하시오.[3점-1010-비상]

42. 이차방정식 $x^2-5x+3=0$의 두 근이 $\log_2\alpha$, $\log_2\beta$일 때, $\alpha\beta$의 값은?[3점-1005-대성]

① 32 ② 16 ③ 8

④ 4 ⑤ 2

43. 두 양수 a, b에 대하여

$$ab=64,\ \log_4 \frac{b}{a}=4$$

가 성립할 때, $3\log_2 a+5\log_2 b$의 값을 구하시오.[3점-1003-중앙]

44. 행렬 $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$에 대하여 $A^{25}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$라 할 때, $\log_{10} bc$의 값을 구하시오.[3점-1010-중앙]

45. $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$일 때, $\log(\sin\theta)-\log(-\cos\theta)=-\frac{1}{2}\log 3$을 만족시키는 θ에 대하여 $\log_3(-\cot\theta)$의 값은?[3점-1009-대성]

① $-\frac{1}{3}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

46. $\log_2 \frac{7}{2}$의 정수부분을 x, 소수부분을 y라 할 때, $\left(\frac{1}{4}\right)^x+2^y$의 값은?[3점-1003-종로]

① 2 ② 7 ③ 11
④ 15 ⑤ 20

47. 자연수 n에 대하여 $\log_3 n$의 정수부분을 $f(n)$이라 할 때, 등식 $f(2n)=f(n)+1$을 만족하는 두 자리의 자연수 n의 개수를 구하여라.[4점-1011-중앙]

48. 임의의 양의 실수 a, b에 대하여 연산 $\circ$를

$$a\circ b=a^{-b}\times b^{\frac{1}{a}}$$

로 정의할 때, $\log_2\left(\frac{2\circ 4}{4\circ 2}\right)$의 값은?[3점-1005-비상]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$
④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

49. 이차정사각행렬 A 의 (i, j) 성분 a_{ij} 를 다음과 같이 정의하자.

$a_{ij} = (\log 20^{i+j}$ 의 지표$)$

행렬 A 의 모든 성분의 합을 구하시오.[3점-1006-대성]

50. 임의의 양수 a, b에 대하여 연산 ◇를 $a◇b = a^{\log_2 b}$으로 정의할 때, $\log_2\{(3^2◇2^3)◇9^6\}$의 값을 구하시오.[3점-1007-메가]

51. x를 $x-\sqrt{3}$으로 나누었을 때의 나머지를 R_1, x^2을 $x-\sqrt[3]{R_1}$로 나누었을 때의 나머지를 R_2, x^3을 $x-\sqrt[4]{R_2}$로 나누었을 때의 나머지를 R_3, x^4을 $x-\sqrt[5]{R_3}$으로 나누었을 때의 나머지를 R_4라 하면 $\log_3(R_3R_4)=\frac{p}{q}$이다. 이때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)[3점-1010-중앙]

52. 이차방정식 $ax^2-12x+6=0$ 의 두 근이 $\log_3\alpha$, $\log_3\beta$ 이고 $(\log_3\alpha)(\log_3\beta)=2$ 일 때, $\alpha\beta$의 값은? (단, a 는 상수이다.)

[3점-1005-비상]

① 64 ② 70 ③ 72
④ 80 ⑤ 81

53. 양수 x에 대하여 함수 $f(x)$가 $f(x)=\log_2\left(\frac{1}{x+3}+1\right)$일 때, $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(124)$의 값을 구하시오.[3점-1003-비상]

54. 부등식 $\frac{1}{2} \le \log_{10}N < 1$ 을 만족시키는 모든 자연수 N의 합을 구하시오.[3점-1008-종로]

55. 두 자연수 a, n에 대하여 부등식

$$a\times10^n < 3^{2010} < (a+1)\times10^n$$

이 성립할 때, $a+n$의 값을 구하시오.
(단, $1 \le a < 10$이고, $\log2=0.3010$, $\log3=0.4771$로 계산한다.)
[3점-1004-대성]

56. 서로 다른 세 실수 x, y, z가 $2^x=3^y=6^z$을 만족시킬 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?[3점-1003-교육청]

<보 기>

ㄱ. $2^x\cdot3^y=36^z$
ㄴ. $2^z\cdot3^{z-y}=1$
ㄷ. $x+y=1$이면 $z=\log_6 2\cdot\log_6 3$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

57. 1이 아닌 양의 실수 a, b에 대하여 $N(a,\ b)=\log_a b$로 정의할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?
[3점-1008-중앙]

<보기>

ㄱ. $N(b,\ a)=\dfrac{1}{N(a,\ b)}$
ㄴ. $N\left(\dfrac{1}{a},\ \dfrac{1}{b}\right)=N(a,\ b)$
ㄷ. $N(ma,\ mb)=N(a,\ b)$ (단, m은 자연수)

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

58. <보기>의 실수 a 중에서 그 네제곱근 중 1보다 큰 것이 존재하는 것만을 있는 대로 고른 것은?[3점-1004-종로]

<보 기>

ㄱ. $a=-\sqrt[3]{-2}$ ㄴ. $a=\log_{0.2}0.5$
ㄷ. $a=\log_\pi\dfrac{3}{\pi}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

59. 소리의 세기가 $I(\mathrm{W/cm^2})$인 음원으로부터 $d(\mathrm{cm})$만큼 떨어진 지점에서 측정된 소리의 세기를 P(데시벨)이라 하면 관계식

$$P=10\left(12+\log\frac{I}{d^2}\right)$$

가 성립한다고 한다. 어느 음원으로부터 2000(cm)만큼 떨어진 지점에서 측정된 소리의 세기가 80(데시벨)일 때, 이 음원의 소리의 세기는 $a(\mathrm{W/cm^2})$이다. 이때, a의 값을 구하시오.[3점-1009-중앙]

60. 그림과 같이 연산장치 $\boxed{\mathrm{P}}$에 실수a를 입력하면 2^a이 출력되고, 연산장치 $\boxed{\mathrm{Q}}$에 양수b를 입력하면 $\log_4 b$가 출력된다.

$$a\to\boxed{\mathrm{P}}\to2^a$$
$$b\to\boxed{\mathrm{Q}}\to\log_4 b$$

다음 그림과 같은 연산장치에 8을 입력하였을 때, 출력되는 상수 k 값에 대하여 $\log_2 k$의 값은?[3점-1010-대성]

$$8\to\boxed{\mathrm{P}}\to\boxed{\mathrm{Q}}\to\boxed{\mathrm{P}}\to\boxed{\mathrm{P}}\to\boxed{\mathrm{Q}}\to k$$

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

61. n이 자연수일 때, 집합
$A_n = \left\{x \left| \frac{1}{n}\log n \le x \le \frac{1}{n}\log(n+1)\right.\right\}$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[3점-1003-중앙]

<보 기>

ㄱ. $A_3 \subset A_2$　　ㄴ. $A_4 \subset A_3$
ㄷ. $A_4 \subset A_2$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

62. 다음은 'a, b가 1이 아닌 양의 실수 일 때, $\log_a b = \log_b a$ 이면 $\frac{a^2+1}{b^2+1} = \frac{a}{b}$ 이다.' ……($*$)가 성립함을 증명한 것이다.

<증 명>

$\log_b a = \frac{1}{\boxed{(가)}}$ 이고 가정에서 $\log_a b = \log_b a$이므로
$\log_a b = 1$ 또는 $\log_a b = -1$이다.
(i) $\log_a b = 1$일 때, $\frac{a^2+1}{b^2+1} = \boxed{(나)}$이고 $\frac{a}{b} = \boxed{(나)}$ 이다.
(ii) $\log_a b = -1$일 때, $\frac{a^2+1}{b^2+1} = \boxed{(다)}$이고 $\frac{a}{b} = \boxed{(다)}$이다.
따라서 (i), (ii)에 의하여 $\frac{a^2+1}{b^2+1} = \frac{a}{b}$ 이므로 ($*$)가 성립한다.

위 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?[3점-1004-교육청]

	(가)	(나)	(다)
①	$\log_a b$	-1	b^2
②	$\log_b \frac{1}{a}$	-1	ab
③	$\log_a b$	1	a^2
④	$\log_b \frac{1}{a}$	-1	a^2
⑤	$\log_a b$	1	b^2

63. 어떤 물질을 빛이 통과할 때 빛의 세기가 변하므로 입사광에 대하여 투사광은 일정한 비율을 갖는다. 이 때 입사관의 세기에 대한 투사광의 세기의 비율을 그 물질의 투과도라 하고, 투과도의 역수의 상용로그 값을 그 물질의 흡광도라 한다. 즉

$$(\text{흡광도}) = \log\frac{1}{(\text{투과도})}$$

투과도가 α일 때 흡광도가 0.32인 용액에 대한 투과도가 $\frac{a}{9}$가 되도록 입사광의 파장을 변화시켰을 때의 흡광도를 A라 하자. 이 때 $100A$의 값을 구하시오. (단, $\log 3 = 0.48$로 계산한다.)
[3점-1005-종로]

64. 혈액 속에 투여된 약물의 농도는 시간에 다라 감소한다. 약물이 적절하게 투약되어야 하는 시간 간격을 T, C_1은 약물의 효과가 없을 때의 농도이고 C_2는 약물이 신체에 위험하게 작용할 때의 농도라 하면

$$T = \frac{1}{k}\log_a \frac{C_2}{C_1} \text{ (단, } k,\ a\text{는 상수이다.)}$$

이다. 두 약물 A, B에 대하여 농도 C_1의 비가 $b : 2a^2$이고 농도 C_2의 비가 $b : 2a$이다. $k = \frac{1}{3}$일 때, 두 약물의 시간 간격의 차를 구하시오.[4점-1009-종로]

65. 세 등식

$xyz \cdot \log x = 2\log y$,
$(xyz+1) \cdot \log y = 3\log z$,
$(xyz+2) \cdot \log z = 4\log x$

를 모두 만족시키는 1이 아닌 세 양수 x, y, z에 대하여 $x^6+y^6+z^6$의 값을 구하시오.[4점-1010-메가]

66. 세 양수 a, b, c에 대하여

$$\begin{cases}\log_2 ab+\log_2 bc=5\\ \log_2 bc+\log_2 ca=8\\ \log_2 ca+\log_2 ab=7\end{cases}$$

이 성립할 때, $a+b+c$의 값을 구하시오.[4점-1003-교육청]

67. 네 자연수 m, n, p, q가 다음을 만족시킨다.

$$\log_m n=\frac{3}{2},\ \log_p q=\frac{5}{4},\ m-p=9\ \ (m\neq 1,\ p\neq 1)$$

이때, $n+q$의 값을 구하시오.[4점-1005-메가]

68. n이 정수일 때, $[\log_{16}x]=n$, $[\log_4 x]=2n$을 만족시키는 두 자리의 자연수 x의 개수를 구하시오. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)[4점-1010-비상]

69. 두 실수 x, y가 다음 두 조건을 모두 만족한다.

(가) $x>1,\ y>1$ (나) $\log(x+y)=\log x+\log y$

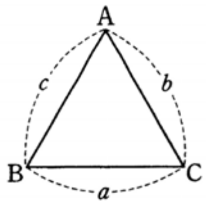
이때 $y+4x$의 최솟값은?[4점-1008-중앙]

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

70. a는 한 자리 자연수이고, b는 양의 정수이다.

$a\times 10^b<13^{30}<(a+1)\times 10^b$을 만족할 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, $\log 1.3=0.114$, $\log 2=0.301$, $\log 3=0.477$로 계산한다.)
[4점-1005-종로]

71. 삼각형 ABC 의 세 꼭짓점 A, B, C 의 대변의 길이를 각각 a, b, c 라 할 때, 등식 $\log_{\sqrt{3}}(a^2+b^2-c^2)=1+\log_3 a^2+\log_3 b^2$ 이 성립한다. 다음 중 삼각형 ABC 의 외접원의 반지름의 길이와 항상 같은 것은?[4점-1004-종로]



① $\sqrt{c}$ ② c ③ $\sqrt{2}\,c$
④ $2c$ ⑤ c^2

72. 양의 정수 x 에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$를

$$f(x)=[\log_2 x],\ g(x)=\log_2 x-[\log_2 x]$$

로 정의할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)[4점-1004-메가]

<보 기>

ㄱ. $f(10)=f(12)$
ㄴ. $g(6)<g(20)$
ㄷ. $g(a)=g(5)$를 만족시키는 두 자리 자연수 a의 개수는 4이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

73. 1000 이하의 두 자연수 x, y 에 대하여 집합 $\{xy\,|\,\log_2 x+\log_2 y=[\log_2 x]+[\log_2 y]\}$ 의 모든 원소의 합은?
(단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)[4점-1010-종로]

① $2^{16}-1$ ② $2^{17}-1$ ③ $2^{18}-1$
④ $2^{19}-1$ ⑤ $2^{20}-1$

74. 세 집합

$$A=\{x\,|\,\log_5 x^2=2\}$$
$$B=\{x\,|\,\sqrt{10}^{\,\log|x-3|}=\sqrt{2}\}$$
$$C=\{x\,|\,x^2+ax+a^2-21=0\}$$

에 대하여 $A\cap C=\phi$, , $B\cap C\neq\phi$ 이 되도록 하는 집합 C 의 원소의 총합은?[4점-1006-종로]

① -4 ② -2 ③ 0
④ 4 ⑤ 5

상용로그

1. $\log 150$의 지표를 x, 가수를 y라 할 때, $10^{x}+10^{-y}$의 값은? [3점−1011−종로]

① $\frac{103}{3}$ ② $\frac{103}{2}$ ③ $\frac{302}{3}$
④ $\frac{203}{2}$ ⑤ 102

2. 양수 x에 대하여 $\log x$의 지표를 $I(x)$라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[3점−1003−비상]

<보 기>

ㄱ. $I(2010)=3$
ㄴ. $I(x)+I\left(\frac{1}{x}\right)=0$
ㄷ. $I(x\sqrt{10})+I(x)=I(x^{2})$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

3. 양수가 다음 두 조건을 만족시킨다.

(가) $5 \le \log x^{2} < 6$
(나) $\log x^{2}+\log\sqrt{x}-[\log\sqrt{x}]=6$

이 때, $\log x$ 의 값은 ? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수) [3점−1003−비상]

① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{13}{5}$ ③ $\frac{8}{3}$
④ $\frac{14}{5}$ ⑤ $\frac{17}{6}$

4. 1이 아닌 양수 x, y에 대하여 $x^{a}=y^{b}=(xy)^{2}$이 성립할 때, $\frac{(ab)^{2}-4(a^{2}+b^{2})}{a+b}$의 값을 구하시오. (단, $xy\neq 1$)[3점−1010−종로]

5. $100<x<1000$인 실수 x에 대하여 $\log x$와 $\log\frac{1}{x}$의 가수가 같을 때, $\log x$의 값은?[3점−1008−비상]

① 2 ② $\frac{11}{5}$ ③ $\frac{9}{4}$
④ $\frac{7}{3}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

6. $\log x$의 지표가 3이고, $\log x$의 가수가 $\log\sqrt{x}$의 가수의 합이 1일 때, $\log x^{3}$의 값을 구하시오.[3점−1011−중앙]

7. 집합 $A=\{2^n \mid n$은 자연수$\}$의 원소 중에서 상용로그의 지표가 1인 모든 원소의 합은?[3점-1003-교육청]

① 112 ② 114 ③ 116
④ 118 ⑤ 120

8. 20^{-10}은 소수 n째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다. 자연수 n의 값을 구하시오. (단, $\log 2=0.301$)[3점-1010-비상]

9. 두 자연수 a, b가 다음 두 조건을 만족시킨다.

(가) a^{100}은 70자리의 자연수이다.
(나) a^b은 15자리의 자연수이다.

이 때, b의 값은?[3점-1003-중앙]

① 18 ② 19 ③ 20
④ 21 ⑤ 22

10. 다음 두 조건을 모두 만족시키는 모든 양의 실수 x의 곱은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대정수이다.)[3점-1004-교육청]

(가) $[\log x]=[\log 365]$
(나) $\log x^3-[\log x^3]=\log\frac{1}{x}-\left[\log\frac{1}{x}\right]$

① 10^9 ② $10^{\frac{19}{2}}$ ③ 10^{10}
④ $10^{\frac{21}{2}}$ ⑤ 10^{11}

11. 이차방정식 $6x^2+16x+k=0$의 두 근이 $\log A$의 지표와 가수일 때, 상수 k의 값은?[3점-1010-종로]

① -6 ② -2 ③ 1
④ 2 ⑤ 6

12. 양수 x에 대하여 $\log x$, $\log x^2$, $\log x^3$의 가수의 합이 2이고, 지표의 비가 $1:3:5$일 때, $\log x=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)[3점-1010-메가]

13. x가 자연수일 때, 상용로그 $\log x$의 지표를 $N(x)$라 하자. 자연수 전체의 집합을 정의역으로 하는 함수 $f(x)$를

$$f(x)=N(x+2010)-N(x)$$

로 정의할 때, $f(x)$의 최댓값과 최솟값의 합은?[3점-1005-메가]

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

14. 다음 두 조건을 동시에 만족하는 모든 실수 x의 값의 곱이 10^{α}일 때 4α의 값을 구하시오. (단, $\log 2=0.3010$, $\log 6=0.7781$)

[4점-1003-종로]

(가) x는 2000보다 크고 6000보다 작은 실수이다.
(나) $\log x^3-[\log x^3]=1-\log x+[\log x]$
(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

15. 방정식 $x^3+8=0$의 허근 중 하나인 $a=1+\sqrt{3}i$에 대하여 a^n의 실수 부분을 a_n이라 하자. 이때 $\left(1+\sum_{k=1}^{2010}a_k\right)$는 몇 자릿수인가? (단, $i=\sqrt{-1}$이고, $\log 2=0.3010$이다.)[4점-1003-종로]

① 598 ② 600 ③ 602
④ 604 ⑤ 606

16. 100 이하의 자연수 n에 대하여

$$\log_3 n-[\log_3 n]=\log_3\frac{9}{n}-\left[\log_3\frac{9}{n}\right]$$

가 성립하는 n의 개수는? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)[4점-1003-종로]

① 3 ② 5 ③ 7
④ 9 ⑤ 11

17. $\log x$에 대하여 $P(x)=[\log x]$, $Q(x)=\log x-[\log x]$라 하자. 다음 두 조건을 모두 만족하는 모든 실수 x의 곱을 a라 할 때, $\log a$의 값은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

[4점-1008-종로]

(가) $P(x)=2$
(나) $Q(x^2)=Q(\sqrt{x})$

① $\frac{10}{3}$ ② $\frac{11}{3}$ ③ 4
④ $\frac{13}{3}$ ⑤ $\frac{14}{3}$

18. $\log n$의 가수가 $\log\frac{1}{2}$의 가수보다 작은 두 자리 자연수 n의 개수를 구하시오.[4점-1006-평가원]

19. 다음 조건을 만족시키는 양수 x의 최댓값과 최솟값과 합을 구하시오. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)
[4점-1009-대성]

(가) $3^{[\log_3 x]} = x$ (나) $0 < [\log x] \le 2$

20. 양수 x 에 대하여 $\log x$의 지표를 $f(x)$, 가수를 $g(x)$라 하자. $a = f(3^{1000})$, $b = g(\sqrt[3]{10^4})$
이 때, 두 양수 a, b 에 대하여 ab 의 값을 구하시오.
(단, $\log 3 = 0.4771$)[3점-1005-비상]

21. 양수 x에 대하여 $\log x$의 지표를 $f(x)$, 가수를 $g(x)$라 하자.

$$f(a) = f\left(\frac{1}{50}\right),\ g(a) = g\left(\frac{1}{4}\right)$$

을 만족시키는 양수 a에 대하여 $1000a$의 값을 구하시오.
[4점-1005-중앙]

22. $\frac{1}{10} \le x \le 10^4$인 실수 x에 대하여

$$[\log x^2] + \left[\log \frac{1}{x^2}\right] = 0$$

을 만족시키는 x의 개수는?
(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)[4점-1007-대성]

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

23. 양의 실수 x에 대하여 $f(x)$를 다음과 같이 정의하자.

$f(x)$는 $x \ge 1$이면 x의 최고 자리의 숫자이고, $0 < x < 1$이면 x를 소수로 나타냈을 때 소수점 아래에서 처음으로 나타나는 0이 아닌 숫자이다.

예를 들어 $f(310.5) = 3$, $f(0.048) = 4$이다. 세 실수 a, b, c가 $a = 0.11^{10}$, $b = 1.1^{100}$, $c = 11^{1000}$일 때, $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은? (단, $\log 1.1 = 0.0414$, $\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$)[4점-1009-중앙]

① $f(a) > f(b) > f(c)$ ② $f(a) > f(c) > f(b)$
③ $f(a) = f(c) > f(b)$ ④ $f(b) > f(a) > f(c)$
⑤ $f(b) > f(a) = f(c)$

24. 다음 두 조건을 모두 만족시키는 양의 실수 x의 값은? [3점-1004-종로]

㈎ $\log x$의 지표는 1이고, 가수는 0.5보다 크다.
㈏ 임의의 양수 y에 대하여 $\log xy$와 $\log\frac{y}{x^2}$의 가수가 같다.

① $10^{\frac{5}{4}}$　② $10^{\frac{4}{3}}$　③ $10^{\frac{3}{2}}$
④ $10^{\frac{5}{3}}$　⑤ $10^{\frac{7}{4}}$

25. 양수 x에 대하여 $f(x)=\log x-[\log x]$로 정의 할 때, 양수 a가 다음 두 조건을 만족시킨다.

(가) $\log a-f(a)=3$
(나) $f(a)+f(\sqrt{a})=1$

이 때, $\log a^9$의 값을 구하시오. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)[4점-1003-중앙]

26. 다음 조건을 만족시키는 x의 값 중 최소의 자연수의 값을 구하시오. (단, $x<y$)[4점-1010-대성]

(가) x와 y는 모두 세 자리 자연수이다.
(나) 두 상용로그 $\log\sqrt{x}$와 $\log\sqrt{y}$의 가수의 합은 $\frac{1}{2}$이다.

27. $1\le x\le 100$인 x에 대하여 $\log 10x^2$의 가수를 $f(x)$라 할 때, $f(a)=f(2)$를 만족하는 실수 a의 개수는? (단, $a\ne 2$) [4점-1003-비상]

① 1　② 3　③ 5
④ 7　⑤ 9

28. 양수 x에 대하여 $\log x$의 지표와 가수를 각각 $f(x)$, $g(x)$라 할 때, 등식

$\log f(x)=g(x)$

를 만족시키는 모든 실수 x의 값의 합은?[4점-1007-메가]

① 123456789　② 987654321　③ 999999999
④ 1234567890　⑤ 9876543210

29. 정의역이 $\{x\mid 1\le x<n^{2011}\}$인 함수

$f_n(x)=\log_n x-[\log_n x]$ $(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$

에 대하여 $n=2^{2011}$일 때, $f_n(x)=f_{n^2}(x)$를 만족시키는 정수 x의 개수는? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.) [4점-1008-대성]

① 1000　② 1005　③ 1006
④ 2010　⑤ 2011

30. 양수 x 에 대하여 상용로그 $\log x$ 의 가수를 $f(x)$ 라 하자. 두 양수 a, b 에 대하여 옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?

[4점-1006-대성]

<보 기>

ㄱ. $a \neq b$ 이면 $f(a) \neq f(b)$ 이다.
ㄴ. $f(a)=f(b)$ 이면 $f(2a)=f(2b)$ 이다.
ㄷ. $f(a^2)=f(b^2)$ 이면 $f(a)=f(b)$ 이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

31. $\log x$ 의 지표와 가수를 각각 $f(x)$, $g(x)$ 라 하자. 실수 M 이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $10 \leq M < 100$
(나) $f(M^2) = f(M)+1$
(다) $g(M^2) = 1-g(M)$

$36\log M$의 값을 구하시오.[4점-1011-대전교]

32. 자연수 A에 대하여 $\log A$의 지표를 n, 가수를 α라 할 때, $n \leq 2\alpha$가 성립하도록 하는 A의 개수를 구하시오.
(단, $3.1 < \sqrt{10} < 3.2$)[4점-2010-대수능]

33. 자연수 n에 대하여 상용로그 $\log n$의 지표와 가수를 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[4점-1005-대성]

<보 기>

ㄱ. 모든 자연수 n에 대하여 $g\left(\frac{1}{n}\right)=1-g(n)$이다.
ㄴ. $g(n^2)=g(n)$이면 $g(n^3)=0$이다.
ㄷ. $f(n^2)=f(n)$을 만족시키는 자연수 n의 개수는 3이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

34. 농도가 80%인 어떤 용액이 있다. 이 용액의 $\frac{1}{2}$을 덜어내고 덜어낸 용액과 같은 양의 증류수를 섞는 희석법을 10회 실행하였더니 원하는 농도로 희석되었다. 농도가 80%인 처음 용액과 같은 용액에 대하여 $\frac{1}{5}$을 덜어내고 같은 양의 증류수를 섞는 희석법을 사용할 때, 원하는 농도에 가장 가깝게 하기 위해서 실행해야 하는 횟수는? (단, $\log 2 = 0.3010$으로 계산한다.)[3점-1011-대성]

① 25 ② 28 ③ 31
④ 34 ⑤ 37

35. 사람의 눈은 빛의 밝기에 따라 동공의 크기를 변화시켜 눈으로 들어오는 빛의 양을 조절한다. 빛의 밝기가 A(mL)일 때, 동공의 지름의 길이를 d(mm)라 하면 관계식

$\log d = 0.855 - k(8 + \log A)^3$ (단, k는 상수)

이 성립한다고 한다.
빛의 밝기가 1(mL)일 때의 동공의 지름의 길이는 빛의 밝기가 10(mL)일 때의 동공의 지름의 길이의 1.221배이다. 상수 k의 값은? (단, $\log 1.221 = 0.868$로 계산한다.)[3점-1010-메가]

① 10^{-4} ② 2×10^{-4} ③ 3×10^{-4}
④ 4×10^{-4} ⑤ 5×10^{-4}

36. 연이율 20%로 매년 이자를 계산하는 정기 예금에 750만 원을 예금하였다. 12년 후의 원금과 이자의 합계를 구하면? (단, $\log 1.2 = 0.0792$, $\log 8.92 = 0.9504$)[3점-1003-종로]

① 약 5700만 원 ② 약 6250만 원 ③ 약 6690만 원
④ 약 7250만 원 ⑤ 약 7790만 원

37. 2009년 한 해 동안 A 자치단체의 온실가스 배출량은 25만 톤, B 자치단체의 온실가스 배출량은 15만 톤이었다. 2010년부터 온실가스를 줄이기 위해 A 자치단체와 B 자치단체는 매년 전년도의 온실가스 배출량의 각각 10%, 5% 씩 줄여나가기로 하였다. 한 해 동안 A 자치단체의 온실가스 배출량이 처음으로 B 자치단체의 온실가스 배출량의 $\frac{5}{4}$배 이하가 되는 해는? (단, $\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$, $\log 9.5 = 0.9777$로 계산한다.)[3점-1009-대성]

① 2015년 ② 2017년 ③ 2019년
④ 2021년 ⑤ 2023년

38. 어떤 차의 온도를 측정하기 시작하여 t_1, t_2분 후의 차의 온도를 각각 T_1℃, T_2℃라 하고 주변의 온도를 S℃라고 할 때, 다음 관계식이 성립함이 알려져 있다.

$$k(t_1-t_2)=-\log_3\left(\frac{T_2-S}{T_2-S}\right)\ (\text{단, } k\text{는 상수})$$

주변의 온도가 20℃로 일정한 상태에서 이 차의 온도가 80℃에서 40℃로 떨어질 때까지 걸린 시간이 5분이었을 때, 이 차의 온도가 40℃에서 25℃까지 떨어지는 데 걸리는 시간은? (단, 차의 처음 온도는 80℃보다 높고, $\log2=0.30$, $\log3=0.48$로 계산한다.)

[3점-1010-비상]

① 6분　② 6.25분　③ 6.5분
④ 7분　⑤ 7.25분

39. 달걀의 품질 지수 Q는 달걀의 무게 W(g)와 달걀을 깨뜨렸을 때의 흰자의 높이 H(mm)를 이용하여 다음과 같이 나타낸다고 한다.

$$Q=100\log(H-aW^b+c)\ (\text{단, } a, b, c\text{는 상수})$$

무게가 50g이고 달걀을 깨뜨렸을 때 흰자의 높이가 5mm인 달걀의 품질지수가 60이라고 할 때, 무게가 50g이고 흰자의 높이가 6mm인 달걀의 품질지수는? (단, $\log2=0.3$으로 계산한다.)

[3점-1007-대성]

① 40　② 50　③ 70
④ 80　⑤ 90

40. 지구의 질량을 Mkg, 지구의 중심에서 위성가지의 거리를 rm 라 하면 원 궤도를 도는 위성의 주기 T(초)는

$$T^2=\frac{39.5\,r^3}{GM}\ (G\text{는상수})$$

가 성립한다고 한다.
지구의 질량 M 과 반지름의 길이 R 가 각각

$$M=6\times10^{24}\text{ kg},\ R=6.37\times10^6\text{ m}$$

라 할 때, 지표면에서의 고도가 6.3×10^5m 인 원 궤도를 도는 위성의 주기는 97 분이다. 이 때, 상수 G의 값을 소수로 나타내면 소수점 아래 n 번째 자리에서 처음으로 0 아닌 수 n 이 나온다. $m+n$ 의 값을 구하시오. (단, $\log3.95=0.5966$, $\log6=0.7782$, $\log7=0.8451$로 계산한다)[4점-1003-비상]

41. 지반의 상대밀도를 구하기 위하여 지반에 시험기를 넣어 조사하는 방법이 있다. 지반의 유효수직응력을 S, 시험기가 지반에 들어가면서 받는 저항력을 R라 할 때, 지반의 상대밀도 D(%)는 다음과 같이 구할 수 있다고 한다.

$$D=-98+66\log\frac{R}{\sqrt{S}}$$

(단, S와 R의 단위는 metric ton/m^{2}이다.)

지반 A의 유효수직응력은 지반 B의 유효수직응력의 1.44배이고, 시험기가 지반 A에 들어가면서 받는 저항력은 시험기가 지반 B에 들어가면서 받는 저항력의 1.5배이다. 지반 B의 상대밀도가 65(%)일 때, 지반 A의 상대밀도(%)는? (단, $\log2=0.3$으로 계산한다.)

[3점-2010-대수능]

① 81.5　② 78.2　③ 74.9
④ 71.6　⑤ 68.3

42. $0<a<b$ 인 a, b에 대하여 $N(a, b)$를 $a<x<b$ 에서 $\log x$ 의 가수와 $\log x^3$ 의 가수가 같은 실수 x 의 개수라 하자. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, $\log 2=0.3010$ 으로 계산한다.)[4점-1010-교육청]

<보 기>

ㄱ. $N\left(\sqrt{10}\,, 1000\right)=4$

ㄴ. p 가 정수이면 $N\left(10^p, 10^{p+10}\right)=19$ 이다.

ㄷ. $N\left(2^{10}, 2^{50}\right)=25$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

43. 양수 x에 대하여 $\log x$의 가수를 $f(x)$라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[4점-1003-교육청]

<보 기>

ㄱ. $f(2010)=f(0.201)$

ㄴ. $f\left(\dfrac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$

ㄷ. $x>1,\ y>1,\ f(x)+f(y)=0$이면 $x,\ y$는 모두 정수이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

44. 자연수 N에 대하여 $\log N$의 지표를 $f(N)$이라 하자. $f(N^2)=3f(N)$을 만족시키는 자연수 N의 개수를 구하시오.
[4점-1004-메가]

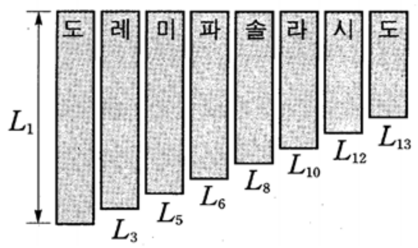
45. N^{20}이 77자리의 정수일 때, $\left(\dfrac{N}{10}\right)^{10}$ 의 정수 부분은 n자리이다. 자연수 n의 값을 구하시오.[4점-1004-종로]

46. 다음 조건을 만족시키는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오.[4점-1003-교육청]

(가) $1<n<10$

(나) $\log\dfrac{1}{n}$ 의 가수는 $\log n^2$의 가수보다 크다.

47. 그림과 같이 왼쪽부터 도, 레, 미, 파, 솔, 라, 시, 도의 음을 내는 실로폰 건반의 세로 길이를 차례로 L_1, L_3, L_5, L_6, L_8, L_{10}, L_{12}, L_{13}



이라 하면 다음과 같은 관계가 성립한다고 한다.

$$\log L_n = k(n-1) + \log L_1$$

(k는 상수, $n = 1, 3, 5, 6, 8, 10, 12, 13$)

그림에서 도의 음을 내는 실로폰 건반의 길이의 비가 $L_1 : L_{13} = 2 : 1$일 때, $\frac{L_5}{L_{13}} = 2^{\frac{q}{p}}$을 만족시키는 두 자연수 p, q의 합 $p+q$의 값은? (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

[4점–1005–메가]

① 5 ② 7 ③ 9
④ 11 ⑤ 14

48. 자연수 n에 대하여 상용로그 $\log n$의 지표와 가수를 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, 0 이상의 정수 k에 대하여 두 집합 A_k, B_k를 각각

$$A_k = \{n \mid f(n) = k\},\ B_k = \{g(n) \mid n \in A_k\}$$

라 하자. 0 이상의 모든 정수 k에 대하여 항상 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, $n(X)$는 집합 X의 원소의 개수이다.)[4점–1011–대성]

<보 기>

ㄱ. $n(A_k) = n(B_k)$
ㄴ. $n(A_{k+1}) = 10 \times n(A_k)$
ㄷ. $B_k \subset B_{k+1}$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

49. 소리의 세기가 $I\,(\mathrm{W/m^2})$인 음원으로부터 $r\,(\mathrm{m})$만큼 떨어진 지점에서 측정된 소리의 상대적 세기 P(데시벨)는

$$P = 10\left(12 + \log \frac{I}{r^2}\right)$$

이다. 어떤 음원으로부터 1m 만큼 떨어진 지점에서 측정된 소리의 상대적 세기가 80(데시벨)일 때, 같은 음원으로부터 10m 만큼 떨어진 지점에서 측정된 소리의 상대적 세기가 a(데시벨)이다. a의 값은?[3점–1010–교육청]

① 50 ② 55 ③ 60
④ 65 ⑤ 70

50. 어떤 물질의 화학 반응에서 이 물질의 온도 T와 화합물이 생성되는 반응 속도 v사이에는 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

$$\log \frac{v}{v_0} = K\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right) \text{ (단, } K,\ T_0,\ v_0\text{는 상수이다.)}$$

이 물질의 온도가 $2T_0$일 때, 화합물이 생성되는 반응 속도는 $\sqrt{10}\,v_0$이다. 이 물질의 온도가 $4T_0$일 때, 화합물이 생성되는 반응 속도는?

[3점–1003–교육청]

① $\sqrt[3]{100}\,v_0$ ② $\sqrt[4]{1000}\,v_0$ ③ $10v_0$
④ $10\sqrt[3]{10}\,v_0$ ⑤ $10\sqrt{10}\,v_0$

51. 어느 세라믹 재료의 열전도 계수(κ)는 적절한 실험 조건에서 일정하고, 다음과 같이 계산된다고 한다.

$$\kappa = C\frac{\log t_2 - \log t_1}{T_2 - T_1}$$

(단, C는 0보다 큰 상수, T_1(℃), T_2(℃)는 실험을 시작한 후 각각 t_1(초), t_2(초)일 때 세라믹 재료의 측정 온도이다.)
이 세라믹 재료의 열전도 계수를 측정하는 실험에서 실험을 시작한 후 10초일 때와 20초일 때의 측정 온도가 각각 200℃, 202℃이었다. 실험을 시작한 후 x초일 때 측정 온도가 206℃가 되었다. x의 값은?

[3점-1006-평가원]

① 70 ② 80 ③ 90
④ 100 ⑤ 110

52. 2009년도 어느 나라의 이산화탄소 배출량은 6억 톤이었다. 이 나라에서는 이산화탄소 배출로 인해 발생하는 지구 온난화 현상을 개선하기 위해 매년 전년도보다 5%씩 이산화탄소 배출량을 감소시키는 정책을 2010년부터 추진하고 있다. 이 정책이 계획대로 추진된다고 할 때, 이산화탄소 배출량이 처음으로 4억 톤 이하가 되는 시기는? (단, 측정 주기는 1년이고, $\log 2 = 0.301$,
$\log 3 = 0.477$, $\log 9.5 = 0.978$로 계산한다.)[3점-1011-대전교]

① 2014년～2016년 ② 2017년～2019년
③ 2020년～2022년 ④ 2023년～2025년
⑤ 2026년～2028년

53. 지진의 규모를 M, 지진의 진앙지로부터 100km 떨어진 곳에서 측정한 지진의 강도를 I라 할 때, $M = \log\frac{I}{k}$ (단, k는 상수)로 나타낼 수 있다고 한다. 인도네시아의 수마트라섬에서 2010년 발생한 지진의 규모는 7.7이고 2005년에 발생한 지진의 규모는 8.7이라 할 때, 2010년 발생한 지진의 강도는 2005년 발생한 지진의 강도의 몇 배인가?[4점-1007-종로]

① $\frac{1}{10\sqrt{10}}$ ② $\frac{1}{10}$ ③ 1
④ 10 ⑤ $10\sqrt{10}$

54. A 포도주를 담근 후 t년 동안 저장한 후의 가치를 V라 하면

$$V = kc^{\sqrt{t} - \frac{1}{16}t} \quad (k,\ c\text{는 양의 실수})$$

이 성립한다고 한다. A 포도주를 2010년 11월 1일에 담근 후 36년 동안 저장한 후의 가치를 V_1이라 하고 A 포도주를 2010년 11월 1일에 담근 후 16년 동안 저장한 후의 가치를 V_2라 하면 $V_1 = pV_2$이다. 이때, p의 값은? (단, 저장하는 데 드는 비용은 고려하지 않고, $\log c = 0.4$, $\log 2 = 0.3$으로 계산한다.) [4점-1010-비상]

① 2 ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{5}{2}$
④ 3 ⑤ $\frac{10}{3}$

55. 어느 지역에서 해수면에서의 기압을 P_0(hPa)이라 하고, 해수면으로부터의 높이가 h(km)인 지점에서의 기압을 P(hPa)라 하면 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

$$P = P_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{h}{5.5}}$$

이 지역에서 해수면으로부터의 높이가 a(km)인 한 지점을 A 라 할 때, A 지점에서의 기압은 1000(hPa)이다. A 지점으로부터 수직으로 10(km) 위에 있는 B 지점에서의 기압을 x(hPa)라 할 때, x의 정수 부분을 구하시오. (단, $\log 2 = \frac{3}{10}$, $\log 3.5 = \frac{6}{11}$으로 계산한다.)[4점-1006-대성]

56. 빛이 어떤 물질을 통과할 때 투과되기 전의 빛의 양에 대한 투과된 후의 빛의 양의 비율을 투과율이라고 한다. 투과율 6%인 필름 한 장과 투과율 20%인 필름 n장을 포개어 투과율을 10^{-6}%보다 작게 하려고 할 때, 자연수 n의 최솟값을 구하시오. (단, $\log 2 = 0.30$, $\log 3 = 0.48$으로 계산한다.)[4점-1011-종로]

57. 어느 용기에 담긴 박테리아를 물 속에 담가 두면 1시간마다 그 수가 20%씩 증가하고, 공기 중에 두면 1시간마다 그 수가 10%씩 감소한다고 한다. 이 용기에 담긴 박테리아의 수를 조사하고, 10시간이 지난 후 이 용기에 담긴 박테리아의 수가 10시간 전의 수의 $\frac{3}{4}$미만이 되기 위해서는 10시간 중에서 최소한 n시간은 박테리아를 공기 중에 두어야 한다. 이때, 자연수 n의 값은? (단, $\log 2 = 0.30$, $\log 3 = 0.48$로 계산한다.)[4점-1010-중앙]

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

58. 어느 지역의 인접한 두 도시 A,B 의 올해 연초의 인구는 같다고 한다. 두 도시 중 한 도시의 인구가 다른 도시의 인구의 2배가 되는 해의 이듬해에 인구가 적은 도시는 인구가 많은 도시에 흡수 통합된다고 한다.A 도시의 인구는 현재 매년 5%씩 늘어나고,B 도시의 인구는 매년 5%씩 줄어든다고 할 때,B 도시가A 도시에 흡수 통합되는 때는 올해부터 몇 년째 되는 해인가? (단, 위의 상용로그표를 사용하시오.)

x	$\log x$
1.9	0.2788
2.0	0.3010
2.1	0.3222

[4점-1006-종로]

① 5년 ② 7년 ③ 9년
④ 11년 ⑤ 13년

59. 어떤 사람이 매 끼의 식사로 섭취하는 열량은 1440Kcal라고 한다. 이 사람이 다이어트를 시작하여 매 끼의 식사에서 섭취하는 열량을 직전의 식사에서 섭취한 열량의 $\frac{1}{10}$씩 줄여가다가 열량이 600Kcal 이하가 되면 그 열량을 계속 유지하기로 했다. 이때, 이 사람이 한 끼의 식사에서 섭취하는 열량이 처음으로 600Kcal 이하가 되는 것은 다이어트를 시작한 지 몇 끼 째의 식사인가? (단, $\log 2 = 0.301$, $\log 3 = 0.477$로 계산한다.)[4점-1007-메가]

① 5　② 7　③ 9
④ 11　⑤ 13

60. D시에서는 관광산업을 활성화시키기 위하여 시의 예산에서 관광시설 투자비가 차지하는 비율을 증가시키기로 하였다. 작년에 이 시의 1년 예산에서 관광시설 투자비가 차지하는 비율은 4%이었다. 시의 예산을 매년 전년도의 12%씩 증가시키면서 관광시설 투자비를 매년 전년도의 20%씩 증가시킨다고 할 때, 처음으로 시의 예산에서 관광시설 투자비가 차지하는 비율이 6% 이상이 되는 것은 올해부터 몇 년 후인가? (단, $\log 1.12 = 0.0492$, $\log 1.2 = 0.0792$, $\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$로 계산한다.)[3점-1008-대성]

① 3　② 5　③ 7
④ 9　⑤ 10

61. 2010 년 현재 A 도시의 인구는 5 만 명이다. 2011 년에서 2014 년까지 A 도시의 인구는 매년 전년도보다 5% 씩 늘어나고, 그 후부터는 매년 전년도보다 8% 씩 늘어날 것으로 예상하고 있다. A 도시의 인구가 처음으로 10 만 명 이상이 될 것으로 예측되는 시기는? (단, $\log 1.05 = 0.0212$, $\log 1.08 = 0.0334$, $\log 2 = 0.3010$)[4점-1005-대성]

① 2018 년~2019 년　② 2020 년~2021 년
③ 2022 년~2023 년　④ 2024 년~2025 년
⑤ 2026 년~2027 년

62. 어느 상점에서는 A상품을 홀수 달에는 직전 달의 가격에서 10%인상된 가격으로 판매하고, 짝수 달에는 직전 달의 가격에서 10%인하된 가격으로 판매한다. 예를 들어 어느 해 10월의 이 상품의 가격이 1000원일 때, 11월의 가격은 1100원, 12월의 가격은 990원, 이듬해 1월의 가격은 1089원이다.2009년 12월의 이 상품의 가격이 a원일 때, 홀수 달의 가격이 처음으로 a원 이하가 되는 것은 언제인가? (단, $\log 1.1 = 0.0414$, $\log 3 = 0.4771$)[3점-1005-비상]

① 2010년 9월　② 2010년 11월　③ 2011년 7월
④ 2011년 9월　⑤ 2011년 11월

63. 어느 보험회사에서는 교통사고의 피해자에 대한 보상액을 다음 식을 이용하여 산출한다고 한다. 즉, 명의액을 A원, 연수를 n, 연이율을 r라 할 때, 실제로 받는 금액 X원은

$$X=\frac{A}{(1+r)^n}$$

이다. 10년 동안 연이율 5%로 계산했을 때 실제로 받는 금액이 1억 원이라면 같은 명의액에 대하여 10년 동안 연이율 6%로 계산했을 때 실제로 받는 금액을 다음 표를 이용하여 구한 것은? [4점-1010-대성]

x	1.05	1.06	8.90	9.00	9.10	9.20	9.30
$\log x$	0.0212	0.0253	0.9494	0.9542	0.9590	0.9638	0.9685

① 8900만 원 ② 9000만 원 ③ 9100만 원
④ 9200만 원 ⑤ 9300만 원

64. 달걀의 신선도를 결정하는 중요한 요소 중 하나가 HU(호우 유니트)값이다. 농후단백의 높이(뭉쳐있는 흰자의 높이)가 h(mm)이고 무게가 w(g)일 때, HU는 다음과 같이 계산한다.

$$\text{HU}=100\log(h+7.57-1.7w^{0.37})$$

HU$=90$이고 무게가 50g일 때 농후단백의 높이 h의 값은?
(단, $1.7\times 50^{0.37}=7.24$, $\log 2=0.30$으로 계산한다.)
[3점-1007-교육청]

① 6.24 ② 6.50 ③ 6.87
④ 7.13 ⑤ 7.67

65. $\log x=-\frac{4}{5}$일 때, x^2은 소수점 아래 a번째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자 b가 나타난다. $a+b$의 값은?
(단, log2는 0.30, log3은 0.48로 계산한다.)[4점-1009-평가원]

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

66. 기온이 5℃인 날에 교실의 창문을 연지 t분 후 교실 안에 남아 있는 미세 먼지의 양을 C_t, 창문을 열기 전 교실 안에 있는 미세 먼지의 양을 C_0이라 하면 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

$$C_t=C_0\left(\frac{1}{2}\right)^{kt} \quad (k\text{는 상수})$$

기온이 5℃인 어느 겨울날 교실을 환기하기 위하여 창문을 열었더니 2분 만에 교실 안에 남아 있는 미세 먼지의 양이 절반으로 줄었다면 이 교실 안의 미세 먼지의 양이 창문을 열기 전 미세 먼지의 양의 20%가 될 때까지 걸리는 시간은 창문을 연 후 약 몇 분이 지났을 때인가? (단, $\log 2=0.3$으로 계산한다.)[3점-1004-대성]

① 약 2.7분 ② 약 3.5분 ③ 약 3.8분
④ 약 4.2분 ⑤ 약 4.7분

67. 양의 실수 x에 대하여 상용로그 $\log x$의 지표를 $f(x)$, 가수를 $g(x)$라 하자. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 모두 고른 것은? (단, a, b는 양의 실수)[4점-1010-대성]

<보 기>

ㄱ. $g(2011)=g(201.1)+1$
ㄴ. $f(a)=g(a)$이기 위한 필요충분조건은 $a=1$이다.
ㄷ. $g(a)+g(b)=1$이면 $\log a+\log b$는 정수이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

68. 동영상 강의를 무료로 제공하는 어느 인터넷 사이트에서 강의파일을 다운로드 받을 때, 동시에 다운로드를 받는 접속자의 수가 1명씩 늘어날 때마다 그 전 다운로드를 받는 속도보다 0.16%씩 느려진다고 한다. 이 사이트에서 강의파일을 n명이 동시에 다운로드를 받는 속도가 100명이 동시에 다운로드를 받는 속도의 $\frac{1}{2}$이라 할 때, n의 값을 구하시오. (단, $\log 2=0.3010$, $\log 9.984=0.9993$으로 계산한다.)[4점-1004-종로]

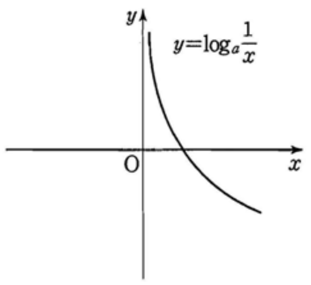
69. 어떤 동물이 태어나서 x일이 경과한 후의 몸의 길이를 $l(x)$라 할 때, 다음 관계식이 성립한다고 한다.

$$l(x)=\frac{300}{1+9\cdot(0.8)^x}$$

이 동물의 몸의 길이가 태어날 당시의 5배 이상이 되기 위해서는 최소 a일이 지나야 한다. 이때, 자연수 a의 값을 구하시오.(단, $\log 2=0.30$, $\log 3=0.48$로 계산한다.)[4점-1004-메가]

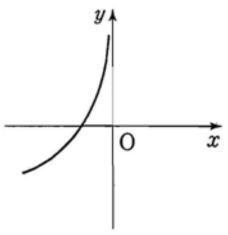
로그함수

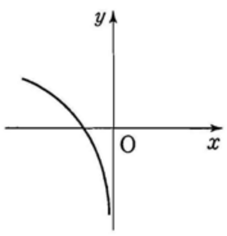
1. 그림은 로그함수 $y=\log_a \dfrac{1}{x}$ 의 그래프이다.

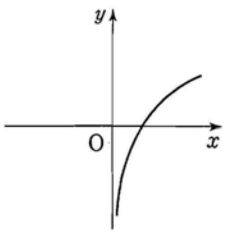


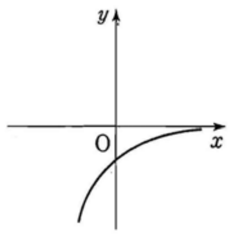
다음 중 $y=\log_{\frac{1}{a}}(-x)$ 의 그래프의 개형으로 옳은 것은?

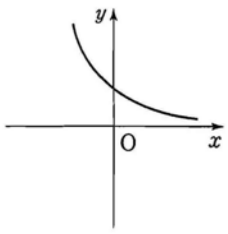
[3점-1005-비상]

①


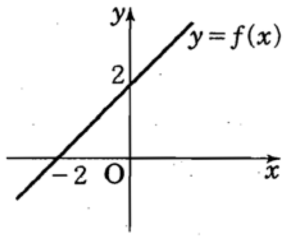
②


③


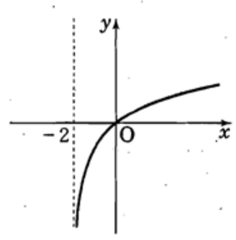
④


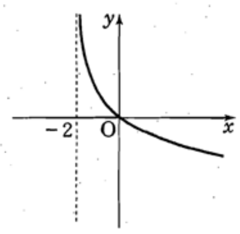
⑤


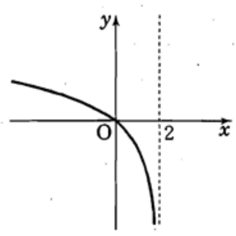
2. 오른쪽 그림은 일차함수 $y=f(x)$ 의 그래프이다. 다음 중 함수 $y=\log_2 \dfrac{2}{f(x)}$ 의 그래프의 개형으로 알맞은 것은? (단, 점선은 점근선이다.)

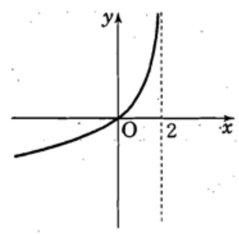


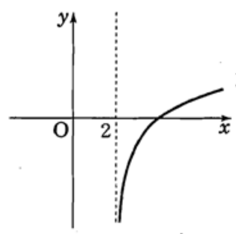
[3점-1005-대성]

①


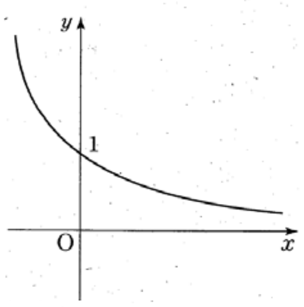
②


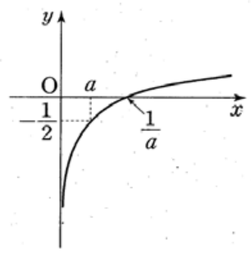
③


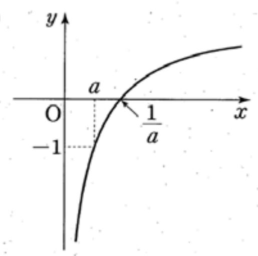
④


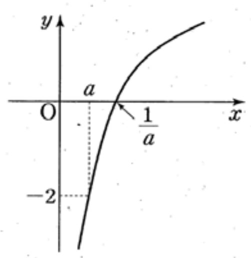
⑤


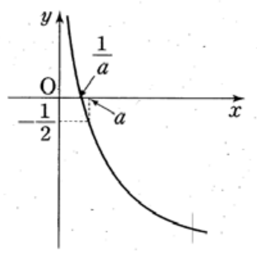
3. 함수 $y=a^{\frac{x}{a}}$ 의 그래프가 그림과 같을 때, 다음 중 함수 $y=\log_{\frac{1}{a}}ax$의 그래프의 개형은? (단, $a>0$)[3점-1011-중앙]

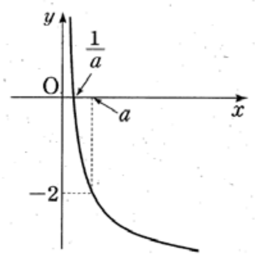


①


②


③


④


⑤


4. 로그함수 $y=\log_3(x+9)+1$ 의 그래프와 x 축, y 축과의 교점을 각각 A, B 라 할 때, 직선 AB 의 기울기는?[3점-1010-종로]

① $\frac{5}{26}$ ② $\frac{7}{26}$ ③ $\frac{9}{26}$
④ $\frac{11}{26}$ ⑤ $\frac{15}{26}$

5. 곡선 $y=3\log_3 x$ 를 평행이동하여 겹쳐질 수 있는 곡선만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?[3점-1006-대성]

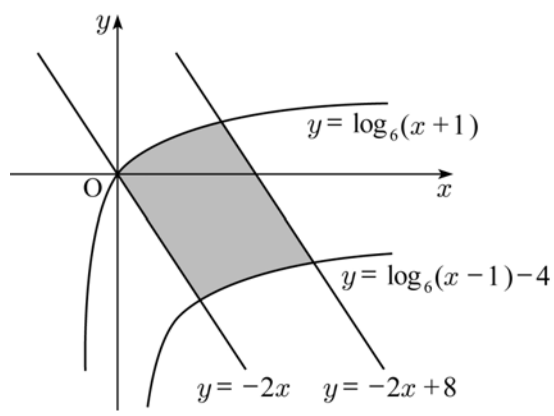
<보 기>

ㄱ. $y=\log_3 3x$ ㄴ. $y=3\log_3\frac{x}{3}+1$

ㄷ. $y=\log_3(3x+6)^3$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

6. 그림과 같이 두 곡선 $y=\log_6(x+1)$, $y=\log_6(x-1)-4$와 두 직선 $y=-2x$, $y=-2x+8$로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오. [3점-1003-교육청]



7. 1보다 큰 상수 a에 대하여 함수 $y=\log_{0.2}(x^2-2x+a)$의 최댓값이 -1일 때, 함수 $y=a^{x^2}\times a^{2x}$의 최솟값은?[3점-1009-중앙]

① $\frac{1}{36}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ 1
④ 6 ⑤ 36

8. 함수 $f(x)=1-\log_3 x$ 의 역함수 $g(x)$에 대하여 함수 $h(x)=9g(x)$ 라고 할 때, 합성함수 $f\circ h$에 대하여 $(f\circ h)(27)$의 값을 구하시오.[3점-1006-종로]

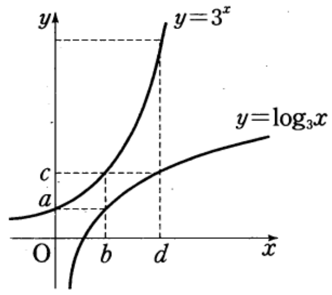
9. 함수 $f(x)=1-\log_3(x+2)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[4점-1009-대성]

<보 기>

ㄱ. 곡선 $y=g(x)$의 점근선의 방정식은 $y=-2$이다.
ㄴ. 함수 $y=g(x)$의 그래프는 제2, 3, 4사분면을 지난다.
ㄷ. 임의의 실수 a에 대하여 $g(a)+g(-a)\geq 2$이다.

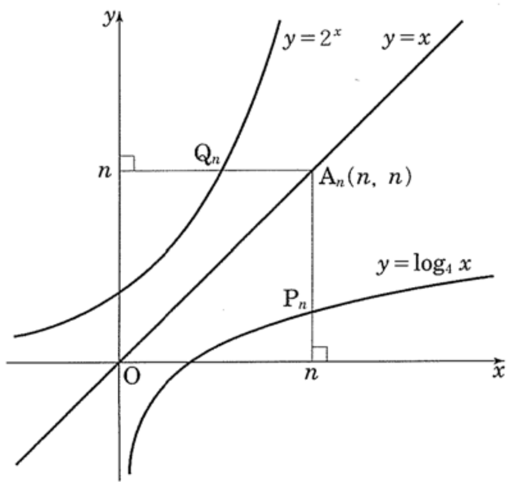
① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

10. 그림과 같이 두 함수 $y=3^x$, $y=\log_3 x$의 그래프를 이용하여 $\log_9(abcd)$의 값을 구하면? (단, a, b, c, d는 상수이고, 점선은 x축 또는 y축에 평행하다.)
[3점-1011-종로]



① $\frac{15}{2}$ ② $\frac{19}{2}$
③ $\frac{23}{2}$ ④ $\frac{27}{2}$ ⑤ $\frac{31}{2}$

11. 다음 그림과 같이 자연수 n에 대하여 직선 $y=x$ 위를 움직이는 점 $\mathrm{A}_n(n, n)$에서 x 축에 내린 수선이 곡선 $y=\log_4 x$와 만나는 점을 P_n이라 하고, 점 A_n에서 y 축에 내린 수선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 Q_n이라 하자. 두 선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{P}_n$, $\mathrm{A}_n\mathrm{Q}_n$의 길이의 차를 $f(n)$이라 할 때, $\sum_{k=1}^{15} f(2^k)$의 값을 구하시오.[3점-1009-대성]



12. 두 양수 a, b 에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[3점-1005-중앙]

<보 기>

ㄱ. $0 < a < 1$ 이면 $\log_2 a < \log_5 a$ 이다.

ㄴ. $a < b$ 이면 $(\log_5 2)^a < (\log_5 2)^b$ 이다.

ㄷ. $\log_2 a = \log_5 b$ 이면 $a < b$ 이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ　④ ㄱ, ㄴ　⑤ ㄱ, ㄷ

13. $0 < a < 1$, $b > 1$인 두 실수 a, b에 대하여 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 항상 만나는 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[3점-1009-중앙]

<보 기>

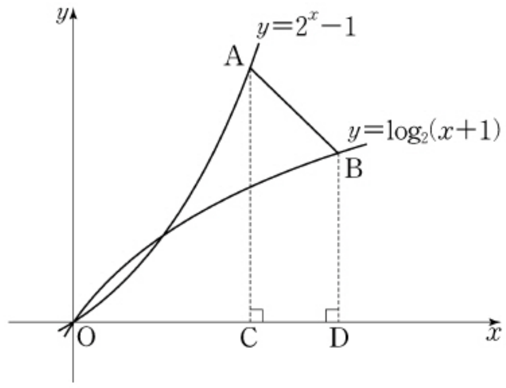
ㄱ. $f(x)=a^x$, $g(x)=\log_b x$

ㄴ. $f(x)=\dfrac{1}{a^x}$, $g(x)=\log_b \dfrac{1}{x}$

ㄷ. $f(x)=\log_b ax$, $g(x)=\sqrt{-b(x-a)}$

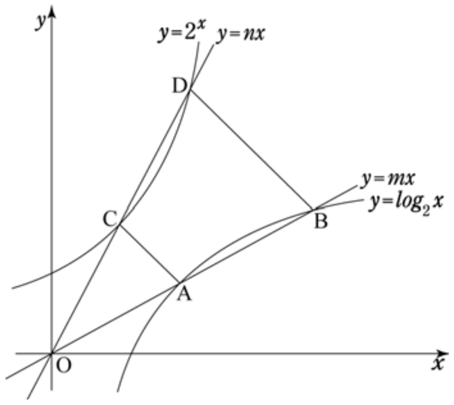
① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

14. 곡선 $y=2^x-1$ 위의 점 A$(2, 3)$을 지나고 기울기가 -1인 직선이 곡선 $y=\log_2(x+1)$과 만나는 점을 B 라 하자. 두 점 A, B 에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 C, D 라 할 때, 사각형 ACDB 의 넓이는?[3점-1006-평가원]



① $\dfrac{5}{2}$　② $\dfrac{11}{4}$　③ 3　④ $\dfrac{13}{4}$　⑤ $\dfrac{7}{2}$

15. 그림과 같이 함수 $y=\log_2 x$ 의 그래프와 직선 $y=mx$ 의 두 교점을 A, B 라 하고, 함수 $y=2^x$ 의 그래프와 직선 $y=nx$ 의 두 교점을 C, D 라 하자. 사각형 ABDC 는 등변사다리꼴이고 삼각형 OBD 의 넓이는 삼각형 OAC 의 넓이의 4 배일 때, $m+n$ 의 값은? (단, O 는 원점)[3점-1007-교육청]



① 2　② $\dfrac{5}{2}$　③ 3　④ $\dfrac{10}{3}$　⑤ 4

16. 함수 $f(x)=\log_2(x+1)$의 역함수를 $y=g(x)$라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[4점-1011-중앙]

<보 기>

ㄱ. $g(2)=3$
ㄴ. $1<a<b$이면 $f(b)-f(a)>b-a$이다.
ㄷ. $0<a<b<1$일 때, $g(b)-g(a)=b-a$를 만족하는 a, b가 존재한다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

17. 1보다 큰 양수 a에 대하여 두 곡선 $y=a^{-x-2}$과 $y=\log_a(x-2)$가 직선 $y=1$과 만나는 두 점을 각각 A, B라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=8$일 때, a의 값은?[3점-1006-평가원]

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

18. 세 함수 $f(x)=2^x$, $g(x)=x^2$, $h(x)=\log_2 x$에 대하여 $(f\circ g)(2)+(g\circ h)(2)$의 값은?[3점-1006-평가원]

① 17 ② 19 ③ 21
④ 23 ⑤ 25

19. 집합 $S=\{x\,|\,p<x<q,\ p,\ q$는 정수$\}$에서 정의된 함수 $f(x)=\log_{\frac{1}{3}}(24+2x-x^2)$이 다음 조건을 만족시킨다.

> 집합 S에 속하는 임의의 실수 x_1, x_2에 대하여 $x_1<x_2$이면 $f(x_1)<f(x_2)$이다.

이때, $q-p$의 최댓값은?[3점-1005-메가]

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

20. 함수 $y=-\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동시켰더니 함수 $y=\log_2\dfrac{4}{x+1}$의 그래프가 되었다. 이때, $m+n$의 값은?[3점-1010-중앙]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

21. 함수 $y=\log_3 5x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하면 $y=\log_3(15x-180)$의 그래프와 일치한다. 이 때 $m+n$의 값은?[3점-1005-종로]

① 10 ② 11 ③ 12
④ 13 ⑤ 14

22. 두 로그함수

$$y=\log_2(3x+a),\ \ y=\log_2\frac{1}{bx+5}$$

의 그래프가 x축에 평행한 직선에 대하여 대칭이 되도록 양수 a, b의 값을 정할 때, ab의 값은?[3점-1010-메가]

① 9 ② 12 ③ 15
④ 18 ⑤ 21

23. 두 수의 대소 관계를 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[4점-1009-종로]

<보 기>

ㄱ. $\log_9 4<\frac{1}{2}$

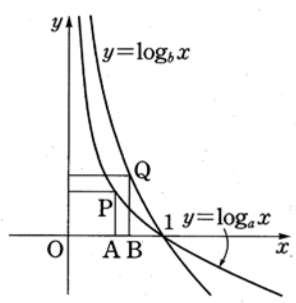
ㄴ. $\log_2 3<\log_3 7$

ㄷ $\log\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}\right)>\frac{1}{4}\log 6$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

24. 두 함수 $y=|\log_2 x-1|$, $y=k+\log_4 x$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나고 두 교점의 x좌표의 곱이 256일 때, 상수 k의 값을 구하시오.[4점-1011-대성]

25. 그림과 같이 두 곡선



$$y=\log_a x,\ \ y=\log_b x$$

$(0<a<b<1)$와 x축 위의 두 점 A, B가 있다. 선분 OA를 한 변으로 하는 정사각형의 한 꼭짓점 P는 곡선 $y=\log_a x$ 위의 점이고, 선분 OB를 한 변으로 하는 정사각형의 한 꼭짓점 Q는 곡선 $y=\log_b x$ 위의 점이다. 두 정사각형의 넓이의 비가 $4:9$이고 선분 PQ의 길이가 $\frac{\sqrt{2}}{9}$일 때, $\frac{1}{ab}$의 값을 구하시오.(단, O는 원점이고, 두 점 P, Q는 제1사분면에 있다.)[4점-1005-메가]

26. a가 양수일 때, 함수 $f(x)=\log_3 \dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$ 에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[4점-1005-메가]

<보 기>

ㄱ. 함수 $f(x)$의 최솟값은 0이다.
ㄴ. 임의의 실수 x_1, x_2에 대하여 $x_1 < x_2$이면 $f(x_1) < f(x_2)$ 이다.
ㄷ. 음이 아닌 임의의 실수 p, q에 대하여 $f(p+q) \geq f(p)+f(q)$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

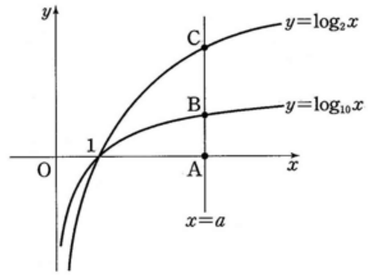
27. $0<a<1$, $0<b<1$일 때 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[4점-1006-종로]

<보 기>

ㄱ. $\sqrt{a}=\sqrt[3]{b}$ 이면 $a>b$이다.
ㄴ. $2^a=3^b$ 이면 $a<b$ 이다.
ㄷ. $\log_a 2=\log_b 3$이면 $a>b$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

28. 그림과 같이 직선 $x=a$와 x축 및 두 곡선 $y=\log_{10}x$, $y=\log_2 x$ 의 교점을 차례로 A, B, C라 할 때,



$$\frac{1}{\overline{AB}}+\frac{1}{\overline{AC}}=1$$

이 성립한다고 한다. $\log_{10}2=b$라 할 때, 다음 중 선분 BC의 길이를 b의 식으로 바르게 나타낸 것은?[4점-1008-종로]

① $\dfrac{1}{b}-b$ ② $\dfrac{1}{b}+b$ ③ $\dfrac{1}{b}+1$
④ $\dfrac{1}{b}-1$ ⑤ $\dfrac{1}{2b}-1$

29. 양수 x에 대하여 함수 $f(x)=\log x-[\log x]$라 할 때,

$$f\left(\frac{1}{5}\right)<f(n)<f\left(\frac{1}{2}\right)$$

을 만족시키는 두 자리의 자연수 n의 개수는? (단, $[x]$는 실수 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)[3점-1010-대성]

① 29 ② 30 ③ 31
④ 32 ⑤ 33

30. 양의 실수 x에 대하여 $f(x)=\log x-[\log x]$로 정의할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이고, a, b, c는 양의 실수이다.)[4점-1010-중앙]

<보 기>

ㄱ. $f(2)<f(8)$

ㄴ. $f(a)-f(b)=0$이면 $a=b\times 10^n$을 만족하는 정수 n이 존재한다.

ㄷ. $f(a)+f(b)=1$, $f(b)+f(c)=1$이면 $f(a)+f(c)=1$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

31. 함수

$$f(x)=\log x-[\log x]$$

에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=k(x-1)$이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 음의 실수 k의 최댓값은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)[4점-1007-메가]

① $-\frac{9}{10}$ ② $-\frac{10}{9}$ ③ $-\frac{99}{100}$
④ $-\frac{100}{99}$ ⑤ $-\frac{999}{1000}$

32. 정의역이 $\{x \mid 1 \le x < n^{2011}\}$인 함수

$$f_n(x)=\log_n x-[\log_n x]\ (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

에 대하여 $n=2^{2011}$일 때, $f_n(x)=f_{n^2}(x)$를 만족시키는 정수 x의 개수는? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

[4점-1008-대성]

① 1000 ② 1005 ③ 1006
④ 2010 ⑤ 2011

33. 함수 $y=3^x$의 그래프와 직선 $y=-x+6$이 만나는 점을 $\mathrm{A}(a_1, a_2)$라 하고, 함수 $y=\log_3 x$의 그래프와 직선 $y=-x+6$이 만나는 점을 $\mathrm{B}(b_1, b_2)$라 하자. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[4점-1010-대성]

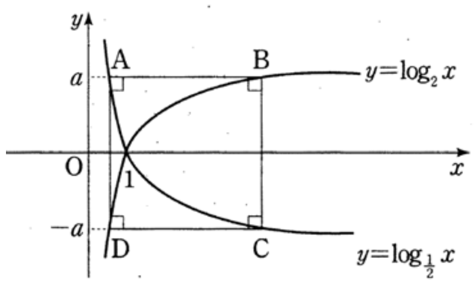
<보 기>

ㄱ. $a_1<a_2$　　ㄴ. $a_2<b_1$

ㄷ. 두 점 (a_1, b_2), (b_1, a_2)를 지나는 직선의 기울기는 1이다.

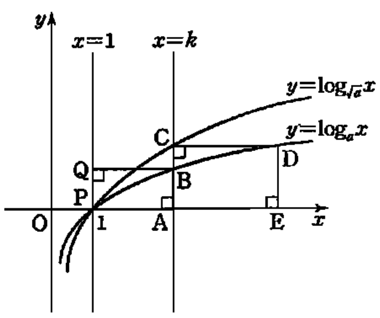
① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

34. 그림은 두 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$, $y=\log_2 x$의 그래프이다. 양수 a에 대하여 직선 $y=a$와 두 곡선 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$, $y=\log_2 x$가 만나는 점을 각각 A, B 라 하고, 직선 $y=-a$와 두 곡선 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$, $y=\log_2 x$가 만나는 점을 각각 C, D 라 하자. $2^a+2^{-a}=\frac{17}{4}$ 일 때, 직사각형 ADCB 의 넓이는?[3점-1010-비상]



① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

35. 그림과 같이 $a>1$일 때, 두 곡선 $y=\log_a x$, $y=\log_{\sqrt{a}}x$ 와 점 P(1, 0)이 있다. 직선 $x=k$가 x 축 및 두 곡선 $y=\log_a x$, $y=\log_{\sqrt{a}}x$ 와 만나는 점을 각각 A, B, C라 하고, 점 C를 지나 x 축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_a x$와 만나는 점을 D, D에서 x 축에 내린 수선의 발을 E라 하자. 점 B를 지나 x 축에 평행한 직선이 직선 $x=1$ 과 만나는 점을 Q라 하면 사각형 PABQ와 사각형 AEDC의 넓이는 각각 8, 80이다. 이때, $10k$ 의 값을 구하시오.[4점-1006-종로]



36. 두 함수 $f(n)$, $g(n)$이

$$f(n)=\log_2(n+1),\ g(n)=\log_3(n+1)$$

일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, m, n은 자연수이다.)[4점-1004-대성]

<보 기>

ㄱ. $f(1)=g(2)$
ㄴ. $f(n)=g(m)$이면 $n<m$이다.
ㄷ. $\frac{\log_3(n+1)}{2^{f(n)}-1}>\frac{\log_3(n+2)}{3^{g(n)}}$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

37. 두 함수 $f(x)=a^x$ 과 $g(x)=\log_b x$ 의 교점의 개수를 k라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?
(단, $a\neq1$, $a>0$, $b\neq1$, $b>0$)[4점-1011-대전교]

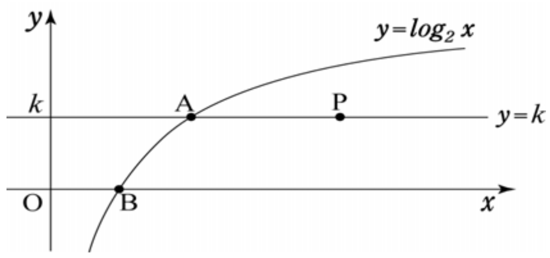
<보 기>

ㄱ. $a=\frac{1}{2}$, $b=2$이면, $k=1$이다.
ㄴ. $a=b=\sqrt{2}$ 이면, $k=2$이다.
ㄷ. $ab>2$이면, $k=2$ 이다.

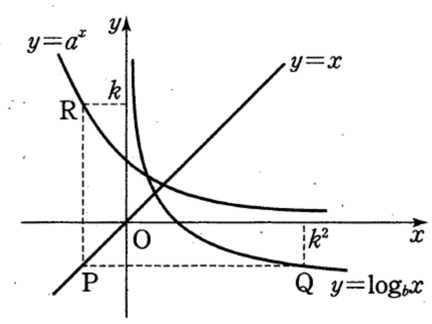
① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

38. 그림과 같이 함수 $y=\log_2 x$ 의 그래프와 직선 $y=k$ (k는 자연수), x축과의 교점을 각각 A, B 라 하고, 직선 $y=k$ 위의 한 점 P에 대하여 직선 OP가 ∠AOB 를 이등분할 때, 선분 AP 의 길이를 $f(k)$ 라 하자. $\sum_{k=1}^{4}\{f(k)\}^2$ 의 값을 구하시오. (단, O 는 원점)

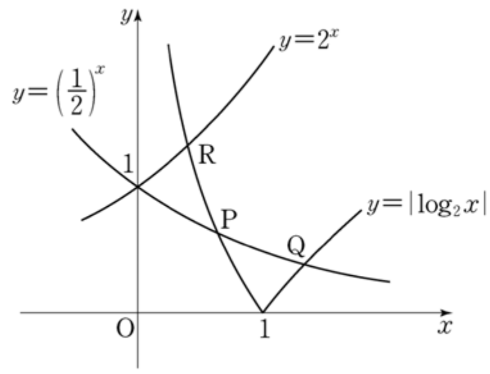
[4점-1007-교육청]



39. 1보다 작은 두 양수 a, b에 대하여 두 곡선 $y=a^x$, $y=\log_b x$가 있다. 그림과 같이 직선 $y=x$ 위의 점 P를 지나고, x축, y축에 평행한 두 직선이 두 곡선 $y=\log_b x$, $y=a^x$과 만나는 점을 각각 Q, R라 하면 점 Q의 x좌표는 k^2, 점 R의 y좌표는 k이다. $a-b$의 최댓값이 $\frac{n}{m}$ (단, m, n은 서로소인 자연수)일 때, $m+n$의 값을 구하시오. (단, 점 P는 제3사분면의 점이다.)[3점-1010-종로]



40. 좌표평면에서 두 곡선 $y=|\log_2 x|$와 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 이 만나는 두 점을 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{Q}(x_2, y_2)$ $(x_1<x_2)$라 하고, 두 곡선 $y=|\log_2 x|$와 $y=2^x$이 만나는 점을 $\mathrm{R}(x_3,\ y_3)$이라 하자. 옳은 것만을 <보기> 에서 있는 대로 고른 것은?[4점-2010-대수능]



<보 기>

ㄱ. $\frac{1}{2}<x_1<1$ ㄴ. $x_2y_2-x_3y_3=0$

ㄷ. $x_2(x_1-1)>y_1(y_2-1)$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

41. 1이 아닌 양수 a에 대하여 두 집합 A, B는 다음과 같다.

$A=\{(x,\ y)|\ y=a^x,\ x\text{는 실수}\}$

$B=\left\{(x,\ y)\,\middle|\,y=\log_a\frac{1}{x},\ x>0\text{인 실수}\right\}$

이때 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

[4점-1011-종로]

<보 기>

ㄱ. $n(A\cap B)=1$

ㄴ. $a>1$일 때, $(x,\ y)\in(A\cap B)$이면 $x<1<y$이다.

ㄷ. $0<a<1$일 때, $(x,\ y)\in(A\cap B)$이면 $y<x-1$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

42. 함수 $f(x)=\log_a x$와 세 실수 $a,\ b,\ c$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, $0<a<1<b<c$) [4점-1008-대성]

<보기>

ㄱ. $f\left(\frac{a+b}{2}\right)<\frac{f(a)+f(b)}{2}$ ㄴ. $\frac{f(b)}{f(c)}>\frac{c}{b}$

ㄷ. $\frac{f(a)}{f(c)}<\frac{a-1}{c-1}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

43. $y=\log_2(x+1)$의 그래프와 $|x|+|y|=1$의 그래프의 교점을 각각 (x_1, y_1), $(x_2, y_2)(x_1<x_2)$라 하자. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[4점-1005-종로]

<보 기>

ㄱ. $x_1>-\frac{1}{2}$, $x_2<\frac{1}{2}$

ㄴ. $x_2y_2>\frac{1}{4}$

ㄷ. $y_2-y_1>x_2-x_1$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

44. 함수 $y=\log x^2$의 그래프와 함수 $y=\log(x+n)$ (n은 자연수)의 그래프가 만나는 서로 다른 두 점을 각각 $\mathrm{A}_n(a_n,\ b_n)$, $\mathrm{B}_n(c_n,\ d_n)$이라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, $a_n<c_n$)[4점-1007-대성]

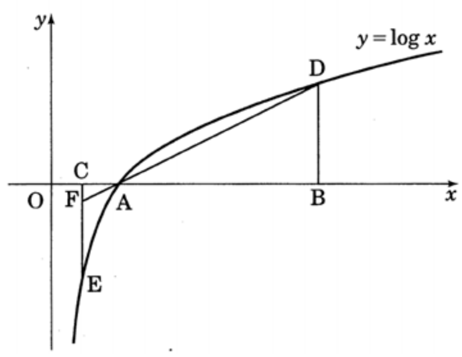
<보 기>

ㄱ. $a_3+c_3=1$ ㄴ. $b_n+d_n=2\log n$

ㄷ. $c_{n+1}<c_n+1$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

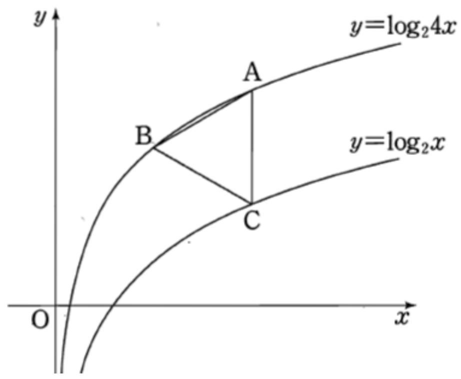
45. 그림과 같이 곡선 $y=\log x$가 x축과 만나는 점을 A라 하자. 점 B$(b,\ 0)$ $(b>1)$을 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log x$와 만나는 점을 D, 점 C$(c,\ 0)$ $(0<c<1)$을 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log x$와 만나는 점을 E라 하고, 직선 AD가 선분 CE와 만나는 점을 F라 하자. $\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{CE}}$일 때, 두 선분 CF, CE의 길이의 비 $\overline{\mathrm{CF}}:\overline{\mathrm{CE}}$와 항상 같은 것은?[4점-1010-대성]



① $1:b^2$ ② $1:\log 2b$ ③ $1:\log b$
④ $1:2b$ ⑤ $1:b$

46. 함수 $y=\log_2 4x$의 그래프 위의 두 점 A, B와 함수 $y=\log_2 x$의 그래프 위의 점 C에 대하여, 선분 AC가 y축에 평행하고 삼각형 ABC가 정삼각형일 때, 점 B의 좌표는 (p, q)이다. $p^2 \times 2^q$의 값은?

[4점-1009-평가원]



① $6\sqrt{3}$ ② $9\sqrt{3}$ ③ $12\sqrt{3}$
④ $15\sqrt{3}$ ⑤ $18\sqrt{3}$

47. $(\log_3 x)^2 - 12 = \log_3 x^4$을 만족하는 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha\beta$의 값을 구하시오.[3점-1011-대전교]

48. 방정식

$$\log_2(x-2)+\log_2(x+4)=4$$

의 해를 구하시오.[3점-1006-대성]

49. 방정식

$$(\log_2 x - \log_2 3)\log_2 x = \log_2 x^2 + 8$$

의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha\beta$의 값은?[3점-1007-메가]

① 10 ② 12 ③ 14
④ 16 ⑤ 18

50. 로그방정식 $\log_3(x-4)=\log_9(5x+4)$의 근을 α라 할 때, α의 값을 구하시오.[3점-2010-대수능]

51. 방정식 $2\log_{\frac{1}{3}}(x-2)-\log_{\frac{1}{3}}(x+4)=-1$ 의 해가 $x=a$일 때, a^2의 값을 구하시오.[3점-1008-비상]

52. 로그방정식 $\left(\log_2 \frac{x}{4}\right)^2 - 8\log_4 x + 11 = 0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta(\alpha < \beta)$라 할 때, $\log_2 \alpha\beta$의 값을 구하시오.[3점-1007-대성]

53. 방정식 $\log_2(x^3-1) = \log_2(x^2+x+1)+5$ 의 해를 구하시오.[3점-1005-비상]

54. x 에 대한 방정식 $\log x \cdot \log \frac{x^2}{7} = 32$ 의 두 근이 $\alpha,\ \beta$ 일 때, $\alpha\beta$ 의 값은?[3점-1004-대성]

① 2 ② $\sqrt{7}$ ③ 4
④ $4\sqrt{7}$ ⑤ 16

55. 방정식 $(\log x)^2 - 3\log x + 1 = 0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면 방정식 $(\log x)^2 - a\log x + b = 0$의 두 근은 $\alpha^2,\ \beta^2$이다. 이때 두 상수 $a,\ b$의 곱 ab의 값을 구하시오.[3점-1004-종로]

56. 두 실수 $x,\ y$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $1 < x < y$
(나) $5\log_x y + 3\log_y x = 16$

이때, $\frac{x^3+y^2}{x^6+y}$의 값은?[3점-1004-메가]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ 2 ⑤ 3

57. 두 양수 $a,\ b$에 대하여 x에 대한 방정식 $\left(\log_2 \frac{x}{a}\right)\left(\log_2 \frac{x}{b}\right) + 1 = 0$이 단 하나의 실근을 가질 때, $\frac{a}{b}$의 값은? (단, $a > b$) [4점-1010-비상]

① 4 ② $2\sqrt{2}$ ③ 2
④ $\sqrt{2}$ ⑤ $\sqrt[4]{2}$

58. 로그부등식 $\log_3(x-1) < \log_{\frac{1}{3}}(3-x)$를 만족하는 실수 x의 값의 범위는 $a < x < b$ 또는 $c < x < d$이다. 이때 $a+b+c+d$의 값은?[3점-1011-종로]

① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

59. 부등식 $a^{x-1} < a^{2x+1}$의 해가 $x < -2$일 때, 부등식 $\log_a(x-2) < \log_a(4-x)$의 해는? (단, 상수 a는 1이 아닌 양수이다.)[3점-1003-교육청]

① $2 < x < 3$　② $3 < x < 4$　③ $2 < x < 4$
④ $x < 3$　⑤ $x > 3$

60. 부등식 $\log_2 x + \log_2 y \geq 0$을 만족하는 두 양수 x, y에 대하여 $2x+y$의 최솟값은? [4점-1010-중앙]

① 2　② $2\sqrt{2}$　③ 4
④ $4\sqrt{2}$　⑤ 8

61. 부등식 $\log_{(x-2)}(2x^2-11x+14) < 2$를 만족시키는 자연수 x 의 개수는?[3점-1005중앙]

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

62. 연립부등식 $\begin{cases} \log_2 \dfrac{x}{2} \geq 0 \\ \left(\log_2 \dfrac{x}{4}\right)\left(1+3\log_2 \dfrac{x}{2}\right) < 0 \end{cases}$ 의 해가 $\alpha \leq x < \beta$일 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구하시오.[3점-1005-메가]

63. 연립부등식

$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{3}}(x^2+2) \geq \log_{\frac{1}{3}} 3(x+4) \\ (\log_2 x)^2 - 4\log_2 x + 3 \leq 0 \end{cases}$$

을 만족시키는 모든 정수 x값의 합을 구하시오.[3점-1009-대성]

64. 두 집합

$$A = \left\{ x \,\middle|\, (\log_3 x)^2 - \frac{2\log_3 x}{\log_5 3} + \log_3 x < 0 \right\}$$

$$B = \left\{ x \,\middle|\, \left(\frac{1}{3}\right)^{a\log_3 2} < \left(\frac{1}{2}\right)^{x(x-a+1)} \right\}$$

에 대하여 $A \cap B = A$가 성립하도록 하는 정수 a의 최솟값을 구하시오.[4점-1010-중앙]

65. 로그부등식 $0<\log_4\{\log_3(\log_2 x)\}\le\frac{1}{2}$ 을 만족하는 정수 x의 개수를 구하시오.[3점-1011-중앙]

66. 로그부등식 $(1+\log_3 x)(a-\log_3 x)>0$의 해가 $\frac{1}{3}<x<9$일 때, 상수 a의 값은?[3점-1009-평가원]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

67. 로그부등식 $\log_2(x^2+x-2)<\log_2(-2x+2)$의 해가 $\alpha<x<\beta$일 때, $\alpha\beta$의 값은?[3점-1006-평가원]

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

68. 부등식 $\log_{\frac{1}{2}}\{\log_2(x-3)^2\}>-2$를 만족하는 모든 정수 x의 값의 합을 구하시오.[4점-1008-중앙]

69. $x\ne1$, $y\ne1$ 인 4 이하의 양의 실수 x, y 에 대하여 부등식

$$(\log_2 x)^3(\log_2 y)+(\log_2 x)(\log_2 y)^3 > 2(\log_2 x)^2(\log_2 y)^2+(\log_2 x)(\log_2 y)$$

를 만족시키는 점 $(x,\ y)$가 좌표평면에 존재하는 영역의 넓이를 구하시오.[4점-1005-비상]

70. 부등식 $\log_a x<\log_a y<\log_b y<\log_b x$ 를 만족시키는 네 양수 a, b, x, y 에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, $a\ne1,\ b\ne1$)[4점-1010-비상]

<보 기>

ㄱ. $a>1$ 이면 $b<1$ 이다.
ㄴ. $a<1$ 이면 $y<1$ 이다.
ㄷ. $\log_x y>0$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

71. 부등식 $y \geq x^2$의 영역에 속하는 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$에 대하여 $\log_2(y+1)-\log_2|x|$의 최솟값은?[4점-1007-교육청]

① $\frac{3}{4}$　② 1　③ $\frac{5}{4}$

④ $\frac{3}{2}$　⑤ $\frac{7}{4}$

72. 서로소인 두 자연수 $m,\ n$에 대하여 $1<m<n$일 때, 부등식 $1+\frac{1}{\log_m x}-\frac{2}{\log_n x}<0$을 만족하는 정수 x의 개수는? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)[4점-1004-종로]

① $\left[\frac{2n}{m}\right]-1$　② $\left[\frac{2n}{m}\right]$　③ $\left[\frac{2n}{m}\right]+1$

④ $\left[\frac{n^2}{m}\right]-1$　⑤ $\left[\frac{n^2}{m}\right]$

73. $\frac{1}{3} \leq x \leq 3$에서 정의된 함수 $f(x)=9x^{-2+\log_3 x}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하시오.

[4점-1004-교육청]

등차수열과 등비수열

1. 등차수열 $\{a_n\}$에서 $a_5=17$, $a_{20}=77$일 때, a_9의 값은? [2점-1003-중앙]

① 30 ② 33 ③ 37
④ 40 ⑤ 43

2. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_2=6$, $a_5=18$일 때, a_{10}의 값은? [3점-1005-대성]

① 32 ② 34 ③ 36
④ 38 ⑤ 40

3. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_2+a_4+a_6=30$일 때, a_1+a_7의 값을 구하시오.[3점-1010-교육청]

4. 등차수열 $\{a_n\}$이 $a_3=2$, $a_6=17$을 만족시킬 때, a_8의 값을 구하시오.[3점-1011-대전교]

5. 5개의 실수 1, a, b, 5, c가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, $a+2b+c$의 값은?[2점-1005중앙]

① 10 ② 12 ③ 14
④ 16 ⑤ 18

6. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_2+a_{10}=-40,\ a_8-a_4=8$$

이 성립할 때, a_{15}의 값은? [3점-1010-비상]

① -8 ② -4 ③ -2
④ 0 ⑤ 2

7. $\log_p a$, $\log_p b$, $\log_p c$가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, a, b, c 사이의 관계로 옳은 것은?[3점-1003-종로]

① $2b=a+c$ ② $b^2=ac$ ③ $\frac{2}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$
④ $a+b=c$ ⑤ $a^2+b^2=c^2$

8. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$a_5+a_8+a_{11}=51$, $a_3+a_5+a_7=33$

이 성립할 때, a_{10} 의 값은?[3점-1005-비상]

① 17 ② 19 ③ 21
④ 23 ⑤ 25

9. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1+a_2+a_3=15$, $a_7+a_8+a_9=69$ 일 때, $a_{13}+a_{14}+a_{15}$의 값은?[3점-1007-종로]

① 99 ② 101 ③ 111
④ 118 ⑤ 123

10. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합이 $S_n=2n^2+n$ 일 때, a_{10}의 값은?[3점-1010-대성]

① 35 ② 37 ③ 39
④ 41 ⑤ 43

11. 등차수열의 $\{a_n\}$ 첫째항부터 제10항까지 합이30고, 제11항부터 제20항까지의 합이 60일 때, 이 수열의 첫째항부터 제30항까지의 합은?[3점-1003-비상]

① 120 ② 150 ③ 180
④ 210 ⑤ 240

12. 1과 2 사이에 n개의 수를 넣어 만든 등차수열

$1,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ 2$

의 합이 24일 때, n의 값은?[3점-1006-평가원]

① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

13. 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1+a_2=0$이 성립할 때, $a_k=3a_4$를 만족시키는 자연수 k의 값은?[3점-1005-메가]

① 3 ② 5 ③ 7
④ 9 ⑤ 11

14. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_3=5$, $a_6-a_4=4$일 때, a_{10}의 값을 구하시오.[3점-1009-평가원]

15. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1=5$, $a_5=17$ 이 성립할 때, a_2+a_3 의 값은?[3점-1008-종로]

① 19 ② 21 ③ 23
④ 25 ⑤ 27

16. 네 개의 실수 a, $\log_6 3$, $\log_6 12$, b가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, $a+b$의 값은?[3점-1009-중앙]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

17. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은 모두 공차가 1인 등차수열이다. 다음 조건을 만족시키는 자연수 m에 대하여 $a_{2m}-b_m$ 의 값은?
[3점-1004-메가]

(가) $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_m=2m$
(나) $b_1+b_2+b_3+\cdots+b_m=m$
(다) $b_{2m}-a_m=99$

① 300 ② 301 ③ 302
④ 303 ⑤ 304

18. 첫째항부터 n항까지의 합이 각각 $2n^2+pn$인 수열 $\{a_n\}$과 $3n^2-2n$인 수열 $\{b_n\}$이 있다. $a_{10}=b_{10}$일 때, 자연수 p의 값을 구하시오.[4점-1003-종로]

19. 첫째항과 공차가 같은 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $S_n = ka_n$을 만족하는 k가 두 자리 자연수가 되게 하는 n의 최댓값은? (단, $a_1 \neq 0$)[3점-1007-교육청]

① 191 ② 193 ③ 195
④ 197 ⑤ 199

20. 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $a_{10}=10$, $S_{10}=20$일 때, a_{19}의 값은?[3점-1011-중앙]

① 26 ② 27 ③ 28
④ 29 ⑤ 30

21. 첫째항과 공차가 모두 3인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. 등차수열 $\{b_n\}$이

$$a_nb_n = S_n\,(n=1,\,2,\,3,\,\cdots)$$

을 만족시킬 때, b_{19}의 값은?[3점-1010-메가]

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

22. 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$이 있다. 두 자연수 $m,\,k$가 등식 $a_m - a_3 = a_{16} - a_k$를 만족시킬 때, mk의 최댓값을 구하시오.

[3점-1003-비상]

23. 이차방정식 $3x^2-6x+1=0$의 두 실근을 $\alpha,\ \beta$라 하면 세 실수 $\alpha^3,\ p,\ \beta^3$이 이 순서대로 등차수열을 이룬다. 이때 실수 p의 값은?[3점-1008-종로]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

24. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $a_3=1$, $a_2=-a_6$일 때, S_n의 최댓값을 구하시오.

[3점-1007-대성]

25. 수열 $\{a_n\}$에서 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이

$$S_n = 5(2^n - 1) \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

을 만족시킬 때, a_7의 값은?[3점-1011-대전교]

① 315 ② 320 ③ 325
④ 330 ⑤ 335

26. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n = -2n^2 + 28n$일 때, a_5의 값은?[3점-1008-비상]

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

27. 다음 그림과 같이 $n \times n$개의 정사각행렬의 빈 칸에 제1행과 제1열에는 $1, 2, 3, 4, \cdots, n$을 각각 써 넣고, 제2행에는 공차가 2, 제3행에는 공차가 3, $\cdots$, 제n행에는 공차가 n인 등차수열의 각 항을 작은 것부터 차례로 써 넣는다.

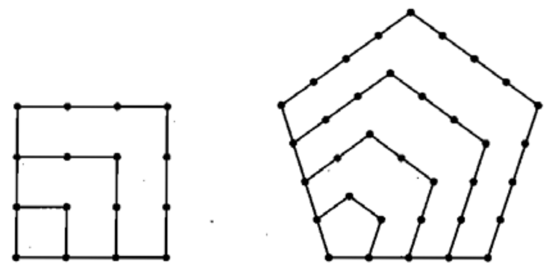
1	2	3	4	$\cdots$	n
2	4	6	8	$\cdots$	$2n$
3	6	9	12	$\cdots$	$3n$
4	8	12	16	$\cdots$	$4n$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
n	$2n$	$3n$	$4n$	$\cdots$	n^2

그림의 어두운 부분의 모든 수의 합이 1440일 때, 자연수 n의 값을 구하시오.[4점-1010-대성]

28. 그림과 같이 한 변의 길이가 1, 2, 3, 4, $\cdots$, k인 정 n각형을 이웃한 두 변이 겹쳐지도록 그려 놓은 다음, 아래의 규칙대로 점을 잡는다. (단, $n = 3, 4, 5, \cdots$)

(가) 각 꼭짓점에는 1개의 점을 잡는다.
(나) 길이가 l인 각 변에는 그 변을 l등분하는 점을 잡는다. (단, $n = 3, 4, 5, \cdots$)
(다) 겹쳐진 점들은 한 개의 점으로 간주한다.

이때, $a_{(n,\ k)}$를 도형에 잡은 모든 점들의 개수로 정의한다. 예를 들어 $a_{(4,\ 3)} = 16$, $a_{(5,\ 4)} = 35$이다. $a_{(10,\ 10)}$의 값은?[3점-1007-메가]



① 451 ② 452 ③ 453
④ 454 ⑤ 455

29. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항가지의 합 S_n이 $S_n = n^2 - 3n$일 때, 좌표평면에서 점 P_n의 좌표를 $(a_n,\ n-3)$이라 하자.
점 P_4는 원 $x^2 + y^2 = r^2$의 내부에 있고, 점 P_5는 원 $x^2 + y^2 = r^2$의 외부에 있을 때, 자연수 r^2의 최댓값은?[4점-1010-대성]

① 38 ② 39 ③ 40
④ 41 ⑤ 42

30. x에 대한 사차방정식 $x^4-10a^2x^2+ba^4=0\ (a>0,\ b>0)$의 서로 다른 네 실근을 크기 순서로 나열하였더니 공차가 6인 등차수열을 이루었다. 이때 두 상수 $a,\ b$의 합 $a+b$의 값을 구하시오.

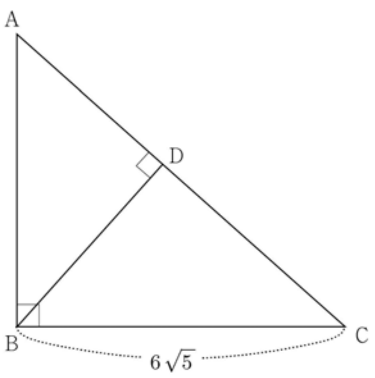
[4점–1004–종로]

31. 유한개의 항으로 이루어진 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 다음과 같다.

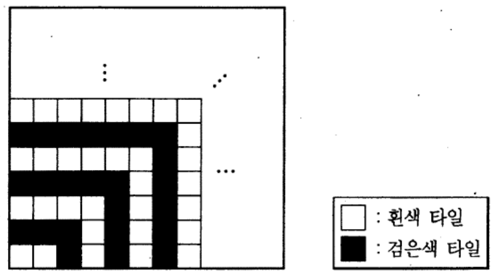
$\{a_n\}$: 5, 8, 11, 14, ⋯, 1202
$\{b_n\}$: 2, 7, 12, 17, ⋯, 1212

이때, $a_p=b_q$를 만족하는 두 자연수 $p,\ q$에 대하여 $p+q$의 최댓값을 구하시오.[4점–1004–종로]

32. 그림과 같이 $\angle \mathrm{B}=90^\circ$이고 선분 BC의 길이가 $6\sqrt{5}$인 직각삼각형 ABC의 꼭짓점 B에서 빗변 AC에 내린 수선의 발을 D라 하자. 세 선분 AD, CD, AB의 길이가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, 선분 AC의 길이를 구하시오.[4점–1004–교육청]



33. 가로 210cm, 세로 200cm인 직사각형 모양의 바닥을 한 변이 10cm인 정사각형 모양의 타일로 빈틈없이 붙이려고 한다. 그림과 같이 흰색 타일과 검은 색 타일로 바닥을 붙일 때, 필요한 흰색 타일의 총 개수를 구하시오.[3점–1005–종로]



34. 그림과 같이 제1행에 모두 1을 써 넣고 첫째항이 1인 등차수열의 각 항의 수를 화살표방향으로 써 넣었다. 예를 들어 5번째 수열은 제1행 제5열의 수인 1을 첫째항으로 하고 화살표 방향을 따라 수를 나열하여 제5행 제1열의 수인 17을 마지막 항으로 하는 등차수열이다.

	제1열	제2열	제3열	제4열	제5열	제6열	제7열	⋯
제1행	1	1	1	1	1	1	1	⋯
제2행	2	3	4	5	6	7	⋯	⋯
제3행	5	7	9	11	13	⋯	⋯	⋯
제4행	10	13	16	19	⋯	⋯	⋯	⋯
제5행	17	21	25	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯
제6행	26	31	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯
제7행	37	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

제20행 제10열의 수를 구하시오.[4점–1004–대성]

35. 그림과 같이 3 행으로 이루어진 표의 빈칸에 다음과 같은 규칙으로 수를 배열한다.

> (가) 1행에는 1부터 시작하여 홀수를 차례대로 배열한다.
> (나) 1열에는 차례대로 1, 2, 3을 배열한다.
> (다) 나머지 빈 칸에는 $\begin{array}{|c|c|}\hline p & q \\ \hline & r \\ \hline \end{array}$ 에서 $p+q=r$가 되도록 배열한다.

제1행	1	3	5	7	9	$\cdots$		a
제2행	2	4	8	12	16	$\cdots$		b
제3행	3	6	12	20	28	$\cdots$	76	

위 표에서 두 자연수 a, b 에 대하여 $a+b$ 의 값을 구하시오. [4점-1006-대성]

36. 집합 $U=\{n\,|\,1 \le n \le 19,\ n$은 홀수$\}$일 때, 집합 A를 다음과 같이 정의하자.

$A=\{x+y+z|x\in U, y\in U, z\in U, (x-y)(y-z)(z-x)\neq 0\}$

이때, 집합 A의 모든 원소의 합을 구하시오.[4점-1005-메가]

37. 항수가 m인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 세 조건을 만족시킨다.

> (가) 공차는 양수이다.
> (나) 홀수 번째 항들의 합은 128이다.
> (다) 짝수 번째 항들의 합은 96이다.

이 수열의 첫째항과 제m항의 합을 구하시오.[4점-1010-중앙]

38. $10<x<100$에 대하여 $\log x$, $\log x^2$, $\log x^4$의 가수를 각각 α, β, γ라 한다. β, γ, α $(\beta<\gamma<\alpha)$가 이 순서로 등차수열을 이룰 때, x의 값이 $10^{\frac{q}{p}}$ (p, q는 서로소인 자연수)라 한다. 이때 $p+q$의 값은?[4점-1009-종로]

① 9 ② 10 ③ 11
④ 12 ⑤ 13

39. n $(n \ge 7)$개의 항으로 이루어진 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 세 조건을 만족시킨다.

> (가) $a_4+a_5+a_6+a_7=76$
> (나) $a_{n-6}+a_{n-5}+a_{n-3}+a_{n-3}=236$
> (다) $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=780$

n의 값을 구하시오.[4점-1008-대성]

40. $a_7=4$, $a_9=8$인 등비수열 $\{a_n\}$의 제15항을 구하시오.
[3점-1003-비상]

41. 등비수열 $\{a_n\}$에서 $a_1a_{10}=9$일 때, 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제10항까지의 곱은?[3점-1010-교육청]

① 3^{10} ② 3^{11} ③ 3^{12}
④ 3^{13} ⑤ 3^{14}

42. 각 항이 실수인 등비수열$\{a_n\}$에 대하여

$$a_1+a_4=72,\ a_4+a_7=9$$

일 때, a_3의 값을 구하시오.[3점-1005-대성]

43. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_2a_4=16$, $a_3a_5=64$일 때, a_7의 값을 구하시오.[3점-1006-평가원]

44. 모든 항이 실수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1+a_2+a_3=2,\ a_{10}+a_{11}+a_{12}=2^{10}$$

일 때, $a_{20}+a_{21}+a_{22}$의 값은?[3점-1004-메가]

① 2^{20} ② 2^{21} ③ 2^{22}
④ 2^{23} ⑤ 2^{24}

45. 각 항이 실수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1=2$, $a_6=54$일 때, 이 수열의 첫째항은?[3점-1011-대성]

① $\frac{2}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{4}{9}$
④ $\frac{5}{9}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

46. 첫째항이 양수이고 공비가 2인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1a_7=1$일 때, a_{12}의 값을 구하시오.[3점-1010-대성]

47. 등차수열 $\{a_n\}$과 등비수열 $\{b_n\}$은 다음 조건을 만족한다.

(가) $a_1=2,\ b_1=2$
(나) $a_2=b_2,\ a_4=b_4$

a_5+b_5의 값을 구하시오. (단, 수열 $\{b_n\}$의 공비는 1이 아니다.)
[3점-1003-교육청]

48. 등차수열 $\{a_n\}$과 등비수열 $\{b_n\}$이 다음 두 조건을 만족시킨다.

(가) $a_1=b_1=1$
(나) $a_{11}=b_{11}=16$

이때 $a_k=b_{21}$을 만족시키는 자연수 k의 값은?[3점-1004-종로]

① 171 ② 176 ③ 179
④ 182 ⑤ 185

49. 첫째항이 a, 공비가 $r\ (|r|>1)$인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1+a_2+a_3=6,\ a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1=-24$일 때, a_9의 값은?
[3점-1008-비상]

① -2^9 ② -2^8 ③ 2^8
④ 2^9 ⑤ 2^{10}

50. 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1,\ a_2,\ a_5$가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, $\dfrac{a_5}{a_2}$의 값은?[3점-1009-대성]

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

51. 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$의 세 항 $a_2,\ a_4,\ a_9$가 이 순서대로 공비 r인 등비수열을 이룰 때, $6r$의 값을 구하시오.
[4점-2010-대수능]

52. 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1+a_2+a_3+a_4=63$$

$$a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}=630$$

이다. $a_2+a_3+a_4+a_5$의 값은?[3점-1003-종로]

① 63　② $63\sqrt{2}$　③ $63\sqrt{3}$
④ 126　⑤ $126\sqrt{2}$

53. 서로 다른 두 실수 a, b에 대하여 $a, 2, b$는 이 순서대로 등차수열을 이루고, $2, a, b$는 이 순서대로 등비수열을 이룬다. a^2+b^2의 값을 구하시오.[3점-1010-비상]

54. 세 양수 a, b, c가 이 순서대로 등비수열을 이루고, $a, 2b, c$가 이 순서대로 등차수열을 이룬다. 이때 등비수열 a, b, c의 가능한 공비들의 합을 구하시오.[3점-1009-종로]

55. 2와 5 사이에 네 수 a_1, a_2, a_3, a_4를 차례대로 넣어 수열

$$2, a_1, a_2, a_3, a_4, 5$$

가 이 순서대로 등비수열을 이루도록 했을 때, $a_1\times a_2\times a_3\times a_4$의 값은?[3점-1010-종로]

① 10　② 20　③ 50
④ 80　⑤ 100

56. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n=3^x-2$일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[3점-1003-종로]

<보 기>

ㄱ. $a_6=486$
ㄴ. 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이다.
ㄷ. $\log a_{n+2}-\log a_{n+1}=b_n$에 대하여 수열 $\{b_n\}$은 등차수열이다. (단, n은 $n\geq 1$인 자연수이다.)

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

57. 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1이고 공비가 1보다 큰 등비수열이고, 수열 $\{b_n\}$은 수열 $\{a_n\}$의 이웃한 두 항 사이에 그 두 항의 곱을 추가한 것이다. 즉,

$\{a_n\}$: $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4, \cdots,\ a_n,\ a_{n+1}, \cdots$

$\{b_n\}$: $a_1,\ a_1a_2,\ a_2,\ a_2a_3,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ a_na_{n+1},\ a_{n+1},\ \cdots$

다음 중 $\dfrac{b_2b_4b_6b_8}{b_1b_3b_5b_7}$과 항상 같은 값을 갖는 것은?[3점-1010-대성]

① b_{20}　② b_{21}　③ b_{22}
④ b_{23}　⑤ b_{24}

58. 첫째항이 1, 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $S_{20}=5S_{10}$이면 $S_{40}=kS_{10}$이다. k의 값은? (단, $r\neq\pm1$)[3점-1005-종로]

① 25 ② 40 ③ 55
④ 77 ⑤ 85

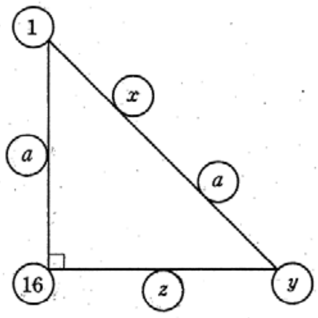
59. 다항식 $f(x)=x^{2n}+3x^2+nx+1$ 을 $x(x-1)(x+1)$ 로 나누었을 때의 나머지를 $r(x)$ 라 하자. 나머지를 내림차순으로 정리했을 때 그 계수가 순서대로 등비수열을 이룬다. 이때 자연수 n의 값을 구하시오.[3점-1007-종로]

60. 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 1, 공비가 실수인 등비수열이고, 다음을 만족시킨다.

$$a_5+a_8+a_9=12,\ \frac{1}{a_5}+\frac{1}{a_6}+\frac{1}{a_9}=\frac{1}{12}$$

이때 $a_2a_3a_4$ 의 값을 구하여라.[3점-1008-종로]

61. 그림은 서로 다른 6개의 양수 1, 16, $a, x,\ y,\ z$를 직각삼각형의 꼭짓점과 각 변에 위치한 7의 빈 칸에 배열한 것이다. 빗변에 있는 네 수가 한 꼭짓점에 있는 수부터 차례로 등차수열을 이루고, 나머지 두 변에 있는 세 수는 각각 한 꼭짓점에 있는 수부터 차례로 등비수열을 이룰 때, $\frac{z^2}{x+y}$의 값을 구하시오.[3점-1010-종로]



62. 서로 다른 세 자연수 $a,\ b,\ c$가 다음 세 조건을 모두 만족시킬 때, $a+b+c$의 값은?[4점-1004-교육청]

(가) $a,\ b,\ c$는 이 순서대로 등비수열을 이룬다.
(나) $b-a=n^2$ (단, n은 자연수이다.)
(다) $\log_6 a+\log_6 b+\log_6 c=3$

① 26 ② 28 ③ 30
④ 32 ⑤ 34

63. 서로 다른 세 자연수 $x,\ y,\ z$는 이 순서로 등비수열을 이룬다.

$$\log_{36}x+\log_{36}y+\log_{36}z=3,\ z-x=54$$

일 때, $x+y+z$의 값을 구하시오.[4점-1004-메가]

64. 각 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$을 다음과 같이 정의한다.

$b_n=\log_3 a_n\ \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

수열 $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_{11}의 값은?

[4점-1003-교육청]

(가) $b_1+b_3+b_5+\cdots+b_{15}+b_{17}=36$

(나) $b_2+b_4+b_6+\cdots+b_{16}+b_{18}=45$

① 3^5 ② 3^6 ③ 3^7
④ 3^8 ⑤ 3^9

65. 좌표평면에서 함수 $f(x)=x^2+1$의 그래프 위에 서로 다른 세 점 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$, $\mathrm{B}(b,\ f(b))$, $\mathrm{C}(c,\ f(c))$가 있다. a,b,c는 이 순서로 등차수열을 이루고 $f(a),\ f(b),\ f(c)$는 이 순서로 등비수열을 이룬다. $a,\ b,\ c,\ f(a),\ f(b),\ f(c)$는 모두 정수이고, a,b,c는 모두 절댓값이 10보다 작은 수라고 할 때, $f(a)+f(b)+f(c)$의 값을 구하시오.[4점-1007-메가]

66. 의진이는 2001년부터 2010년까지 10년 동안 매년 초에 100만 원씩 적립한 다음, 2010 말에 원금과 이자를 모두 인출하여 2011년 초에 10년 만기 정기예금에 이 돈을 모두 예금하였다. 2001년 초부터 2010년 말까지는 연이율이 5%이고, 2011년 초부터 2020년 말까지는 연이율이 6%일 때, 2020년 말의 원리합계는? (단, $1.05^{10}=1.6,\ 1.06^{10}=1.8$로 계산하고, 1년 마다 복리로 계산한다.)[4점-1009-중앙]

① 1260만 원 ② 1826만 원 ③ 2268만 원
④ 2602만 원 ⑤ 3060만 원

67. 어느 회사원이 4500만 원인 아파트를 2019년 12월 말에 구입하고자 2010년 1월 초에 은행에 K만 원을 적립하고 다음 해부터 매년 1월 초에 전년도 적립 금액보다 6%를 증액하여 모두 10번을 적립한 후 2019년 12월 말에 적립금을 찾기로 하였다. 이 은행의 연이율은 6%이고, 일 년마다 복리로 계산할 때, 처음 적립해야 할 금액 K의 최솟값을 구하시오. (단, 아파트의 가격은 언제나 일정하고, $1.06^{10}=1.8$로 계산한다.)[4점-1008-중앙]

68. 홍도는 내년 3월 초에 새 컴퓨터를 구입하기 위하여 올해 5월부터 내년 2월까지 매달 초에 일정액의 돈을 저축하기로 하였다. 홍도가 저축하는 돈은 월이율 0.7%의 복리로 매달 계산된다. 홍도가 구입하려는 새 컴퓨터의 현재 가격은 A원이지만 내년 3월 초에는 이 컴퓨터의 가격이 현재보다 p% 내린다고 할 때, 다음 중 홍도가 매달 저축해야 할 돈의 액수를 나타내는 것은? (단, $0.117^{10}=1.07$로 계산한다.)[4점-1004-메가]

① $\dfrac{A(100-p)}{107}$ ② $\dfrac{10A(100-p)}{107}$ ③ $\dfrac{A(100-p)}{1007}$
④ $\dfrac{10A(100-p)}{1007}$ ⑤ $\dfrac{100A(100-p)}{1007}$

69. A 은행에서는 연금 상품에 가입한 B 에게 20 년 동안 매년 1 월 초에 530 만 원의 연금을 지급하기 위해 연금의 지급이 시작되기 1 년 전에 일정 금액을 예치한다. 이 은행에서 2010 년 1 월 초에 a 만 원을 예치하여 그 다음 해 1 월 초부터 B 에게 연금을 지급할 때, 마지막 연금을 지급하는 순간 예치된 돈의 액수가 0 원이 되게 하려고 한다. 이때, a 의 값은? (단, 연이율 5%, 1 년마다의 복리로 계산하고, $1.05^{20}=2.65$ 로 계산한다.)[4점-1010-비상]

① 6200 ② 6320 ③ 6450
④ 6600 ⑤ 6930

70. 2010년 초 어느 주택의 가격은 1억 원이고 매년 전년도 가격의 5% 씩 상승한다고 하자. A 는 매년 연이율 5% 의 복리로 계산되는 어느 은행의 한 상품에 2010년 초에 a 억 원을 예금하고, 다음해부터 2019 년 초까지 매년 초에 전년도에 예금한 금액보다 10% 적은 금액을 예금하기로 하였다. 이와 같은 방법으로 A 가 10년 동안 예금한 금액의 2020년 초의 원리합계와 2020년 초의 이 주택의 가격이 같을 것으로 예상될 때, 다음 중 a 의 값과 같은 것은?

$\left(\text{단, } \left(\dfrac{0.9}{1.05}\right)^{10}=p \text{ 로 계산한다.}\right)$[4점-1006-대성]

① $\dfrac{1}{3(1-p)}$ ② $\dfrac{1}{4(1-p)}$ ③ $\dfrac{1}{5(1-p)}$
④ $\dfrac{1}{6(1-p)}$ ⑤ $\dfrac{1}{7(1-p)}$

71. 어느 은행에는 출금이 자유로운 A통장과 만기가 되어야만 출금할 수 있는 B통장이 있다. A통장에 예금된 돈에 대해서는 연이율 r%, 1년마다의 복리로 계산하고, B통장에 예금된 돈에 대해서는 연이율 $2r$%, 1년마다의 복리로 계산한다고 한다. A통장과 B통장에 각각 5000만 원, 4000만 원을 동시에 예금하였을 때, 그로부터 10년 후의 원리합계가 서로 같아지도록 하는 상수 r의 값은? (단, $\log 2=0.30$, $\log 1.02=0.01$로 계산하고, r의 값은 소수 셋째 자리에서 반올림한다.)[4점-1005-메가]

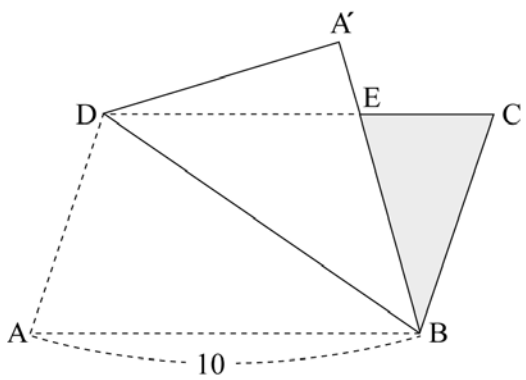
① 1.92 ② 2.04 ③ 2.66
④ 2.80 ⑤ 3.08

72. 첫째항이 16이고 공비가 $2^{\frac{1}{10}}$인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\log a_n$의 가수를 b_n이라 하자.

$b_1,\ b_2,\ b_3,\ \cdots,\ b_{k-1},\ b_k,\ b_{k+1}+1$

이 주어진 순서로 등차수열을 이룰 때, k의 값을 구하시오. (단, $\log 2 = 0.301$로 계산한다.)[4점-1006-평가원]

73. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=10$인 평행사변형 ABCD 가 있다. 이 도형을 대각선 BD 를 따라 접어서 생기는 삼각형 EBC 의 넓이가 평행사변형 ABCD 의 넓이의 $\frac{1}{5}$이고, $\overline{\mathrm{CE}}$, $\overline{\mathrm{EB}}$, $\overline{\mathrm{BD}}$ 의 길이가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, 선분 AD 의 길이는?[4점-1007-교육청]



① $2\sqrt{11}$ ② $3\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{46}$
④ $\sqrt{47}$ ⑤ $4\sqrt{3}$

74. 밑변이 $2n$이고 높이가 h_n인 삼각형의 넓이를 S_n이라 하자. 수열 $\{h_n\}$과 수열 $\{S_n\}$에 대한 설명 중 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)[4점-1003-종로]

<보 기>

ㄱ. 수열 $\{S_n\}$이 등차수열이면 수열 $\{h_n\}$은 수렴한다.

ㄴ. 수열 $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$이 등차수열이면 수열 $\{h_n\}$은 수렴한다.

ㄷ. 수열 $\{h_n\}$이 등비수열이고 수열 $\{S_n\}$이 수렴하면 수열 $\{h_n\}$의 공비는 1보다 작다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

75. 모든 항이 양수인 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 a_n, b_n, a_{n+1}은 이 순서대로 등차수열을 이루고, b_n, a_{n+1}, b_{n+1}은 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, 일반항 a_n과 b_n을 구하는 과정이다.(단, $a_1=1$, $a_2=3$, $b_1=2$)[4점-1004-교육청]

> a_n, b_n, a_{n+1}은 이 순서대로 등차수열을 이루므로
> $2b_n=a_n+a_{n+1}$ ……㉠이다.
> b_n, a_{n+1}, b_{n+1}은 이 순서대로 등비수열을 이루므로
> $$(a_{n+1})^2=b_nb_{n+1}$$
> 이고, $a_{n+1}>0$, $a_{n+2}>0$이므로
> $a_{n+1}=\sqrt{b_nb_{n+1}}$, $a_{n+2}=\sqrt{b_{n+1}b_{n+2}}$ ……㉡이다.
> 또한, ㉠, ㉡에서 얻어진 $2b_{n+1}=\sqrt{b_nb_{n+1}}+\sqrt{b_nb_{n+2}}$의 양변을 $\sqrt{b_{n+1}}$로 나누면 $2\sqrt{b_{n+1}}=\sqrt{b_n}+\sqrt{b_{n+2}}$이므로
> $\{\sqrt{b_n}\}$은 $\boxed{(가)}$ 수열이다.
> 그러므로 $a_2=3$, $b_1=2$, $(a_2)^2=b_1b_2$에서
> $b_2=\frac{9}{2}$이므로 $b_n=\boxed{(나)}$이다.
> 따라서, $a_n=\boxed{(다)}$이다.

위 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

	(가)	(나)	(다)
①	등차	$\frac{1}{2}(n+1)^2$	$\frac{n(n+1)}{4}$
②	등비	$\frac{1}{2}(n+1)^2$	$\frac{n(n+1)}{2}$
③	등차	$\frac{1}{4}(n+1)^2$	$\frac{n(n+1)}{4}$
④	등비	$\frac{1}{4}(n+1)^2$	$\frac{n(n+1)}{4}$
⑤	등차	$\frac{1}{2}(n+1)^2$	$\frac{n(n+1)}{2}$

76. 1000 이하의 두 자연수 x, y에 대하여 집합 $\{xy \mid \log_2 x+\log_2 y=[\log_2 x]+[\log_2 y]\}$의 모든 원소의 합은?
(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)[4점-1010-종로]

① $2^{16}-1$ ② $2^{17}-1$ ③ $2^{18}-1$
④ $2^{19}-1$ ⑤ $2^{20}-1$

여러 가지 수열

1. $\sum_{k=1}^{10}(k-2)^2$ 의 값을 구하시오.[3점–1003–중앙]

2. $\sum_{k=1}^{30}\log_5\{\log_{k+1}(k+2)\}$의 값을 구하시오.[4점–1003–종로]

3. 등식 $\sum_{n=1}^{\infty}(\log 2)^n = \log_5 n$을 만족시키는 양수 x의 값은?

[3점–1010–대성]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 2
④ 4 ⑤ 10

4. 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 8 , 공차가 2 인 등차수열이고, 수열 $\{b_n\}$ 은 $b_1=6,\ \ b_{n+1}-a_{n+1}=b_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\cdots)$을 만족시킨다. 이때, b_{20} 의 값을 구하시오.[3점–1004–메가]

5. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_{3n-1}=6n-8$일 때, $\sum_{k=1}^{10}a_{3k}$의 값을 구하시오.[3점–1011–종로]

6. 함수 $f(x)=2^x$에 대하여 $\sum_{k=1}^{100}\log f(k)+\sum_{k=1}^{100}\log f(-k)$의 값은?[3점–1005–대성]

① 0 ② $\frac{1}{100}$ ③ $\frac{1}{10}$
④ 1 ⑤ 10

7. $\sum_{k=1}^{10}(k^2+1)-\sum_{k=1}^{10}(k^2-1)$의 값을 구하시오.[3점-1008-비상]

8. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이

$$S_n=\sum_{k=1}^{n+1}(k^2+1)-\sum_{k=1}^{n}(k^2-1)\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

일 때, a_{10}의 값은?[3점-1004-종로]

① 21 ② 22 ③ 23
④ 24 ⑤ 25

9. 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에서 $a_1+b_1=3$, $\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}b_k=65$일 때, $a_{10}+b_{10}$의 값은?[3점-1008-중앙]

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

10. $a_{10}=1$, $a_{11}=-3$인 등차수열 $\{a_n\}$에서 $\sum_{k=1}^{n}a_k$의 최댓값은?

[3점-1007-메가]

① 186 ② 188 ③ 190
④ 192 ⑤ 194

11. $\sum_{k=2}^{15}\log_2(\log_{k+1}k)$의 값은?[3점-1011-대성]

① $-\frac{1}{8}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ $-\frac{1}{2}$
④ -2 ⑤ -4

12. 행렬 $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -3 & -1\end{pmatrix}$에 대하여 행렬 A^n (n은 자연수)의 모든 성분의 곱을 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{100}a_n$의 값을 구하시오.

[3점-1009-중앙]

13. 등식 $\sum_{n=1}^{10} \frac{m}{n^2+n}=20$ 을 만족시키는 상수 m 의 값을 구하시오. [3점-1010-비상]

14. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

일 때, $100a_{100}-(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{99})$의 값을 구하시오.

[3점-1008-대성]

15. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$a_1+a_2+\cdots+a_n=10n-n^2$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이 성립할 때,

$\sum_{n=1}^{25}|a_n|$의 값은?[3점-1004-종로]

① 415 ② 420 ③ 425
④ 430 ⑤ 435

16. 어떤 수열 $\{a_n\}$에 대하여 다항식 x^2-3x를 $x+n$으로 나눈 나머지가 $\sum_{k=1}^{n} a_k$가 된다고 할 때, a_5의 값은?[3점-1011-종로]

① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

17. 수열 $\sum_{k=1}^{30}[\log 1_2 k]$의 값은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)[3점-1009-종로]

① 94 ② 98 ③ 102
④ 106 ⑤ 110

18. x보다 크지 않은 최대의 정수를 $[x]$라 할 때,

$\sum_{k=2}^{100}([\log_5 k]-[\log_k 5])$의 값을 구하시오. [4점-1005-메가]

19. $\sum_{n=1}^{2010}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)$의 값은?[3점-1007-대성]

① $-\frac{2010}{2011}$ ② $-\frac{2009}{2010}$ ③ $\frac{2009}{2010}$
④ $\frac{2010}{2011}$ ⑤ $\frac{2012}{2011}$

20. 수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n이

$a_n=1-2+3-4+\cdots+(-1)^{n-1}\cdot n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?
[3점-1004-메가]

<보 기>

ㄱ. $a_{10}=-5$ ㄴ. $a_{2009}+a_{2010}=0$
ㄷ. $\sum_{n=1}^{101}a_n=51$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{40}a_k$의 값을 구하시오.[3점-1005-대성]

(가) $a_1=1$
(나) $a_{k+1}=a_k+3\ (1\le k\le 11)$
(다) $a_{m+12}=a_m\ (m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

22. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{10}a_{3k-2}=30$, $\sum_{k=1}^{10}a_{3k}=40$이 성립할 때, a_1의 값은?[3점-1006-종로]

① $-\frac{15}{4}$ ② $-\frac{7}{2}$ ③ $-\frac{13}{4}$
④ -3 ⑤ $-\frac{11}{4}$

23. $a_1=2$, $a_{n+1}=2-\dfrac{1}{a_n}$ $(n=1,2,3,\cdots)$로 정의되는 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$\log a_1+\log a_2+\log a_3+\cdots+\log a_{99}$

의 값은?[3점-1010-종로]

① 2 ② 4 ③ log50

④ log99 ⑤ log101

24. 모든 자연수 n에 대하여 수열 $\{a_n\}$은 다음을 만족시킨다.

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}=n^2+1$$

이 때 $\sum_{k=1}^{10}a_k$의 값을 구하시오.[3점-1009-종로]

25. 2 이상의 자연수 n에 대하여 집합

$\{3^{2k-1} \mid k$는 자연수, $1\le k\le n\}$

의 서로 다른 두 원소를 곱하여 나올 수 있는 모든 값만을 원소로 하는 집합을 S라 하고, S의 원소의 개수를 $f(n)$이라 하자. 예를 들어, $f(4)=5$이다. 이때, $\sum_{n=2}^{11}f(n)$의 값을 구하시오.

[4점-2010-대수능]

26. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $P_k=\sum_{i=1}^{k}ia_i$ $(k=1,\ 2,\ 3,\cdots)$라 할 때, $P_k=k(k+1)(2k-1)$이 성립한다. 이때, a_{30}의 값을 구하시오.

[3점-1010-중앙]

27. 첫째항이 0이 아닌 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $b_2=2a_2$, $b_7=2a_7$일 때, $\sum_{k=1}^{10}a_k:\sum_{k=1}^{10}b_k$는?[3점-1007-종로]

① 1 : 2 ② 2 : 3 ③ 1 : 3

④ 2 : 1 ⑤ 1 : 4

28. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에서 $\sum_{k=1}^{10}a_k=100$, $\sum_{k=1}^{10}\dfrac{1}{a_k}=10$일 때, $\sum_{k=1}^{10}\log a_k$를 구하시오.[3점-1007-종로]

29. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1=2$이고, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $S_n=2a_n-2$를 만족한다. 이 때, $\log_2 a_{20}$의 값은?

[4점-1003-중앙]

① 18 ② 19 ③ 20
④ 21 ⑤ 22

30. 자연수 1, 2, 3, ⋯에서 3의 배수, 5의 배수를 제외하고 남은 수들을 작은 수부터 차례로 나열하여 얻어진 수열

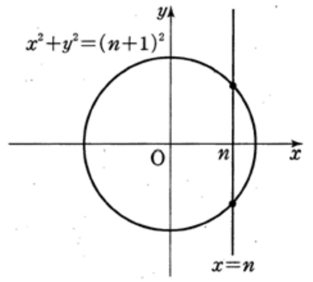
1, 2, 4, 7, 8, ⋯

을 $\{a_n\}$이라 하자. 이 때, a_{50}의 값은?[3점-1005-종로]

① 89 ② 91 ③ 92
④ 94 ⑤ 97

31. n이 자연수일 때, x에 대한 이차방정식 $x^2-33x+n(n+1)=0$의 두 근을 α_n, β_n이라 하자. 이때, $\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}\right)$의 값을 구하시오.[3점-1004-교육청]

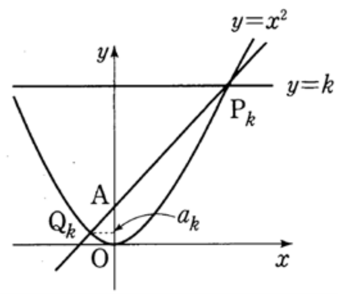
32. 자연수 n에 대하여 직선 $x=n$과 원 $x^2+y^2=(n+1)^2$이 만나는 두 점 사이의 거리를 a_n이라 하자.



이때, $\sum_{n=2}^{37}\frac{1}{a_n+a_{n-1}}$의 값은?[3점-1004-종로]

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2
④ 3 ⑤ $2\sqrt{3}$

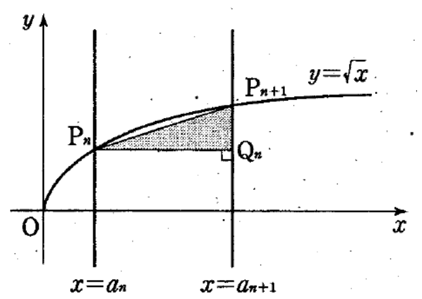
33. 그림과 같이 좌표평면에서 직선 $y=k$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$가 곡선 $y=x^2$과 제1사분면에서 만나는 점을 P_k라 하자. 또, y축 위의 한 점 $\mathrm{A}\left(0,\ \frac{1}{4}\right)$에 대하여 직선 AP_k가 곡선 $y=x^2$과 제2사분면에서 만나는 점을 Q_k라 하자. 점 Q_k의 y좌표를 a_k라 할 때, $\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{a_k}$의 값을 구하시오.[4점-1010-비상]



34. 양의 실수 x에 대하여 상용로그 $\log x$ 의 가수를 $f(x)$라 하자. 100의 모든 양의 약수의 집합을 $\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n\}$이라 할 때, $\sum_{k=1}^{n} f(a_k)$의 값은?[3점-1008-대성]

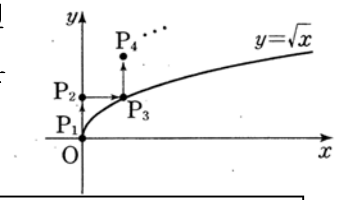
① $1+\log 5$　　② 2　　③ $2+3\log 2$
④ 3　　⑤ $1+4\log 5$

35. 첫째항과 공차가 모두 양수 d인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 그림과 같이 직선 $x=a_n$과 곡선 $y=\sqrt{x}$ 가 만나는 점을 P_n, 점 P_n에서 직선 $x=a_{n+1}$에 내린 수선의 발을 Q_n이라 하고, 삼각형 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}$의 넓이를 S_n이라 하자. 이 때 $\sum_{n=1}^{99} S_n = a_9$를 만족시키는 d의 값은?[3점-1003-비상]



① 1　　② $\sqrt{2}$　　③ 2
④ $2\sqrt{2}$　　⑤ 4

36. 자연수 n에 대하여 좌표평면 위의 동점 $\mathrm{P}_n(x_n,\ y_n)$은 다음과 같은 규칙으로 움직인다.



(가) P_1의 좌표는 $(0,\ 0)$이다.
(나) $y_n > \sqrt{x_n}$ 이면 $x_{n+1}=x_n+1,\ y_{n+1}=y_n$이고
$y_n \le \sqrt{x_n}$ 이면 $x_{n+1}=x_n,\ y_{n+1}=y_n+1$이다.

이 때, $x_{100}+y_{100}$의 값을 구하시오.[4점-1009-중앙]

37. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1=\frac{4}{3}$, $a_{n+1}=a_n+[a_n]$일 때, $[a_{10}]$의 값을 구하시오. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.) [3점-1004-대성]

38. 수열 $\{a_n\}$에서 $a_1=-1$이고 $a_n+a_{n+1}=n+1$일 때, $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_7$의 값을 구하시오.[3점-1003-종로]

39. 수열 $\{a_n\}$이

$a_1 = a_2 = 1,$

$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

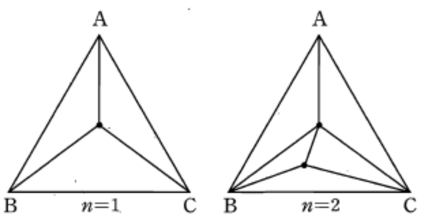
을 만족할 때, 수열 $\{b_n\}$을 $b_n = \cos(a_n \pi)$로 정의하자. 이 때, b_{2010}의 값은?[3점-1003-비상]

① -1　　② $-\frac{1}{2}$　　③ 0

④ $\frac{1}{2}$　　⑤ 1

40. 삼각형 ABC의 내부에 서로 다른 n개의 점을 찍고, 이 n개의 점들과 꼭짓점 A, B, C를 포함한 $(n+3)$개의 점들끼리 양끝점에서만 만나도록 선분으로 연결했을 때 생기는 삼각형의 개수의 최댓값을 a_n이라 하자. 예를 들면 $a_1 = 3,\ a_2 = 5$이다. 이때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, 꼭짓점 A, B, C를 포함한 $(n+3)$개의 점들 중에서 어떤 3개의 점도 일직선 위에 있지 않다.)

[3점-1003-중앙]



<보 기>

ㄱ. $a_3 = 7$

ㄴ. $a_{n+1} = a_n + 2 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

ㄷ. $\sum_{k=1}^{n} a_k = n^2 + 2n$

① ㄱ　　② ㄴ　　③ ㄷ

④ ㄱ, ㄷ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

41. 수열 $\{a_n\}$의 계차수열을 $\{b_n\}$이라 하고, 수열 $\{b_n\}$의 계차수열을 $\{c_n\}$이라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[3점-1005-메가]

<보 기>

ㄱ. 수열 $\{a_n\}$이 공차가 0이 아닌 등차수열이면 모든 자연수 n에 대하여 $c_n = 0$이다.

ㄴ. 수열 $\{a_n\}$이 공비가 1이 아닌 등비수열이면 수열 $\{c_n\}$도 공비가 1이 아닌 등비수열이다.

ㄷ. 수열 $\{a_n\}$이 공비가 1이 아닌 등비수열이면 $\{b_{n+1} - c_n\}$도 공비가 1이 아닌 등비수열이다.

① ㄱ　　② ㄴ　　③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

42. $a_n = \frac{1}{n(n+1)} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 계차수열을 $\{b_n\}$이라 할 때. $\sum_{k=1}^{10} b_k = -\frac{b}{a}$ ($a,\ b$는 서로소인 자연수)이다. 이 때, $a+b$의 값을 구하시오.[4점-1007-종로]

43. 수열 $\{a_n\}$이

$$a_1=16,\ a_{n+1}=\begin{cases}\frac{1}{2}a_n & (a_n\text{이 짝수})\\ a_n+3 & (a_n\text{이 홀수})\end{cases}\ (n=1,2,3,\cdots)$$

을 만족시킬 때, a_{100}의 값은?[3점-1010-메가]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

44. 수열 $\{a_n\}$이

$$\begin{cases}a_1=a_2=1\\ a_{n+2}=(-1)^n a_n a_{n+1}\ (\text{단},\ n=1,2,3,\cdots)\end{cases}$$

을 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{2011}a_k$의 값은?[4점-1011-대전교]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

45. 집합 $A=\{1,\ 2,\ 4,\ 7,\ 11,\ 16,\ 22,\ 29\}$에 대하여 집합 A의 4개의 원소로 이루어진 모든 부분집합들을 구하여 합의 크기가 작은 수부터 차례대로 나열한 수열을 $\{a_n\}$이라 하고, 합의 크기가 큰 수부터 차례대로 나열한 수열을 $\{b_n\}$이라 한다. 이때 $\sum_{k=1}^{7}\left\{(-1)^{k+1}(a_k+b_k)\right\}$의 값을 구하시오.[4점-1009-종로]

46. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$a_1=2,\ a_{n+1}=2a_1+4a_2+6a_3+8a_4+\cdots+2na_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

일 때, $\frac{a_{90}}{a_{89}}$의 값을 구하시오.[4점-1003-중앙]

47. 자연수 전체에서 $1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ \cdots$ 과 같은 제곱수를 제외한 수를 작은 수부터 차례대로 나열하여 수열 $\{a_n\}$을 만든다. 예를 들면 $a_1=2,\ a_2=3,\ a_3=5$ 이다. 이때, a_{901} 의 값을 구하시오.
[4점-1005-비상]

48. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n에 대하여

$$S_{2n-1}=n^2+1,\ S_{2n}=n^2-1$$

일 때, $\sum_{n=1}^{10} a_{2n-1}$의 값을 구하시오.[4점-1007-대성]

49. 수열 $\{a_n\}$을 다음과 같이 정의하자

$$a_1=10$$

$$a_n=a_1\times(-1)^n\times\sum_{k=1}^{n-1}a_k \quad (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

$\sum_{k=1}^{20}a_k$의 값을 구하시오.[4점-1010-대성]

50. $a_1=2,\ a_2=3,\ a_{n+2}=a_{n+1}-a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 $\sum_{k=1}^{2010}a_k$의 값은?[4점-1003-종로]

① 0 ② 2 ③ 4
④ 6 ⑤ 8

51. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n\}$에 대하여 다음 두 조건을 만족시키는 함수 f의 개수를 a_n이라 하자.

(가) 함수 $f: X\to X$는 일대일 대응이다.
(나) $\lvert f(x)-x\rvert \le 1$

a_8의 값을 구하시오.[4점-1007-대성]

52. 수열 $\{a_n\}$은 다음 조건을 모두 만족한다.

(가) $a_1=10$
(나) $a_1+2a_2+\cdots+ka_k+\cdots+na_n=\frac{1}{2}n(n+1)a_{n+1}+1$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

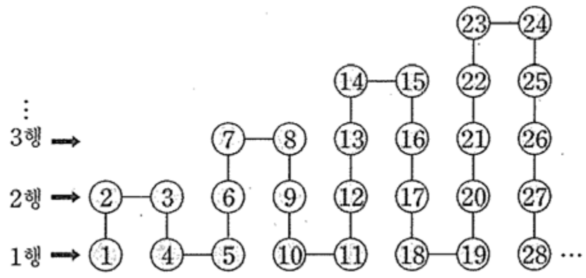
이때 a_{100}의 값을 구하시오.[4점-1007-종로]

53. $3<a<4$인 실수 a에 대하여 수열 $\{a_n\}$을 다음과 같이 정의한다.

$$a_1=a,\ a_{n+1}=|a_n|-1\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

$\sum_{k=1}^{n}a_k=0$이 되도록 5 이상의 홀수 n과 a를 정한다면, n의 값이 최대일 때, a의 값은 $\frac{q}{p}$ (p, q는 서로소인 자연수)이다. 이때, $p+q$의 값을 구하시오.[4점-1011-종로]

54. 그림과 같은 규칙으로 그려지는 도형 위에 자연수를 차례로 배열하였다.



이때 3행에 나타난 수를 순서대로 나열한 수열 $7,\ 8,\ 13, 16,\ \cdots$ 을 수열 $\{a_n\}$이라 하자. a_{30}의 값을 구하시오.[4점-1008-종로]

55. 자연수 n에 대하여 $\log_2 n$의 정수 부분을 $f(n)$, 소수부분을 $g(n)\ (0 \le g(n) < 1)$이라 하자. 예를 들어, $f(5)=2$, $g(5)=\log_2 \dfrac{5}{4}$이다. $g(n+1)<g(n)$을 만족하는 n의 값 중 작은 것부터 차례대로 $n_1,\ n_2,\ n_3,\ \cdots$이라 할 때, $\sum_{k=1}^{10} f(n_k)$의 값을 구하시오.[4점-1011-종로]

56. 수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n을

$a_n=(\sqrt{n}$에 가까운 자연수$)\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

라 하자. 예를 들어 $a_1=1,\ a_2=1,\ a_3=2$이다. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[4점-1005-대성]

<보 기>

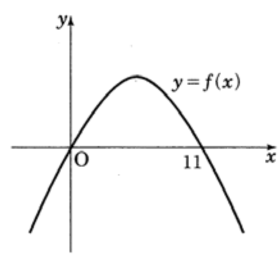
ㄱ. $a_{10}=3$

ㄴ. $a_n=15$를 만족시키는 자연수 n의 개수는 30이다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{30} a_n=110$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

57. 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같다. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면 모든 자연수 n에 대하여 $S_n=f(n)$이 성립한다. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점-1010-대성]



<보 기>

ㄱ. $a_2>a_3$ ㄴ. $a_6<0$

ㄷ. $\sum_{k=3}^{9} a_k=0$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

58. 자연수 n에 대하여 10^n의 모든 양의 약수 중에서 홀수인 약수의 개수를 $f(n)$, 짝수인 약수의 개수를 $g(x)$이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10}\{g(n)-f(n)\}$의 값을 구하시오.[4점-1011-대성]

59. 자연수 n에 대하여 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 다음 조건을 모두 만족시킨다.

> (가) $\sum_{k=1}^{n} a_k = (2n+1)^2$
>
> (나) $a_{n+1}-a_n = b_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

이때, $\sum_{k=10}^{20} b_k$의 값을 구하시오.[4점-1005-중앙]

60. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \log\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

를 만족시킨다. $\sum_{k=1}^{20} a_{2k} = p$라 할 때, 10^p의 값을 구하시오.

[4점-2010-대수능]

61. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{6} a_k$의 값은?

[4점-1006-평가원]

> (가) $a_1 = 1$
>
> (나) $\{a_n\}$의 계차수열 $\{b_n\}$에 대하여 $b_n = a_n$이다.

① 57 ② 60 ③ 63
④ 66 ⑤ 69

62. 그림과 같이 두 행으로 이루어진 직사각형 모양의 빈칸에 1행은 자연수 1, 2, 3, $\cdots$을 차례로 나열한다. 2행은 5부터 시작하여 임의의

p	q
r	s

모양의 정사각형을 택할 때 $s=p+q+r$를 만족하도록 숫자를 써 나간다.

1행 →	1	2	3	4	$\cdots$
2행 →	5	8	13	20	$\cdots$

이때 2행의 수로 이루어진 수열 $\{a_n\}$: 5, 8, 13, 20, $\cdots$에 대하여 a_{20}의 값은?[4점-1008-종로]

① 402 ② 404 ③ 406
④ 408 ⑤ 410

63. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 2$이고,

$$a_{n+1} = a_n + (-1)^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \quad (n \geq 1)$$

을 만족시킨다. $a_{20} = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)[4점−1009−평가원]

64. $(1+2x+3x^2+4x^3+\cdots+11x^{10})^2$ 의 전개식에서 x^{10} 의 계수를 구하시오.[4점−1004−교육청]

65. 자연수 n에 대하여 상용로그 $\log 3^n$ 의 지표를 a_n 이라 할 때, 수열 $\{b_n\}$을

$$b_n = \begin{cases} 2 & (a_{n+1} > a_n) \\ -1 & (a_{n+1} = a_n) \end{cases}$$

이라 정의하자. $\sum_{k=1}^{2010} b_k$ 의 값은? (단, $\log 3 = 0.4771$로 계산한다.)

[4점−1008−대성]

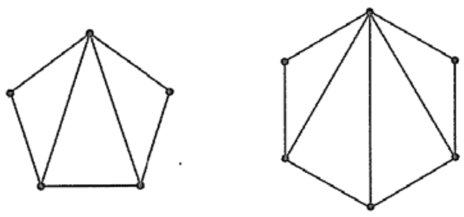
① 855 ② 858 ③ 861
④ 864 ⑤ 867

66. 자연수 n에 대하여 $\left(n+\frac{1}{4}\right)^2$에 가장 가까운 정수를 a_n이라 하자. 예를 들어, $a_1 = 2$, $a_2 = 5$이다. 이때, $\sum_{k=1}^{10} a_k$의 값을 구하시오.

[4점−1010−메가]

67. 각 자리의 숫자가 1 또는 2이고, 각 자리의 숫자의 순서를 반대로 바꾸어 얻어진 수와 원래의 수를 합하면 모든 자리의 숫자가 3이 되는 두 자리 이상의 자연수가 있다. 예를 들어 자연수 12에 대하여 $12+21=33$, 자연수 1122에 대하여 $1122+2211=3333$이다. 이러한 자연수를 작은 것부터 차례대로 a_1, a_2, a_3, $\cdots$이라 할 때, $a_7 + a_{14}$의 각 자리의 숫자의 합을 구하시오.[4점−1007−대성]

68. 4 이상의 자연수 n에 대하여 한 변의 길이가 1인 정n각형의 한 꼭짓점에서 $(n-3)$개의 대각선을 그려 나누어지는 $(n-2)$개의 삼각형의 넓이를 원소로 하는 집합이 있다. 이 집합의 원소의 개수를 a_n이라 할 때, 다음 그림은 $a_5=2$, $a_6=2$임을 나타내는 것이다.



$a_5=2$ $a_6=2$

임의의 자연수 k가 $a_{10k}+a_{20k+1}=pk+q$를 만족시킬 때, 상수 p, q에 대하여 $p+q$의 값은?[4점-1009-대성]

① 10 ② 11 ③ 12
④ 13 ⑤ 14

69. 자연수 720의 모든 양의 약수를 작은 수부터 차례로 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_n이라 할 때, 등식 $\sum_{k=1}^{n}\log a_k=p\log2+q\log3+r$를 만족시키는 세 자연수 p, q, r의 합 $p+q+r$의 값을 구하시오.

[4점-1005-중앙]

70. 첫째항이 1, 공비가 2인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$을 다음과 같이 정의한다.

> $a_k=n$을 만족하는 자연수 k가 존재할 때, $b_n=k$
> $a_k=n$을 만족하는 자연수 k가 존재하지 않을 때, $b_n=0$

예를 들어, $b_1=1$, $b_2=2$, $b_3=0$이다. 이때, $\sum_{k=1}^{1000}b_k$의 값을 구하시오.[4점-1005-중앙]

71. 수열 $\{S_n\}$을 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left\{(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}\cdot k\right\}$로 정의할 때, S_{100}의 값을 구하시오.[4점-1009-종로]

72. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{S_k}{2k-1} = n^2 + 2n\,(n = 1, 2, 3, \cdots)$$

이 성립한다. 이때, a_{10}의 값은?[4점-1007-메가]

① 73 ② 74 ③ 75
④ 76 ⑤ 77

73. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$$S_n = 3a_n - 2 \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

인 관계가 성립할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

[4점-1010-종로]

<보 기>

ㄱ. $S_1 = 1$ ㄴ. $\dfrac{a_{100}}{a_{99}} = \dfrac{2}{3}$

ㄷ. $S_{100} = 2(a_{101} - 1)$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

74. 첫째항이 1인 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $a_n = \dfrac{2{S_n}^2}{2S_n - 1}$ $(n \geq 2)$이 성립한다. a_6의 값은?

[4점-1004-대성]

① $-\dfrac{1}{99}$ ② $-\dfrac{2}{99}$ ③ $-\dfrac{1}{33}$
④ $-\dfrac{4}{99}$ ⑤ $-\dfrac{2}{33}$

75. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\log a_n = n + \log n$$

을 만족할 때, $\left[\log\left(\sum_{n=1}^{9} a_n\right)\right]$의 값을 구하시오. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)[4점-1011-중앙]

76. 양의 실수의 집합을 P라 할 때, 두 함수

$f : P \to \{n \mid n\text{은 정수}\}$

$g : P \to \{a \mid 0 \le a < 1\text{인 실수}\}$

가 모든 양의 실수 x에 대하여 $3^{f(x)+g(x)} = x$를 만족시킨다. $\sum_{k=1}^{99} f(9k)$의 값을 구하시오.[4점–1008–대성]

77. 세 집합 $X = \{x \mid x\text{는 양의 실수}\}$, $Y = \{y \mid -1 < y \le 0,\ y\text{는 실수}\}$, $Z = \{z \mid z\text{는 정수}\}$에 대하여 두 함수

$f : X \to Z,\ g : X \to Y$

가 $2^{f(x)+g(x)} = x$를 만족한다. $\sum_{k=1}^{15} f(k) + \sum_{k=1}^{15} g(k+1) = \log_2 A$를 만족하는 양수 A에 대하여 $A = 2^m \times (\text{홀수})$ 꼴로 나타낼 때, 정수 m의 값을 구하시오.[4점–1003–종로]

78. 자연수 n에 대하여 $\sqrt{n}$의 정수부분을 a_n이라 할 때,

$$\sum_{m=1}^{10} \left(\frac{1}{2m+1} \sum_{k=m^2}^{m^2+2m} a_k \right)$$

의 값을 구하시오.[4점–1007–메가]

79. 그림과 같이 자연수를 다음 규칙에 따라 나열하였다.

[규칙1] 1 행에는 2, 3, 6 의 3 개의 수를 차례대로 나열한다.
[규칙2] $n+1$ 행에 나열된 수는 1 열에 2, 2 열부터는 n 행에 나열된 각 수에 2를 곱하여 차례대로 나열한다.

	[1열]	[2열]	[3열]	[4열]	[5열]	…
[1행]	2	3	6			
[2행]	2	4	6	12		
[3행]	2	4	8	12	24	
⋮			⋮			

10 행에 나열된 모든 자연수의 합을 S라 할 때, $S = p \times 2^9 - 2$ 이다. 이 때, p 의 값을 구하시오.[3점–1004–교육청]

80. 첫째항이 1인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} (2k-1)a_k$$

를 만족시킬 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점–1009–대성]

<보 기>

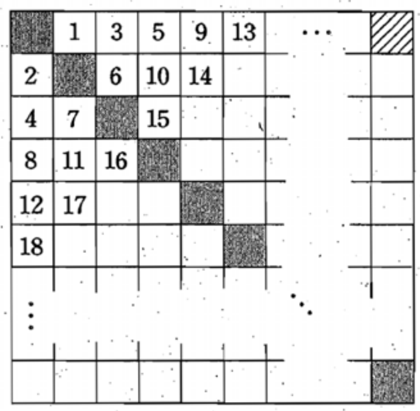
ㄱ. $a_3 = 3$

ㄴ. $a_{10} = 18a_9$

ㄷ. $a_{15} = 2^{14} \cdot 14!$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

81. 40행 40열로 이루어진 표가 있다. n행 n열 ($n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 40$)을 제외한 나머지 칸에 1행 2열부터 시작하여 그림과 같이 자연수를 규칙적으로 배열할 때, 1행 40열 (빗금 친 부분)에 들어갈 자연수는?[4점-1005-중앙]



① 769 ② 767 ③ 765
④ 763 ⑤ 761

82. 자연수 중에서 3의 배수의 집합을 A, 4의 배수의 집합을 B라 할 때, 집합 $(A\cup B)-(A\cap B)$의 원소들을 제외하고 남아 있는 수를 크기순으로 나열하여 수열

$$\{a_n\}:1,\ 2,\ 5,\ 7,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ \cdots$$

을 만들었다.

	제1열	제2열	제3열	제4열	제5열	제6열	제7열	제8열	제9열	제10열
제1행	1	2	~~3~~	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	10
제2행	11	12	13	14	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
제3행	~~21~~	22	23	24	25	26	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
제4행	31	~~32~~	~~33~~	34	35	36	37	38	~~39~~	~~40~~
제5행	41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	46	47	48	49	50
제6행	~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	55	~~56~~	~~57~~	58	59	60
제7행	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

위의 그림에서 a_{2011}이 m행 n열의 수일 때, $m+n$의 값을 구하시오.[4점-1008-대성]

83. 1부터 1000까지의 자연수를 다음 표와 같이 나열하였다.

	제1열	제2열	제3열	제4열	…
제1행	1	2	5	10	…
제2행	4	3	6	11	…
제3행	9	8	7	12	…
제4행	16	15	14	13	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

제1행에서 제2열의 수부터 차례로 이어 붙여 만든 숫자열

25101726⋯962

의 맨 왼쪽에서 70번째에 있는 수는?[4점-1004-종로]

① 0 ② 2 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

84. 다음 표와 같이 각 행에 일정한 규칙으로 홀수를 배열해 나간다. 이 때 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점-1010-종로]

1행 ☞	1	1	1	1	1	1	…
2행 ☞	1	3	5	7	9	11	…
3행 ☞	1	5	9	13	17	21	…
4행 ☞	1	7	13	19	25	31	…
5행 ☞	1	9	17	25	33	41	…
⋮	…	…	…	…	…	…	⋱

<보 기>

ㄱ. 제4행에 있는 두 자리 수의 최댓값은 97이다.
ㄴ. 두 자리 자연수가 1개만 나타나는 행의 개수는 25이다.
ㄷ. 표에서 61은 모두 8번 나타난다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

85. 각 자리의 숫자가 0 또는 1로만 이루어져 있는 모든 자연수를 작은 것부터 차례로 나열한 수열을 $\{a_n\}$이라 하자. 즉,

$\{a_n\}$: 1, 10, 11, 100, 101, 111, 1000, 1001, 1010, ⋯

이다. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점−1007−메가]

<보 기>

ㄱ. 수열 $\{a_n\}$의 항 중에서 10자리의 자연수의 개수는 2^{10}이다.

ㄴ. $\sum_{k=8}^{15} a_k = 8444$

ㄷ. $\sum_{k=2^{10}}^{2^{11}-1} a_k = 20^{10} + \sum_{k=1}^{2^{10}-1} a_k$

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

86. 자연수 $n\,(n \geq 2)$에 대하여 $1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_k \leq 4n+1$을 만족하는 모든 홀수 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_k$ 중 서로 다른 n개의 합으로 만들어지는 수 전체의 집합을 A_n이라 하자. 예를 들어 $n=2$일 때, 1, 3, 5, 7, 9중에서 서로 다른 2개의 홀수의 합으로 만들어지는 수는 전체의 집합 $A_2 = \{4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14,\ 16\}$이다. 이 때, 집합 A_{20}의 원소의 개수를 구하시오.[4점−1003−중앙]

87. 그림과 같이 $a_1 = 0,\ a_2 = 1,\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$을 만족하는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 1행에는 a_1부터 a_{20}까지 차례대로 나열하고, 2행에는 a_2부터 a_{21}까지 차례대로 나열한 다음, 왼쪽부터 네 개의 수를 묶어 이차정사각행렬을 A_1부터 A_{10}까지 만든다.

1행	0	1	1	2	3	5	8	13	⋯	a_{19}	a_{20}
2행	1	1	2	3	5	8	13	21	⋯	a_{20}	a_{21}

A_n : $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ $A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$ $A_4 = \begin{pmatrix} 8 & 13 \\ 13 & 21 \end{pmatrix}$ ⋯ $A_{10} = \begin{pmatrix} a_{19} & a_{20} \\ a_{20} & a_{21} \end{pmatrix}$

다음 중 행렬 $A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_{10} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$의 $(2,\ 2)$성분 s와 같은 것은?[4점−1004−대성]

① $a_{22}+2$ ② $a_{22}+1$ ③ a_{22}
④ $a_{22}-1$ ⑤ $a_{22}-2$

88. 자연수 n에 대하여 집합 A_n은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $A_1 = \{1\}$
(나) 집합 A_n은 n개의 연속한 자연수의 집합이다.
(다) 집합 A_{n+1}의 원소 중에서 가장 작은 수는 집합 A_n의 원소 중에서 가장 큰 수보다 n만큼 크다.

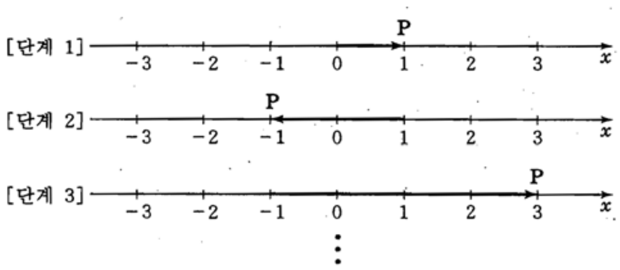
예를 들어 $A_2 = \{2,\ 3\}$, $A_3 = \{5,\ 6,\ 7\}$이다. 집합 A_{21}의 원소 중
가장 작은 수는?[4점−1010−대성]

① 398 ② 399 ③ 400
④ 401 ⑤ 402

89. 수직선 위를 움직이는 동점 P는 원점을 출발하여 다음 [단계]와 같은 순서로 움직인다.

> [단계 1] 처음 1초 동안 양의 방향으로 1만큼 움직인다.
> [단계 2] [단계 1]에서 움직인 직후 다음 1초 동안은 음의 방향으로 2만큼 움직인다.
> [단계 3] [단계 2]에서 움직인 직후 다음 1초 동안은 양의 방향으로 2^2만큼 움직인다.
> ⋮
> [단계 $2m$] [단계 $2m-1$]에서 움직인 직후 다음 1초 동안은 음의 방향으로 2^{2m-1}만큼 움직인다.
> [단계 $2m+1$] [단계 $2m$]에서 움직인 직후 다음 1초 동안은 양의 방향으로 2^{2m}만큼 움직인다.
> ⋮

동점 P가 좌표가 500인 점을 처음으로 지나는 것은 원점을 출발한지 a초와 $a+1$초 사이이다. 자연수 a의 값을 구하시오. (단, m은 자연수이다.)[4점-1005-대성]



90. 8개의 항으로 이루어진 수열 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_8$은 각 항이 0 또는 1이고, 임의의 연속하는 세 항은 0과 1이 모두 적어도 한 번 나타난다고 한다. 다음은 이러한 수열이 몇 가지가 있는지 구하는 과정이다.

> 3 이상의 자연수 n에 대하여 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n$을 위와 같이 규칙으로 나열하는 경우의 수를 $f(n)$(가지)이라 하자.
> 이웃한 두 항이 같으면 $=$, 같지 않으면 $\neq$를 두 항 사이에 둘 때, $=$가 연속하지 않도록 나열하는 방법을 생각하면 된다.
> $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_{n+2}$에 대하여
> (ⅰ) $a_{n+1} \neq a_{n+2}$일 때,
> $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_{n+1}$ 다음에 $a_{n+1} \neq a_{n+2}$가 되는 a_{n+2}를 배열하면 되므로 $\boxed{(가)}$(가지)
> (ⅱ) $a_{n+1} = a_{n+2}$일 때,
> $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n$ 다음에 $a_n \neq a_{n+1} = a_{n+2}$가 되는 $a_{n+1} = a_{n+2}$를 배열하면 되므로 $\boxed{(나)}$가지
> (ⅰ),)ⅱ)에서
> $f(n+2) = \boxed{(가)} + \boxed{(나)}$ $(n \geq 3)$
> 이고 $f(3)=6,\ f(4)=10$이므로
> $f(8) = \boxed{(다)}$

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?[3점-1008-대성]

① $f(n),\ f(n+1),\ 58$
② $f(n),\ f(n+1),\ 68$
③ $f(n),\ f(n+1),\ 72$
④ $f(n+1),\ f(n),\ 58$
⑤ $f(n+1),\ f(n),\ 68$

91. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$을

$$a_n = n(n+1),\ b_n = (-1)^{n-1}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

이라 하자. 다음은 $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k$를 구하는 과정의 일부이다.

> $S_n = a_1 = a_2 + a_3 - \cdots + (-1)^{n-1}a_n$이라 하면
> 자연수 n에 대하여
> (ⅰ) $n = 2m\ (m = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$일 때
> $S_n = a_1 - a_2 + a_3 - \cdots - a_{2m}$
> $= (a_1 + a_3 + \cdots + a_{2m-1}) - (a_2 + a_4 + \cdots + a_{2m})$
> $= \boxed{(가)}$
> (ⅱ) $n = 2m-1\ (m = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$일 때
> $S_n = S_{2m} + a_{2m}$
> $= \boxed{(나)}$
> 이다.

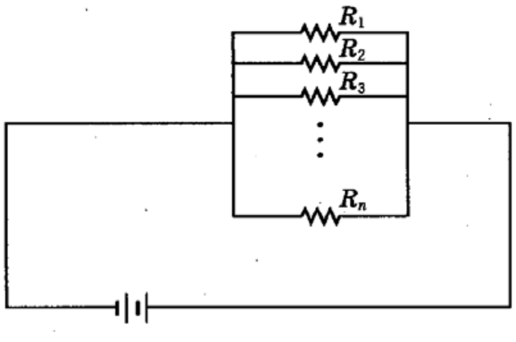
위의 (가), (나)에 알맞은 n에 대한 다항식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, $f(10)+g(10)$의 값은?[4점-1010-비상]

① 135 ② 140 ③ 145
④ 150 ⑤ 155

92. 크기가 R_1, R_2, R_3, $\cdots$, R_n인 n개의 저항을 병렬로 연결하였을 때, 합성저항의 크기를 R라 하면

$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \cdots + \frac{1}{R_n}$인 관계가 성립한다.

크기가 $R_k = \sqrt{k} + \sqrt{k+1}\ (k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$인 n개의 저항 R_1, R_2, R_3, $\cdots$, R_n을 병렬로 연결하였을 때, 합성저항의 크기가 $\frac{1}{9}$ 이하가 되도록 하는 자연수 n의 최솟값을 구하시오.[4점-1010-대성]



93. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 1$이고, $a_n = n^2 + \sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)a_k\ (n \geq 2)$를 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n을 구하는 과정의 일부이다.

> 주어진 식으로부터 $a_2 = 7$이다.
> 자연수 $n\ (n \geq 3)$에 대하여
> $a_n = n^2 + \sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)a_k = n^2 + \sum_{k=1}^{n-2}(2k+1)a_k + (2n-1)a_{n-1}$
> $= n^2 + a_{n-1} - \boxed{(가)} + (2n-1)a_{n-1}$이므로,
> $a_n + 1 = 2n(a_{n-1}+1)$이 성립한다. 따라서
> $a_n + 1 = n \times (n-1) \times \cdots \times 3 \times \boxed{(나)} \times (a_2 + 1)$
> $= 4 \times n! \times \boxed{(나)}$이다.

위의 (가)에 알맞은 식을 $f(n)$, (나)에 알맞은 식을 $g(n)$이라 할 때, $f(9) \times g(9)$의 값은?[4점-1009-평가원]

① 2^{13} ② 2^{14} ③ 2^{15}
④ 2^{16} ⑤ 2^{17}

94. 다음 규칙에 따라 자연수를 나열한다.

> 규칙1 : 제1행에는 자연수를 차례로 나열한다.
> 규칙2 : 제n행의 m열의 수 k가 n의 배수이면 제$(n+1)$행 m열에 $k+1$을 쓰고, 그렇지 않으면 k를 쓴다.

위의 규칙에 따라 자연수를 나열하면 다음과 같다.

	제1열	제2열	제3열	제4열	제5열	제6열	제7열	제8열	…
제1행	1	2	3	4	5	6	7	8	…
제2행	2	3	4	5	6	7	8	9	…
제3행	3	3	5	5	7	7	9	9	…
제4행	4	4	5	5	7	7	10	10	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[4점-1005-종로]

<보 기>

ㄱ. 제6행에서 제7열의 수는 11이다.
ㄴ. 제7열에서 11은 6번 나타난다.
ㄷ. 제42열에서 처음으로 44가 나타나는 행을 제43행이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

95. 1부터 연속된 자연수를 아래와 같이 제n행에는 n개의 자연수가 오도록 나열하였다.

제1행	1
제2행	2 3
제3행	4 5 6
제4행	7 8 9 10
제5행	11 12 13 14 15
제6행	16 17 18 19 20 21
⋮	⋮

제19 행에 나열된 모든 자연수의 평균을 구하시오.
[4점–1003–교육청]

96. 다음과 같이 자연수를 규칙적으로 써 내려갈 때, 제20 행에 나열된 모든 수의 합을 구하여라.[4점–1005–비상]

제1행	1
제2행	2 3
제3행	4 1 5
제4행	6 2 3 7
제5행	8 4 1 5 9
제6행	10 6 2 3 7 11
제7행	12 8 4 1 5 9 13
⋮	⋮

97. 다음과 같은 규칙으로 자연수를 써 내려갈 때, 2^{20}의 개수를 구하시오.[4점–1008–비상]

[제1행]	2, 4
[제2행]	4, 8, 16
[제3행]	8, 16, 32, 64
⋮	⋮
[제n행]	2^n, 2^{n+1}, 2^{n+2}, $\cdots$,2^{2n}
⋮	⋮

98. 모든 자연수를 다음과 같은 규칙으로 배열하였다.

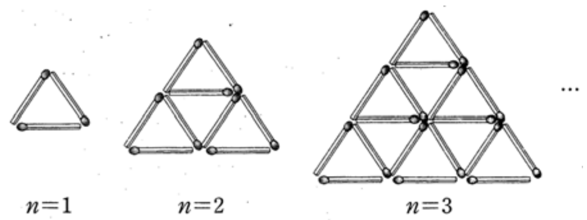
(가) 제1 행에는 1을 배열하고, 제2 행에는 2, 4를 배열한다.
(나) 모든 자연수 n에 대하여 제$(n+2)$행의 가장 작은 수는 제n행의 가장 큰 수보다 2 만큼 크다.
(다) 모든 자연수 n에 대하여 제$(2n-1)$행에는 $(2n-1)$개의 연속한 홀수를, 제 $2n$ 행에는 $2n$개의 연속한 짝수를 작은 것부터 차례로 배열한다.

다음은 위의 규칙대로 자연수를 배열한 것의 일부분이다.

1행	1							
2행	2	4						
3행	3	5	7					
4행	6	8	10	12				
5행	9	11	13	15	17			
6행	14	16	18	20	22	24		
7행	19	21	23	25	27	29	31	
8행	26	28	30	32	34	36	38	40
			⋮					

제1 행부터 제n행까지 나열된 수의 집합을 S_n, 자연수 1부터 제 n 행의 가장 큰 자연수까지 연속한 모든 자연수의 집합을 T_n 이라 하자. 예를 들어 $S_3=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7\}$, $T_3=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$이다. 차집합 $T_{20}-S_{20}$ 의 원소의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오.[4점–1009–대성]

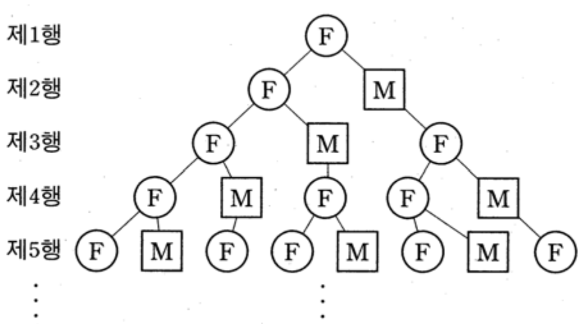
99. 그림과 같이 길이가 같은 성냥개비를 이용하여 정삼각형을 만들어 나간다. 한 변에 놓인 성냥개비의 개수가 $n\,(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$개일 때, 세 개의 성냥개비로 만들어지는 작은 정삼각형의 개수를 a_n, 성냥개비의 총 개수를 b_n이라 하자. 이를 테면 $a_1=1,\ a_2=4,\ b_1=3,\ b_2=9$이다.



이때 $a_{100}+b_{100}-a_{99}-b_{99}$의 값을 구하시오.[4점-1004-종로]

100. 두 문자 F와 M을 다음 규칙에 따라 F부터 시작하여 그림과 같이 적어나간다.

㈎ 제1행에는 F를 적는다.
㈏ 제n행 $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 에 적힌 각 F에 대하여 제$(n+1)$행에는 F와 M을 적는다.
㈐ 제n행 $(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$에 적힌 각 M에 대하여 제$(n+1)$행에는 F만 적는다.



제n행에 적힌 F의 개수를 a_n, M의 개수를 b_n이라 하자. 예를 들어 $a_3=2,\ b_3=1$이다 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[4점-1004-메가]

<보 기>

ㄱ. $b_{10}=a_9$
ㄴ. $a_{n+1}=a_n+b_n\ \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$
ㄷ. $a_9+b_9=47$

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

101. 1부터 연속된 자연수를 나열하여 각 자릿수로 다음과 같은 수열을 만들었다.

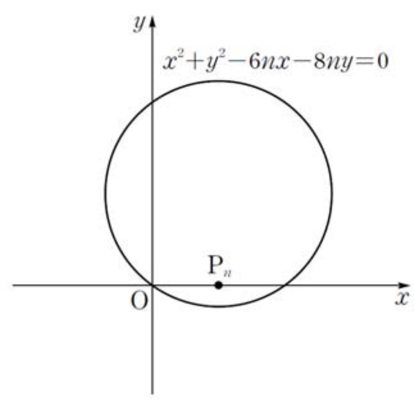
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1, 0, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 4, $\cdots$

이 수열의 제n항부터 연속된 네 개의 항이 차례로 2, 0, 1, 0, 일 때, 자연수 n의 최솟값은?[4점-1003-교육청]

① 2960　② 2964　③ 2968
④ 2972　⑤ 2976

102. 좌표평면 위의 원 $x^2+y^2-6nx-8ny=0$ $(n=1,2,3,\cdots)$의 현 중에서 점 $\mathrm{P}_n(3n,\,0)$을 지나고 길이가 자연수인 서로 다른 현의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{k=1}^{10}a_k$의 값을 구하시오.

[4점-1010-메가]



103. 자연수를 1부터 1000까지 크기 순서대로 나열한 후 다음과 같은 방법으로 수를 차례로 지운다.

첫 번째 시행에서는 짝수 번째 수를 모두 지운다. 따라서, 첫 번째 시행 후 남은 수는 1, 3, 5, 7, 9, 11, ⋯, 999이다.

두 번째 시행에서는 첫 번째 시행 후 남은 수 중에서 홀수 번째 수를 모두 지운다. 따라서, 두 번째 시행 후 남은 수는 3, 7, 11, ⋯, 999이다.

세 번째 시행에서는 두 번째 시행 후 남은 수 중에서 짝수 번째 수를 모두 지운다.

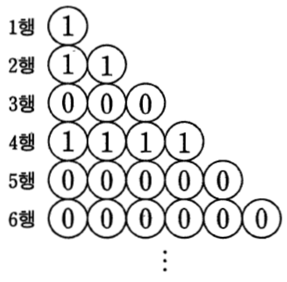
네 번째 시행에서는 세 번째 시행 후 남은 수 중에서 홀수 번째 수를 모두 지운다.

이와 같이 짝수 번째 수와 홀수 번째 수를 번갈아 가며 모두 지우는 시행을 계속했을 때, 여섯 번째 시행 후 남아 있는 수 중에서 10번째 수는?[4점-1008-중앙]

① 567 ② 619 ③ 649
④ 673 ⑤ 713

104. 그림과 같이 1행에는 1개, 2행에는 2개, ⋯, n행에는 n개의 원을 나열하고 그 안에 다음 규칙에 따라 0 또는 1을 써 넣는다.

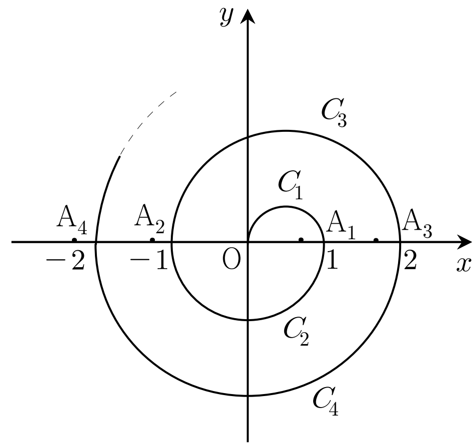
> (가) 1행의 원 안에는 1을 써 넣는다.
> (나) $n \ge 2$일 때, 1행부터 $(n-1)$행까지 나열된 모든 원안의 수의 합이 n이상이면 n행에 나열된 모든 원 안에 0을 써 넣고, n미만이면 n행에 나열된 모든 원 안에 1을 써 넣는다.



1행부터 32행까지 나열된 원 안에 써 넣은 모든 수의 합을 구하시오.

[4점-1009-평가원]

105. 그림과 같이 $A_1(1, 0)$, $A_2(-1, 0)$, $A_3(2, 0)$, $A_4(-2, 0)$, ⋯ 에 대하여 $\overline{OA_1}$ 을 지름으로 하는 반원을 C_1, $\overline{A_1A_2}$ 를 지름으로 하는 반원을 C_2, $\overline{A_2A_3}$ 를 지름으로 하는 반원을 C_3라 하자.



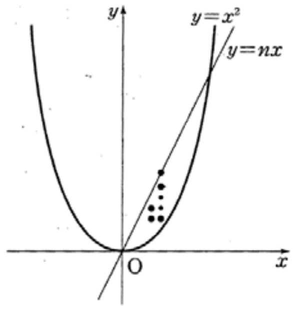
이와 같은 방법으로 만든 반원 C_k $(k=1, 2, 3, \cdots)$의 호의 길이를 l_k라 하자. $\sum_{k=1}^{n} l_k = 189\pi$ 를 만족시키는 n에 대하여, A_n의 좌표가 $(a, 0)$일 때, $a+50$의 값은?[4점-1011-대전교]

① 27 ② 33 ③ 39
④ 64 ⑤ 69

106. 집합

$$S_n = \{ (x, y) \mid x^2 < y \le nx,\ x\text{와 } y\text{ 는 자연수}\}$$

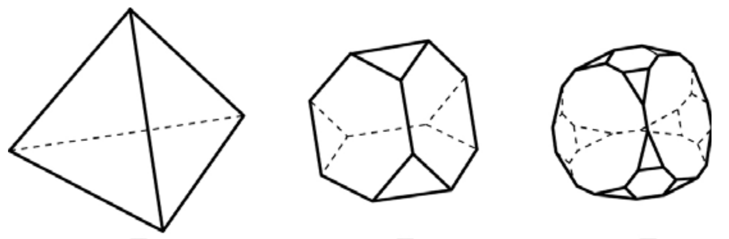
에 속하는 원소의 개수를 a_n $(n=1, 2, 3, \cdots)$이라 하자. $\sum_{k=2}^{10} \frac{1}{a_k}$ 의 값은?[4점-1008-종로]



① $\frac{7}{5}$ ② $\frac{79}{55}$ ③ $\frac{81}{55}$
④ $\frac{83}{55}$ ⑤ $\frac{17}{11}$

107. 정사면체 T_1의 모든 모서리의 삼등분점을 잡는다. T_1의 각 꼭짓점에서 가까운 삼등분점 3개와 그 꼭짓점을 모두 이어서 만든 사면체 4개를 잘라내어 팔면체 T_2를 만든다.

다시 팔면체 T_2의 모든 모서리의 삼등분점을 잡는다. T_2의 각 꼭짓점에서 가까운 삼등분점 3개와 그 꼭짓점을 모두 이어서 만든 사면체 12개를 잘라내어 이십면체 T_3을 만든다.



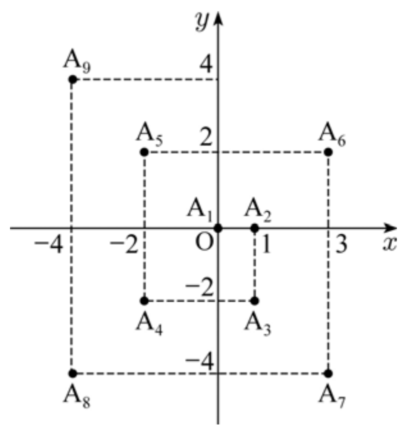
이와 같은 방법으로 다면체 T_4, T_5, T_6을 만들 때, 다면체 T_6의 면의 개수는?[4점-1010-교육청]

① 480 ② 482 ③ 484
④ 486 ⑤ 488

108. 좌표평면에서 점 A_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$을 다음 규칙에 따라 정한다.

> (가) 점 A_1의 좌표는 $(0,\ 0)$이다.
> (나) 점 A_{4n-3}을 x축의 양의 방향으로 $(4n-3)$만큼 평행이동 시킨 점은 A_{4n-2}이다.
> (다) 점 A_{4n-2}를 y축의 음의 방향으로 $(4n-2)$만큼 평행이동 시킨 점은 A_{4n-1}이다.
> (라) 점 A_{4n-1}을 x축의 음의 방향으로 $(4n-1)$만큼 평행이동 시킨 점은 A_{4n}이다.
> (마) 점 A_{4n}을 y축의 양의 방향으로 $4n$만큼 평행이동시킨 점은 A_{4n+1}이다.

그림은 위의 규칙대로 정한 점 A_1, A_2, A_3, $\cdots$의 일부를 나타낸 것이다.

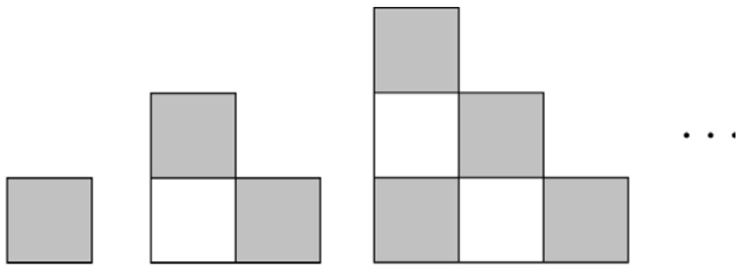


점 A_{50}의 좌표를 $(p,\ q)$라 할 때, $p+q$의 값은?[4점-1003-교육청]

① 41 ② 43 ③ 45
④ 47 ⑤ 49

109. 한 면은 흰 색, 다른 면은 검은색인 같은 크기의 정사각형 모양의 카드를 다음 규칙에 의해 그림과 같이 놓는다.

> [1단계] 검은색 면이 보이도록 카드를 한 개 놓는다.
> [2단계] 1 단계에서 놓여진 카드를 흰 색 면이 보이도록 뒤집고 그 카드 위쪽과 오른쪽에 검은색 면이 보이도록 두 개의 카드를 놓는다.
> [3단계] 2 단계에서 놓여진 모든 카드의 색이 바뀌도록 뒤집고 2 단계에서 새로 놓은 카드의 위쪽과 오른쪽에 검은색 면이 보이도록 세 개의 카드를 놓는다.
> …
> [n 단계] $n-1$ 단계에서 놓여진 모든 카드의 색이 바뀌도록 뒤집고 $n-1$ 단계에서 새로 놓은 카드의 위쪽과 오른쪽에 검 은색 면이 보이도록 n 개의 카드를 놓는다.



<1단계> <2단계> <3단계>

n 단계에서 보이는 면의 색이 검은색인 카드의 개수를 a_n 이라 할 때, $a_{n+1}-a_n=15$ 가 되는 모든 n 의 값의 합은? [4점-1007-교육청]

① 29 ② 31 ③ 49
④ 57 ⑤ 65

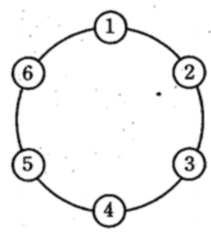
110. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1=2,\ a_{n+1}=3a_n-3\ (n=1,\,2,\,3,\,\cdots)$$

이 성립할 때, a_6-a_5 의 값은?[3점-1010-교육청]

① 27 ② 81 ③ 243
④ 729 ⑤ 2187

111. 그림과 같이 1부터 6까지 적힌 말판이 있다. 말을 1에 위치시키고 다음과 같은 규칙에 따라 시계 방향으로 움직인다.



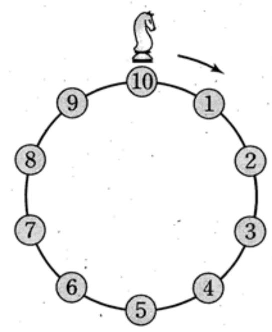
> 1회에는 말을 1칸 1번 움직인 후 멈춘다.
> 2회에는 말을 2칸씩2번 움직인 후 멈춘다.
> 3회에는 말을 3칸씩3번 움직인 후 멈춘다.
> …
> n회에는 말을 n칸씩n번 움직인 후 멈춘다.

이와 같은 방법으로 움직이면 1회에는 말이 2에서 멈추고, 2회에는 말이 6에서 멈춘다. 이와 같은 방법으로 1회부터 실시하였을 때, 100회에 말이 멈춘 위치에 적힌 숫자는?[4점-1003-중앙]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

112. 그림과 같이 1부터 10까지의 자연수가 적힌 말판이 있다. 이 말판에서 1개의 말을 시계 방향으로 다음과 같은 규칙에 따라 움직인다.

> 규칙 Ⅰ: 처음 말을 10이 적힌 위치에 놓는다.
> 규칙 Ⅱ: 첫 번째 시행에서는 2칸, 두 번째 시행에서는 4칸, 세 번째 시행에서는 6칸, …, n번째 시행에서는 $2n$칸씩 말을 움직인다.



이와 같이 말을 움직이면 말은 2, 6, …의 숫자가 적힌 위치에 차례대로 놓이게 된다. 말을 계속해서 움직일 때, 2010번째 시행 후 말이 놓인 위치에 적힌 숫자는?[4점-1008-중앙]

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

113. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$1\cdot 2a_1+3\cdot 4a_2+5\cdot 6a_3+\cdots+(2n-1)\cdot 2na_n \ge n$$

을 만족시킬 때, 다음은 부등식

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n \ge \boxed{(가)}$$

이 성립함을 증명한 것이다.

<증 명>

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)(1\cdot 2a_1)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)(3\cdot 4a_2)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)(5\cdot 6a_3)$$
$$+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)\{(2n-1)\cdot 2na_n\}$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)(1\cdot 2a_1)$$
$$+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)(1\cdot 2a_1+3\cdot 4a_2)$$
$$+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)(1\cdot 2a_1+3\cdot 4a_2+5\cdot 6a_3)+\cdots$$
$$+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)\{1\cdot 2a_1+3\cdot 4a_2+\cdots+(2n-1)\cdot 2na_n\}$$
$$\ge\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)$$
$$+3\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots+\boxed{(나)}$$
$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}$$
$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}-\boxed{(다)}$$

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?[4점-1003-교육청]

	(가)	(나)	(다)
①	$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$	$\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)$	$2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$
②	$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$	$n\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)$	$2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$
③	$\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{n+k}$	$n\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)$	$2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$
④	$\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{n+k}$	$n\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)$	$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$
⑤	$\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{n+k}$	$\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)$	$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$

114. 자연수 n에 대하여 이차방정식 $x^2-2x-n=0$의 양의 실근을 α라 할 때, 수열 $\{a_n\}$의 제n항을 $a_n=[\alpha]$라 하자. 다음은 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n^2항까지의 합이 $\frac{1}{6}(4n^3+3n^2+11n-6)$임을 증명한 것이다. (단, $[\alpha]$는 α보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

<증 명>

자연수 k에 대하여 $f(x)=x^2-2x-k$라고 놓으면 $-k<0$이므로 이차방정식 $x^2-2x-k=0$은 양의 실근 α와 음의 실근을 갖는다.

$[\alpha]=j$라 하면 $j\le a<j+1$이고 $f(\alpha)=0$이므로 $f(j)\le 0,\ f(j+1)>0$에서 $\boxed{(가)}\le k<j^2-1$이다.

이제 $a_k=j$를 만족하는 자연수 $k(1\le k\le n^2)$의 개수를 구해 보자.

(i) $j=1$일 때 $a_k=1$이므로 $[\alpha]=1$을 만족하는 자연수 k는 존재하지 않는다.

(ii) $j=2$일 때 $a_k=2$이므로 $[\alpha]=2$인 양의 정수 k는 1, 2로 k의 개수는 2이다.

(iii) $3\le j<n+1$일 때 $a_k=j$이므로 $[\alpha]=j$인 양의 정수 k의 개수는 $j^2-1-(\boxed{(가)})$이다.

(iv) $j=n+1$일 때 $a_k=n+1$이므로 $[\alpha]=n+1$인 양의 정수 k는 $n^2-1,\ n^2$으로 k의 개수는 2이다.

그러므로 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n^2항까지의 합은

$$4+\sum_{j=3}^{n}\boxed{(나)}+\boxed{(다)}$$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n^2항까지의 합은 $\frac{1}{6}(4n^3+3n^2+11n-6)$이다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?[4점-1003-비상]

	(가)	(나)	(다)
①	j^2-2j	$j(2j-1)$	$2n+2$
②	j^2-2j	$j(2j-1)$	$2n^2-1$
③	j^2-2j	$j(2j+1)$	$2n+2$
④	j^2-2j+1	$j(2j-1)$	$2n+2$
⑤	j^2-2j+1	$j(2j+1)$	$2n^2-1$

115. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$$(n+1)^n(2n+1)^n \geq 6^n(n!)^2$$

이 성립함을 증명한 것이다.

<증 명>

산술평균과 기하평균의 관계에서

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \geq \boxed{(가)}$$

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \left(\frac{n-1+2}{2}\right)^2 \geq (n-1)\cdot 2$$

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \left(\frac{n-2+3}{2}\right)^2 \geq (n-2)\cdot 3$$

$$\vdots$$

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1+n}{2}\right)^2 \geq 1\cdot n$$

위의 식을 각 변끼리 모두 곱하면

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^{2n} \geq \boxed{(나)}$$

따라서

$$(n+1)^n(2n+1)^n = (n+1)^n\left(\frac{4n+2}{2}\right)^n$$

$$\geq (n+1)^n\left(\frac{\boxed{(다)}}{2}\right)^n = 6^n\left(\frac{n+1}{2}\right)^{2n}$$

$$\geq 6^n(n!)^2$$

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?[3점-1007-메가]

	(가)	(나)	(다)
①	n	$(n!)^2$	$n+1$
②	n	$(n!)^4$	$n+1$
③	n	$(n!)^2$	$3n+3$
④	n^2	$(n!)^4$	$3n+3$
⑤	n^2	$(n!)^2$	$6n+6$

수학적귀납법과 순서도

1. 다음과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$이 있다.

$$a_1=1,\ \frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{1}{2}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

a_{20}의 값은?[3점-1003-교육청]

① $\frac{2}{21}$ ② $\frac{4}{21}$ ③ $\frac{5}{21}$
④ $\frac{2}{7}$ ⑤ $\frac{3}{7}$

2. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 세 조건을 만족시킨다.

(가) $a_n>0$
(나) $\log_3 a_{n+2}+\log_3 a_n=2\log_3 a_{n+1}$
(다) $\log_3 a_{n+2}-\log_3 a_n=\log_3 a_2$

$a_1a_2=2$일 때, a_{15}의 값은?[3점-1003-비상]

① 16 ② 32 ③ 64
④ 128 ⑤ 256

3. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

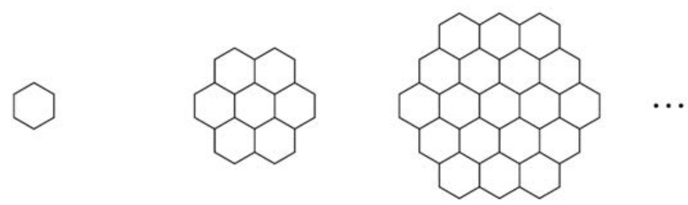
$$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$$

를 만족시킨다. $a_2=-1,\ a_3=2$일 때, 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제10항까지의 합은?[3점-2010-대수능]

① 95 ② 90 ③ 85
④ 80 ⑤ 75

4. $a_1=5,\ a_{n+1}=a_n^{\ 5}\ \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\log_5 a_{10}$은 m 자리 정수이다. 이 때, m의 값을 구하시오. (단, $\log 2=0.3010$으로 계산한다.)[3점-1004-교육청]

5. 그림과 같이 크기가 같은 정육각형으로 만들어진 도형이 있다. [단계 n]의 정육각형의 개수를 a_n이라 하자. 예를 들어 $a_1=1,\ a_2=7$이다. a_{11}의 값을 구하시오.[3점-1007-대성]



[단계 1] [단계 2] [단계 3]

6. 다음과 같은 규칙으로 수를 배열한다.

> (가) 제1행에는 1을 2개 배열한다.
> (나) 제 $(n+1)$행에는 제n행의 수를 그대로 배열한 다음 이웃한 두 수의 합을 그 두 수 사이에 적는다.

제 1행　　1 1
제 2행　　1 2 1
제 3행　　1 3 2 3 1
제 4행　　1 4 3 5 2 5 3 4 1
⋮

제n행에 배열된 수의 개수를 a_n, 제n행에 배열된 모든 수의 합을 b_n이라 할 때, b_9-a_9의 값은?[4점–1010–메가]

① 6105　② 6305　③ 6505
④ 6705　⑤ 6905

7. 어느 지역에는 길이가 270km인 자전거 도로가 있다. 이 도로를 다음과 같이 10개의 코스로 나누려고 한다.

> (가) 첫 번째 코스의 길이는 $a$km이다.
> (나) n $(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ 10)$번째 코스의 길이는 $n-1$번째 코스의 길이보다 $n$km가 더 길다.

10번째 코스의 길이는?[3점–1010–대성]

① 45km　② 50km　③ 55km
④ 60km　⑤ 65km

8. 이차정사각행렬 A_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이

$$A_{n+1}=2\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}A_n+\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix},\ A_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

을 만족할 때, 다음을 이용하여 행렬 A_{10}의 모든 성분의 합을 구한 것은?[4점–1008–대성]

> $p\neq 1$일 때, $a_{n+1}=pa_n+q$를 만족하는 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 $a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$ $\left(\alpha=\dfrac{q}{1-p}\right)$
> 라 하면 수열 $\{a_n-\alpha\}$는 공비가 p인 등비수열이므로
> $a_n-\alpha=(a_1-\alpha)p^{n-1}$
> $\therefore a_n=\alpha+(a_1-\alpha)p^{n-1}$

① $5\cdot 2^{10}-1$　② $9\cdot 2^{10}+1$
③ $11\cdot 2^{10}-1$　④ $14\cdot 2^{10}+1$
⑤ $21\cdot 2^{10}+1$

9. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\log_2 a_n=\dfrac{2n-1}{3}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$일 때,

$$a_1a_2a_3\cdots\ a_n\geq 8^{50}$$

을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값을 구하시오.[4점–1006–대성]

10. 모든 자연수 n에 대하여

$$f(1)=1,\ f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(n)=n^2 f(n)$$

일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 모든 고른 것은? [4점-1008-중앙]

<보기>

ㄱ. $f(3)=\dfrac{1}{6}$

ㄴ. $f(n)=\dfrac{n-1}{n+1}f(n-1)\ (n\geq 2)$

ㄷ. $f(n)=\dfrac{2}{n(n+1)}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

11. 수열 $\{a_n\}$은

$$a_1=1,\ n^2 a_n=(n^2-1)a_{n-1}\ (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

로 정의한다. $a_{100}=\dfrac{q}{p}$ (p, q는 서로소인 자연수)라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오.[4점-1011-종로]

12. 다음은 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_1=1,\ 3(a_1+a_2+a_3+\ \cdots\ +a_n)=(n+2)a_n$$

을 만족시킬 때, $a_n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$임을 보이는 과정이다.

$3(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)=(n+2)a_n$ ……… ㉠
이므로
$3(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n+1})=\boxed{(가)}\,a_{n+1}$ ……… ㉡
㉠, ㉡에서 $na_{n+1}=\boxed{(나)}\,a_n$
$\dfrac{a_{n+1}}{(n+1)(n+2)}=\boxed{(다)}\,a_n$
…(중략)…
$\therefore\ a_n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?[3점-1008-종로]

	(가)	(나)	(다)
①	$(n+3)$	$(n+1)$	$\dfrac{1}{n(n+2)}$
②	$(n+3)$	$(n+2)$	$\dfrac{1}{n(n+1)}$
③	$(n+3)$	$(n+2)$	$\dfrac{1}{n(n+2)}$
④	$(n+2)$	$(n+1)$	$\dfrac{1}{n(n+2)}$
⑤	$(n+2)$	$(n+2)$	$\dfrac{1}{n(n+1)}$

13. 가로, 세로의 길이가 각각 $50\,\text{cm}$, $30\,\text{cm}$이고, 높이가 $h\,\text{cm}$인 직육면체 모양의 수족관이 있다. 1주일마다 수족관에 남아 있는 물의 양의 5%를 버리고 $3000\,\text{cm}^3$의 새로운 물을 넣는다. 처음에 이 수족관에 $30000\,\text{cm}^3$의 물을 넣고 이와 같은 과정을 한없이 반복할 때, 수족관의 물이 넘치지 않도록 하기 위한 수족관의 높이 h의 최솟값을 구하시오.[4점-1005-종로]

14. 어떤 스포츠 동호회에서는 회원들을 대상으로 스포츠 활동을 하는데 회원들이 스포츠 활동에 참가할 때마다 다음과 같은 방법으로 점수를 적립한다고 한다.

> (가) 처음으로 참가하면 10점을 적립한다.
> (나) 두 번째 참가할 때부터는 이전까지 참가한 횟수의 두 배에 해당하는 점수를 적립한다.
> 예를 들어, 두 번 참가하면 적립된 점수는 총 12점이 된다.

화랑이가 이 동호회에 가입하여 n번의 스포츠 활동에 참가하였더니 적립된 점수가 200점보다 많았다고 한다. 자연수 n 의 최솟값을 구하시오.[4점–1005–비상]

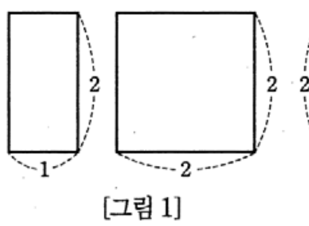
15. $a_1=1,\ a_{n+1}=3a_n+1\ (n\geq 1)$로 정의 된 수열 $\{a_n\}$에서 5의 배수인 항을 작은 수부터 차례로 $b_1,\ b_2,\ b_3,\ \cdots$이라 할 때, b_5는 몇 자리 수인지 구하시오. (단, $\log 2=0.3,\ \log 3=0.48$로 계산한다.)[4점–1004–대성]

16. 영희는 체중이 68kg으로 과체중이라는 진단을 받았다. 그래서 매주 월요일부터 금요일까지 다이어트를 통해 체중의 2%를 감량하기로 계획을 세웠다. 하지만 주말에 다이어트를 중단했더니, 금요일 저녁 체중보다 일요일 저녁 체중이 1kg 증가되는 것을 알았다. 매주 이런 식으로 다이어트를 계속해 나갈 때, 영희의 금요일 저녁에 측정된 몸무게가 가까워지는 값을 $x$kg이라 하자. 이때 x의 값을 구하시오.[4점–1009–종로]

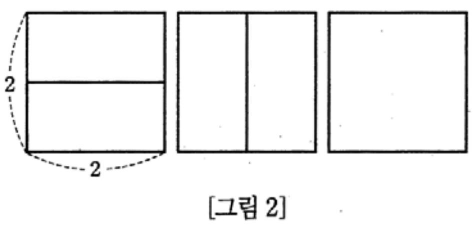
17. A화원에서는 매월 1일에 화분을 분갈이하여 보유하고 있는 모든 화분에 대하여 1개의 화분을 2개로 늘리기로 하였다. 그런데 분갈이하기 전에 A화원이 보유하고 있는 전체 화분이 15개보다 많으면 이 중 10개를 B화원으로 보낸 다음 나머지 화분만 분갈이 하기로 하였다. 이러한 과정을 계속 반복할 때, 3월 1일에 분갈이 한 직후 A화원의 전체 화분이 8개였다면 A화원이 보유하게 되는 화분이 처음으로 150개보다 많아지는 것은 3월 1일부터 몇 개월 후인가? (단, 화분의 개수는 매월 1일에 분갈이 한 직후에 센다.)
[4점–1006–대성]

① 7개월 후 ② 8개월 후 ③ 9개월 후
④ 10개월 후 ⑤ 11개월 후

18. [그림 1]과 같이 크기가 $1\times2,\,2\times2$인 두 종류의 블록이 충분히 있다. 이 두 종류의 블록으로 크기가 $2\times n$인 직사각형 모양의 도로에 블록을 겹치지 않고 빈틈없이 채우는 방법의 수를 a_n이라 하자. 예를 들어 [그림 2]와 같이 크기가 2×2인 직사각형 모양의 도로에 블록을 겹치지 않고 빈틈없이 채우는 방법은 모두 3가지이므로 $a_2=3$이다.



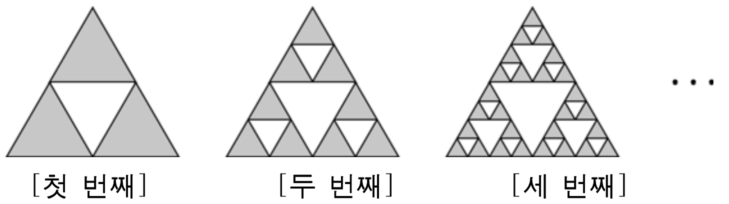
[그림 1]



[그림 2]

이때, a_6의 값을 구하시오.[4점–1010–종로]

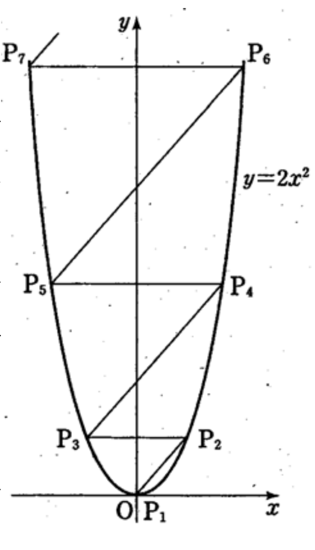
19. 한 개의 정삼각형에서 각 변의 중점을 선분으로 이으면 4개의 작은 정삼각형이 생긴다. 이때, 가운데 정삼각형 하나를 잘라내면 3개의 정삼각형이 남는다. 남은 3개의 각 정삼각형에서 같은 과정을 반복하면 모두 9개의 정삼각형이 남고, 다시 9개의 각 정삼각형에서 같은 과정을 계속하여 만들어지는 도형을 나타낸 것이다.



두 정삼각형이 공유하는 꼭짓점은 한 개의 꼭짓점으로 셀 때, n번째 도형에서 남은 정삼각형들의 꼭짓점의 개수를 a_n이라 하자. 예를 들어 $a_1=6,\ a_2=15$이다. a_5의 값은?[4점-1003-교육청]

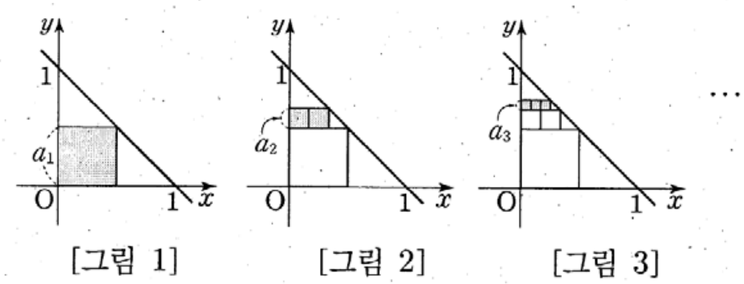
① 366 ② 376 ③ 386
④ 396 ⑤ 406

20. 포물선 $y=2x^2$ 위의 점 $\mathrm{P}_1(0,\ 0)$을 지나고 기울기가 2인 직선과 포물선이 만나는 원점 이외의 점을 P_2라고 하자. 점 P_2에서 x축과 평행한 직선을 그어 포물선 $y=2x^2$고 만나는 P_2 이외의 점을 P_3이라고 하자. 또 점 P_3을 지나고 기울기가 2인 직선과 포물선이 만나는 P_3이외의 점을 P_4라고 하자. 점 P_4에서 x축과 평행한 직선을 그어 포물선 $y=2x^2$과 만나는 P_4이외의 점을 P_5라고 하자. 이와 같은 방법으로 점 P_6, P_7, $\cdots$을 정한다. 점 P_n의 좌표를 $(x_n,\ y_n)$이라고 할 때, $\sum_{k=1}^{15}(x_k+y_k)$의 값은?[4점-1003-비상]



① 280 ② 360 ③ 480
④ 560 ⑤ 620

21. [그림1]과 같이 두 변이 x축과 y축 위에 있고, 한 꼭짓점이 직선 $x+y=1$ 위에 있는 정사각형을 1개 그린다.
[그림2]와 같이 [그림 1]에서 그린 정사각형의 한 변 위에 합동인 정사각형을 2개 그린다. 이때, 왼쪽 끝에 있는 정사각형의 한 변은 y축 위에 있고, 오른쪽 끝에 있는 정사각형의 한 꼭짓점은 직선 $x+y=1$ 위에 있다.
[그림3]과 같이 [그림2]에서 정사각형을 그린 방법으로 합동인 정사각형을 3개 그린다.
이와 같은 방법으로 정사각형을 계속 그려 나갈 때, 첫 번째 그려진 1개의 정사각형의 한 변의 길이를 a_1, 두 번째 그려진 2개의 정사각형 중에서 1개의 정사각형의 한 변의 길이를 a_2, $\cdots$, n번째 그려진 n개의 정사각형 중에서 1개의 정사각형의 한 변의 길이를 a_n이라 하자. 이때, $\sum_{k=1}^{20}a_k$의 값은?[4점-1010-중앙]

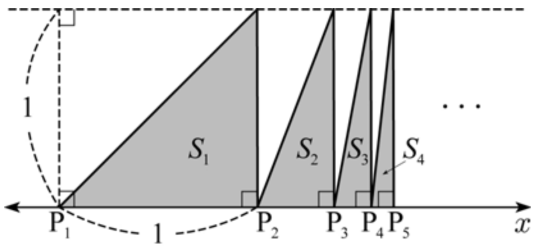


① $\frac{6}{7}$ ② $\frac{19}{21}$ ③ $\frac{20}{21}$
④ $\frac{39}{41}$ ⑤ $\frac{40}{41}$

22. 수직선 위에 점 P_n ($n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)을 다음 규칙에 따라 정한다.

(가) 점 P_1의 좌표는 $P_1(0)$이다.
(나) $\overline{P_1P_2}=1$이다.
(다) $\overline{P_nP_{n+1}}=\dfrac{n-1}{n+1}\times\overline{P_{n-1}P_n}$ ($n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$)

선분 P_nP_{n+1}을 밑변으로 하고 높이가 1인 직각삼각형의 넓이를 S_n이라 하자. $S_1+S_2+S_3+\cdots+S_{50}=\dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)[4점-1003-교육청]



23. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$$(n!)^2\cdot 4^n>(2n)! \qquad \cdots\cdots\cdots ㉠$$

이 성립함을 증명한 것이다.

<증 명>

(ⅰ) $n=1$일 때, (좌변)$=4$, (우변)$=$ $\boxed{(가)}$
이므로 ㉠이 성립한다.
(ⅱ) $n=k$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면
$$(k!)^2\cdot 4^k>(2k)! \qquad \cdots\cdots\cdots ㉡$$
이다. $n=k+1$일 때 ㉠이 성립함을 보이자.
㉡의 양변에 $\boxed{(나)}$ 를 곱하면
$$\{(k+1)!\}^2\cdot 4^{k+1}>(\boxed{(나)})(2k)!$$
$$>(2k+2)(\boxed{(다)})(2k)!$$
$$=(2k+2)!$$
따라서 $n=k+1$일 때에도 ㉠은 성립한다.
그러므로 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?[3점-1010-교육청]

	(가)	(나)	(다)
①	1	$4(k+1)^2$	$2k$
②	1	$2(k+1)^2$	$2k$
③	2	$4(k+1)^2$	$2k+1$
④	2	$2(k+1)^2$	$2k+1$
⑤	2	$4(k+1)^2$	$2k$

24. 다음은 2 이상의 자연수 n에 대하여 $\dfrac{4^n}{n+1} < \dfrac{2n!}{(n!)^2}$ 임을 증명하는 과정이다.

<증 명>

(ⅰ) $n=2$일 때, $\dfrac{16}{3} < \boxed{(가)}$

(ⅱ) $n=m$일 때 성립한다고 가정하자.

$\dfrac{4(m+1)}{m+2} < \boxed{(나)}$ 이므로

$\dfrac{4^m}{m+1} < \dfrac{4^m}{m+1} \cdot \dfrac{4(m+1)}{m+2} < \dfrac{(2m)!}{(m!)^2} \cdot \boxed{(나)}$ 이다.

따라서 $\dfrac{4^{m+1}}{m+2} < \boxed{(다)}$ 이다.

다음 중 위의 과정의 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [3점-1005-종로]

	(가)	(나)	(다)
①	4	$\dfrac{2m+1}{m+1}$	$\dfrac{(2m+1)!}{\{(m+1)!\}^2}$
②	4	$\dfrac{2m+1}{m+1}$	$\dfrac{(2m+2)!}{\{(m+1)!\}^2}$
③	6	$\dfrac{2m+1}{m+1}$	$\dfrac{(2m+1)!}{\{(m+1)!\}^2}$
④	6	$\dfrac{(2m+1)(2m+2)}{(m+1)^2}$	$\dfrac{(2m+1)!}{\{(m+1)!\}^2}$
⑤	6	$\dfrac{(2m+1)(2m+2)}{(m+1)^2}$	$\dfrac{(2m+2)!}{\{(m+1)!\}^2}$

25. 3^5은 다음과 같이 계산할 수 있다.

$3\times3=9$,
$9\times9=81$,
$81\times3=243$

$9\times9=81$의 계산에서 앞선 계산의 결과 $3\times3=9$를 이용할 수 있으므로 곱셈이 한 번 추가되어 필요한 최소한의 곱셈횟수는 2번이다. 또한, 앞의 계산결과를 이용하면 $81\times3=243$이 된다.
따라서, 3^5을 계산할 때, 필요한 최소한의 곱셈횟수는 3번이다.

위와 같이 $3\times3=9$에서 시작하고 이전 계산결과를 이용하여 자연수 n에 대하여 3^n을 계산할 때, 필요한 최소한의 곱셈횟수를 $f(n)$이라 하자. $f(5)$는 3^5을 계산할 때, 최소한의 곱셈의 횟수를 의미하므로 위의 내용에 의하면 $f(5)=3$이다. 이 때, $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} f(2^k)$의 값을 구하시오.[4점-1005-종로]

26. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$이고

$$a_{n+1}=n+1+\frac{(n-1)!}{a_1a_2\cdots a_n}\ (n\ge1)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n을 구하는 과정의 일부이다.

모든 자연수 n에 대하여
$a_1a_2\cdots a_na_{n+1}=a_1a_2\cdots a_n\times(n+1)+(n-1)!$
이다. $b_n=\dfrac{a_1a_2\cdots a_n}{n!}$이라 하면, $b_1=1$이고

$$b_{n+1}=b_n+\boxed{(가)}$$

이다. 수열 $\{b_n\}$의 일반항을 구하면

$b_n=\boxed{(나)}$ 이므로 $\dfrac{a_1a_2\cdots a_n}{n!}=\boxed{(나)}$ 이다.

⋮

따라서 $a_1=1$이고, $a_n=\dfrac{(n-1)(2n-1)}{2n-3}\ (n\ge2)$이다.

위의 (가)에 알맞은 식을 $f(n)$, (나)에 알맞은 식을 $g(n)$이라 할 때, $f(13)\times g(7)$의 값은?[4점-2010-대수능]

① $\dfrac{1}{70}$　② $\dfrac{1}{77}$　③ $\dfrac{1}{84}$　④ $\dfrac{1}{91}$　⑤ $\dfrac{1}{98}$

27. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, 다음은 등식 $nS_n - \sum_{k=1}^{n-1} S_k = \sum_{k=1}^{n} k\,a_k$ $(n \geq 2)$ …… (★) 이 성립함을 증명한 것이다.

<보 기>

(1) $n=2$일 때,

(좌변)=(우변)= $\boxed{(가)}$ 이므로 (★)이 성립한다.

(2) $n=i\ (i \geq 2)$일 때, (★)이 성립한다고 가정하면,

$$(i+1)S_{i+1} - \sum_{k=1}^{i} S_k = (i+1)S_{i+1} - \left(\sum_{k=1}^{i-1} S_k + S_i\right)$$

$$= (i+1)S_{i+1} - (\boxed{(나)})$$

$$= \sum_{k=1}^{i} k\,a_k + \boxed{(다)}$$

$$= \sum_{k=1}^{i+1} k a_k$$

따라서, $n=i+1$일 때, $(i+1)S_{i+1} - \sum_{k=1}^{i} S_k = \sum_{k=1}^{i+1} k\,a_k$

가 성립한다.

(1)과 (2)에 의하여 등식 (★)은 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?[4점-1007-교육청]

	(가)	(나)	(다)
①	a_1+a_2	$(i-1)S_i - \sum_{k=1}^{i} k\,a_k$	$i(S_i - S_{i-1})$
②	a_1+a_2	$(i+1)S_i - \sum_{k=1}^{i} k\,a_k$	$i(S_{i+1} - S_i)$
③	a_1+2a_2	$(i+1)S_i - \sum_{k=1}^{i} k\,a_k$	$i(S_{i+1} - S_i)$
④	a_1+2a_2	$(i+1)S_i - \sum_{k=1}^{i} k\,a_k$	$(i+1)(S_{i+1} - S_i)$
⑤	a_1+2a_2	$(i-1)S_i - \sum_{k=1}^{i} k\,a_k$	$(i+1)(S_{i+1} - S_i)$

28. 다음은 3 이상의 자연수 n에 대하여 부등식 $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{n}{(n-i)2^{i-1}} < 4$가 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

<증 명>

자연수 $n\,(n \geq 3)$에 대하여 $S_n = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{n}{(n-i)2^{i-1}}$ 이라 하자.

(1) $n=3$일 때, $S_3 = 3 < 4$이므로 성립한다.

(2) $n=k\,(k \geq 3)$일 때, $S_k < 4$가 성립한다고 가정하자.

$n=k+1$일 때,

$$S_{k+1} = \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{k+1}{k+1-i} \times \frac{1}{2^{i-1}}\right)$$

$$= \frac{k+1}{k} + \frac{1}{2}\left(\frac{k}{k-1} + \frac{k}{k-2} \times \frac{1}{2} + \cdots + \frac{k}{2^{k-2}}\right)$$

$$+ \boxed{(가)} \times \left(\frac{k}{k-1} + \frac{k}{k-2} \times \frac{1}{2} + \cdots + \frac{k}{2^{k-2}}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{k} + \boxed{(나)} \times S_k$$

그런데, $k \geq 3$, $S_k < 4$이므로

$$S_{k+1} = 1 + \frac{1}{k} + \boxed{(나)} \times S_k < 4$$이다.

그러므로 (1), (2)에 의하여 3 이상의 자연수 n에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

위의 과정에서 (가), (나)에 알맞은 식의 합을 $f(k)$라 할 때, $f(3)$의 값은?[4점-1011-대전교]

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{4}{5}$ ④ $\frac{5}{6}$ ⑤ $\frac{6}{7}$

29. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1=\alpha(\alpha\neq 0)$이고, 모든 $n(n\geq 2)$에 대하여

$(n-1)a_n+\sum_{m=1}^{n-1} ma_m=0$을 만족시킨다. 다음은

$$a_n=\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\alpha\ \ (n\geq 1)$$

임을 수학적귀납법을 이용하여 증명한 것이다.

<증 명>

(1) $n=1$일 때, $a_1=\alpha=\frac{(-1)^{1-1}}{(1-1)!}\alpha$이다.

(2) i) $n=2$일 때, $a_2+a_1=0$이므로

$$a_2=-a_1=\frac{(-1)^{2-1}}{(2-1)!}\alpha\text{이다.}$$

따라서 주어진 식이 성립한다.

ii) $n=k\ (k\geq 2)$일 때 성립한다고 가정하고, $n=k+1$일 때 성립함을 보이자.

$$0=ka_{k+1}+\sum_{m=1}^{k} ma_m$$
$$=ka_{k+1}+\sum_{m=1}^{k-1} ma_m+ka_k$$
$$=ka_{k+1}+(\boxed{(가)})\times a_k+ka_k \quad \text{이므로}$$
$$a_{k+1}=\boxed{(나)}\times a_k=\frac{(-1)^k}{k!}\alpha \quad \text{이다.}$$

따라서 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\alpha$이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식의 곱을 $f(k)$라 할 때, $f(10)$의 값은? [4점-1006-평가원]

① $\frac{1}{10}$　② $\frac{3}{10}$　③ $\frac{1}{2}$　④ $\frac{7}{10}$　⑤ $\frac{9}{10}$

30. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k^2}<\frac{2n+1}{n+1}$$

이 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

<증 명>

(1) $n=1$일 때,

(좌변)$=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$, (우변)$=\frac{3}{2}$

이므로 주어진 부등식은 성립한다.

(2) $n=m$일 때, 부등식

$$\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{k^2}<\frac{2m+1}{m+1}$$

이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m+2}\frac{1}{k^2}=\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{k^2}+\boxed{(가)}<\frac{2m+1}{m+1}+\boxed{(가)}$$

한편,

$$\frac{2m+1}{m+1}+\boxed{(가)}-\boxed{(나)}=\frac{\boxed{(다)}}{(m+1)(m+2)^2}<0$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{m+2}\frac{1}{k^2}<\boxed{(나)}$$

이다. 따라서 $n=m+1$일 때도 부등식은 성립한다.

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?[3점-1010-대성]

	(가)	(나)	(다)
①	$\frac{1}{(m+2)^2}$	$\frac{2m+1}{m+1}$	-2
②	$\frac{1}{(m+2)^2}$	$\frac{2m+3}{m+2}$	-1
③	$\frac{1}{(m+2)^2}$	$\frac{2m+3}{m+2}$	-2
④	$\frac{1}{m^2+2}$	$\frac{2m+1}{m+2}$	-1
⑤	$\frac{1}{m^2+2}$	$\frac{2m+3}{m+2}$	-2

31. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $b_n=\dfrac{1}{a_n}$이라 하면 수열 $\{b_n\}$은 등차수열을 이룬다. 이때, 다음은 2 이상인 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_i a_{i+1}=(n-1)a_1 a_n$$

이 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

<증 명>

(ⅰ) $n=2$일 때, (좌변)$=\sum_{i=1}^{1} a_i a_{i+1}=a_1 a_2$, (우변)$=a_1 a_2$이므로 주어진 등식은 성립한다.

(ⅱ) $n=k$ $(k=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$일 때, 등식 $\sum_{i=1}^{n-1} a_i a_{i+1}=(k-1)a_1 a_k$가 성립한다고 가정하자.

$b_{n+1}-b_n=d$라 하면

$\dfrac{1}{a_{k+1}}-\dfrac{1}{a_k}=d$, $a_k a_{k+1}=\boxed{\text{(가)}}$

또한 $\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{a_1}+(n-1)d$이므로 $\dfrac{1}{d}(a_1-a_n)=\boxed{\text{(나)}}$

$n=k+1$일 때,

$\sum_{i=1}^{k} a_i a_{i+1}=\sum_{i=1}^{k-1} a_i a_{i+1}+a_k a_{k+1}=(k-1)a_1 a_k+a_k a_{k+1}$

$=\dfrac{a_1-a_k}{d}+\boxed{\text{(가)}}=\boxed{\text{(다)}}=ka_1 a_{k+1}$

따라서 $n=k+1$일 때에도 주어진 등식은 성립한다.

그러므로 주어진 등식은 2 이상인 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?[3점-1003-중앙]

	(가)	(나)	(다)
①	$\dfrac{a_k-a_{k+1}}{d}$	$(n-1)a_1 a_n$	$\dfrac{a_1-a_{k+1}}{d}$
②	$\dfrac{a_k-a_{k+1}}{d}$	$(n-1)a_1 a_n$	$\dfrac{a_{k+1}-a_1}{d}$
③	$\dfrac{a_k-a_{k+1}}{d}$	$\dfrac{(n-1)a_n}{a_1}$	$\dfrac{a_{k+1}-a_1}{d}$
④	$\dfrac{a_{k+1}-a_k}{d}$	$(n-1)a_1 a_n$	$\dfrac{a_1-a_{k+1}}{d}$
⑤	$\dfrac{a_{k+1}-a_k}{d}$	$\dfrac{(n-1)a_n}{a_1}$	$\dfrac{a_1-a_{k+1}}{d}$

32. 다음은 “n개의 양수 $a_i\,(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$에 대하여 $a_1\cdot a_2\cdot\ \cdots\ \cdot a_n=1$이면 $a_1+a_2+\cdots+a_n\ge n$이다.”를 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

<증 명>

(Ⅰ) $n=1,\ 2$일 때 성립한다.

(Ⅱ) $n=k$일 때 성립한다고 가정하면 $(k+1)$개의 양수 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_k,\ a_{k+1}$에 대하여

(ⅰ) $(k+1)$개의 수가 모두 1인 경우 그 합은 $(k+1)$이다.

(ⅱ) $(k+1)$개의 수 중 적어도 하나가 1이 아닌 경우 1보다 큰 수 중 하나를 a_i, 작은 수 중 하나를 a_j라 하고, 그 외의 수를 $b_m\ (m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ k-1)$이라 하면

$(a_i-1)(a_j-1)\ \boxed{㈎}\ 0$

$(a_i+a_j)+b_1+b_2+\cdots b_{k-1}\ \boxed{㈏}$

$(a_i a_j+1)+b_1+b_2+\cdots+b_{k-1}$

한편 $(a_i a_j),\ b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_{k-1}$은 그 곱이 $\boxed{㈐}$ 인 $\boxed{㈑}$ 개의 양수이므로

$a_i a_j+b_1+b_2+\cdots+b_{k-1}\ge\boxed{㈒}$

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}\ge k+1$ 이므로 $n=k+1$일 때도 성립한다.

따라서 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 ㈎, ㈏, ㈐+㈑+㈒에 알맞은 것은?[4점-1003-종로]

	㈎	㈏	㈐+㈑+㈒
①	<	>	$2k$
②	<	>	$2k+1$
③	<	<	$2k+3$
④	>	<	$2k$
⑤	>	<	$2k+1$

33. 수열 $\{a_n\}$의 일반항이 $a_n = \dfrac{1}{n}$일 때, $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ 라 하자. 다음은 2 이상의 자연수 n에 대하여

$$n + S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_{n-1} = nS_n$$

이 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

<증 명>

(ⅰ) $n=2$일 때, (좌변)$=$(우변)$=$ $\boxed{\text{(가)}}$ 이므로 주어진 등식은 성립한다.

(ⅱ) $n=k\ (k \geq 2)$일 때 등식이 성립한다고 가정하면

$k + S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_{k-1} = kS_k$ 이다.

$n=k+1$ 일 때, 성립함을 보이자.

$\boxed{\text{(나)}} + S_k + S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_{k-1}$

$= (k+1)(S_k + \boxed{\text{(다)}})$

$= (k+1)S_{k+1}$

그러므로 $n=k+1$일 때도 성립한다.

따라서 2 이상의 자연수 n에 대하여 주어진 등식은 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?[4점-1004-메가]

	(가)	(나)	(다)
①	3	k	$\dfrac{1}{k}$
②	3	$k+1$	$\dfrac{1}{k}+1$
③	3	$k+1$	$\dfrac{1}{k+1}$
④	5	k	$\dfrac{1}{k+1}$
⑤	5	$k+1$	$\dfrac{1}{k}+1$

34. 자연수 n에 대하여 $f(n)$을 $f(n)=(3n+1)7^n-1$이라 하자. 다음은 $f(n)$이 9의 배수임을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

<증 명>

(ⅰ) $n=1$일 때, $f(1)=$ $\boxed{\text{(가)}}$ 이므로 성립한다.

(ⅱ) k가 자연수일 때, $f(k)$가 9의 배수라고 가정하면

$f(k+1) = \{\boxed{\text{(나)}} \times (k+1)+7\}7^k - 1$

$= \{(3k+1)7^k - 1\} + \boxed{\text{(다)}} \times 7^k$

$= f(k) + \boxed{\text{(다)}} \times 7^k$

이므로 $f(k+1)$도 9의 배수이다.

따라서, 자연수 n에 대하여 $f(n)$은 9의 배수이다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?[3점-1004-종로]

	(가)	(나)	(다)
①	9	21	$9(2k+1)$
②	9	27	$9(2k+3)$
③	27	21	$9(2k+1)$
④	27	27	$9(2k+1)$
⑤	27	21	$9(2k+3)$

35. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 $2^{n+1}+3^{2n-1}$이 7의 배수임을 증명한 것이다.

<증 명>

$f(n)=2^{n+1}+3^{2n-1}$로 놓으면

(ⅰ) $n=1$일 때 $f(1)=$ $\boxed{\text{(가)}}$ 이므로 $f(1)$은 7의 배수이다.

(ⅱ) $n=k$일 때, $f(k)=2^{k+1}+3^{2k-1}$이 7의 배수라 가정하면

$n=k+1$일 때,

$f(k+1)=2^{k+2}+3^{2k+1}$

$= \boxed{\text{(나)}}\, f(k) + \boxed{\text{(다)}} \cdot 3^{2k-1}$

이므로 $f(k+1)$도 7의 배수이다.

따라서, 모든 자연수 n에 대하여 $2^{n+1}+3^{2n-1}$은 7의 배수이다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 모두 더한 값은? [3점-1009-종로]

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

36. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 등식

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)\cdot 2n}$$
$$=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{n+n}$$

이 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

<증 명>

(1) $n=1$일 때,

(좌변)$=\frac{1}{2}$, (우변)$=\frac{1}{2}$

이므로 주어진 등식은 성립한다.

(2) $n=m$ (m은 자연수)일 때, 등식이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{(2k-1)\cdot 2k}=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{m+k}$$

이다. $n=m+1$일 때, 등식이 성립함을 보이자.

$$\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{(2k-1)\cdot 2k}$$
$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{(2k-1)\cdot 2k}+\boxed{\text{(가)}}$$
$$=\frac{1}{m+2}+\frac{1}{m+3}+\cdots+\frac{1}{m+m}+\boxed{\text{(가)}}+\frac{1}{m+1}$$
$$=\frac{1}{m+2}+\frac{1}{m+3}+\cdots+\frac{1}{m+m}+\frac{1}{2m+1}+\boxed{\text{(나)}}$$
$$=\sum_{k=1}^{m+1}\boxed{\text{(다)}}$$

그러므로 $n=m+1$일 때도 등식이 성립한다.

따라서 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?[4점-1005-대성]

① $\frac{1}{(2m+1)\cdot 2(m+1)}$, $\frac{1}{2m-1}$, $\frac{1}{m+k}$

② $\frac{1}{(2m+1)\cdot 2(m+1)}$, $\frac{1}{2m+2}$, $\frac{1}{(m+1)+k}$

③ $\frac{1}{(2m+1)\cdot 2(m+1)}$, $\frac{1}{2m+2}$, $\frac{1}{m+k}$

④ $\frac{1}{(2m-1)\cdot (2m+1)}$, $\frac{1}{2m-1}$, $\frac{1}{(m+1)+k}$

⑤ $\frac{1}{(2m-1)\cdot (2m+1)}$, $\frac{1}{2m-1}$, $\frac{1}{m+k}$

37. 다음은 2 이상의 모든 자연수 n 에 대하여 부등식

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n-1}}>2(\sqrt{n}-1)\cdots\cdots(*)$$

가 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

<증 명>

(i) $n=2$일 때, (좌변)$=\boxed{\text{(가)}}$, (우변)$=2(\sqrt{2}-1)$

이므로 부등식 ($*$)는 성립한다.

(ii) $n=k$ ($k=2, 3, 4, \cdots$)일 때, 부등식 ($*$)가 성립한다고

가정하면

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n-1}}>2(\sqrt{n}-1)$$

양변에 $\frac{1}{\sqrt{k}}$을 더하면

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n-1}}+\frac{1}{\sqrt{k}}>2(\sqrt{n}-1)+\frac{1}{\sqrt{k}}$$

한편, $\frac{1}{\sqrt{k}}>\frac{2}{\sqrt{k}+\boxed{\text{(나)}}}$ 이므로

$$2(\sqrt{k}-1)+\frac{1}{\sqrt{k}}>2(\sqrt{k}-1)+\frac{2}{\sqrt{k}+\boxed{\text{(다)}}}$$
$$=2(\boxed{\text{(다)}})$$

그러므로 $n=k+1$일 때에도 부등식($*$)는 성립한다.

따라서 주어진 부등식은 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?[3점-1005-비상]

	(가)	(나)	(다)
①	1	$\sqrt{k}$	$\sqrt{k}-1$
②	1	$\sqrt{k}$	$\sqrt{k+1}-1$
③	1	$\sqrt{k+1}$	$\sqrt{k+1}-1$
④	2	$\sqrt{k}$	$\sqrt{k}-1$
⑤	2	$\sqrt{k+1}$	$\sqrt{k+1}-1$

38. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 등식

$$(a-1)^2\{a^{n-1}+2a^{n-2}+3a^{n-3}+\cdots+(n-1)a+n\}$$
$$=a^{n+1}-(n+1)a+n \ \cdots \ (\ast)$$

이 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

<증 명>

(i) $n=1$일 때

(좌변)$=(a-1)^2=$(우변)

이므로 $(*)$은 성립한다.

(ii) $n=k$ (k는 자연수)일 때

$(\ast)$이 성립한다고 가정하면

$n=k+1$일 때

$$(a-1)^2\{a^k+2a^{k-1}+3a^{k-2}+\cdots+(k-1)a^2+ka+k+1\}$$
$$=a(a-1)^2\{a^{k-1}+2a^{k-2}+3a^{k-3}+\cdots+(k-1)a+k\}$$
$$+\boxed{\text{(가)}}\cdot(a-1)^2$$
$$=a\{a^{k+1}-(k+1)a+\boxed{\text{(나)}}\}+\boxed{\text{(가)}}\cdot(a-1)^2$$
$$=a^{k+2}-(k+2)a+(k+1)$$

(i), (ii)에서 모든 자연수 n에 대하여 $(*)$이 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 들어갈 두 식의 합은?

[3점-1005-중앙]

① $2k-2$ ② $2k-1$ ③ $2k$
④ $2k+1$ ⑤ $2k+2$

39. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여 $\displaystyle\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{m}}<2\sqrt{n}$ 이 성립함을 증명한 것이다.

<증 명>

(i) $n=1$ 일 때, (좌변)$=1$

(우변)$=2\sqrt{1}=2$ ∴ 성립

(ii) $n=k$ 일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{m=1}^{k+1}\frac{1}{\sqrt{m}}=\sum_{m=1}^{k}\frac{1}{\sqrt{m}}+\boxed{\text{(가)}}$$
$$<2\sqrt{k}+\boxed{\text{(가)}}=\frac{2\sqrt{\boxed{\text{(나)}}}+1}{\sqrt{k+1}}$$
$$<\frac{2\sqrt{(k+\sqrt{\boxed{\text{(다)}}})^2}+1}{\sqrt{k+1}}=2\sqrt{k+1}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

따라서 (i), (ii)에 의해 모든 자연수 n에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?[3점-1006-종로]

	(가)	(나)	(다)
①	$\frac{1}{\sqrt{k+1}}$	k^2+k	$\frac{1}{4}$
②	$\frac{1}{\sqrt{k+1}}$	k^2+k	$\frac{1}{2}$
③	$\frac{1}{\sqrt{k+1}}$	k^2+2k	1
④	$\sqrt{k+1}$	k^2+k	$\frac{1}{2}$
⑤	$\sqrt{k+1}$	k^2+2k	1

40. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 등식

$$\sum_{i=1}^{n} 6i^2(n-i)=\frac{1}{2}n^2(n^2-1) \quad \cdots\cdots (*)$$

이 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

<보 기>

(i) $n=1$ 일 때, (좌변)$=0$, (우변)$=0$ 이므로 $(*)$이 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{i=1}^{k} 6i^2(k-i)=\frac{1}{2}k^2(k^2-1)$$

이다. $n=k+1$ 일 때, $(*)$이 성립함을 보이자.

$$\sum_{i=1}^{k+1} 6i^2\{(k+1)-i\}$$

$$=\boxed{\text{(가)}}+6(k+1)^2\{(k+1)-(k+1)\}$$

$$=\frac{1}{2}k^2(k^2-1)+\boxed{\text{(나)}}$$

$$=\frac{1}{2}k(k+1)(\boxed{\text{(다)}})$$

$$=\frac{1}{2}(k+1)^2\{(k+1)^2-1\}$$

그러므로 $n=k+1$ 일 때도 $(*)$이 성립한다.

따라서 모든 자연수 n에 대하여 $(*)$이 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?[3점–1008–비상]

	(가)	(나)	(다)
①	$\sum_{i=1}^{k} 6i^2(k-i)$	$k(k+1)(k+2)$	k^2+2k
②	$\sum_{i=1}^{k} 6i^2(k-i)$	$k(k+1)(2k+1)$	k^2+3k+2
③	$\sum_{i=1}^{k} 6i^2\{(k+1)-i\}$	$k(k+1)(k+2)$	k^2+3k+2
④	$\sum_{i=1}^{k} 6i^2\{(k+1)-i\}$	$k(k+1)(2k+1)$	k^2+2k
⑤	$\sum_{i=1}^{k} 6i^2\{(k+1)-i\}$	$k(k+1)(2k+1)$	k^2+3k+2

41. 다음은 3 이상의 자연수 n에 대하여

$$2^{2n+1}-9n^2+3n-2 \ \cdots \ (*)$$

는 54의 배수임을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

<증명>

$n=\boxed{\text{(가)}}$ 일 때 $(*)$은 54이므로 54의 배수이다.

$n=m$ $(m\geq 3)$일 때

$2^{2m+1}-9m^2+3m-2=54k$ (k는 자연수)

라고 가정하자.

$n=m+1$일 때

$2^{2(m+1)+1}-\{9(m+1)^2-3(m+1)+2\}$

$=\boxed{\text{(나)}}\cdot 2^{2m+1}-(\boxed{\text{(다)}})$

$=\boxed{\text{(다)}}(9m^2-3m+2+54k)-(\boxed{\text{(다)}})$

$=27m(m-1)+216k$

이때, 연속한 두 자연수의 곱은 2의 배수이므로 $27m(m-1)$은 54의 배수이다.

따라서, $27m(m-1)+216k$는 54의 배수이다.

따라서, 3 이상의 자연수 n에 대하여 $(*)$은 54의 배수이다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?[3점–1008–중앙]

① 1, 4, $9m^2+13m+8$ ② 1, 8, $9m^2+15m+8$

③ 3, 4, $9m^2+13m+8$ ④ 3, 4, $9m^2+15m+8$

⑤ 3, 8, $9m^2+15m+8$

42. 자연수 m에 대하여 $H_m = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m}$이라 할 때, 다음은 부등식

$$H_{2^n} \ge 1 + \frac{n}{2} \quad (\text{단, } n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \qquad \cdots\cdots\cdots (*)$$

이 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

<증 명>

(ⅰ) $n=1$일 때 $(*)$의 좌변은 $\frac{3}{2}$이고, 우변도 $\frac{3}{2}$이므로 $(*)$이 성립한다.

(ⅱ) $n=k$ (k는 자연수)일 때 $(*)$이 성립한다고 가정하면

$H_{2^k} \ge 1 + \frac{k}{2}$ 이므로

$$H_{2^{k+1}} = H_{2^k} + \frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+2} + \frac{1}{2^k+3} + \cdots + \frac{1}{2^k + \boxed{(가)}}$$

$$\ge 1 + \frac{k}{2} + \frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+2} + \frac{1}{2^k+3} + \cdots + \frac{1}{2^k + \boxed{(가)}}$$

$$\ge 1 + \frac{k}{2} + 2^k \times \frac{1}{2^{k+1}}$$

$$= 1 + \boxed{(나)}$$

따라서, $n=k+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 모든 자연수 n에 대하여 부등식 $H_{2^n} \ge 1 + \frac{n}{2}$이 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 식의 합을 $f(k)$라 할 때, $f(3)$의 값은? [3점-1009-중앙]

① 9 ② 10 ③ 11
④ 12 ⑤ 13

43. 수열 $\{a_n\}$을

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{n+1} \ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

로 정의할 때, 다음은 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \le \frac{3}{n}$이 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

<증 명>

(ⅰ) $a_1 = 1 \le \frac{3}{1}$, $a_2 = \boxed{(가)} \le \frac{3}{2}$, $a_3 = \boxed{(나)} \le \frac{3}{3}$ 이다.

(ⅱ) $n=k\,(k \ge 3)$일 때, $a_k \le \frac{3}{k}$이 성립한다고 가정하면

$n=k+1$일 때

$$\frac{3}{k+1} - a_{k+1} = \boxed{(다)} - \frac{1}{2}a_k$$

$$\ge \boxed{(다)} - \frac{3}{2k}$$

$$= \frac{k-3}{2k(k+1)}$$

$$\ge 0$$

이므로 $n=k+1$일 때도 성립한다.

따라서 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \le \frac{3}{n}$이 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 수 또는 식을 모두 더한 것을 $f(k)$라 할 때, $f(5)$의 값은? [3점-1010-메가]

① $\frac{11}{6}$ ② 2 ③ $\frac{13}{6}$
④ $\frac{7}{3}$ ⑤ $\frac{8}{3}$

44. 다음은 자연수 n에 대하여 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$이 모두 양수일 때, 부등식

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right) \ge n^2 \cdots\cdots (*)$$

이 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다. (단, $n=1, 2, 3, \cdots$)

<증 명>

(i) $n=1$일 때 $(*)$의 좌변은 $\boxed{(가)}$이고, 우변은 1이므로

$(*)$이 성립한다.

(ii) $n=k$(k는 자연수)일 때 $(*)$이 성립한다고 가정하면

$(a_1+a_2+\cdots+a_k)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k}\right) \ge k^2$ 이다.

$$(a_1+a_2+\cdots+a_{k+1})\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{k+1}}\right)$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{k} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{a_i}\right)+\boxed{(나)}+a_{k+1}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{a_i}+\frac{1}{a_{k+1}}\sum_{i=1}^{k}a_i$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{k} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{a_i}\right)+\boxed{(나)}+\sum_{i=1}^{k}\frac{a_{k+1}}{a_i}+\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i}{a_{k+1}}$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{k} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{a_i}\right)+\boxed{(나)}+\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{a_{k+1}}{a_i}+\frac{a_i}{a_{k+1}}\right)$$

$$\ge k^2+\boxed{(나)}+\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{a_{k+1}}{a_i}+\frac{a_i}{a_{k+1}}\right)$$

$$\ge k^2+\boxed{(나)}+\boxed{(다)}=(k+1)^2$$

따라서, $n=k+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n에 대하여 부등식 $(*)$이 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것의 합을 $f(k)$라 할 때, $f(3)$의 값은?[3점－1010－중앙]

① 6 ② 8 ③ 11
④ 15 ⑤ 18

45. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 등식

$$2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdots (2n-1) = (n+1)(n+2)(n+3)\cdots(2n) \quad \cdots\cdots (*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

<증 명>

$S_n = 2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdots (2n-1)$,

$T_n = (n+1)(n+2)(n+3)\cdots(2n)$이라 하자.

(i) $n=1$일 때, $S_1 = \boxed{(가)} = T_1$이므로 등식 $(*)$이 성 립한다.

(ii) $n=k\,(k \ge 1)$일 때, 주어진 등식 $(*)$이 성립한다고 가정하고, $n=k+1$일 때, 등식 $(*)$이 성립함을 보이자.

$S_{k+1} = S_k \times (\boxed{(나)})$

$T_{k+1} = (k+2)(k+3)(k+4)\cdots(2k+2)$

$= (k+1)(k+2)(k+3)\cdots(2k)\times(\boxed{(나)})$

$\therefore \frac{S_{k+1}}{T_{k+1}} = \boxed{(다)}$

즉, $n=k+1$일 때, 등식 $(*)$이 성립한다.

따라서, 모든 자연수 n에 대하여 등식 $(*)$이 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?[3점－1010－종로]

	(가)	(나)	(다)
①	1	$2k+1$	1
②	1	$4k+2$	2
③	2	$2k+1$	1
④	2	$2k+1$	2
⑤	2	$4k+1$	1

46. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 등식

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} \qquad \cdots\cdots\cdots (*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

<증 명>

(1) $n=1$일 때, (좌변)= $\boxed{(가)}$, (우변)= $\boxed{(가)}$이므로 등식 $(*)$이 성립한다.

(2) $n=m$일 때, 등식

$$\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{m+k}$$

이 성립한다고 가정하자. $n=m+1$일 때,

$$\sum_{k=1}^{m+1}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)+\left\{\boxed{(나)}\right\}$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{m+k}+\left\{\boxed{(나)}\right\}$$

$$=\frac{1}{m+1}+\sum_{k=1}^{m-1}\boxed{(다)}+\frac{1}{m+(m+1)}-\frac{1}{2(m+1)}$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\boxed{(다)}+\left\{\frac{1}{m+1}-\frac{1}{2(m+1)}\right\}$$

$$=\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{m+k+1}$$

그러므로 $n=m+1$일 때도 등식 $(*)$이 성립한다.
따라서 모든 자연수 n에 대하여 등식 $(*)$이 성립한다.

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?**[3점-1011-대성]**

	(가)	(나)	(다)
①	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2m}-\frac{1}{2(m+1)}$	$\frac{1}{m+k}$
②	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2m+1}-\frac{1}{2(m+1)}$	$\frac{1}{m+k}$
③	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2m+1}-\frac{1}{2(m+1)}$	$\frac{1}{m+k+1}$
④	1	$\frac{1}{2m}-\frac{1}{2(m+1)}$	$\frac{1}{m+k}$
⑤	1	$\frac{1}{2m+1}-\frac{1}{2(m+1)}$	$\frac{1}{m+k+1}$

47. 2 이상의 자연수 n에 대하여

$S_n=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$이라 정의하자. 다음은 부등식

$$\frac{n-1}{2(n+1)}<S_n<\frac{n-1}{n} \qquad \cdots\cdots\cdots (*)$$

이 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

<증 명>

(i) $n=2$일 때, $\frac{1}{6}<\frac{1}{4}<\frac{1}{2}$이므로 $(*)$는 성립한다.

(ii) $n=k$ $(k=2, 3, 4, \cdots)$일 때, $(*)$가 성립한다고 가정하면

$$\frac{k-1}{2(k+1)}<S_k<\frac{k-1}{k}$$

이다. $n=k+1$일 때, $(*)$가 성립함을 보이자.

$$\frac{k-1}{2(k+1)}+\frac{1}{(k+1)^2}<S_k+\frac{1}{(k+1)^2}$$

$$<\frac{k-1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}$$

여기서

$$\frac{k-1}{2(k+1)}+\frac{1}{(k+1)^2}-\boxed{(가)}=\frac{1}{(k+1)^2(k+2)}>0$$

이므로

$$\boxed{(가)}<S_k+\frac{1}{(k+1)^2}=S_{k+1} \qquad \cdots\cdots\cdots ㉠$$

또한,

$$\frac{k-1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}=\frac{\boxed{(나)}}{k(k+1)^2}<\frac{k^3+k^2}{k(k+1)^2}=\frac{k}{k+1}$$

이므로

$$S_{k+1}=S_k+\frac{1}{(k+1)^2}<\frac{k}{k+1} \qquad \cdots\cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $n=k+1$일 때도 $(*)$가 성립한다.
그러므로 (i), (ii)에서 2 이상의 자연수 n에 대하여 $(*)$가 성립한다.

위의 (가)와 (나)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 할 때, $2f(3)g(3)$의 값은? **[3점-1010-비상]**

① 21 ② 23 ③ 25
④ 27 ⑤ 29

48. 다음은 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}<\frac{1}{4}\left(3-\frac{1}{n}\right)\cdots(*)$$

이 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

<증 명>

(i) $n=2$일 때,

(좌변)= $\boxed{(가)}$, (우변)= $\frac{5}{8}$ 이므로 ($*$)이 성립한다

(ii) $n=k(k\geq 2)$일 때, ($*$)이 성립한다고 가정하면

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}<\frac{1}{4}\left(3-\frac{1}{k}\right)$$

$n=k+1$일 때 ($*$)이 성립함을 보이기 위해서 양변에

$\boxed{(나)}$ 를 더하면

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}+\boxed{(나)}$$

$$<\frac{1}{4}\left(3-\frac{1}{k}\right)+\boxed{(나)}$$

$$<\frac{1}{4}\left(3-\frac{1}{k}\right)+\boxed{(다)}=\frac{1}{4}\left(3-\frac{1}{k+1}\right)$$

따라서 $n=k+1$일 때도 ($*$)이 성립한다.

따라서 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여 부등식 ($*$)이 성립한다.

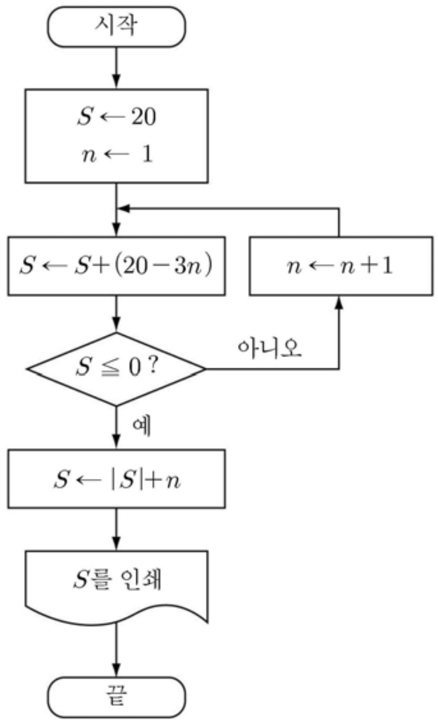
위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것의 합을 $f(k)$라 할 때, $f(2)$의 값은?[3점-1011-중앙]

① $\frac{71}{120}$ ② $\frac{73}{120}$ ③ $\frac{77}{120}$

④ $\frac{79}{120}$ ⑤ $\frac{83}{120}$

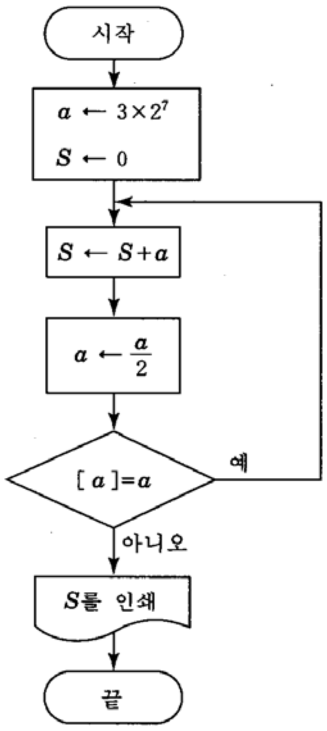
49. 다음 순서도에서 인쇄되는 S의 값을 구하시오.

[3점-1004-교육청]

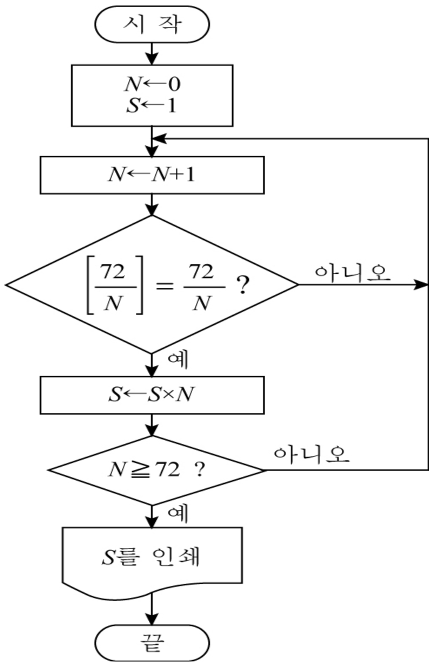


50. 오른쪽 순서도에서 인쇄되는 S의 값을 구하시오. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

[4점-1010-대성]



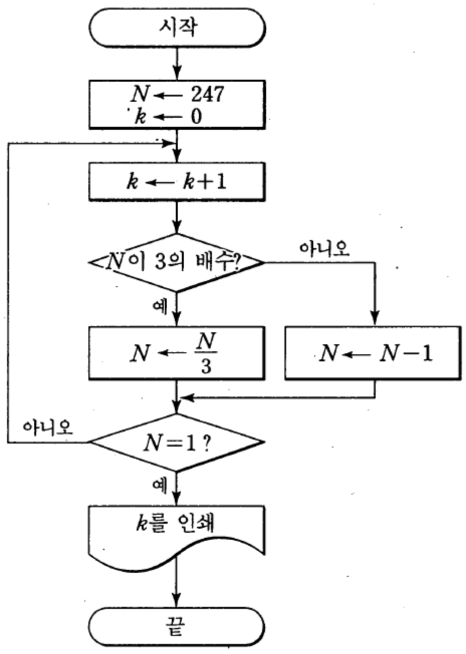
51. 다음 순서도에서 인쇄되는 S의 값은? (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대 정수)[4점-1007-교육청]



① $2^{18} \times 3^{12}$ ② $2^{12} \times 3^{18}$ ③ $2^{14} \times 3^{11}$
④ $2^{17} \times 3^{12}$ ⑤ $2^{12} \times 3^{17}$

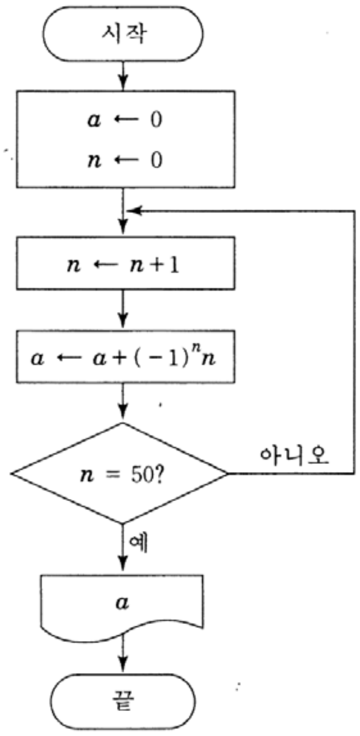
52. 다음 순서도에서 인쇄하는 k의 값을 구하시오.

[3점-1005-종로]



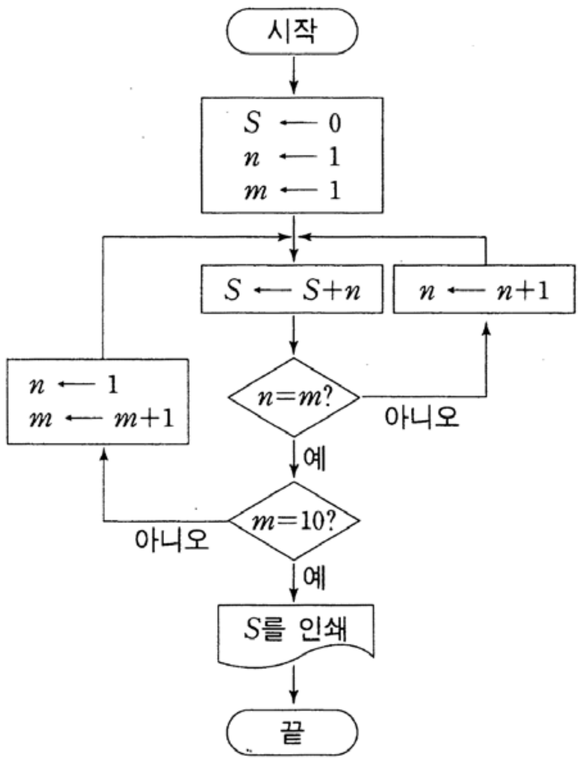
53. 다음 순서도에서 인쇄되는 a의 값을 구하시오.

[4점-1010-대성]



54. 다음 순서도에 인쇄되는 S의 값을 구하시오.

[4점-1010-비상]



무한수열의 극한

1. $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+4n}-n)$의 값은?[2점-1010-대성]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ 2 ⑤ 4

2. $\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{\sqrt{n^2+1}+n}$의 값은?[2점-1011-대전교]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

3. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}}$ 의 값은?[2점-1007-교육청]

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2
④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

4. $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+4n+11}-n\right)$의 값은?[2점-1009-평가원]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

5. $\lim_{n\to\infty}n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$의 값은?[2점-1003-교육청]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ 1 ⑤ 2

6. $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2-3n})$의 값은?[2점-1010-중앙]

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2
④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

7. $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})$ 의 값은?[2점-1007-종로]

① 0　② $\frac{1}{2}$　③ 1　④ $\frac{3}{2}$　⑤ 2

8. $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})$의 값은?[2점-1008-중앙]

① $\frac{1}{3}$　② $\frac{1}{2}$　③ 1　④ $\frac{3}{2}$　⑤ 2

9. $\lim_{n\to\infty}n(\sqrt{n^2+3}-\sqrt{n^2-2})$ 의 값은?[2점-1006-종로]

① 1　② 2　③ $\frac{5}{2}$　④ 3　⑤ 5

10. $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+\frac{2}{n}}-\sqrt{n-\frac{3}{n}}\right)$의 값은?[2점-1007-메가]

① $-\frac{1}{3}$　② 0　③ $\frac{1}{2}$　④ $\frac{3}{2}$　⑤ 3

11. $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2n+3}-n)$ 의 값은?[2점-1010-비상]

① $\frac{1}{3}$　② $\frac{1}{2}$　③ 1　④ 2　⑤ 3

12. $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+5}-\sqrt{n+1})$의 값은?[2점-1004-종로]

① 0　② 1　③ $\sqrt{5}-1$　④ 2　⑤ $\sqrt{5}$

13. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+2n}}$ 의 값은?[2점-1008-비상]

① -4　② -2　③ 0　④ 2　⑤ 4

14. $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}}$의 값은?[2점–1011–종로]

① 0　② $\frac{1}{4}$　③ $\frac{1}{2}$
④ 1　⑤ 2

15. $\lim_{n\to\infty}n(\sqrt{n^2-n+2}-\sqrt{n^2-n-2})$의 값은?

[2점–1009–종로]

① 1　② $\frac{3}{2}$　③ 2
④ $\frac{5}{2}$　⑤ 3

16. $\lim_{n\to\infty}(2n-\sqrt{4n^2+3n+2})$의 값은?[2점–1011–중앙]

① $-\frac{3}{4}$　② $-\frac{1}{4}$　③ 0
④ $\frac{1}{4}$　⑤ $\frac{3}{4}$

17. $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+2\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})$의 값은?[2점–1005–메가]

① $\frac{1}{2}$　② $\frac{\sqrt{2}}{2}$　③ 1
④ $\sqrt{2}$　⑤ $\frac{3}{2}$

18. $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+3}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})$의 값은?[2점–1010–대성]

① 0　② $\frac{1}{2}$　③ 1
④ $\frac{3}{2}$　⑤ 2

19. $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+1}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-1})$의 값은?[2점–1009–중앙]

① $\frac{1}{2}$　② 1　③ $\frac{3}{2}$
④ 2　⑤ $\frac{5}{2}$

20. $\lim_{n\to\infty}\frac{n(\sqrt{n+3}-\sqrt{n+2})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+3}}$ 의 값은?[2점-1010-메가]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1

④ 2 ⑤ 4

21. $\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}+4^{-n+1}}{3^{n-1}+4^{-n}}$ 의 값은?[2점-1008-대성]

① $\frac{4}{9}$ ② $\frac{9}{4}$ ③ 6

④ 8 ⑤ 9

22. $\lim_{n\to\infty}\frac{a\times 6^{n+1}-5^n}{6^n+5^n}=4$일 때, 상수 a의 값은?

[2점-2010-대수능]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$

④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

23. $\lim_{n\to\infty}\frac{(-3)^{n+1}-2^n+1}{(-3)^n+2^{n+1}}$ 의 값은?[2점-1009-대성]

① $-\frac{1}{3}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ -1

④ -2 ⑤ -3

24. $\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+4^{n+1}}{2^{2n}-3^{n+1}}$ 의 값은?[2점-1008-종로]

① -3 ② $-\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$

④ 1 ⑤ 4

25. $\lim_{n\to\infty}\frac{2-3^{n+1}}{3^n+4}$ 의 값은?[2점-1005-대성]

① -3 ② -1 ③ 0

④ 1 ⑤ 3

26. $\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot4^n-3^n}{4^n+3^n+2}$ 의 값은?[2점-1006-평가원]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

27. $\lim_{n\to\infty}(2n+1)a_n=4$일 때, $\lim_{x\to\infty}\frac{(5n^2+n)a_n}{3n+1}$의 값은?

[2점-1007-대성]

① 3 ② $\frac{10}{3}$ ③ $\frac{11}{3}$
④ 4 ⑤ $\frac{13}{3}$

28. $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{4^n+2^{n+2}}-2^n)$의 값은?[2점-1005-종로]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

29. $\lim_{n\to\infty}\frac{(4^{n+1}-1)(3^{n+1}-1)}{12^n}$ 의 값은?[2점-1003-비상]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 12

30. $\lim_{n\to\infty}\frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{2n^2-3n+1}$ 의 값은?[2점-1010-종로]

① 0 ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ 1 ⑤ 2

31. $\lim_{n\to\infty}\frac{1+3+3^2+\cdots+3^n}{3^n}$ 의 값은?[2점-1005-비상]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1
④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 3

32. $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-3n+1}{1+2+3+\cdots+n}$의 값은?[3점-1005-대성]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

33. $\lim_{n\to\infty}\frac{5n-1}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}$ 의 값은?[2점-1006-대성]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

34. $\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(n-3)}{3n^2+5}$의 값은?[2점-1011-대성]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1
④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

35. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+5}{2a_n+1}=3$$

일 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값은?[2점-1004-메가]

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{3}{5}$
④ $\frac{4}{5}$ ⑤ 1

36. 두 등식 $\lim_{n\to\infty}\frac{an+b}{n}=2$, $\sum_{n=1}^{5}(an+b)=60$ 을 만족시키는 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은?[3점-1010-교육청]

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

37. 등차수열 $\{a_n\}$이 $a_1=2$, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2n-1}=2$를 만족할 때, a_5의 값은? [3점-1003-중앙]

① 18 ② 19 ③ 20
④ 21 ⑤ 22

38. 수열 $\{a_n\}$이 $3n-1<na_n<3n+2$를 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값은?[3점-1004-교육청]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 2
④ 3 ⑤ 5

39. 수열 a_n이 모든 자연수 n에 대하여 부등식

${a_n}^2-2a_n+\frac{n^2-1}{n^2}<0$을 만족할 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값은?

[3점-1003-중앙]

① 0 ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

40. 모든 자연수 n에 대하여 수열 $\{a_n\}$이 다음 두 조건을 만족시킨다.

(가) $a_n>0$
(나) $3a_{n+1}<a_n$

이때, $\lim_{n\to\infty}(3a_n-2)$의 값은?[3점-1008-비상]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

41. 이차정사각행렬 A의 $(i,\ j)$성분 $a_{ij}(i=1,\ 2,\ j=1,\ 2)$를

$$a_{ij}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{j}{i}\right)^n+j}{\left(\frac{j}{i}\right)^{n-1}+i}$$

로 정의하자. 행렬 A의 모든 성분의 합은 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)[3점-1004-메가]

42. 수열 $\{a_n\}$이 $a_n=\frac{1}{n^2+2n}(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$일 때,

$100\times\lim_{n\to\infty}(a_2+a_4+\cdots+a_{2n})$의 값을 구하시오.[3점-1003-비상]

43. 수열 $\{a_n\}$이 다음과 같이 정의된다.

$$a_1=1,\ a_{n+1}=\begin{cases}\frac{1}{2}a_n+4 & (n\text{은 짝수})\\ \frac{p}{a_n+1}-1 & (n\text{은 홀수})\end{cases}$$

$\lim_{n\to\infty}a_n$이 존재할 때, p의 값은?[3점-1005-종로]

① 3 ② 15 ③ 21
④ 81 ⑤ 100

44. 수직선 위의 원점 O와 좌표가 1인 점에 대하여 점 P_n의 좌표 x_n을 다음 규칙에 따라 정한다. (단, $n=1, 2, 3, \cdots$)

(가) x_1은 선분 OP를 1 : 2로 내분하는 점 P_1의 좌표이다. (나) x_k는 선분 $P_{k-1}P$를 1 : 2로 내분하는 점 P_k의 좌표이다. ($k=2, 3, 4, \cdots$)

이때, $\lim_{n\to\infty} x_k$의 값은?[3점-1003-비상]

① 1 ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

45. 첫째항이 3 이고 공차가 4 인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{a_n a_{2n}}$ 의 값은?[3점-1006-대성]

① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{12}$ ③ $\frac{1}{8}$
④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

46. 수열$\{a_n\}$ 이 수렴하고 $\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n-3}{a_{n+1}}=4$ 일 때, $\lim_{n\to\infty}(4a_n+3)$ 의 값은?[3점-1010-대성]

① -3 ② -2 ③ -1
④ 0 ⑤ 1

47. 이차함수

$f(x)=2x^2-2nx+\frac{1}{2}n^2+6n+1$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표를 $P(x_n, y_n)$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}$ 의 값을 구하시오.
[3점-1003-교육청]

48. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$에 대하여

$$A^{-1}B^{n}A=\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

이라 하자. $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n+c_n}{a_n+d_n}$의 값은?[3점-1003-교육청]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

49. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$a_n+b_n=3^n,\ a_n-b_n=2^n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

이 성립할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{{a_n}^2+{b_n}^2}{a_n b_n}$의 값은?[3점-1004-종로]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

50. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty}(2a_n-b_n)=3$일 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2a_n}{b_n}+\frac{3b_n}{a_n}\right)$의 값을 구하시오.

[3점-1003-종로]

51. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2n+3}=2$, $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{3n+1}=3$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n b_n}{n^2+4}$의 값을 구하시오.

[3점-1007-교육청]

52. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{3^n+2^n}=2$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{15a_n}{3^{n-1}+1}$의 값을 구하시오.[3점-1005-중앙]

53. $\lim_{n\to\infty}\frac{2^{3n}-5^{n+1}}{3^{2n}+5^n}$의 값은?[3점-1006-종로]

① -5 ② -1 ③ 0
④ $\frac{8}{9}$ ⑤ 5

54. 첫째항이 모두 1인 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\frac{2}{5}a_n,\ b_{n+1}=\frac{1}{2}b_n$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\{5^n a_n(a_n+b_n)\}$의 값을 구하시오.

[3점–1004–종로]

55. n이 자연수일 때, x에 대한 이차방정식 $x^2+(3n+1)x-\sqrt{n^2+3}-\sqrt{n^2+1}=0$의 두 근을 α_n, β_n이라 하자. 이때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}\right)$의 값은?[3점–1010–비상]

① -3　② $-\frac{2}{3}$　③ $\frac{2}{3}$　④ $\frac{3}{2}$　⑤ 3

56. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$$\left|a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n-1\right|<\frac{1}{2^n}$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값은?[3점–1005–대성]

① -1　② $-\frac{1}{2}$　③ 0　④ $\frac{1}{2}$　⑤ 1

57. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$1+\log_2 n<\log_2 a_n<1+\log_2(n+1)$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$의 값은?[3점–1006–대성]

① 0　② $\frac{1}{2}$　③ 1　④ 2　⑤ 4

58. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 $\begin{pmatrix}a_n & b_n\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}^n$을 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?[3점–1004–교육청]

<보 기>

ㄱ. $a_2+b_2=17$

ㄴ. $b_n=3^n-1$

ㄷ. $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=3$

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

59. 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 0이 아니고, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}+\frac{1}{3^n}}$의 값은?[3점–1010–대성]

① 3　② $\frac{9}{4}$　③ $\frac{8}{3}$　④ $\frac{5}{2}$　⑤ 2

60. 무한수열 $\frac{1}{1}$, $\frac{1+2}{2}$, $\frac{1+2+2^2}{2^2}$, $\frac{1+2+2^2+2^3}{2^3}$, $\cdots$의 극한값은?[3점–1003–중앙]

① 4 ② 2 ③ 1

④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 0

61. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $S_n = 1-\left(\frac{1}{3}\right)^n$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$의 값은?[3점–1011–중앙]

① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$

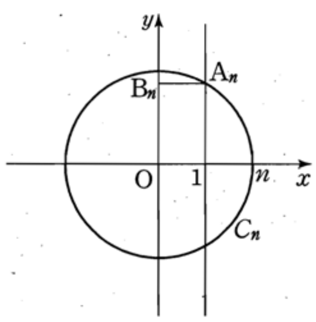
④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

62. $a_1=2$, $(n+1)a_{n+1}=na_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값은?[3점–1004–메가]

① 0 ② $\frac{1}{2}$ ③ 1

④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

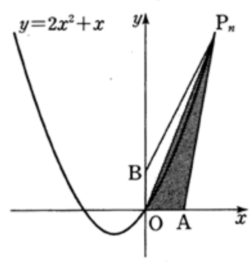
63. 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 n인 원을 C_n $(n=2,\ 3,\ \cdots)$이라 하자. 직선 $x=1$과 원 C_n이 제1사분면에서 만나는 점을 A_n이라 하고, 점 A_n에서 y축에 내린 수선의 발을 B_n이라 하자. 두 점 B_n, A_{n+1}을 지나는 직선의 기울기를 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값은?[3점–1009–중앙]



① 0 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

④ 1 ⑤ $\sqrt{2}$

64. 좌표평면 위에 두 점 A(1, 0), B(0, 1)과 곡선 $y=2x^2+x$의 그래프 위를 움직이는 점 $\mathrm{P}_n(n,\ 2n^2+n)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이 있다. 삼각형 AOP_n의 넓이를 $S(n)$, 삼각형 BOP_n의 넓이를 $T(n)$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{S(n)}{\{T(n)\}^2}$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)[3점–1004–종로]



65. 수열 $\{a_n\}$을 다음과 같이 정의하자.

$$a_1 = 1+\frac{1}{3}$$
$$a_2 = \left(1+\frac{1}{3}\right)\left\{1+\left(\frac{1}{3}\right)^2\right\}$$
$$a_3 = \left(1+\frac{1}{3}\right)\left\{1+\left(\frac{1}{3}\right)^2\right\}\left\{1+\left(\frac{1}{3}\right)^4\right\}$$
$$a_4 = \left(1+\frac{1}{3}\right)\left\{1+\left(\frac{1}{3}\right)^2\right\}\left\{1+\left(\frac{1}{3}\right)^4\right\}\left\{1+\left(\frac{1}{3}\right)^8\right\}$$
$$\vdots$$
$$a_n = \left(1+\frac{1}{3}\right)\left\{1+\left(\frac{1}{3}\right)^2\right\}\left\{1+\left(\frac{1}{3}\right)^4\right\}\left\{1+\left(\frac{1}{3}\right)^8\right\}\cdots\left\{1+\left(\frac{1}{3}\right)^{2^{n-1}}\right\}$$

$\lim_{n\to\infty} a_n$의 값은?[4점-1004-메가]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

66. 무한수열 $\{(x+2)(x^2-4x+3)^{n-1}\}$이 수렴하도록 하는 모든 정수 x의 합을 구하시오.[3점-1004-교육청]

67. 자연수 n에 대하여 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=-x+n$이 만나서 생기는 두 교점 사이의 거리를 l_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{l_n^2}{n}$의 값은?

[3점-1007-교육청]

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

68. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, S_n은 좌표평면 위에서 함수 $y=|x-n|$의 그래프와 직선 $y=n$으로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k\cdot a_{k+1}}=\frac{q}{p}$ (p, q는 서로소인 자연수)일 때, $p+q$의 값을 구하여라.[3점-1008-종로]

69. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$이다.

$$S_n=\frac{1}{3}a_n+1\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

이 성립할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은?[3점-1006-종로]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ $\frac{4}{3}$ ⑤ 2

70. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?[3점-1004-교육청]

<보 기>

ㄱ. $\lim_{n\to\infty}|b_n|=0$이면 $\lim_{n\to\infty}b_n=0$이다.

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}(3n+1)a_n=6$이면 $\lim_{n\to\infty}na_n=2$이다.

ㄷ. 수열 $\{a_nb_n\}$이 수렴하면 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은 각각 수렴한다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

71. 첫째항이 1, 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$이

$$b_n=\sum_{k=1}^{n}a_{3k-2}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

로 정의 될 때, <보기>의 극한 중 수렴하는 것만을 있는 대로 고른 것은?[3점-1003-종로]

<보 기>

ㄱ. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$ ㄴ. $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{b_{n+1}}$

ㄷ. $\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}a_k}{\sqrt{b_n+2n}}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

72. 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[3점-1011-종로]

<보 기>

ㄱ. $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=k$ (k는 상수)이면 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모두 수렴한다.

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$이면 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)=1$이다.

ㄷ. 두 수열 $\{a_n-b_n{}^2\}$, $\{b_n\}$이 모두 수렴하면 수열 $\{a_n\}$도 수렴한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

73. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[3점-1003-종로]

<보 기>

ㄱ. $\lim_{n\to\infty}S_n=1$이면 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$이다.

ㄴ. $a_n=\frac{1}{n}$이면, 수열 $\{S_n\}$은 수렴한다.

ㄷ. $a_n=r^{n-1}$이고 $-1<r\le 1$이면, 수열 $\{S_n\}$이 수렴한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

74. 두 무한수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\alpha$일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, α는 0이 아닌 실수이다.)[3점-1003-교육청]

<보 기>

ㄱ. $\lim_{n\to\infty}a_n=0$이면 $\lim_{n\to\infty}b_n=0$이다.

ㄴ. $\alpha=1$이면 $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$이다.

ㄷ. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{1}{\alpha}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

75. 실수로 이루어진 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[4점-1008-비상]

<보 기>

ㄱ. 두 수열 $\{a_n+b_n\}$, $\{a_n-b_n\}$이 모두 수렴하면 수열 $\{a_nb_n\}$은 수렴한다.

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}\left({a_n}^2+{b_n}^2\right)=0$이면 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=0$이다.

ㄷ. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=-1$이면 $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

76. 수렴하는 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[4점-1010-비상]

<보 기>

ㄱ. $\lim_{n\to\infty}\sqrt{{a_n}^2}=\lim_{n\to\infty}a_n$

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)^2=0$이면 $\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n=0$이다.

ㄷ. $a_n<b_n\ (n=1, 2, 3, \cdots)$이고 $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)^2=1$이면 $\lim_{n\to\infty}b_n=1+\lim_{n\to\infty}a_n$이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

77. 집합 $\{x\,|\,x\neq-1$인 실수$\}$에서 정의된 함수

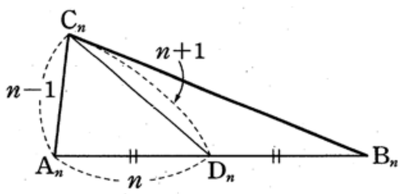
$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{3x^{2n+2}+x^n+8}{x^{2n}+2}\quad(x\neq-1)$$

가 있다. 좌표평면에서 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 만나지 않도록 하는 자연수 k의 개수를 구하시오.[3점-1005-메가]

78. 네 실수 $a,\ b,\ c,\ d$ 에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{an^3+bn^2+cn+d}{2n^2+\sqrt{n^3+1}}=10$ 이 성립할 때, $a+b$의 값은?[3점-1005-중앙]

① 18　② 19　③ 20
④ 21　⑤ 22

79. n이 3 이상의 자연수일 때, 네 점 A_n, B_n, C_n, D_n은 다음 조건을 만족시킨다.



(가) 점 D_n은 선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$의 중점이다. (나) $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{D}_n}=n$, $\overline{\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n}=n+1$, $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{C}_n}=n-1$

선분 $\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$의 길이를 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$의 값은?

[3점-1005-메가]

① 0　② $\frac{1}{2}$　③ $\sqrt{3}$
④ 2　⑤ 3

80. 자연수 n에 대하여 좌표평면 위의 점들로 이루어진 두 집합 A_n, B_n을 다음과 같이 정의하자.

$$A_n=\left\{(x,\ y)\,\middle|\,y=\frac{1}{2n}x+\frac{3}{4n}\right\}$$
$$B_n=\{(x,\ y)\,|\,0\le x\le 2n,\ 0\le y\le 1\}$$

집합 $A_n\cap B_n$의 원소 중에서 x좌표가 정수인 것의 개수를 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{{a_n}^2-4n^2}{n}$의 값은?[3점-1007-메가]

① -4　② -3　③ -2
④ -1　⑤ 1

81. 수열 $\{a_n\}$은 다음 조건을 만족시킨다.

㈎ $\frac{1}{3}<a_n<1$ $(n=1,2,3,\cdots)$ ㈏ $\dfrac{a_{n+1}-\frac{1}{3}}{a_n-\frac{1}{3}}<\frac{1}{2}$ $(n=1,2,3,\cdots)$

$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p,q는 서로소인 자연수이다.)[4점-1004-메가]

82. 양의 정수로 이루어진 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$(1+\sqrt{3})^{n+1}=a_n+\sqrt{3}\,b_n,\ {a_n}^2-3{b_n}^2=(-2)^{n+1}$$

을 만족한다. 이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{3\sqrt{3}\,a_n}{b_n}$의 값을 구하시오.[4점–1009–종로]

83. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1+a_2+a_3+\cdots=4,\quad {a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2+\cdots=\frac{48}{5}$$

일 때, $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_{2k}=\frac{q}{p}$ (p, q는 서로소인 자연수)이다. 이때 $p+q$의 값을 구하시오.[3점–1011–종로]

84. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이

$a_1=3,\ b_1=1,\ \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+b_n}{4^n+2^n}$의 값은? [4점–1003–비상]

① 1 ② 2 ③ 4
④ 6 ⑤ 8

85. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 수열

$$a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2,\ a_3,\ b_3,\ \cdots,\ a_n,\ b_n,\ \cdots$$

은 첫째항이 1이고 공차가 2인 등차수열이다. $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{a_n}-\sqrt{b_n})$의 값은?[3점–1009–대성]

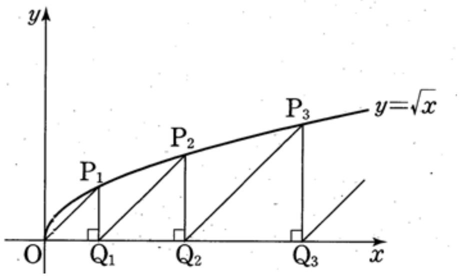
① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

86. 자연수 n에 대하여 직선 $x=n$이 두 곡선 $y=\sqrt{2(x+4)}$, $y=\sqrt{2(x-1)}$ 및 x축과 만나는 점을 각각 A_n, B_n, C_n이라 하자. $a_n=\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}\cdot\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값은?[4점–1006–종로]

① 2 ② $2\sqrt{2}$ ③ 3
④ 4 ⑤ 5

87. 자연수 n에 대하여 이차함수 $y=x^2-4n^2+1$의 그래프 위의 점 $(2n,\ 1)$에서 접하는 직선과 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^3}$의 값을 구하시오.[4점–1004–대성]

88. 원점을 지나고 기울기가 1인 직선이 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프와 만나는 점을 P_1이라 하고, 점 P_1에서 x축에 내린 수선의 발을 $Q_1(x_1,\ 0)$이라 하자. 점 Q_1을 지나고 기울기가 1인 직선이 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프와 만나는 점을 P_2라 하고, 점 P_2에서 x축에 내린 수선의 발을 $Q_2(x_2,\ 0)$이라 하자. 이와 같은 과정을 계속 반복하여 얻은 수열 $\{x_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$의 값은?[4점-1008-중앙]



① $\frac{\sqrt{2}}{2}$　② 1　③ $\sqrt{2}$
④ $\frac{3}{2}$　⑤ 2

89. 수렴하는 두 무한수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$a_1=39,\ \ a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+10$

$b_1=18,\ \ b_{n+1}=\frac{2}{3}b_n+k$ (k 는 상수)

가 성립할 때, $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\alpha$ 이다. 이때 $\alpha+k$ 의 값은?

[4점-1008-종로]

① 10　② 15　③ 20
④ 25　⑤ 30

90. 어떤 농구공과 축구공을 지면으로부터 hm 높이에서 떨어뜨리면 각각 $0.8h$m, $0.6h$m 만큼 튀어 오른다. 이 농구공을 지면으로부터 am의 높이에서 떨어뜨린 후 n번째 지면에 닿을 때까지 움직인 거리를 a_nm, 이 축구공을 지면으로부터 bm의 높이에서 떨어뜨린 후 n번째 지면에 닿을 때까지 움직인 거리를 b_nm라 하자. $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n$일 때, $\frac{a}{b}$의 값은? (단, $a>0,\ b>0$)

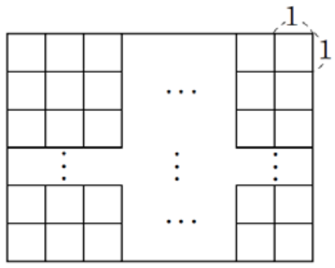
[4점-1011-중앙]

① $\frac{2}{3}$　② $\frac{3}{4}$　③ $\frac{3}{5}$
④ $\frac{4}{9}$　⑤ $\frac{7}{10}$

91. 자연수 n에 대하여 다항식 $(x^2+x+1)^n$ 을 x^2-4x+3으로 나눈 나머지를 $R(x)$라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{50R(0)}{2^{3n}-13^n}$의 값을 구하시오.

[4점-1008-대성]

92. 그림과 같이 가로의 길이가 m, 세로의 길이가 n인 직사각형을 한 변의 길이가 1인 정사각형으로 나눌 때, 이 직사각형에 포함된 모든 정사각형의 개수를 $f(m,\ n)$이라 하자. 예를 들어, $f(1,\ 3)=3$, $f(2,\ 2)=5$이다. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, $m,\ n$은 자연수이다.) [4점-1010-메가]



<보 기>

ㄱ. $f(3,\ 3)=14$

ㄴ. $f(2m,\ n)=2f(m,\ n)$

ㄷ. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3}{f(n,\ n)}=3$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

93. $a_1=3,\ b_1=2$인 두 수열 $\{a_n\},\ \{b_n\}$은 $k>l$ 인 모든 자연수 $k,\ l$ 에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\dfrac{a_k}{a_l}=a_{k-l}$

(나) $b_k\,b_l=b_{k+l}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}-b_n}{a_n+b_{n+1}}$의 값을 구하시오.[4점-1004-메가]

94. 수열 $\{a_n\}$을

$$a_1=0,\ a_2=1,\ a_{n+2}=\frac{a_n+a_{n+1}}{2}\ (n=1,\ 2,\ 3,\cdots)$$

로 정의할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$의 값은?[4점-1011-중앙]

① 0 ② $\dfrac{1}{3}$ ③ $\dfrac{1}{2}$
④ $\dfrac{2}{3}$ ⑤ 1

95. 자연수 n에 대하여 수열 $\{a_n\}$을 $a_n=(3^n$의 자릿수)로 정의한다. 예를 들면

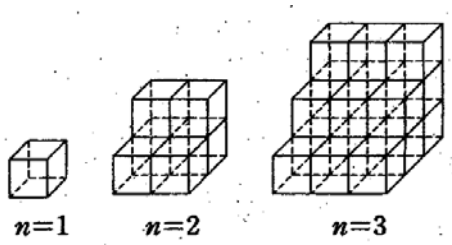
$3^2=9$는 한 자리의 수이므로 $a_2=1$

$3^3=27$은 두 자리의 수이므로 $a_3=2$이다.

이 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}$의 값은?[4점-1003-비상]

① $\log 3$ ② $\log 9$ ③ 1
④ $\log_9 10$ ⑤ $\log_3 10$

96. 성냥개비와 접착제를 이용하여 그림과 같은 계단 모양의 구조물을 만든다. 그림과 같은 방식으로 높이가 한 칸씩 증가할 때 폭도 한 칸씩 증가하도록 n층의 계단 모양의 구조물을 만들 때, 필요한 성냥개비의 개수를 S_n이라 하면 $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{2n^3}$의 값은?[4점-1003-종로]



① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{3}{4}$
④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

97. 어느 공장의 기름통에 $1000L$의 길음이 들어 있다. 이 기름을 사용하여 어떤 제품을 생산하는 데 매일 하루에 이 기름통에 들어 있는 기름의 20%를 사용하고 $100L$의 기름을 보충한다고 한다. 예를 들어 이 기름을 사용하기 시작한 지 1일 후 기름통에 남아 있는 기름의 양은 $900L$이다. 이와 같은 방법으로 기름을 사용하기 시작한 지 n일 후 기름통에 남아 있는 기름의 양을 $a_n(L)$이라고 할 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값은?[4점-1003-중앙]

① 450 ② 500 ③ 550
④ 600 ⑤ 650

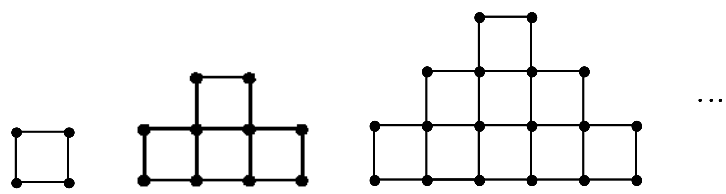
98. 집합 $F_n\,(n=1, 2, 3, \cdots)$은 0 또는 1로 이루어진 n자리의 자연수의 집합이다. 예를 들어
$F_1=\{1\},\ F_2=\{10,\ 11\},\ F_3=\{100, 101, 110, 111\}$이다.

집합 F_n의 모든 원소의 합을 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{20^{n-1}}$의 값은?

[4점-1005-비상]

① $\frac{17}{18}$ ② 1 ③ $\frac{19}{18}$
④ $\frac{10}{9}$ ⑤ $\frac{7}{6}$

99. [그림1]은 길이가 1m인 철근 4개를 가지고 철근의 끝점과 끝점을 용접하여 만든 조형물이다. [그림2]는 길이가 1m인 철근 13개를 가지고 철근의 끝점과 끝점을 용접하여 만든 조형물이다.



[그림1] [그림2] [그림3]

이와 같이 길이가 1m인 철근의 끝점과 끝점을 용접하여 만든 n번째 조형물에 사용된 1m인 모든 철근의 수를 a_n, 용접한 모든 지점의 수를 b_n이라 하자. 예를 들어, $a_2=13, b_2=10$이다.

이때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}+b_{2n}}{a_n}$의 값을 구하시오.[4점-1011-대전교]

100. 자연수 m에 대하여 크기가 같은 정육면체 모양의 블록이 1에 1개, 2열에 2개, 3열에 3개, $\cdots$, m열에 m개 쌓여 있다. 블록의 개수가 짝수인 열이 남아 있지 않을 때까지 다음 시행을 반복한다.

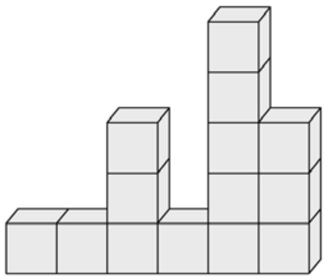
블록의 개수가 짝수인 각 열에 대하여 그 열에 있는 블록의 개수의 $\frac{1}{2}$만큼의 블록을 그 열에서 들어낸다.

블록을 들어내는 시행을 모두 마쳤을 때, 1열부터 m열까지 남아 있는 블록의 개수의 합을 $f(m)$이라 하자.
예를 들어, $f(2)=2$, $f(3)=5$, $f(4)=6$이다.

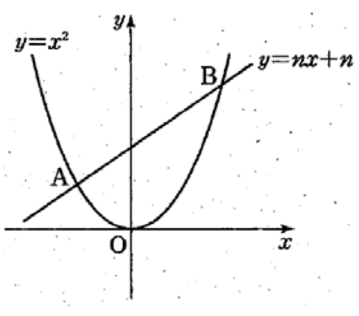
$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(2^{n+1})-f(2^n)}{f(2^{n+2})}=\frac{q}{p}$$

일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[4점-2010-대수능]



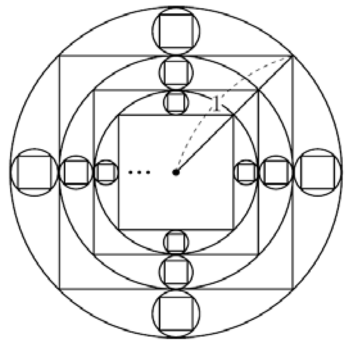
101. 자연수 n에 대하여 직선 $y=nx+n$과 곡선 $y=x^2$이 만나는 두 점을 각각 A, B라 하고, 선분 AB 위에 있는 점들 중에서 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수를 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$의 값은?



[4점-1003-중앙]

① 0 ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

102. 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원에 내접하는 정사각형을 그린다. 이 원의 내부와 정사각형의 외부에 모두 접하는 가장 큰 원 4개를 그린 후 그 안에 접하는 정사각형을 그리고, 다음의 과정을 반복한다.

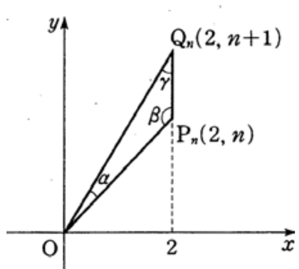


(가) 안에 있는 가장 큰 정사각형에 내접하는 원을 그리고 그 원에 내접하는 정사각형을 그린다. (나) 새로 그려진 원의 내부와 정사각형 외부에 모두 접하는 가장 큰 원 4개를 그린 후 그 안에 접하는 정사각형을 그린다.

위와 같은 과정을 n번 반복한 후 그려진 모든 정사각형의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은?[4점-1008-대성]

① $10\sqrt{3}-\sqrt{11}$ ② $20-2\sqrt{10}$ ③ $11-\sqrt{10}$ ④ $10-4\sqrt{2}$ ⑤ $2\sqrt{10}-3$

103. 원점 O와 두 점 $P_n(2,\ n)$, $Q_n(2,\ n+1)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 OP_nQ_n에서 $\angle Q_nOP_n=\alpha$, $\angle OP_nQ_n=\beta$, $\angle P_nQ_nO=\gamma$라 하자. 이때, $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\alpha}{\sin\beta-\sin\gamma}$의 값은?

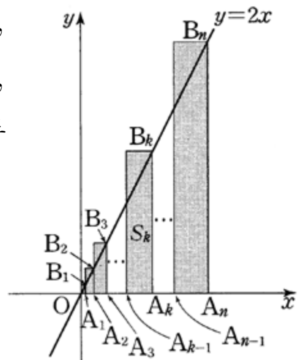


[4점-1004-종로]

① 0 ② $\frac{1}{2}$ ③ 1

④ $\sqrt{2}$ ⑤ 2

104. x축 위의 n개의 점 A_1, A_2, A_3, $\cdots$, A_n의 x좌표를 각각 x_1, x_2, x_3, $\cdots$, x_n이라 할 때, x좌표는 다음 두 조건을 만족시킨다.



(가) $x_1>0, x_n=1$ (나) $x_i-x_{i-1}=ix_1(i=2,3,4,\cdots,n)$

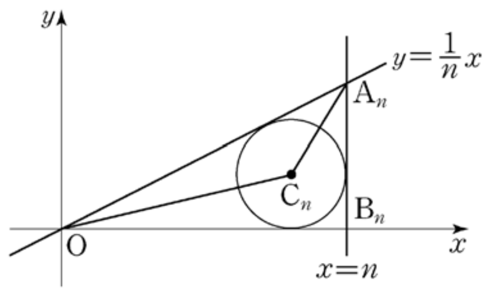
이때 그림과 같이 점 $A_k(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$를 지나고 y축과 평행한 직선이 직선 $y=2x$와 만나는 점을 B_k라 하자. 선분 $A_{k-1}A_k$와 선분 A_kB_k를 각각 가로와 세로로 하는 직사각형의 넓이를 S_k라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}S_k$의 값은? (단, A_0은 원점이다.)[4점-1010-중앙]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1

④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

105. 좌표평면에서 자연수 n에 대하여 두 직선 $y=\frac{1}{n}x$와 $x=n$이 만나는 점을 A_n, 직선 $x=n$과 x축이 만나는 점을 B_n이라 하자. 삼각형 A_nOB_n에 내접하는 원의 중심을 C_n이라 하고, 삼각형 A_nOC_n의 넓이를 S_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}$의 값은?

[4점-2010-대수능]

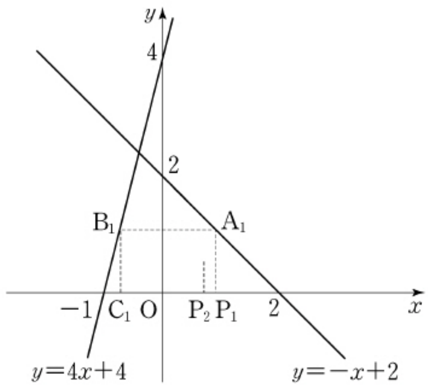


① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$

④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

106. 자연수 n에 대하여 점 P_n이 x축 위의 점일 때, 점 P_{n+1}을 다음 규칙에 따라 정한다.

> (가) 점 P_1의 좌표는 $(a_1, 0)$ $(0 < a_1 < 2)$이다.
> (나) (1) 점 P_n을 지나고 y축에 평행한 직선이 직선 $y = -x + 2$와 만나는 점을 A_n이라 한다.
> (2) 점 A_n을 지나고 x축에 평행한 직선이 직선 $y = 4x + 4$와 만나는 점을 B_n이라 한다.
> (3) 점 B_n을 지나고 y축에 평행한 직선이 x축과 만나는 점을 C_n이라 한다.
> (4) 점 C_n을 y축에 대하여 대칭이동한 점을 P_{n+1}이라 한다.



점 P_n의 x좌표를 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값은? [4점–1006–평가원]

① $\frac{2}{9}$　② $\frac{1}{3}$　③ $\frac{4}{9}$
④ $\frac{5}{9}$　⑤ $\frac{2}{3}$

107. 수렴하는 무한수열만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

[4점–1004–교육청]

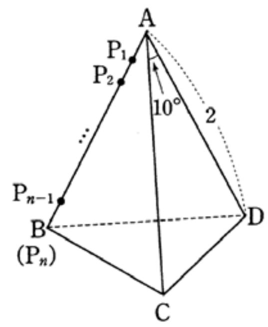
<보 기>

ㄱ. $\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$　ㄴ. $\left\{\frac{5^{n+1}-3^n}{5^n+4^n}\right\}$

ㄷ. $\left\{\frac{\sqrt{n^2+n}-n}{n}\right\}$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

108. 그림과 같이 삼각뿔 A−BCD에서 $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{AD} = 2$이고, $\angle BAC = \angle CAD = \angle DAB = 10°$이다. 2 이상의 자연수 n에 대하여 선분 AB를 n등분한 점 중 꼭짓점 A에 가까운 점부터 차례로 P_1, P_2, $\cdots$, P_{n-1}이라 하고 점 B를 P_n이라 하자. 점 P_k $(k = 1, 2, 3, \cdots, n)$에서 삼각뿔의 옆면을 한 바퀴 돌아서 점 P_k로 되돌아오는 최단 경로의 길이를 l_k라 할 때,



$\lim_{n\to\infty} \frac{l_1 + l_2 + \cdots + l_n}{n}$ 의 값은? [4점–1010–비상]

① $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$　② $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$　③ $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$
④ $\sqrt{6}-\sqrt{2}$　⑤ $\sqrt{6}+\sqrt{2}$

109. 자연수 n에 대하여,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k(k+1),\ T_n = \sum_{k=1}^{n} (n+k)(n+k+1)$$

일 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{T_n}{S_n}$ 의 값을 구하시오. [4점–1010–교육청]

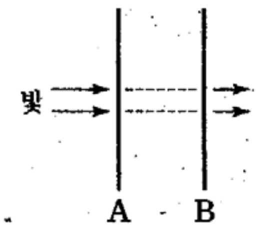
110. 자연수 n에 대하여 좌표평면 위의 영역 S_n을

$$S_n = \left\{(x,\ y) \left| \frac{2n-1}{n} \le x \le \frac{4n-1}{n},\ \frac{1-3n}{n} \le y \le \frac{2n-1}{n} \right.\right\}$$

이라 하자. 영역 S_n에 속하는 점 $(x,\ y)$에 대하여 $x+2y$의 최솟값을 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$이다. α^2의 값을 구하시오.

[4점-1007-대성]

111. 그림과 같이 두 개의 유리판 A, B가 평행하게 놓여 있다. 빛이 이 두 유리판을 지나갈 때, A에서는 빛의 양의 $\frac{1}{3}$이 통과, $\frac{2}{3}$는 반사하고, B에서는 빛의 양의 $\frac{1}{4}$이 통과, $\frac{3}{4}$은 반사한다고 한다. 그림과 같이 왼쪽에서 유리판 A에 빛을 수직으로 비추었을 때, 충분한 시간이 지난 후 B를 통과한 빛의 양에 대한 설명으로 옳은 것은?[4점-1003-종로]



① 왼쪽에서 비춘 빛의 양에 가까워진다.

② 왼쪽에서 비춘 빛의 양의 $\frac{1}{2}$에 가까워진다.

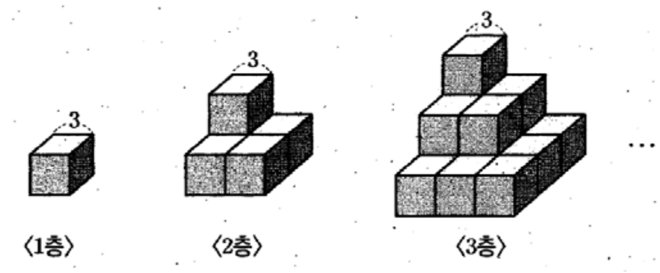
③ 왼쪽에서 비춘 빛의 양의 $\frac{1}{4}$에 가까워진다.

④ 왼쪽에서 비춘 빛의 양의 $\frac{1}{6}$에 가까워진다.

⑤ 왼쪽에서 비춘 빛의 양의 $\frac{1}{12}$에 가까워진다.

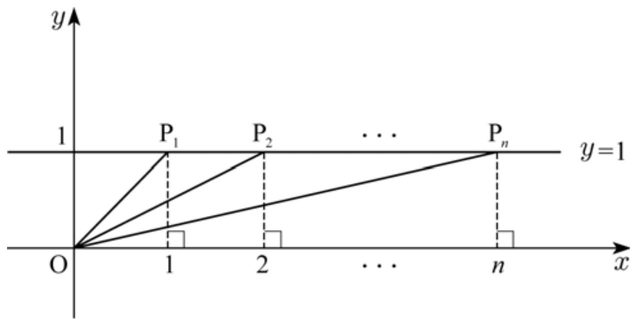
112. 한 모서리의 길이가 3인 정육면체를 이용하여 그림과 같은 규칙으로 n층을 쌓아서 만들 입체도형의 겉넓이를 a_n이라 하자. 예를 들어 $a_1 = 54$, $a_2 = 180$이다. 이 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^2}$의 값을 구하시오.

[4점-1003-중앙]



113. 좌표평면에서 직선 $y=1$ 위의 점 $P_n(n,\ 1)$에 대하여 수열 $\{a_n\}$을 다음과 같이 정의한다.

$a_n =$(선분 OP_n의 길이) $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

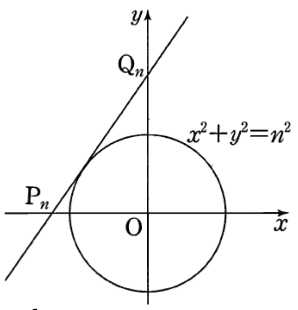


$\lim_{n\to\infty} \frac{[a_1]+[a_2]+[a_3]+\cdots+[a_n]}{n^2}$의 값은? (단, O는 원점이고, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)[4점-1003-교육청]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$

④ 1 ⑤ $\frac{3}{2}$

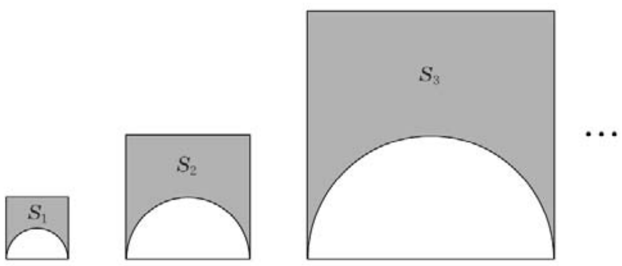
114. 좌표평면에서 자연수 n에 대하여 기울기가 n이고 y절편이 양수인 직선이 원 $x^2+y^2=n^2$에 접할 때, 이 직선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 P_n, Q_n이라 하자. $l_n=\overline{P_nQ_n}$이라 할



때, $\lim_{n\to\infty}\frac{l_n}{2n^2}$의 값은?[4점−1009−평가원]

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

115. 그림과 같이 넓이가 1, 4, 16, 64, $\cdots$인 등비수열을 이루는 정사각형들을 왼쪽부터 순서대로 배열하고, 각 정사각형의 내부에 정사각형의 한 변을 지름으로 하는 반원을 그린다.



반원의 외부와 정사각형의 내부의 공통 부분의 넓이를 왼쪽부터 순서대로 S_1, S_2, S_3, $\cdots$이라 하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{24(S_1+S_2+S_3+\cdots+S_n)}{4^n}=p+q\pi$$

일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 유리수이다.)
[4점−1008−대성]

116. 연립부등식 $\begin{cases}|x|+2|y|\le 4\\ 2^n(y-x)+y\ge 1\end{cases}$의 해 $(x,\ y)$가 나타내는 영역의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은? (단, n은 자연수이다.)[4점−1004−교육청]

① 8 ② 10 ③ 12
④ 14 ⑤ 16

117. 자연수 n에 대하여 행렬 $\begin{pmatrix}2^n & 3^n\\ 3^n & 2^n\end{pmatrix}$의 역행렬의 모든 성분의 합을 a_n이라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[4점−1010−교육청]

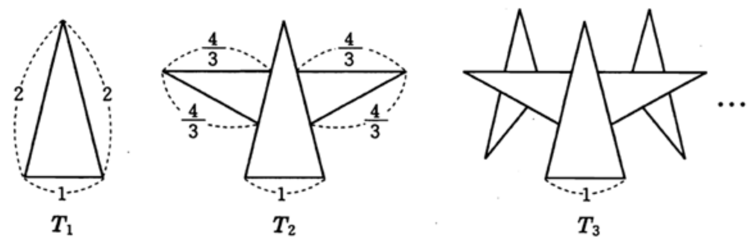
<보 기>

ㄱ. $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ ㄴ. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2}{3}$

ㄷ. $\frac{1}{3^n}<a_n<\frac{1}{2^n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

118. 다음 그림과 같이 밑변의 길이가 1 이고 두 변의 길이가 각각 2 인 이등변삼각형 T_1 이라 하자.
도형 T_1 에서 길이가 2 인 두 변을 각각 삼등분하여 각각의 가운데 선분을 밑변으로 하고 도형 T_1 과 닮음인 2 개의 이등변삼각형을 붙인 도형을 T_2 라 하자.
도형 T_2 에서 길이가 $\frac{4}{3}$ 인 네 변을 각각 삼등분하여 각각의 가운데 선분을 밑변으로 하고 도형 T_1 과 닮음인 4 개의 이등변삼각형을 붙인 도형을 T_3 이라 하자.



이와 같은 과정을 계속하여 도형 T_1, T_2, T_3, … 을 만들 때, 도형 T_n 에 있는 모든 삼각형의 넓이의 합을 S_n 이라 하자. $\lim_{n\to\infty} S_n$ 의 값은?[4점-1006-대성]

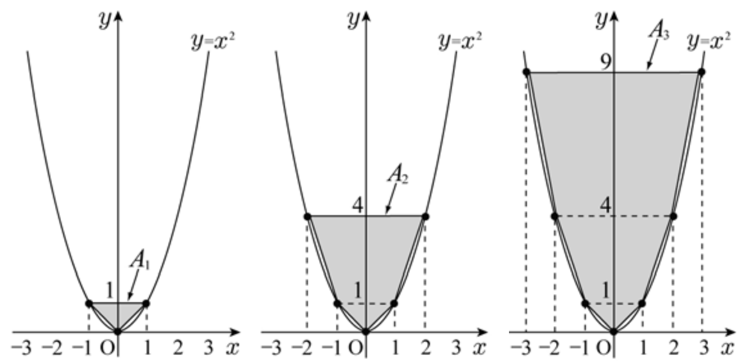
① $\frac{9\sqrt{15}}{4}$ ② $3\sqrt{15}$ ③ $\frac{15\sqrt{15}}{4}$
④ $\frac{9\sqrt{15}}{2}$ ⑤ $\frac{21\sqrt{15}}{4}$

119. 그림과 같이 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $(-1,1)$, $(0,0)$, $(1,1)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형을 A_1이라 하자.

곡선 $y=x^2$ 위의 점 $(-2,4)$, $(-1,1)$, $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,4)$를 꼭짓점으로 하는 오각형을 A_2라 하자.

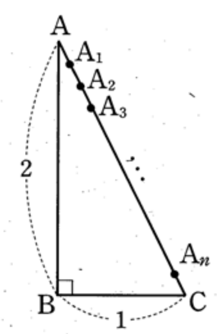
곡선 $y=x^2$ 위의 점 $(-3,9)$, $(-2,4)$, $(-1,1)$, $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,4)$, $(3,9)$를 꼭짓점으로 하는 칠각형을 A_3이라 하자.

이와 같은 방법으로 n 번째 얻은 다각형 A_n은 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $(-n,\, n^2)$, $(-n+1,\, (n-1)^2)$, $\cdots$, $(-1,\, 1)$, $(0,\, 0)$, $(1,\, 1)$, $\cdots$, $(n-1,\, (n-1)^2)$, $(n,\, n^2)$을 꼭짓점으로 하는 다각형이다. 다각형 A_n의 넓이를 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^3}$ 의 값은?[4점-1010-교육청]



① 2 ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{4}{3}$
④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{6}{5}$

120. $\angle\mathrm{ABC}=90^\circ$ 이고 $\overline{\mathrm{AB}}=2$, $\overline{\mathrm{BC}}=1$ 인 직각삼각형이 있다. 이 직각삼각형의 변 AC를 $(n+1)$등분한 점들을 각각A_1, A_2, A_3, $\cdots$, A_n이라 하자. $\overline{\mathrm{BA}_1}$, $\overline{\mathrm{BA}_2}$, $\overline{\mathrm{BA}_3}$, $\cdots$, $\overline{\mathrm{BA}_n}$의 길이를 각각 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_n이라 하고, $S_n=\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}$ 의 값은?



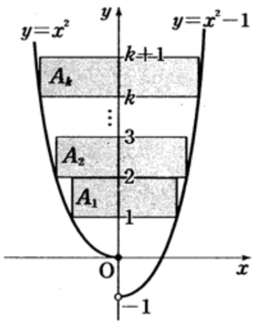
[4점-1008-중앙]

① $\frac{4}{3}$ ② $\frac{5}{3}$ ③ 2
④ $\frac{7}{3}$ ⑤ 3

121. 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & (x \le 0) \\ x^2-1 & (x>0) \end{cases}$$

라 한다. 그림과 같이 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$가 만나는 두 점을 연결한 선분을 가로로 하고 높이가 1인 직사각형을 A_k라 하자. 직사각형 A_k의 넓이를 S_k라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점–1011–종로]



<보 기>

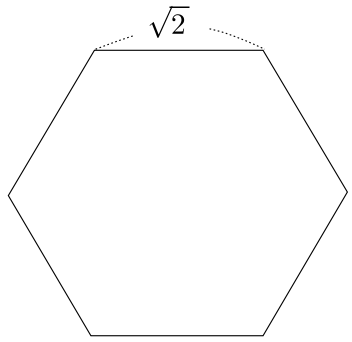
ㄱ. $S_3=2+\sqrt{3}$

ㄴ. $\displaystyle\sum_{k=1}^{100}\frac{1}{S_k}>10$

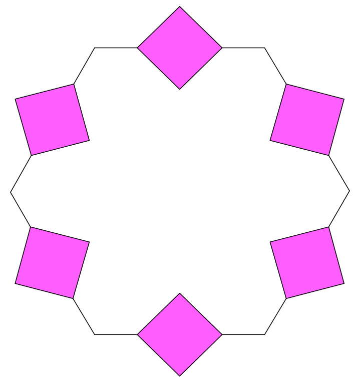
ㄷ. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n}\cdot S_k}=1$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

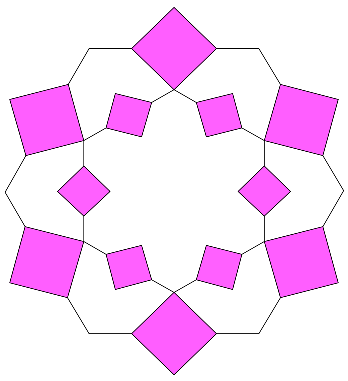
122. 그림과 같이 한 변의 길이가 $\sqrt{2}$인 정육각형이 있다. 이 정육각형의 한 변을 $1:3$과 $3:1$로 내분하는 두 점을 대각선의 양 끝점으로 하는 정사각형을 각 변에 만들어 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1의 정사각형들의 꼭짓점 중에서 정육각형의 내부에 있는 꼭짓점들을 연결하여 정육각형을 만들고, 이 정육각형의 한 변을 $1:3$과 $3:1$로 내분하는 두 점을 대각선의 양 끝점으로 하는 정사각형을 각 변에 만들어 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번 째 얻은 그림 R_n의 모든 정사각형의 둘레의 길이의 합을 l_n이라 할 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}l_n$의 값은?[4점–1011–대전교]



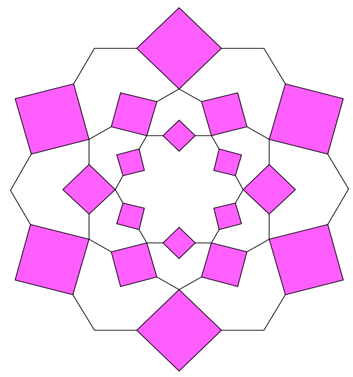
정육각형



R_1



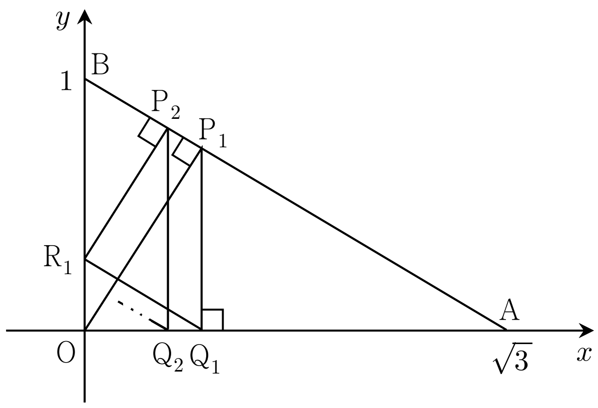
R_2



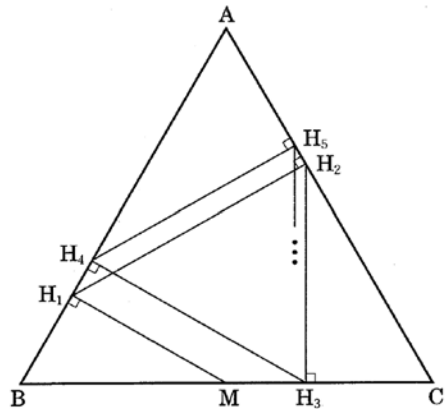
R_3

① $\dfrac{48(5+2\sqrt{3})}{13}$ ② $\dfrac{28(2+3\sqrt{3})}{15}$ ③ $\dfrac{18(1+2\sqrt{3})}{11}$
④ $\dfrac{6(3+2\sqrt{3})}{11}$ ⑤ $\dfrac{4(1+3\sqrt{3})}{13}$

123. 그림과 같이 원점 O에서 두 점 A$(\sqrt{3}, 0)$, B$(0, 1)$을 이은 선분 AB에 내린 수선의 발을 P_1이라 하자. 점 P_1에서 x축에 내린 수선의 발을 Q_1, 점 Q_1을 지나고 선분 AB와 평행한 직선의 y절편을 R_1, 점 R_1에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 P_2라 하자. 점 P_2에서 x축에 내린 수선의 발을 Q_2, 점 Q_2를 지나고 선분 AB와 평행한 직선의 y절편을 R_2, 점 R_2에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 P_3이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 점 Q_n, R_n, P_{n+1}을 정하여 나갈 때, 점 Q_n의 x좌표 x_n에 대하여 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$이다. $100a^2$의 값을 구하시오.[4점-1011-대전교]

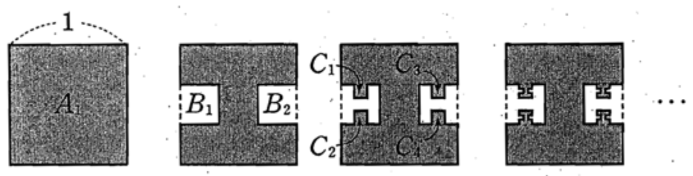


124. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정삼각형 ABC에 대하여 변 BC의 중점을 M이라 하자. 점 M에서 변 AB에 내린 수선의 발을 H_1, 점 H_1에서 변 AC에 내린 수선의 발을 H_2, 점 H_2에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H_3이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 점 H_n을 잡아나갈 때, 세 선분 AH_n, BH_n, CH_n의 길이 중에서 가장 작은 값을 a_n이라 하자. 예를 들어 $a_1 = \frac{1}{4}$이다. $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값은?[4점-1010-대성]



① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

125. [그림1]과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 A_1이 있다. 이 때, [그림1]의 어두운 부분의 넓이를 S_1이라 하자.
[그림2]와 같이 도형 A_1의 세로의 3등분점에서 한 변의 길이가 도형 A_1의 한 변의 길이의 $\frac{1}{3}$인 2개의 정사각형 B_1, B_2를 만들어 도형 A_1에서 잘라낸다. 이 때, [그림2]의 어두운 부분의 넓이를 S_2라 하자.
[그림3]과 같이 도형 B_1, B_2의 가로의 3등분점에서 한 변의 길이가 도형 B_1의 한 변의 길이의 $\frac{1}{3}$인 4개의 정사각형 C_1, C_2, C_3, C_4를 만들어 도형 B_1, B_2에 붙인다.. 이 때, [그림3]의 어두운 부분의 넓이를 S_3이라 하자.
[그림4]와 같이 도형 C_1, C_2, C_3, C_4의 세로의 3등분점에서 한 변의 길이가 도형 C_1의 한 변의 길이의 $\frac{1}{3}$인 8개의 정사각형 D_1, D_2, $\cdots$, D_8을 만들어 도형 C_1, C_2, C_3, C_4에서 잘라낸다. 이 때, [그림4]의 어두운 부분의 넓이를 S_4라 하자. 이와 같이 정사각형들을 잘라내고 붙이는 과정을 한없이 반복한다. [그림 n]의 어두운 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?[4점-1005-중앙]



[그림 1] [그림 2] [그림 3] [그림 4]

① $\frac{8}{11}$ ② $\frac{16}{21}$ ③ $\frac{17}{21}$
④ $\frac{9}{11}$ ⑤ $\frac{6}{7}$

126. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$a_1 = 5,\ S_n S_{n+1} = 3^n\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$일 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_{2n+1}}$의 값은?

[4점-1010-대성]

① $-\frac{5}{12}$ ② $-\frac{13}{36}$ ③ $-\frac{11}{36}$
④ $-\frac{1}{4}$ ⑤ $-\frac{7}{36}$

무한급수

1. 수열 $\{a_n\}$이 $2a_{n+1}-a_n=0\,(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$을 만족하고 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=2$일 때, 이 수열의 첫째항은?[2점-1003-종로]

① $\frac{1}{8}$　② $\frac{1}{4}$　③ $\frac{1}{2}$
④ 1　⑤ $\frac{3}{2}$

2. 무한등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}5\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$의 값은?[2점-1010-교육청]

① 5　② 10　③ 15
④ 20　⑤ 25

3. 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{54}{9n^2+3n-2}$의 값을 구하시오.[3점-1009-대성]

4. 자연수 n에 대하여 수열 $\{a_n\}$이

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x=2^n$$

을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하도록 하는 x의 값의 범위는?

[3점-1004-대성]

① $x<-2$ 또는 $x>2$　② $-2<x<0$ 또는 $0<x<2$
③ $x<-2$ 또는 $x\ge 2$　④ $-2<x<0$ 또는 $0<x\le 1$
⑤ $x<-1$ 또는 $x\ge 1$

5. 1보다 큰 자연수 n에 대하여 n명의 학생 중에서 2명의 대표로 뽑는 방법의 수를 a_n이라고 할 때, $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{a_n}$의 값은?

[3점-1008-중앙]

① 1　② $\frac{3}{2}$　③ $\frac{7}{4}$
④ 2　⑤ $\frac{5}{2}$

6. 수열 $\{a_n\}$ 을 다음과 같이 정의하자.

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

이 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3a_n}$ 의 값은?[3점-1005-비상]

① $\frac{1}{3}$　② $\frac{1}{2}$　③ 1
④ $\frac{3}{2}$　⑤ 2

7. 실수 x에 대하여 무한급수

$$1+(1-x)+(1-x)^2+(1-x)^3+\cdots$$

가 수렴할 때, 그 합을 $f(x)$라 하자. 다음 중 함수 $y=f(x)$의 치역과 같은 것은?[4점–1011–중앙]

① $\left\{\frac{1}{x}\middle|-2<x<0\right\}$ ② $\left\{\frac{1}{x}\middle|0<x<2\right\}$

③ $\left\{\frac{1}{2x}\middle|-2<x<0\right\}$ ④ $\left\{\frac{1}{2x}\middle|0<x<\frac{1}{2}\right\}$

⑤ $\left\{\frac{1}{x+2}\middle|0<x<1\right\}$

8. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 무한급수

$$\left(a_1-\frac{1}{3}\right)+\left(a_2-\frac{2}{5}\right)+\left(a_3-\frac{3}{7}\right)+\cdots+\left(a_n-\frac{n}{2n+1}\right)+\cdots$$

이 수렴할 때, $\lim_{n\to\infty}(10a_n+9)$의 값을 구하시오.[4점–1011–중앙]

9. 자연수 n에 대하여 점 $\mathrm{P}(2,\ 0)$에서 원 $x^2+y^2=\left(\frac{1}{n}\right)^2$에 그은 두 접선의 기울기의 곱을 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 값은?

[4점–1011–대성]

① $-\frac{5}{2}$ ② -2 ③ $-\frac{3}{2}$

④ -1 ⑤ $-\frac{1}{2}$

10. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{5^n}=5$ 일 때,

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+6^{n+1}-5^{n+1}}{a_n+6^{n-1}+5^{n-1}}$을 구하시오.[3점–1007–종로]

11. 무한수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}(3^n-2^n)a_n=8$일 때,

$\lim_{n\to\infty}\frac{3a_n+4\cdot 3^{-n}}{2a_n+3\cdot 3^{-n}}=\frac{q}{p}$이다. pq의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)[4점–1010–비상]

12. 명제 「$\lim_{n\to\infty}a_n=0$이면 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$은 수렴한다.」가 거짓임을 보이는 반례로 적당한 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[4점–1011–중앙]

<보 기>

ㄱ. $a_n=\frac{n}{n+1}$ ㄴ. $a_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

ㄷ. $a_n=\frac{1}{n(n+1)}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ

④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

13. 두 무한수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?[3점-1003-교육청]

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 1$ 이면 $\lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} b_n$이다.

ㄴ. 두 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)$ 이 모두 수렴하면 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$도 모두 수렴한다.

ㄷ. 두 수열 $\{|a_n+b_n|\}$, $\{|a_n-b_n|\}$이 모두 수렴하면 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$도 모두 수렴한다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

14. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이

$$a_n = 1 + b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

을 만족시킬 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [3점-1005-메가]

<보 기>

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 2011$이면 $\lim_{n\to\infty} a_n = 2012$이다.

ㄴ. $\lim_{n\to\infty} a_n = 2011$이면 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$이다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 2011$이면 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = -1$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

15. 무한수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$이 수렴할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[3점-1003-중앙]

<보 기>

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$도 수렴한다.

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 발산하면 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$도 발산한다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)$도 수렴한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

16. 두 무한수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?[4점-1005-비상]

<보 기>

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 이 모두 수렴하면 $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=0$이다.

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ 또는 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$이다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$과 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)$이 모두 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$이고 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

17. 무한등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 항상 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[4점-1009-중앙]

<보 기>

ㄱ. 수열 $\{a_n\}$이 수렴하면 무한등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$도 수렴한다.

ㄴ. 무한등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$이 수렴하면 수열 $\{a_n\}$도 수렴한다.

ㄷ. 무한등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \geq \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

18. 두 무한수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 다음 두 조건을 만족시킨다.

(가) $\sum_{n=1}^{\infty} (2-a_n)=8$

(나) $\lim_{n\to\infty} \frac{3a_n-4b_n}{2a_n+b_n}=\frac{1}{2}$

이때, $\lim_{n\to\infty} b_n$의 값은?[4점-1010-비상]

① $\frac{8}{9}$ ② $\frac{7}{9}$ ③ $\frac{2}{3}$
④ $\frac{5}{9}$ ⑤ $\frac{4}{9}$

19. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} (3^n a_n-2)$가 수렴할 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{6a_n+5\cdot 4^{-n}}{a_n+3^{-n}}$의 값을 구하시오.[3점-1006-평가원]

20. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n-\frac{1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3}{n^4}\right)$이 수렴할 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값은?[3점-1004-교육청]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$
④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

21. 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 4, 공비가 2인 등비수열이다. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{60}{\log_2 a_n \cdot \log_2 a_{n+1}}$ 의 값을 구하시오.[3점-1010-대성]

22. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_1 = b_1 = 1$
(나) 수열 $\{a_n\}$은 공비가 양수인 등비수열이다.
(다) $b_{n+1} = a_n + b_n (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[4점-1011-대성]

<보 기>

ㄱ. $a_3 = \frac{4}{9}$ 이면 $b_3 = \frac{8}{3}$ 이다.

ㄴ. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$이면 수열 $\{b_n\}$은 수렴한다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha$ 이면 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \alpha + 1$ 이다. (단, α는 실수)

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{5^n}$ 의 값을 K 라 할 때, $6K$ 의 값을 구하시오.[3점-1008-중앙]

24. 자연수 n 에 대하여 부등식 $(\log x)^2 - \log x^{5n} + 6n^2 < 0$ 을 만족시키는 양수 x 의 값 중에서 방정식 $\log x - [\log x] = 0$ 을 만족시키는 x 의 개수를 a_n 이라 하자. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{a_n a_{n+1}}$ 의 값은?(단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)[3점-1004-대성]

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

25. 좌표평면 위의 두 점 $A_1(0,\ 0)$, $B_1(0,\ a)$가 있다. 자연수 n에 대하여 다음과 같은 과정을 반복하여 점 P_1, B_2, A_2, P_2, $\cdots$, B_n, A_n, P_n, $\cdots$을 정한다.

(가) 선분 A_nB_n을 $2:1$로 내분하는 점을 P_n이라 한다.
(나) 점 A_n을 중심으로 점 P_n을 시계 방향으로 30° 만큼 회전시킨 점을 B_{n+1}이라 한다.
(다) 점 B_{n+1}을 지나고 y축에 평행한 직선이 x축과 만나는 점을 A_{n+1}이라 한다.

이와 같은 과정을 계속하여 얻은 부채꼴 $A_nP_nB_{n+1}$의 넓이를 S_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \pi$를 만족하는 상수 a의 값은? (단, $a>0$)[4점-1011-종로]

① 2 ② $2\sqrt{2}$ ③ 3
④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $3\sqrt{2}$

26. 첫째항이 2인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 10$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$의 값은?[3점-1010-대성]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1
④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

27. 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 등식

$$\sum_{n=1}^{3} a_n = \sum_{n=4}^{\infty} a_n$$

이 성립할 때, r의 값은?(단, $a_1 \neq 0$)[3점-1005-중앙]

① $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$ ② $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$ ③ $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$
④ $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ ⑤ $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$

28. 동심원 A_1, A_2, $\cdots$, A_n, $\cdots$의 반지름의 길이를 각각 r_1, r_2, $\cdots$, r_n, $\cdots$이라 하고, 그 넓이를 각각 S_1, S_2, $\cdots$, S_n, $\cdots$이라 할 때, $S_{n+1} = 2S_n$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$이 성립한다. $r_1 = 1$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r_n}$의 값은?[3점-1007-교육청]

① $1+\sqrt{2}$ ② $2+\sqrt{2}$ ③ $1+2\sqrt{2}$
④ $2+2\sqrt{2}$ ⑤ $1+3\sqrt{2}$

29. 임의의 자연수 p, q, r에 대하여, 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=10$, $a_p+a_q+a_r=a_{p+q+r}$를 만족하고, 수열 $\{b_n\}$은 $b_1=\frac{3}{5}$, $b_pb_q=b_{p+q}$를 만족한다. 이 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_nb_n}{n}$의 값을 구하시오.

[3점-1007-교육청]

30. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{3n}{n+1}\right)$과 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$이 모두 수렴할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{3-b_n}{a_n}$의 값은? (단, $a_n\neq 0$)

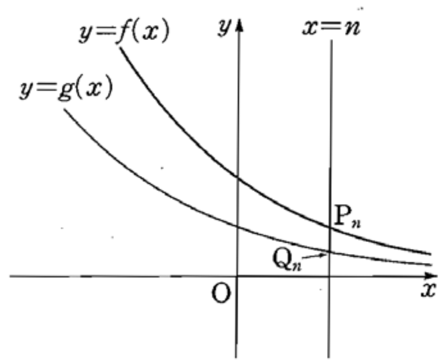
[3점-1009-평가원]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

31. 그림은 두 함수

$$f(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x,\ g(x)=\left(\frac{3}{4}\right)^x$$

의 그래프이다. 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 직선 $x=n$ (n은 자연수)의 교점을 각각 P_n, Q_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}$의 값을 구하시오.[3점-1007-메가]

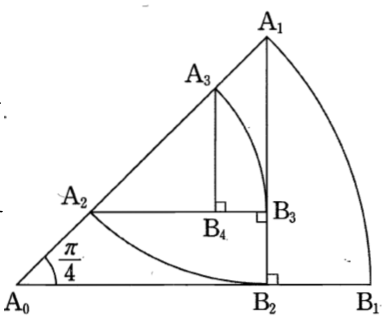


32. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n=n^2+2n$일 때, 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{a_na_{n+1}}$의 값은?

[3점-1010-교육청]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{5}$ ④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{7}$

33. 그림과 같이 반지름의 길이가 4이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$인 부채꼴 $A_0A_1B_1$이 있다. 점 A_1에서 선분 A_0B_1에 내린 수선의 발을 B_2라 하고, 선분 A_0A_1 위의 $\overline{A_1B_2}=\overline{A_1A_2}$인 점 A_2에 대하여 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$인 부채꼴 $A_1A_2B_2$를 그린다. 점 A_2에서 선분 A_1B_2에 내린 수선의 발을 B_3이라 하고, 선분 A_1A_2위의 $\overline{A_2B_3}=\overline{A_2A_3}$인 점 A_3에 대하여 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$인 부채꼴 $A_2A_3B_3$을 그린다. 이와 같은 과정을 계속하여 점 A_n에서 선분 $A_{n-1}B_n$에 내린 수선의 발을 B_{n+1}이라 하고, 선분 $A_{n-1}A_n$ 위의 $\overline{A_nB_{n+1}}=\overline{A_nA_{n+1}}$인 점 A_{n+1}에 대하여 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$인 부채꼴 $A_nA_{n+1}B_{n+1}$을 그린다. 부채꼴 $A_{n-1}A_nB_n$의 호 A_nB_n의 길이를 l_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}l_n$의 값은?[3점–1009–평가원]



① $(4-\sqrt{2})\pi$　　② $(2+\sqrt{2})\pi$
③ $(2+2\sqrt{2})\pi$　　④ $(4+\sqrt{2})\pi$
⑤ $(4+2\sqrt{2})\pi$

34. 세 실수 x, y, z에 대하여 두 무한급수

$$y=1+x+x^2+x^3+\cdots,$$
$$z=x+\frac{x}{y}+\frac{x}{y^2}+\frac{x}{y^3}+\cdots$$

이 모두 수렴할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, $x\neq 0$)[4점–1004–메가]

<보 기>

ㄱ. $0<x<1$　　ㄴ. $y>1$
ㄷ. $0<z<1$

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

35. 수직선 위에 서로 다른 두 점 A_0, A_1이 있다. $\overline{A_0A_1}$을 $l:m$으로 외분하는 점을 A_2, $\overline{A_1A_2}$를 $l:m$으로 외분하는 점을 A_3, $\overline{A_2A_3}$을 $l:m$으로 외분하는 점을 A_4, $\cdots$, $\overline{A_{n-1}A_n}$을 $l:m$으로 외분하는 점을 A_{n+1}이라 하자. 선분 $A_{n-1}A_n$의 길이를 a_n이라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, l, m은 양수이고, n은 자연수이다.)[4점–1010–중앙]

<보 기>

ㄱ. $l:m=2:1$이면 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=a_{n+1}$이 성립한다.
ㄴ. $l:m=3:1$이면 수열 $\{a_n\}$은 등비수열을 이룬다.
ㄷ. $\frac{l}{m}>2$이면 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$은 수렴한다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

36. 두 함수 $f(x)=1-x$, $g(x)=2^x\sin\frac{(2x-1)\pi}{2}$에 대하여 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(g\circ f)(n)$의 값은?[4점–1006–종로]

① $-\frac{2}{3}$　② $-\frac{1}{3}$　③ 0
④ $\frac{1}{3}$　⑤ $\frac{2}{3}$

37. 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}x$의 그래프를 y축의 방향으로 평행이동시켜 점$(2,\ -k)$ (k는 자연수)를 지나도록 하는 곡선의 x절편을 a_k라 하자. 이때 $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$를 구하시오.[4점-1007-종로]

38. 수열 $\{a_n\}$을 다음과 같이 정의하자.

$$a_1=1,\ a_{n+1}a_n=\left(\frac{1}{4}\right)^n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}$의 값은?[4점-1005-대성]

① 2 ② $\frac{5}{3}$ ③ $\frac{4}{3}$
④ 1 ⑤ $\frac{2}{3}$

39. 수열 $\{a_n\}$이

$$7a_1+7^2a_2+\cdots+7^na_n=3^n-1$$

을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^{n-1}}$의 값은?[4점-1006-평가원]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{4}{9}$ ③ $\frac{5}{9}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{7}{9}$

40. 첫째항이 1이고 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 대각선의 길이가 a_n인 정사각형의 넓이를 S_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값은? (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)
[4점-1004-교육청]

① 22 ② 23 ③ 24
④ 25 ⑤ 26

41. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+1)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n=2$$

일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?
[4점-1005-중앙]

<보 기>

ㄱ. $\lim_{n\to\infty}a_n<\lim_{n\to\infty}b_n$
ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$은 발산한다.
ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+1)b_n=4$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

42. 다음과 같이 제n행에 홀수를 작은 수부터 n개씩 차례로 나열한다.

	제1열	제2열	제3열	제4열	제5열	제6열	⋯
제1행	1	3	5	7	9	11	⋯
제2행	1	1	3	3	5	5	⋯
제3행	1	1	1	3	3	3	⋯
제4행	1	1	1	1	3	3	⋯
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

제n행과 제k열이 만나는 곳에 있는 수를 $N(n,\ k)$라 하자. 예를 들면 $N(2,\ 4)=3$이다. 이때 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[4점-1004-종로]

<보 기>

ㄱ. $\sum_{k=1}^{100} N(5,\ k)=2000$

ㄴ. $\lim_{n\to\infty} N(n,\ 100)=1$

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{N(3,\ 3n)\times N(3,\ 3n+2)}=\frac{1}{2}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

43. 수열 $\{a_n\}$을 다음과 같이 정의한다.

(가) $a_1=2$
(나) $a_{n+1}=(a_n^2+a_n$을 5로 나눈 나머지$)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

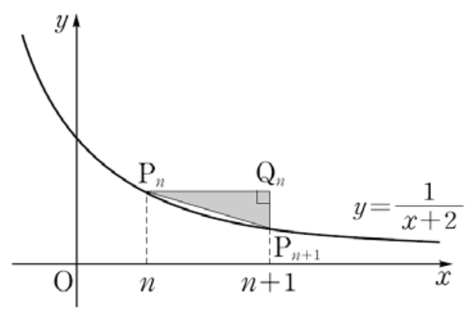
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}=\frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, $p,\ q$는 서로소인 자연수이다.)[4점-1003-교육청]

44. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_n=\sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r 3^r 2^{n-r}$ 이다.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n-2^n}{a_n}=\frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, $p,\ q$는 서로소인 자연수이다.)[3점-1011-대전교]

45. 좌표평면 위에서 함수 $y=\frac{1}{x+2}$ 의 그래프와 직선 $x=n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$의 교점을 P_n이라 하자. 또, 점 P_n을 지나고 x축에 평행한 직선과 점 P_{n+1}을 지나고 y축에 평행한 직선의 교점을 Q_n이라 하자. 삼각형 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n=\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$의 값을 구하여라. (단, $p,\ q$는 서로소인 자연수이다.)

[3점-1010-메가]

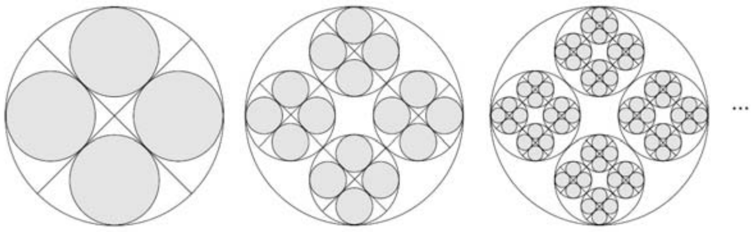


46. 반지름의 길이가 1인 원 C가 있다, 첫 번째 시행에서 [그림1]과 같이 원 C를 사분원으로 나누어 각각의 사분원에 내접하는 원을 그리고, 그려진 4개의 원의 넓이의 합을 S_1이라 하자.

두 번째 시행에서 [그림2]와 같이 [그림1]에서 그려진 4개의 원을 각각사분원으로 나누어 각각의 사분원에 내접하는 원을 그리고, 그려진 4^2개의 원의 넓이의 합을 S_2이라 하자.

세 번째 시행에서 [그림3]과 같이 [그림2]에서 그려진 4^2개의 원을 각각사분원으로 나누어 각각의 사분원에 내접하는 원을 그리고, 그려진 4^3개의 원의 넓이의 합을 S_3이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 시행에서 그려진 4^n 개의 원의 넓이의 합을 S_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ 의 값은?[3점–1010–비상]



[그림 1] [그림 2] [그림 3]

① $\frac{4(3-2\sqrt{2})\pi}{7}$ ② $\frac{4(2+\sqrt{2})\pi}{7}$ ③ $\frac{4(1+2\sqrt{2})\pi}{7}$

④ $\frac{4(3+2\sqrt{2})\pi}{7}$ ⑤ $\frac{4(2+3\sqrt{2})\pi}{7}$

47. 종이를 생산하는 어느 제지 공장에서는 생산된 종이 중 50%가 폐휴지로 수합되어 이를 다시 종이로 만드는데, 이 중 40%가 종이가 재생산된다고 한다. 이러한 재생산 과정을 한없이 계속할 때, 최초 생산된 종이의 양에 대하여 재생산되는 종이의 양은 최초 생산된 양의 a%가 된다. a의 값을 구하시오.[4점–1007–대성]

48. 좌표평면에서 자연수 n에 대하여 집합 A_n을

$$A_n = \{(x,\ y) \mid x^2+2x+y^2-2y-2n<0\}$$

라 하자. 집합 $A_n{}^C \cap A_{2n}$ 이 나타내는 영역의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^2}{S_n S_{n+1}}$ 의 값은?[4점–1006–대성]

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$

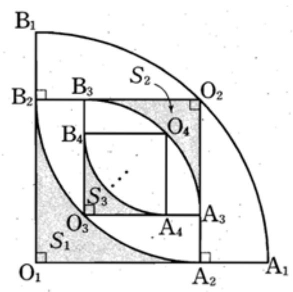
④ $\frac{3}{4}$ ⑤ 1

49. 자연수 n에 대하여 중심이 O_n 이고 중심각의 크기가 $90°$인 부채꼴 $\mathrm{O}_n\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$이 다음 조건을 모두 만족시킨다.

(가) $\overline{\mathrm{O}_1\mathrm{A}_1}=1$

(나) 점 O_{n+1}은 호 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$ 위에 있고, 두 점 A_{n+1}, B_{n+1}은 각각 두 선분 $\mathrm{O}_n\mathrm{A}_n$, $\mathrm{O}_n\mathrm{B}_n$ 위에 있다.

(다) 사각형 $\mathrm{O}_n\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{O}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}$은 정사각형이다.

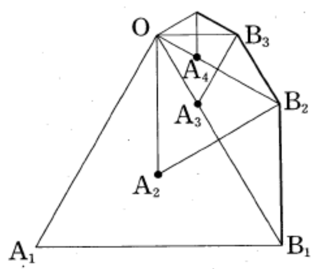


두 선분 $\mathrm{O}_n\mathrm{A}_{n+1}$, $\mathrm{O}_n\mathrm{B}_{n+1}$과 호 $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}$로 둘러싸인 어두운 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ 의 값은?[4점–1009–중앙]

① $1-\frac{\pi}{4}$ ② $\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}$ ③ $2-\frac{\pi}{4}$

④ $\frac{1}{4}+\frac{\pi}{4}$ ⑤ $\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$

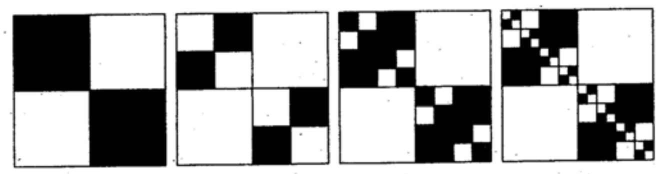
50. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정삼각형 OA_1B_1의 무게중심을 A_2라 하자. 또, 선분 OA_2를 한 변으로 하는 정삼각형을 OA_2B_2라 하고, 이 정삼각형의 무게중심을 A_3이라 하자. 또, 선분 OA_3을 한 변으로 하는 정삼각형을 OA_3B_3이라 하고, 이 정삼각형의 무게중심을 A_4라 하자. 이와 같은 방법으로 정삼각형 OA_nB_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$을 한없이 만들어 나갈 때, 선분 B_nB_{n+1}의 길이를 a_n이라 하자. 이때, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 값은? (단, 선분 $A_{n+1}B_{n+1}$의 중점은 선분 OB_n 위에 있다.)



[4점–1005–메가]

① $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$　② $\sqrt{3}$　③ $\dfrac{\sqrt{3}+2}{2}$　④ $\dfrac{\sqrt{3}+3}{2}$　⑤ $\sqrt{3}+1$

51.

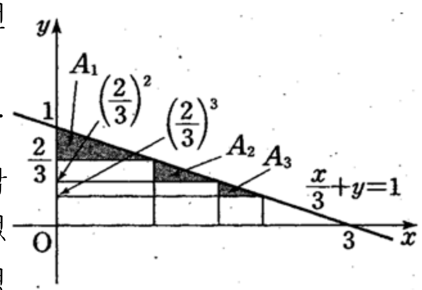


[그림1]　[그림2]　[그림3]　[그림4]

[단계1] 한 변의 길이가 4인 정사각형에서 각 변의 중점을 이어 [그림1]과 같이 4개의 작은 정사각형으로 분할한 후 왼쪽 위, 오른쪽 아래의 정사각형을 어둡게 칠한다.
[단계2] [단계1]에서 어둡게 칠한 두 정사각형을 [단계1] 처럼 각각 4개의 정사각형으로 분할하고 분할된 작은 정사각형들 중 각각의 왼쪽 위, 오른쪽 아래의 정사각형들의 어두운 부분을 지워서 [그림2]와 같이 만든 다.
[단계3] [단계2]에서 지워진 왼쪽 위, 오른쪽 아래의 정사각형들을 다시 [단계1] 처럼 분할 한 후 왼쪽 위, 오른쪽 아래의 정사각형들을 어둡게 칠하여 [그림3]과 같이 만든다.
[단계4] [단계3]에서 칠해진 정사각형들을 [단계1]처럼 다시 분할 한 후 각각의 왼쪽 위, 오른쪽 아래 정사각형들 을 선택해서 어두운 부분을 지원 [그림4]와 같이 만든 다.

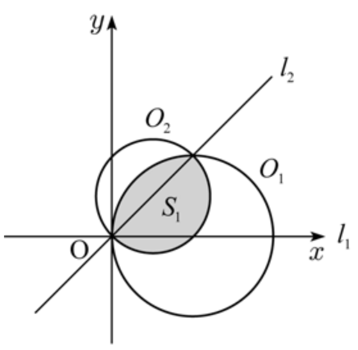
위와 같은 단계들을 무한히 시행하여 얻은 어둡게 칠해진 부분의 넓이의 극한값이 $\dfrac{b}{a}$ (a, b는 서로소인 자연수)일 때, $a+b$의 값을 구하시오.[4점–1003–종로]

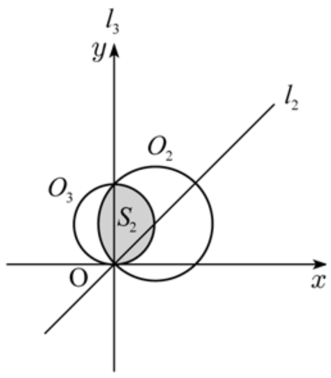
52. 직선 $\dfrac{x}{3}+y=1$과 직선 $y=\dfrac{2}{3},\ y=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2,\ y=\left(\dfrac{2}{3}\right)^3,\ \cdots$ 을 이용하여 그림과 같은 직각삼각형 $A_1,\ A_2,\ A_3,\ \cdots$을 한없이 만들어 간다. 직각삼각형 A_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$의 넓이를 S_n이라 할 때, $100\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값을 구하시오. (단, 직각삼각형 A_n과 A_{n+1}은 한 꼭짓점을 공유한다.)

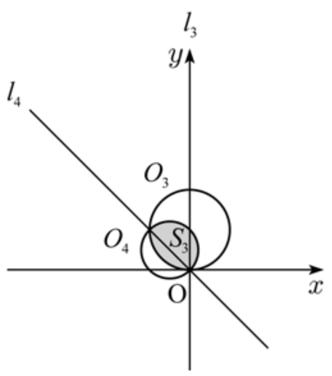


[4점–1003–중앙]

53. 좌표평면에서 점 (3, 0)을 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 원을 O_1이라 하고, x축을 직선 l_1이라 하자. 직선 l_1을 원점을 중심으로 45° 만큼 회전시킨 직선을 l_2라 하고, 직선 l_2와 원 O_1의 두 교점을 지름의 양 끝점으로 하는 원을 O_2라 할 때, 두 원 O_1, O_2의 공통부분의 넓이를 S_1이라 하자. 직선 l_2를 원점을 중심으로 하여 45° 만큼 회전시킨 직선을 l_3이라 하고, 직선 l_3과 원 O_2의 두 교점을 지름의 양 끝점으로 하는 원을 O_3이라 할 때, 두 원 O_2, O_3의 공통부분의 넓이를 S_2라 하자. 직선 l_3을 원점을 중심으로 하여 45° 만큼 회전시킨 직선을 l_4라 하고, 직선 l_4와 원 O_3의 두 교점을 지름의 양 끝점으로 하는 원을 O_4라 할 때, 두 원 O_3, O_4의 공통부분의 넓이를 S_3이라 하자.







⋯

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?[4점-1003-교육청]

① $6(\pi-1)$ ② $7(\pi-1)$ ③ $8(\pi-1)$
④ $9(\pi-1)$ ⑤ $10(\pi-1)$

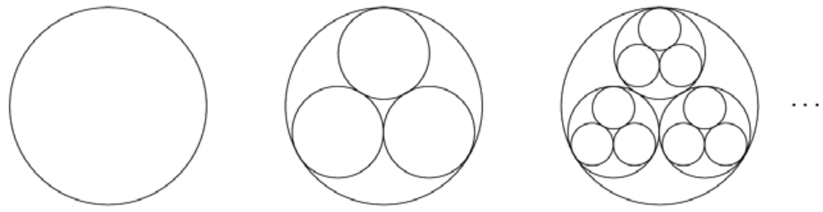
54. 다음과 같은 단계로 원들을 그려나간다.

[단계1] 반지름의 길이가 1인 원을 그린다. [단계2] [단계1]에서 그린 원에 내접하고 서로 외접하는 크기가 같은 세 개의 원을 그린다. [단계3] [단계2]에서 그린 각각의 원에 내접하고 서로 외접하는 크기가 같은 세 개의 원을 그린다. ⋮

[단계 n]에서 그린 모든 원의 넓이의 합을 S_n이라 할 때,

$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\pi}{a+b\sqrt{3}}$이다. $b-a$의 값은? (단, a, b는 정수이다.)

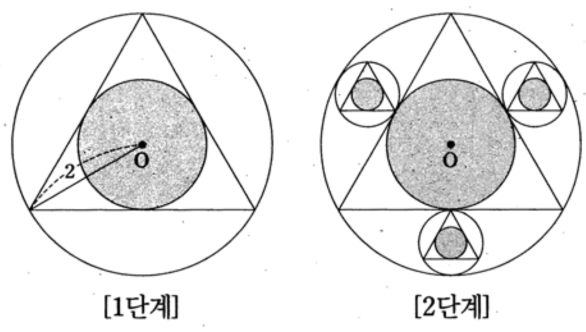
[4점-1010-메가]



[단계 1] [단계 2] [단계 3]

① 96 ② 97 ③ 98
④ 99 ⑤ 100

55. 반지름의 길이가 2인 원 O에 다음과 같은 규칙으로 도형을 만든다.

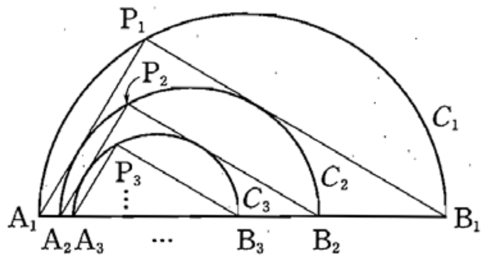


[1단계] 반지름의 길이가 2인 원O에 내접하는 정삼각형을 그리고 그 정삼각형의 내접원을 그린다.
[2단계] [1단계]의 정삼각형과 내접원에 외접하면서 정삼각형의 외접원에 내접하는 세 개의 원을 그리고 그 각각의 원에 내접하는 정삼각형과 그 정삼각형의 내접원을 그린다.
[3단계] [2단계]에서 그린 정삼각형과 그 외접원 각각에 대하여 [2단계]의 과정을 반복한다.

위와 같은 과정을 무한히 계속한다고 할 때, 각 단계마다 생기는 모든 정삼각형의 내접원의 넓이의 합은 $\frac{q}{p}\pi$ (p, q는 서로소인 자연수)라고 한다. 이때 $p+q$의 값은?[4점-1007-종로]

① 7 ② 11 ③ 23
④ 29 ⑤ 35

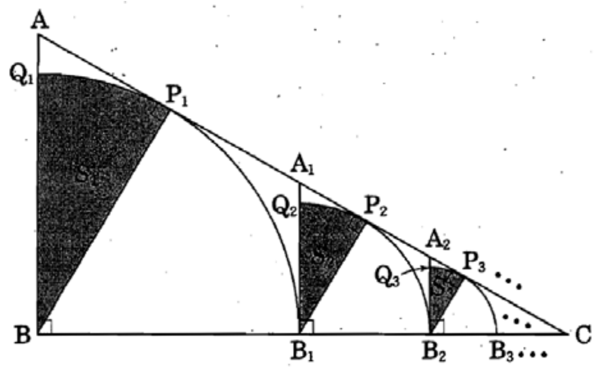
56. 그림과 같이 길이가 $2\sqrt{3\sqrt{3}-4}$ 인 선분 A_1B_1을 지름으로 하는 반원을 C_1이라 하고, 반원 C_1 위에 호 A_1B_1을 3등분하는 한 점 P_1을 잡고 삼각형 $A_1B_1P_1$을 그린다.



삼각형 $A_1B_1P_1$에 내접하면서 지름 A_2B_2가 선분 A_1B_1 위에 있는 반원을 C_2라 하고, 반원 C_2 위에 호 A_2B_2를 3등분하는 한 점 P_2를 잡고 삼각형 $A_2B_2P_2$를 그린다.
삼각형 $A_2B_2P_2$에 내접하면서 지름 A_3B_3이 선분 A_2B_2 위에 있는 반원을 C_3이라 하고, 반원 C_3 위에 호 A_3B_3을 3등분하는 한 점 P_3을 잡고 삼각형 $A_3B_3P_3$을 그린다.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 만들어진 반원 C_n의 내부에서 삼각형 $A_nB_nP_n$의 내부를 제외한 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?[4점-1007-메가]

① $\pi-\sqrt{3}$ ② $\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ③ π
④ $\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\pi+\sqrt{3}$

57. 그림과 같이 $\angle A=60^{\circ}$, $\angle C=30^{\circ}$, $\overline{\mathrm{AB}}=2$인 직각삼각형 ABC가 있다.
점 B에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 P_1이라 하자.
점 B를 중심으로 하고 선분 BP_1을 반지름으로 하는 사분원을 삼각형 ABC의 내부에 그리고 이 사분원이 두 선분 BC, AB와 만나는 점을 각각 B_1, Q_1이라 하자.
이때, 부채꼴 $\mathrm{BP}_1\mathrm{Q}_1$의 넓이를 S_1이라 하자.
점 B_1을 지나고 선분 BC와 수직인 직선이 선분 AC와 만나는 점을 A_1이라 하고, 점 B_1에서 선분 $\mathrm{A}_1\mathrm{C}$에 내린 수선의 발을 P_2라 하자.
점 B_1을 중심으로 하고 선분 $\mathrm{B}_1\mathrm{P}_2$를 반지름으로 하는 사분원을 삼각형 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1\mathrm{C}$의 내부에 그리고 이 사분원이 두 선분 $\mathrm{B}_1\mathrm{C}$, $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1$과 만나는 점을 각각 B_2, Q_2라 하자.
이때, 부채꼴 $\mathrm{B}_1\mathrm{P}_2\mathrm{Q}_2$의 넓이를 S_2라 하자.

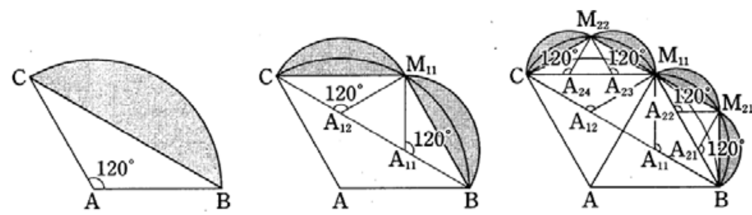


이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 부채꼴 $\mathrm{B}_{n-1}\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? (단, 점 B_0은 점 B이다.)

[4점-1005-대성]

① $\frac{\pi}{3}$ ② $\frac{\pi}{2}$ ③ $\frac{2}{3}\pi$
④ $\frac{3}{4}\pi$ ⑤ π

58. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}=1$이고 $\angle\mathrm{BAC}=120°$인 부채꼴 ABC를 그린다. 호 BC와 현 BC로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1이라 하자.
부채꼴 ABC의 호 BC의 중점 M_{11}을 잡고, 선분 BM_{11}, $\mathrm{M}_{11}\mathrm{C}$를 현으로 하고, 중심각의 120°인 부채꼴이 되도록 점 A_{11}, A_{12}를 현 BC에 각각 잡는다. 부채꼴 $\mathrm{A}_{11}\mathrm{BM}_{11}$의 호 BM_{11}과 현 BM_{11}로 둘러싸인 넓이와 부채꼴 $\mathrm{A}_{12}\mathrm{M}_{11}\mathrm{C}$의 호 $\mathrm{M}_{11}\mathrm{C}$와 현 $\mathrm{M}_{11}\mathrm{C}$로 둘러싸인 부분의 넓이의 합을 S_2라 하자.
부채꼴 $\mathrm{A}_{11}\mathrm{BM}_{11}$의 호 BM_{11}, 부채꼴 $\mathrm{A}_{12}\mathrm{M}_{11}\mathrm{C}$의 호 $\mathrm{M}_{11}\mathrm{C}$의 중점 M_{21}, M_{22}를 각각 잡고 선분 BM_{21}, $\mathrm{M}_{21}\mathrm{M}_{11}$, $\mathrm{M}_{11}\mathrm{M}_{22}$, $\mathrm{M}_{22}\mathrm{C}$를 현으로 하고 중심각이 120°인 부채꼴이 되도록 점 A_{21}, A_{22}, A_{23}, A_{24}를 현 BM_{11}, 현 $\mathrm{M}_{11}\mathrm{C}$에 각각 잡는다.
부채꼴 $\mathrm{A}_{21}\mathrm{BM}_{21}$의 호 BM_{21}과 현 MB_{21}로 둘러싸인 부분의 넓이, 부채꼴 $\mathrm{A}_{22}\mathrm{M}_{21}\mathrm{M}_{11}$의 홀 $\mathrm{M}_{21}\mathrm{M}_{11}$과 현 $\mathrm{M}_{21}\mathrm{M}_{11}$로 둘러싸인 부분의 넓이, 부채꼴 $\mathrm{A}_{23}\mathrm{M}_{11}\mathrm{M}_{22}$의 호 $\mathrm{M}_{11}\mathrm{M}_{22}$와 현 $\mathrm{M}_{11}\mathrm{M}_{22}$로 둘러싸인 부분의 넓이, 부채꼴 $\mathrm{A}_{24}\mathrm{M}_{22}\mathrm{C}$의 홀 $\mathrm{M}_{22}\mathrm{C}$와 현 $\mathrm{M}_{22}\mathrm{C}$로 둘러싸인 넓이의 합을 S_3이라 하자. 이와 같이 계속하여 도형을 그려 나갈 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?[4점-1005-종로]



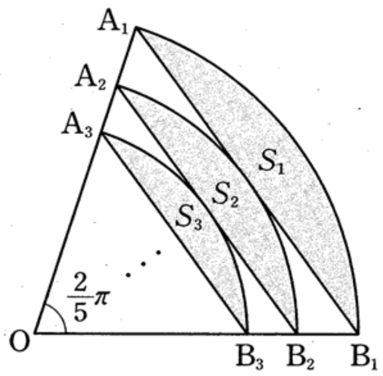
① $\pi\frac{3\sqrt{3}}{4}$ ② $\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ③ π
④ $\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\pi+\frac{3\sqrt{3}}{4}$

59. 그림과 같이 반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 $\frac{2}{5}\pi$인 부채꼴 A_1OB_1 에서 호 A_1B_1에 대한 활꼴의 넓이를 S_1이라 하자. 점O를 중심으로 하고 선분 A_1B_1 에 접하는 원이 두 선분 OA_1, OB_1과 만나는 점을 각각 A_2, B_2라 할 때, 호 A_2B_2에 대한 활꼴의 넓이를 S_2라 하자. 점O를 중심으로 하고 선분 A_2B_2에 접하는 원이 두 선분 OA_2, OB_2와 만나는 점을 각각 A_3, B_3이라 할 때, 호 A_3B_3에 대한 활꼴의 넓이를 S_3이라 하자. 이와 같은 과정을 계속 반복하여 n번째 얻은 활꼴의 넓이를 S_n이라 할 때,

$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = S_1 \cdot \frac{10+2\sqrt{5}}{k}$ 이다. 상수 k의 값은?

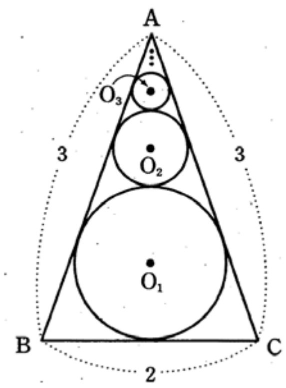
(단, $\sin\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$, $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ 로 계산한다.)

[4점-1004-메가]



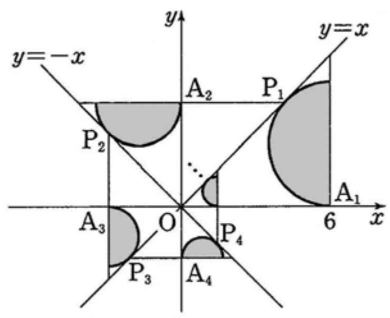
① 3 ② 5 ③ 7
④ 9 ⑤ 11

60. 그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{AC}=3$, $\overline{BC}=2$인 삼각형 ABC에 내접하는 원 O_1을 그리고, 원 O_1 위로 원 O_1과 삼각형 ABC에 접하는 원을 O_2, 원 O_2 위로 원 O_2와 삼각형 ABC에 접하는 원을 O_3이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 접하는 원을 O_n이라 하고, 원 O_n의 둘레의 길이를 L_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} L_n$의 값은?[4점-1009-종로]

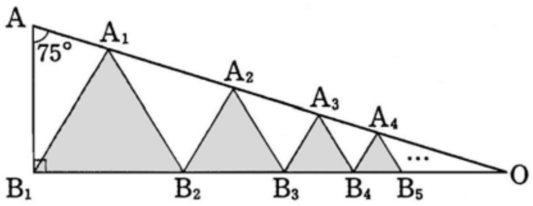


① $\frac{12}{7}\sqrt{2}\pi$ ② $2\sqrt{2}\pi$ ③ $\frac{15}{7}\sqrt{2}\pi$
④ $\frac{7}{3}\sqrt{2}\pi$ ⑤ $\frac{5}{2}\sqrt{2}\pi$

61. 그림과 같이 점 $A_1(6, 0)$과 직선 $x=6$ 위의 한 점을 지름의 양 끝점으로 하고, 직선 $y=x$위의 점 $P_1(x_1, y_1)$에서 접하는 반원을 T_1이라 하자. 또, 점 $A_2(0, y_1)$과 직선 $y=y_1$위의 점 $P_2(x_2, y_2)$에서 접하는 반원을 T_2라 하고, 점 $A_3(x_2, 0)$과 직선 $x=x_2$ 위의 한 점을 지름의 양 끝점으로 하고, 직선 $y=x$ 위의 점 $P_3(x_3, y_3)$에서 접하는 반원을 T_3라 하자. 이와 같은 방법으로 계속하여 반원 T_4, T_5, $\cdots$을 만들어 나갈 때, 이 반원들의 넓이의 총합은 $(p+q\sqrt{2})\pi$이다. $p+q$값을 구하시오. (단, p, q는 유리수이다.)[4점-1008-종로]



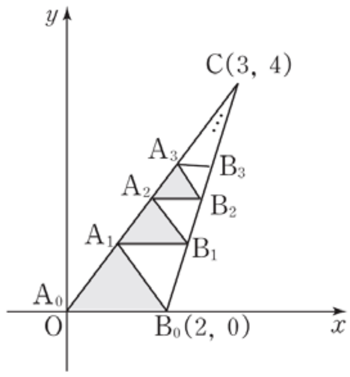
62. $\angle A = 75^\circ$, $\angle B_1 = 90^\circ$ 이고 $\overline{AB_1} = 4$인 직각 삼각형 OAB_1이 있다. 그림과 같이 한 변이 OB_1 위에 있고, 한 꼭짓점이 선분 OA 위에 있는 정삼각형 $A_1B_1B_2$를 그리고, 이 정삼각형의 넓이를 S_1이라 하자. 한 변이 선분 OB_2 위에 있고, 한 꼭짓점이 선분 OA_1 위에 있는 정삼각형 $A_2B_2B_3$을 그리고, 이 정삼각형의 넓이를 S_2이라 하자.
한 변이 선분 OB_3 위에 있고, 한 꼭짓점이 선분 OA_2 위에 있는 정삼각형 $A_3B_3B_4$을 그리고, 이 정삼각형의 넓이를 S_3이라 하자.



이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 정삼각형 $A_nB_nB_{n+1}$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?[4점-1005-비상]

① $4+\sqrt{2}$ ② $4+\sqrt{3}$ ③ $4+2\sqrt{3}$
④ $8+4\sqrt{2}$ ⑤ $8+4\sqrt{3}$

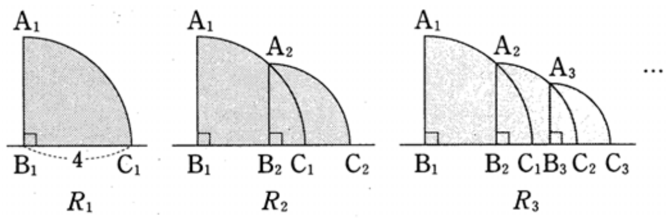
63. 좌표평면 위에 세 점 $A_0(0,\ 0)$, $B_0(2,\ 0)$, $C(3,\ 4)$가 있다. $\angle A_1A_0B_0 = \angle A_1B_0A_0$을 만족시키는 점 A_1을 선분 A_0C 위에 잡고, 삼각형 $A_1A_0B_0$의 넓이를 S_1이라 하자.



점 A_1을 지나고 x축에 평행한 직선이 선분 B_0C와 만나는 점을 B_1이라 하고, $\angle A_2A_1B_1 = \angle A_2B_1A_1$을 만족시키는 점 A_2를 선분 A_1C 위에 잡고, 삼각형 $A_2A_1B_1$의 넓이를 S_2라 하자.
점 A_2를 지나고 x축에 평행한 직선이 선분 B_1C와 만나는 점을 B_2라 하고, $\angle A_3A_2B_2 = \angle A_3B_2A_2$를 만족시키는 점 A_3을 선분 A_2C 위에 잡고, 삼각형 $A_3A_2B_2$의 넓이를 S_3이라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 삼각형 $A_nA_{n-1}B_{n-1}$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?[4점-1008-비상]

① $\frac{11}{5}$ ② $\frac{12}{5}$ ③ $\frac{13}{5}$
④ $\frac{14}{5}$ ⑤ 3

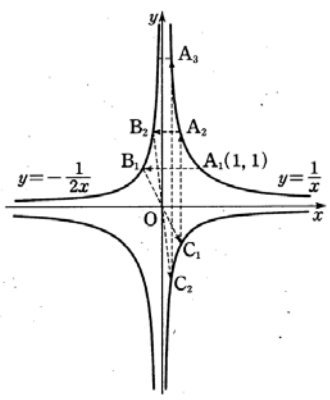
64. 그림과 같이 반지름의 길이가 4이고 $\angle A_1B_1C_1 = 90°$인 부채꼴 $A_2B_1C_1$의 내부를 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 호 A_1C_1을 이등분하는 점을 A_2라 하고, 점 A_2에서 선분 B_1C_1에 내린 수선의 발을 B_2라 할 때, 선분 A_2B_2를 반지름으로 하고 $\angle A_2B_2C_2$의 내부를 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 그림 R_2에서 호 A_2C_2를 이등분하는 점을 A_3이라 하고, 점 A_3에서 선분 B_2C_2에 내린 수선의 발을 B_3이라 할 때, 선분 A_3B_3을 반지름으로 하고 $\angle A_3B_3C_3 = 90°$인 부채꼴 $A_3B_3C_3$의 내부를 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자.



이와 같은 과정을 계속하여 그림 R_{n-1}에서 호 $A_{n-1}C_{n-1}$을 이등분하는 점을 A_n이라 하고, 점 A_n에서 선분 $B_{n-1}C_{n-1}$에 내린 수선의 발을 B_n이라 할 때, 선분 A_nB_n을 반지름으로 하고 $\angle A_nB_nC_n = 90°$인 부채꼴 $A_nB_nC_n$의 내부를 색칠하여 얻은 그림을 R_n이라 하자. 그림 R_n의 색칠된 부분 전체의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? (단, 점 C_{n+1}은 점 C_n보다 항상 오른쪽에 있다.)[4점-1010-비상]

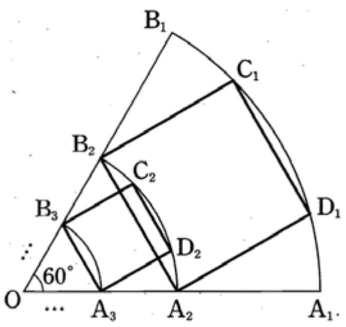
① $3\pi+4$ ② $3\pi+8$ ③ $4\pi+2$
④ $4\pi+4$ ⑤ $4\pi+8$

65. 점 $A_1(1, 1)$에서 x축에 평행한 직선을 그려 곡선 $y=-\dfrac{1}{2x}$과의 교점을 B_1, B_1을 원점에 대하여 대칭이동한 점을 C_1, C_1에서 y축에 평행한 직선을 그려 곡선 $y=\dfrac{1}{x}$과의 교점을 A_2, A_2에서 x축에 평행한 직선을 그려 곡선 $y=-\dfrac{1}{2x}$과의 교점을 B_2, B_2을 원점에 대하여 대칭이동한 점을 C_2라 한다.



이와 같은 방법으로 곡선 $y=\dfrac{1}{x}$ 위의 점 A_n에서 x축에 평행한 직선을 그려 곡선 $y=-\dfrac{1}{2x}$과의 교점을 B_n, B_n을 원점에 대하여 대칭이동한 점을 C_n, C_n에서 y축에 평행한 직선을 그려 곡선 $y=\dfrac{1}{x}$과의 교점을 A_{n+1}, A_{n+1}에서 x축에 평행한 직선을 그려 곡선 $y=-\dfrac{1}{2x}$과의 교점을 B_{n+1}, B_{n+1}을 원점에 대하여 대칭이동한 점을 C_{n+1}이라 한다. 선분 A_nB_n의 길이를 l_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$의 값을 구하시오.[4점-1005-종로]

66. 그림과 같이 중심각의 크기가 $60°$이고, 반지름의 길이가 1인 부채꼴 OA_1B_1에 내접하는 정사각형 $A_2B_2C_1D_1$을 잡는다. $\overline{OA_2}$를 반지름으로 하는 부채꼴 OA_2B_2에 내접하는 정사각형 $A_3B_3C_2D_2$를 잡는다. 이와 같은 방법으로 부채꼴 OA_nB_n에 내접하는 정사각형 $A_{n+1}B_{n+1}C_nD_n$을 계속하여 그려나갈 때, 정사각형 $A_{n+1}B_{n+1}C_nD_n$의 넓이를 $S_n(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이라 하자. 이 때 $\sum_{n=1}^{\infty}S_n$의 값은? (단, 두 점 A_n, B_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$은 각각 선분 OA_1, OB_1 위에 있고, 두 점 C_n, D_n은 호 A_nB_n 위에 있다.)

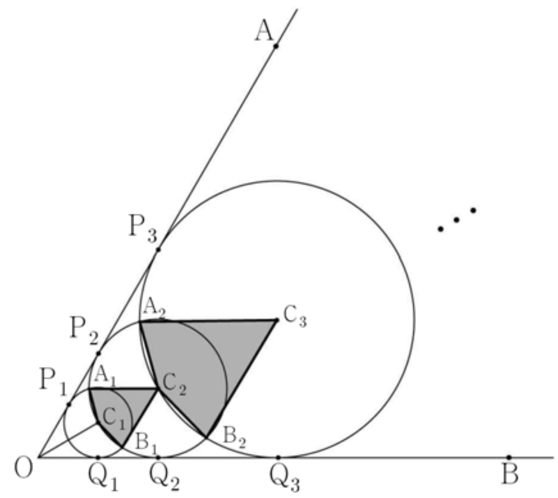


[4점–1010–종로]

① $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ ② $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{3}+2}{2}$

④ $\frac{2\sqrt{3}-1}{2}$ ⑤ $\sqrt{3}$

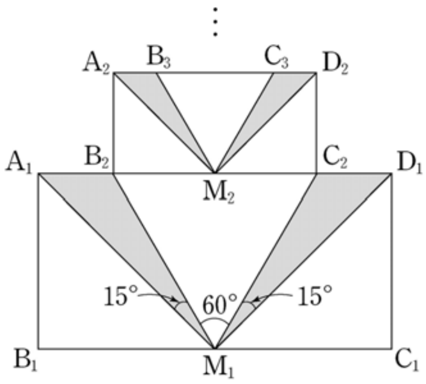
67. 그림과 같이 크기가 $60°$인 $\angle AOB$의 이등분선 위에 $\overline{OC_1}=2$인 점 C_1을 잡아 점 C_1을 중심으로 하고 반직선 OA와 OB에 접하는 원 C_1을 그릴 때, 원 C_1과 반직선 OA, OB와의 접점을 각각 P_1, Q_1이라 하자. 점 C_1을 지나고 반직선 OA와 OB에 접하는 두 원 중에서 큰 원의 중심을 C_2, 원 C_2와 반직선 OA, OB와의 접점을 각각 P_2, Q_2라 하고, 원 C_1과 원 C_2가 만나는 점을 각각 A_1, B_1이라 할 때, 사각형 $A_1C_1B_1C_2$의 넓이를 S_1이라 하자. 점 C_2를 지나고 반직선 OA와 OB에 접하는 두 원 중에서 큰 원의 중심을 C_3, 원 C_3과 반직선 OA, OB와의 접점을 각각 P_3, Q_3이라 하고, 원 C_2와 원 C_3이 만나는 점을 각각 A_2, B_2라 할 때, 사각형 $A_2C_2B_2C_3$의 넓이를 S_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 도형의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{4^n+3^n}$의 값은?[4점–1004–교육청]



① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ $\frac{3}{8}$

④ $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{15}}{8}$

68. $\overline{A_1B_1}=1$, $\overline{B_1C_1}=2$인 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 그림과 같이 선분 B_1C_1의 중점을 M_1이라 하고, 선분 A_1D_1 위에 $\angle A_1M_1B_2=\angle C_2M_1D_1=15^\circ$, $\angle B_2M_1C_2=60^\circ$가 되도록 두 점 B_2, C_2를 정한다. 삼각형 $A_1M_1B_2$의 넓이와 삼각형 $C_2M_1D_1$의 넓이의 합을 S_1이라 하자. 사각형 $A_2B_2C_2D_2$가 $\overline{B_2C_2}=2\overline{A_2B_2}$인 직사각형이 되도록 그림과 같이 두 점 A_2, D_2를 정한다. 선분 B_2C_2의 중점을 M_2라 하고, 선분 A_2D_2 위에 $\angle A_2M_2B_3=\angle C_3M_2D_2=15^\circ$, $\angle B_3M_2C_3=60^\circ$가 되도록 두 점 B_3, C_3을 정한다. 삼각형 $A_2M_2B_3$의 넓이와 삼각형 $C_3M_2D_2$의 넓이의 합을 S_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 얻은 S_n에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}S_n$의 값은?[4점-2010-대수능]



① $\frac{2+\sqrt{3}}{6}$　② $\frac{3-\sqrt{3}}{2}$　③ $\frac{4+\sqrt{3}}{9}$

④ $\frac{5-\sqrt{3}}{5}$　⑤ $\frac{7-\sqrt{3}}{8}$

69. 다음 그림과 같이 서로 $60°$의 각을 이루고 한 점 O 에서 만나는 세 직선 p, q, r가 있다.

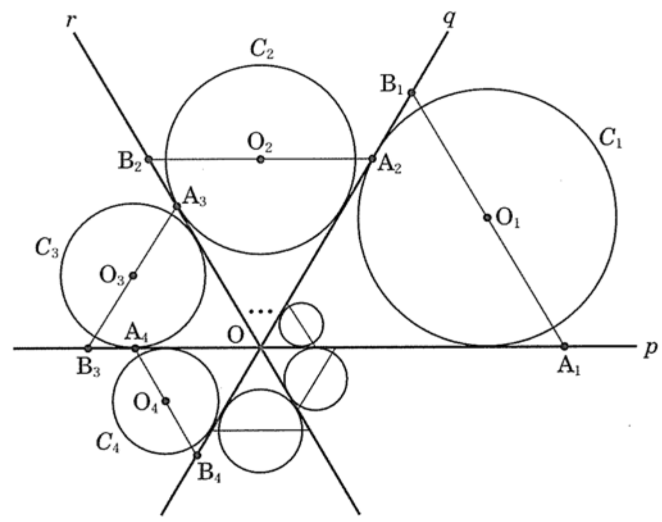
두 직선 p, q 위에 각각 $\overline{OA_1}=8$, $\overline{OB_1}=8$ 인 두 점 A_1, B_1 을 잡을 때, 선분 $\overline{A_1B_1}$ 의 중점 O_1 을 중심으로 하고 두 직선 p, q에 동시에 접하는 원을 C_1 이라 하자.

직선 q 와 원 C_1 의 접점을 A_2 라 하고 점 A_2 를 지나 직선 p 에 평행한 직선이 직선 r 와 만나는 점을 B_2 라 할 때, 선분 $\overline{A_2B_2}$ 의 중점 O_2 를 중심으로 하고 두 직선 q, r 에 동시에 접하는 원을 C_2 라 하자.

직선 r 와 원 C_2 의 접점을 A_3 라 하고 점 A_3 를 지나 직선 q 에 평행한 직선이 직선 p 와 만나는 점을 B_3 라 할 때, 선분 $\overline{A_3B_3}$ 의 중점 O_3 를 중심으로 하고 두 직선 r, p 에 동시에 접하는 원을 C_3 이라 하자.

직선 p 와 원 C_3 의 접점을 A_4 라 하고 점 A_4 를 지나 직선 r 에 평행한 직선이 직선 q 와 만나는 점을 B_4 라 할 때, 선분 $\overline{A_4B_4}$ 의 중점 O_4 를 중심으로 하고 두 직선 p, q 에 동시에 접하는 원을 C_4 라 하자.

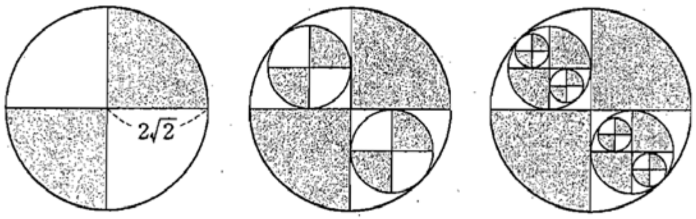
이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 원 C_n 의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}S_n$ 의 값은?[4점-1009-대성]



① $\frac{192}{7}\pi$　② 32π　③ $\frac{256}{7}\pi$

④ 40π　⑤ 48π

70. 그림과 같이 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$ 인 원을 4 등분한 후 두 개의 서로 마주 보는 반대쪽에 어둡게 색을 칠한다. 색을 칠하지 않은 나머지 두 개의 영역에 내접하는 원을 그린 후 같은 방법으로 4 등분한 후 두 개의 서로 마주 보는 반대쪽에 어둡게 색을 칠한다. 이와 같은 방법으로 계속해서 어둡게 색을 칠해나갈 때 색칠된 모든 부채꼴의 호의 길이의 합은 $\pi(a+b\sqrt{2})$,(a, b 는 유리수)이다. $a+b$ 의 값을 구하시오.[4점-1006-종로]

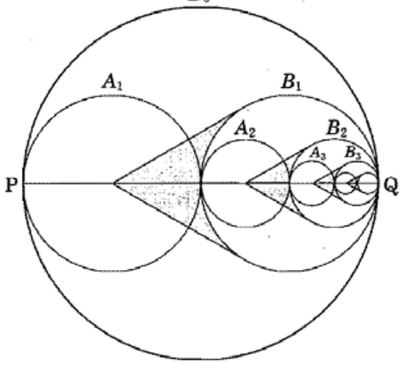


71. 그림과 같이 길이가 24인 선분 PQ를 지름으로 하는 원 B_0이 있다. 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 원 A_n, B_n을 원 B_0의 내부에 그려나간다. $(n=1, 2, 3, \cdots)$

(가) 두 원 A_n, B_n의 중심은 선분 PQ 위에 있다. (나) 두 원 A_n, B_n의 반지름의 길이는 서로 같다. (다) 두 원 A_n, B_n은 서로 외접하는 동시에 원 B_{n-1}에 각각 내접한다.

원 A_n의 중심을 지나고 원 B_n에 접하는 두 직선과 원 B_n으로 둘러싸인 부분(어두운 부분)의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?

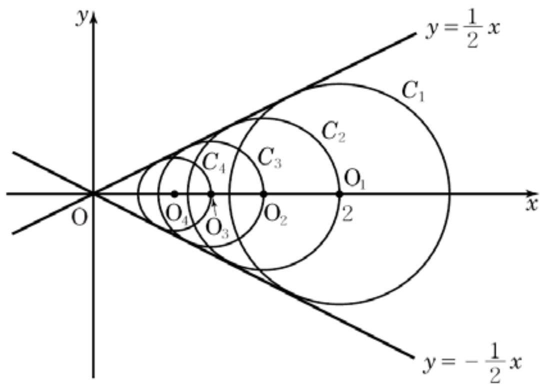
[4점-1011-대성]



① $36\sqrt{3}-16\pi$ ② $48\sqrt{3}-16\pi$ ③ $36\sqrt{3}-12\pi$
④ $48\sqrt{3}-12\pi$ ⑤ $36\sqrt{3}-8\pi$

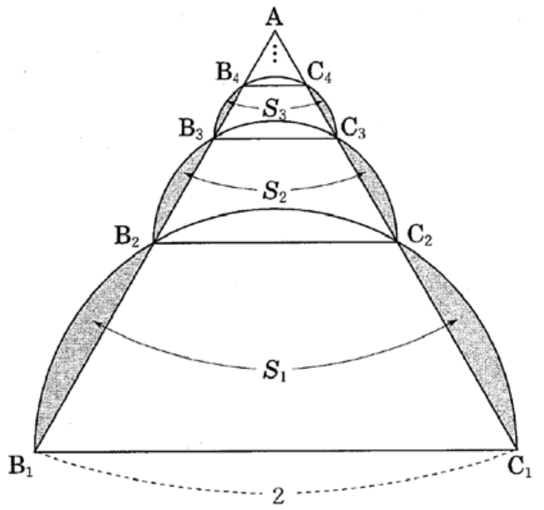
72. 그림과 같이 중심이 $O_1(2,\ 0)$이고 두 직선 $y=\frac{1}{2}x$, $y=-\frac{1}{2}x$에 동시에 접하는 원 C_1을 그리고, 중심이 $O_2(a_1,\ 0)$이고 점 $O_1(2,\ 0)$을 지나면서 두 직선 $y=\frac{1}{2}x$, $y=-\frac{1}{2}x$에 동시에 접하는 원 C_2를 그린다. 중심이 $O_3(a_2,\ 0)$이고 점 $O_2(a_1,\ 0)$을 지나면서 두 직선 $y=\frac{1}{2}x$, $y=-\frac{1}{2}x$에 동시에 접하는 원 C_3을 그린다. 중심이 $O_4(a_3,\ 0)$이고 점 $O_3(a_2,\ 0)$을 지나면서 두 직선 $y=\frac{1}{2}x$, $y=-\frac{1}{2}x$에 동시에 접하는 원 C_4를 그린다. 이와 같은 과정을 계속하여 그린 원 C_n의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? (단, 자연수 n에 대하여 $2>a_1>a_2>a_3>\cdots>a_n$이다.)

[4점-1007-대성]



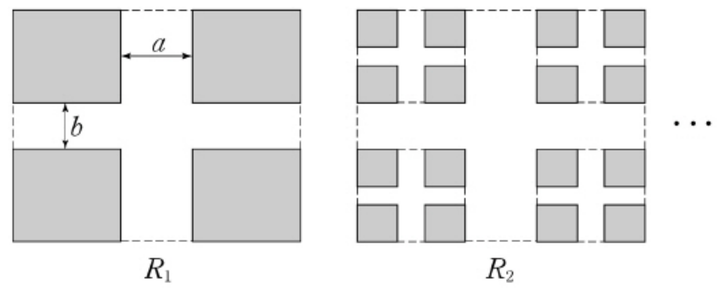
① $\frac{8(7+5\sqrt{5})}{415}\pi$ ② $\frac{8(5+7\sqrt{5})}{415}\pi$
③ $\frac{4(7+5\sqrt{5})}{225}\pi$ ④ $\frac{8(7+5\sqrt{5})}{95}\pi$
⑤ $\frac{8(5+7\sqrt{5})}{21}\pi$

73. 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정삼각형 AB_1C_1이 있다. 선분 B_1C_1을 지름으로 하는 반원이 두 선분 AB_1, AC_1과 점 B_1, C_1이 아닌 점에서 만나는 점을 각각 B_2, C_2라 하고, 이 반원과 삼각형 AB_1C_1로 둘러싸인 두 어두운 부분의 넓이의 합을 S_1이라 하자. 선분 B_2C_2를 지름으로 하는 반원이 두 선분 AB_2, AC_2와 점 B_2, C_2가 아닌 점에서 만나는 점을 각각 B_3, C_3이라 하고, 이 반원과 삼각형 AB_2C_2로 둘러싸인 두 어두운 부분의 넓이의 합을 S_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 반원과 삼각형 AB_nC_n으로 둘러싸인 두 어두운 부분의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?[4점–1010–대성]



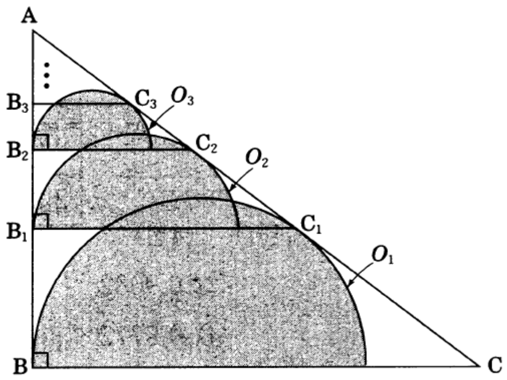
① $2\pi-3\sqrt{3}$　② $\frac{4}{3}\pi-2\sqrt{3}$　③ $\frac{2}{3}\pi-\sqrt{3}$
④ $\frac{2}{9}\pi-\frac{\sqrt{3}}{3}$　⑤ $\frac{2}{9}\pi-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

74. 가로의 길이가 5이고 세로의 길이가 4인 직사각형에서 그림과 같이 가로의 폭 a가 직사각형의 가로의 길이의 $\frac{1}{4}$, 세로의 폭 b가 직사각형의 세로의 길이의 $\frac{1}{5}$인 ✢ 모양의 도형을 잘라내어 얻은 4개의 직사각형을 R_1이라 하고, 그 4개의 직사각형의 넓이의 합을 S_1이라 하자. R_1의 각 직사각형에서 가로의 폭이 각 직사각형의 가로의 길이의 $\frac{1}{4}$, 세로의 폭이 각 직사각형의 세로의 길이의 $\frac{1}{5}$인 ✢ 모양의 도형을 잘라내어 얻은 16개의 직사각형을 R_2라 하고, 그 16개의 직사각형의 넓이의 합을 S_2라 하자. 직사각형의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?[4점–1006–평가원]



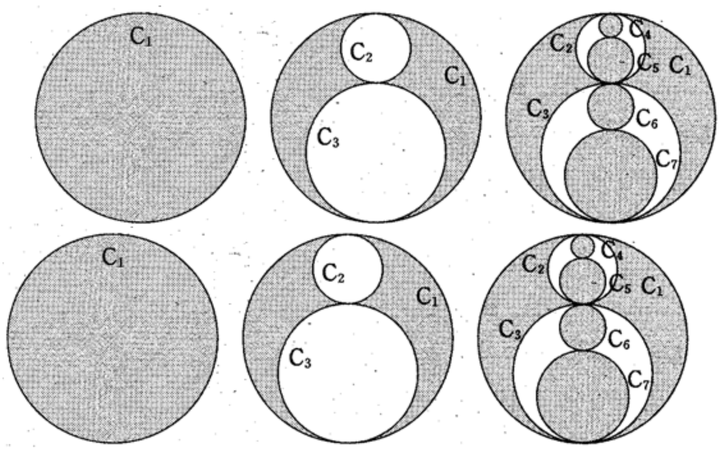
① 26　② 30　③ 34
④ 38　⑤ 42

75. 그림과 같이 $\overline{AB}=6$, $\overline{BC}=8$, $\angle ABC=90°$인 직각삼각형 ABC에 내접하는 반원 O_1이 있다. 반원 O_1이 빗변 AC에 접하는 접점을 C_1이라 하고, 점 C_1을 지나고 변 BC에 평행한 직선이 변 AB와 만나는 점을 B_1이라 할 때, 삼각형 AB_1C_1에 내접하는 반원을 O_2라 한다. 반원 O_2가 빗변 AC에 접하는 접점을 C_2라 하고, 점 C_2를 지나고 변 B_1C_1에 평행한 직선이 변 AB와 만나는 점을 B_2라 할 때, 삼각형 AB_2C_2에 내접하는 반원을 O_3이라 한다. 이와 같은 과정을 계속할 때, 반원 $O_n(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$의 넓이를 S_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{\infty}S_n$의 값은? (단, 점 B_{n-1}은 원 O_n의 지름의 한 끝점이고, 점 B_0은 점 B이다.)[4점–1004–대성]



① $\frac{115}{32}\pi$ ② $\frac{125}{32}\pi$ ③ $\frac{225}{32}\pi$
④ $\frac{125}{16}\pi$ ⑤ $\frac{225}{16}\pi$

76. 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원을 C_1이라 하고, 이 도형의 넓이는 S_1이라 하자. 원 C_1의 지름을 $m : n$으로 내분하여 나누어진 두 선분을 지름으로 하는 두 원을 각각 C_2, C_3이라 하고, C_2와 C_3의 넓이의 합을 S_2라 하자. 다시 원 C_2의 지름을 $m : n$이로 내분하여 나누어진 두 선분을 지름으로 하는 두 원을 각각 C_4, C_5, 원 C_3의 지름을 $m : n$으로 내분하여 나누어진 두 선분을 지름으로 하는 두 원을 각각 C_6, C_7이라 하고, C_4, C_5, C_6, C_7의 넓이의 합 을 S_3이라 하자.

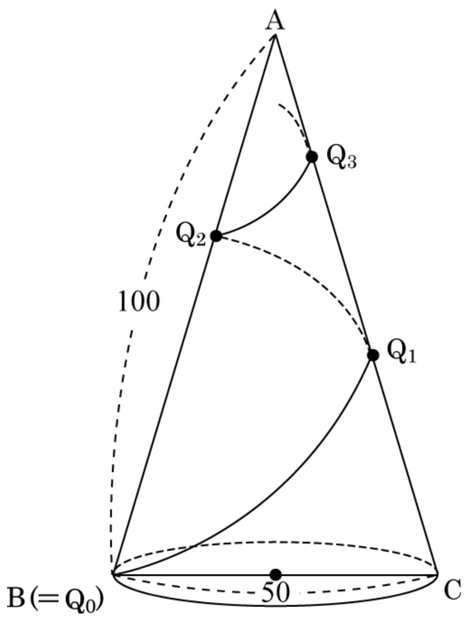


이와 같은 과정을 계속하여 k번째 얻어진 원들의 넓이의 합을 S_k라고 할 때, $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}S_k = S_1-S_2+S_3-S_4+\cdots=\frac{18}{31}\pi$이다.
이 때, $m+n$의 값은? (단, m, n은 서로소인 자연수이다.)
[4점–1003–비상]

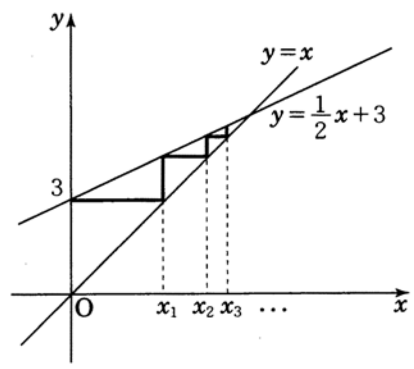
① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

77. 그림과 같이 점 A 를 꼭짓점으로 하고 선분 BC 를 밑면의 지름으로 하며 $\overline{AB}=100$, $\overline{BC}=50$ 인 직원뿔이 있다. 모선 AC 위의 점 Q_1 은 점 B 에서 원뿔의 옆면을 돌아 모선 AC 에 최단 거리로 이르는 점이고, 모선 AB 위의 점 Q_2 는 점 Q_1 에서 원뿔의 옆면을 돌아 모선 AB 에 최단 거리로 이르는 점이다. 이와 같은 방법으로 점 Q_n 은 모선 AB 또는 AC 위의 점 Q_{n-1} 에서 원뿔의 옆면을 돌아 다른 모선에 최단 거리로 이르는 점이라고 하자. 점 Q_{n-1}에서 점 Q_n 에 이르는 최단 거리를 l_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$ 의 값은 $a+b\sqrt{2}$ 이다. $a+b$ 의 값을 구하시오. (단, $B=Q_0$, a 와 b 는 유리수이다.)

[4점-1007-교육청]



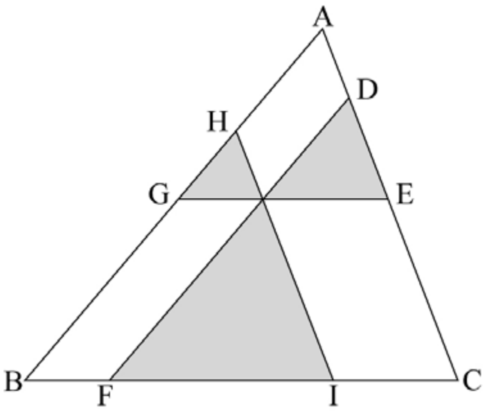
78. 그림과 같이 두 직선 $y=x$와 $y=\frac{1}{2}x+3$이 있다. 점 (0, 3)을 지나고 x축에 평행한 직선이 직선 $y=x$와 만나는 점x좌표를 x_1 이라 하자. 직선 $x=x_1$과 직선 $y=\frac{1}{2}x+3$의 교점을 지나고 x축에 평행한 직선이 직선 $y=x$와 만나는 점의 x좌표를 x_2라 하자. 직선$x=x_2$와 직선 $y=\frac{1}{2}x+3$의 교점을 지나고 x축에 평행한 직선이 직선 $y=x$와 만나는 점의 x좌표를 x_3이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 x좌표를 x_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}(12-x_{n+1}-x_n)$의 값을 구하시오.[4점-1004-대성]



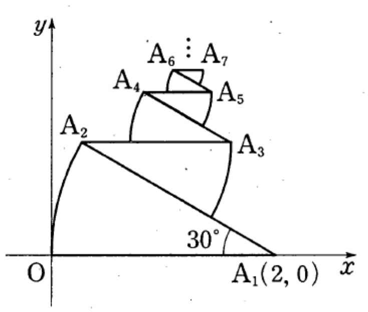
79. 그림과 같이 넓이가 M인 삼각형 ABC 가 있다. 자연수 n과 선분 AC 위의 두 점 D, E 에 대하여

$$\overline{\mathrm{AD}} : \overline{\mathrm{DE}} : \overline{\mathrm{EC}} = n : (2n+1) : (3n+2)$$

이고 $\overline{\mathrm{DF}} /\!/ \overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{GE}} /\!/ \overline{\mathrm{BC}}$ 이다. 선분 DF 와 선분 GE 의 교점을 지나는 선분 HI 는 선분 AC 와 평행하다. 어두운 부분의 넓이의 합을 S_n 이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{q}{p} M$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)[4점-1007-교육청]



80. 그림과 같이 중심이 $\mathrm{A}_1(2, 0)$이고 반지름의 길이가 2, 중심각의 크기가 30°인 부채꼴을 그리고 호 위의 한 끝점 A_2를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{4}{3}$이며 중심각의 크기가 30°인 부채꼴을 그린다. 이와 같이 반지름의 길이가 $\frac{2}{3}$배가 되고 중심각의 크기가 30°인 부채꼴을 위로 그려나간다. (즉, $\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2}=2$, $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}}=\frac{2}{3}\overline{\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_n}$)



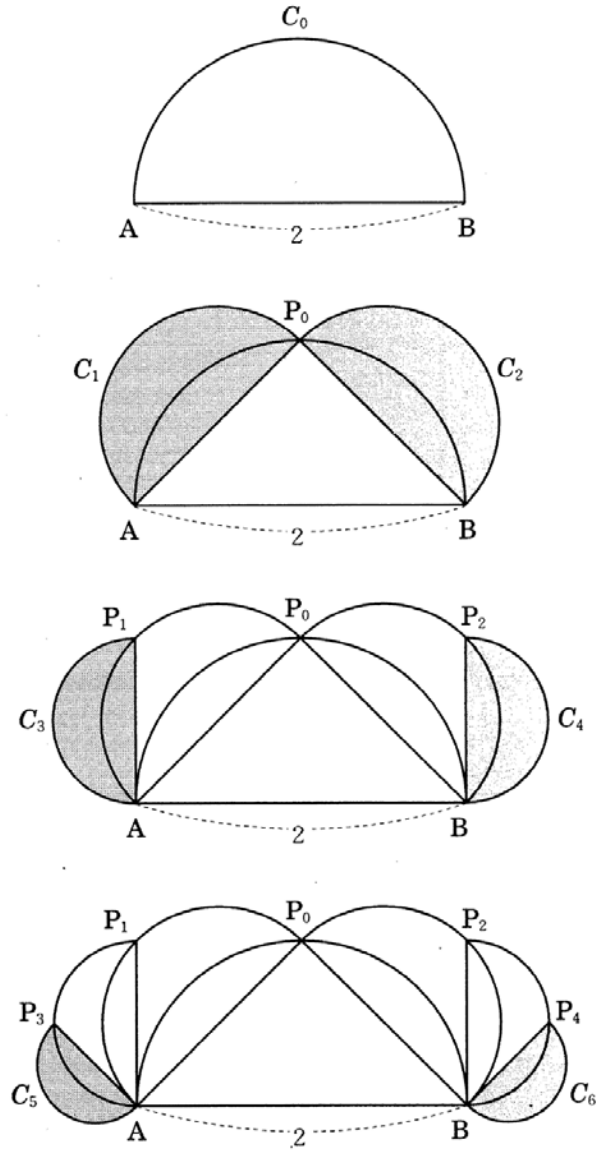
이와 같은 과정을 반복하면 점 $\mathrm{A}_n(x_n, y_n)$은 (α, β)에 가까워진다. 이 때 유리수 a, b에 대하여 $\alpha = a + b\sqrt{3}$ 이 성립한다. $5(a+b)$의 값을 구하시오.[4점-1005-종로]

81. 지름의 길이가 2인 반원을 C_0이라 하자. 호 AB를 이등분하는 점을 P_0이라 하고, 선분 AP_0, BP_0을 지름으로 하는 반원을 각각 C_1, C_2라 하자.

반원 C_1, C_2의 호 AP_0, BP_0을 이등분하는 점을 각각 P_1, P_2라 하고, 선분 AP_1, BP_2를 지름으로 하는 반원을 각각 C_3, C_4라 하자.

반원 C_3, C_4의 호 AP_1, BP_2을 이등분하는 점을 각각 P_3, P_4라 하고, 선분 AP_3, BP_4를 지름으로 하는 반원을 각각 C_5, C_6라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 두 반원 C_{2n-1}, C_{2n}의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?[4점-1010-대성]



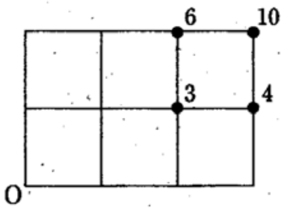
① π　② $\frac{5}{4}\pi$　③ $\frac{3}{2}\pi$　④ $\frac{7}{4}\pi$　⑤ 2π

정답 및 풀이

1. 정답 ④
[출제의도] 행렬의 뜻을 이해하기
$a_{11}=1+1=2$, $a_{12}=1-4=-3$
$a_{21}=2-1=1$, $a_{22}=2+2=4$
이므로 $A=\begin{pmatrix}2 & -3\\1 & 4\end{pmatrix}$이다.
따라서, A의 모든 성분의 합은 4이다.

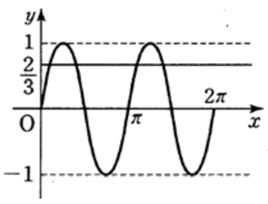
2. [출제의도] 상용로그의 지표와 행렬의 정의를 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.
$a_{11}=2, a_{12}=4, a_{21}=4, a_{22}=5$이므로 구하는 값은 15

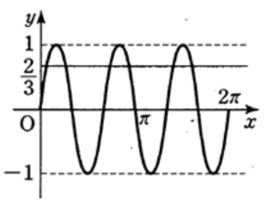
3. 정답 ③
O지점에서 각 지점까지 가는 최단 경로의 수는 오른쪽 그림과 같다.



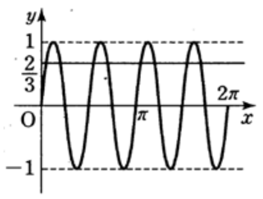
따라서 $a_{11}=3$, $a_{12}=4$, $a_{21}=6$, $a_{22}=10$
이므로 $P=\begin{pmatrix}3 & 4\\6 & 10\end{pmatrix}$이다.

4. 답 ③
$0\le x\le 2\pi$에서 두 그래프 $y=\sin(i+j)x$, $y=\dfrac{2}{3}$의 교점의 개수를 조사한다.
(i) $i=1$, $j=1$: 교점 4개
(ii) $i=1$, $j=2$: 교점 6개, $i=2$, $j=1$: 교점 6개





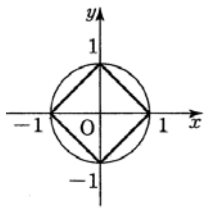
(iii) $i=2$, $j=2$: 교점 8개

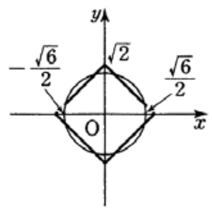


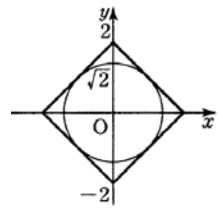
$A=\begin{pmatrix}4 & 6\\6 & 8\end{pmatrix}$이고, 행렬 A의 모든 성분의 합은 24이다.

5. 정답 15
행렬 A는 다음과 같다.
$$A=\begin{pmatrix}0&1&1&2\\1&2&1&0\\1&1&0&2\\2&0&2&1\end{pmatrix}$$
$$A^2=\begin{pmatrix}0&1&1&2\\1&2&1&0\\1&1&0&2\\2&0&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1&2\\1&2&1&0\\1&1&0&2\\2&0&2&1\end{pmatrix}\text{에서}$$
(1, 1)성분 : $0+1+1+4=6$
(4, 4)성분 : $4+0+4+1=9$
따라서, 행렬 A^2의 (1, 1)성분과 (4, 4)성분의 합은 $6+9=15$

6. 정답 24







그림에서 $a_{11}=4$, $a_{12}=a_{21}=8$, $a_{22}=4$
$$\therefore\ A=\begin{pmatrix}4 & 8\\8 & 4\end{pmatrix}$$
따라서 행렬 A의 모든 성분의 합은 24이다.

7. 정답 ①
$A-2B=\begin{pmatrix}1 & 2\\-2 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2 & 0\\-4 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 2\\2 & 1\end{pmatrix}$이므로
$(A-2B)^{-1}=\dfrac{1}{-1}\begin{pmatrix}1 & -2\\-2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\2 & -3\end{pmatrix}$

8. ④
$A+B=\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}$이므로
$A(A+B)=\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -2\\2 & 2\end{pmatrix}$
따라서 구하려는 행렬의 모든 성분의 합은
$2-2+2+2=4$

9. 답 ④
행렬의 연산
$2(X-4A)=B-2X$에서 $2X-8A=B-2X$
$4X=8A+B$
$\therefore X=2A+\dfrac{1}{4}B=\begin{pmatrix}4 & -2\\-2 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 0\\2 & 1\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}3 & -2\\0 & 1\end{pmatrix}$
따라서 행렬 X의 모든 성분의 합은 2이다.

10. ④
$2(X-2A)=B-X$
$3X=4A+B$
$=\begin{pmatrix}-4 & 8\\16 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -2\\-1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 6\\15 & 6\end{pmatrix}$
$\therefore\ X=\begin{pmatrix}-1 & 2\\5 & 2\end{pmatrix}$
따라서 행렬 X의 모든 성분의 합은 $(-1)+2+5+2=8$이다.

11. ⑤
$BA-B=B(A-E)=\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\-1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2\\-1 & 2\end{pmatrix}$

12. ②

$2B+C=2\begin{pmatrix}1&2\\0&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&0\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4\\2&-1\end{pmatrix}$

$\therefore\ A(2B+C)=\begin{pmatrix}2&0\\3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&4\\2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&8\\5&11\end{pmatrix}$

따라서, 행렬 $A(2B+C)$의 모든 성분의 합은

$2+8+5+11=26$

13. 답 ①

[해설] $2A+B=2\begin{pmatrix}1&0\\2&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&0\\1&-6\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}2&0\\4&6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&0\\1&-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&0\\5&0\end{pmatrix}$

따라서 행렬 $2A+B$의 모든 성분의 합은

$5+0+5+0=10$이다.

14. 답 ③

$AB-A=A(B-E)=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2\\-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-1\\0&2\end{pmatrix}$

따라서, 구하는 합은 0 이다.

15. 답 ①

$A^2+3A=\begin{pmatrix}-2&3\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&3\\0&-1\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}-2&3\\0&-1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}4&-9\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6&9\\0&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&0\\0&-2\end{pmatrix}$

따라서, 모든 성분의 합은 -4이다.

16. 답 ②

$A^2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=E$ 이므로

$A^2B-A=B-A=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\-1&0\end{pmatrix}$

따라서, 2행 1열의 성분은 -1이다.

17. 답 ①

$AB=\begin{pmatrix}1&a\\2&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&c\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2-a&c+2a\\-4-b&2c+2b\end{pmatrix}=O$

$-2-a=0,\ c+2a=0,\ -4-b=0,\ 2c+2b=0$

$\therefore\ a=-2,\ b=-4,\ c=4$

$\therefore\ a+b+c=(-2)+(-4)+4=-2$

18. 답 ②

행렬의 계산

$A=2B=A^2$에서

$B=\frac{1}{2}(A^2-A)=\frac{1}{2}A(A-E)$

$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&2\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$

따라서 행렬 B의 모든 성분의 합은 2이다.

19. 답 ⑤

$AX=-B$에서

$X=A^{-1}(-B)=\begin{pmatrix}0&-1\\1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\2&3\end{pmatrix}$

20. 답 ①

$X=A-AB$

$=\begin{pmatrix}1&2\\2&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3\\4&5\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1&2\\2&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}10&13\\4&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9&-11\\-2&-6\end{pmatrix}$

따라서 구하는 합은 -28이다.

21. 답 ②

[출제의도] 행렬의 연산을 이용하여 행렬 구하기

$A+X=3B+2X$를 정리하면 $X=A-3B$이다.

따라서, $X=\begin{pmatrix}-5&3\\-9&-11\end{pmatrix}$이다.

22. 답 ②

$2A-X=A+2B+X$에서

$2X=A-2B$

$=\begin{pmatrix}0&2\\4&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&6\\-4&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&-4\\8&0\end{pmatrix}$

$\therefore X=\begin{pmatrix}-1&-2\\4&0\end{pmatrix}$

따라서 구하는 합은 1이다.

23. 답 ④

$A+B=2E$에서

$B=2E-A=2\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2\\-2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2\\2&-1\end{pmatrix}$

$A-B=\begin{pmatrix}1&2\\-2&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&-2\\2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&4\\-4&4\end{pmatrix}$

따라서 $0+4-4+4=4$

24. 답 ⑤

$A+B=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}$

$(A+B)^2=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\4&1\end{pmatrix}$

$(A+B)^3=\begin{pmatrix}1&0\\4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\6&1\end{pmatrix}$

$\vdots$

$(A+B)^n=\begin{pmatrix}1&0\\2n&1\end{pmatrix}$

$\therefore\ (A+B)^{10}=\begin{pmatrix}1&0\\20&1\end{pmatrix}$

따라서, 행렬 $(A+B)^{10}$의 모든 성분의 합은 22이다.

25. 답 ⑤

$A+B=\begin{pmatrix}1&-2\\1&-3\end{pmatrix}$ …………… ㉠

$A-B=\begin{pmatrix}-1&2\\-3&1\end{pmatrix}$ …………… ㉡

㉠+㉡을 하면

$2A=\begin{pmatrix}0&0\\-2&-2\end{pmatrix}$

$A=\begin{pmatrix}0&0\\-1&-1\end{pmatrix}$

$\therefore\ A^2=\begin{pmatrix}0&0\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}$

㉠−㉡을 하면

$2B=\begin{pmatrix}2&-4\\4&-4\end{pmatrix}$

$B=\begin{pmatrix}1&-2\\2&-2\end{pmatrix}$

$\therefore\ B^2=\begin{pmatrix}1&-2\\2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2\\2&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&2\\-2&0\end{pmatrix}$

$\therefore\ A^2-B^2=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3&2\\-2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-2\\3&1\end{pmatrix}$

따라서 모든 성분의 합은 5이다.

26. 답 ④

$AB+A=A(B+E)=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$이므로

$B+E=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\1&0\end{pmatrix}$

$\therefore B=\begin{pmatrix}1&2\\1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2\\1&-1\end{pmatrix}$

따라서 구하는 행렬 B의 모든 성분의 합은

$0+2+1+(-1)=2$

27. 답 48

$A+B=\begin{pmatrix}3&1\\4&4\end{pmatrix}$, $B-A=\begin{pmatrix}1&1\\2&4\end{pmatrix}$에서

$A=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&1\\3&4\end{pmatrix}$이므로

$B^2-A^2=\begin{pmatrix}7&6\\18&19\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}6&6\\17&19\end{pmatrix}$

따라서 행렬 B^2-A^2의 모든 성분의 합은 48이다.

28. ⑤ 계산능력 – 행렬

$A-B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ ……㉠

$3A+B=\begin{pmatrix}11&6\\10&7\end{pmatrix}$ ……㉡

㉠+㉡을 하면 $4A=\begin{pmatrix}12&6\\10&8\end{pmatrix}$

$\therefore A=\begin{pmatrix}3&\frac{3}{2}\\\frac{5}{2}&2\end{pmatrix}$

따라서 행렬 A의 모든 성분의 합은 $3+\frac{3}{2}+\frac{5}{2}+2=9$이다.

29. 답 72

[해설] $X+Y=2A$, $X-Y=4B$에서

$2X=2A+4B$

$\therefore X=A+2B=\begin{pmatrix}3&2\\-4&1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-1&2\\-4&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&6\\-12&-1\end{pmatrix}$

따라서 행렬 X의 모든 성분의 곱은 $1\times6\times(-12)\times(-1)=72$이다.

30. 답 ①

$A=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$이므로

$A^2=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2\\-2&0\end{pmatrix}$

$A^3=\begin{pmatrix}0&2\\-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&2\\-2&-2\end{pmatrix}$

따라서 행렬 A^3의 모든 성분의 합은

$-2+2+(-2)+(-2)=-4$

31. ④

$a_{11}=0$, $a_{12}=-1$, $a_{21}=1$, $a_{22}=0$이므로 $A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$

$A^2=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}=-E$

$A^3=-A$, $A^4=E$, $A^5=A$, $\cdots$

$\therefore A+A^2+A^3+\cdots+A^{2010}=(A+A^2+A^3+A^4)+\cdots$

$+(A^{2005}+\cdots+A^{2008})+A^{2009}+A^{2010}$

$=O+\cdots+O+A+A^2$

$=A-E=\begin{pmatrix}-1&-1\\1&-1\end{pmatrix}$

따라서 $(2,1)$의 성분은 1이다.

32. 답 ③

$AB=\begin{pmatrix}-2&-3&-10\\4&6&20\end{pmatrix}$이므로 모든 성분의 합은 15이다.

33. 답 ④

$B=3E-A$이므로

$A^2-B^2=A^2-(A^2-6A+9E)$

$=6A-9E=\begin{pmatrix}3&6\\9&12\end{pmatrix}$

$\therefore A=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}12&6\\9&21\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\\frac{3}{2}&\frac{7}{2}\end{pmatrix}$

따라서 구하는 합은 8이다.

34. 답 13

$A-B=2E$이면 $B=A-2E$이므로

$AB=A(A-2E)=A^2-2A=(A-2E)A=BA$

$A^2-B^2=(A+B)(A-B)$ ($\because\ AB-BA$)

$=2(A+B)=\begin{pmatrix}10&-6\\8&14\end{pmatrix}$

$\therefore\ A+B=\begin{pmatrix}5&-3\\4&7\end{pmatrix}$

따라서 행렬 $A+B$의 모든 성분의 합은
$5+(-3)+4+7=13$

35. 답 ④

$A^2=\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+b & ab+b^2 \\ a+b & b+b^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$

$ab+b^2=b(a+b)=6$

$a+b=-2$이므로 $b=-3$

$\therefore a=1$

$\therefore a-b=1-(-3)=4$

36. 답 11 이해력-행렬

$A^2=\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ a & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ a & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4+2a & 2 \\ a & 2a+9 \end{pmatrix}$

이때, $a>0$이므로 $a<2a+4<2a+9$이고,

$2<2a+4<2a+9$이다.

(i) $a \ge 2$일 때,

$\ll A^2 \gg=(2a+9)-2=29$

$\therefore\ a=11$

(ii) $a<2$일 때,

$\ll A^2 \gg=(2a+9)-a=29$

$\therefore\ a=20$ (모순)

따라서 구하는 양수 a의 값은 11이다.

37. 답 44(개)

$A^2=\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ ab+bc & c^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$에서

$a^2=1,\ b(a+c)=0,\ c^2=1$

(i) $a=1,\ c=1$일 때 $b=0$

(ii) $a=-1,\ c=-1$일 때 $b=0$

(iii) $a=1,\ c=-1$일 때 $b=-10,\ -9,\ -8,\ \cdots,\ 9,\ 10$

(iv) $a=-1,\ c=1$일 때 $b=-10,\ -9,\ -8,\ \cdots,\ 9,\ 10$

따라서, 집합 Z의 원소의 개수는 $2+2\times 21=44$ (개)

38. 답 512

$A=\sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$이므로

$A^2=(\sqrt{2})^2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$=2\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}=4\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$A^4=4^2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$=16\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=-16E$

$\therefore\ A^8=(-16E)^2=256E$

따라서 행렬 A^8의 모든 성분의 합은
$256+0+0+256=512$

39. 답 ④

$A^2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$이므로

$A^4=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}=-2E$

$B^3=\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}=-2E$

$\therefore A^{12}+B^{12}=(A^4)^3+(B^3)^4=-8E+16E=8E$

따라서 모든 성분의 합은 $8+8=16$이다.

40. 답 186

$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 2 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 2 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}^2=\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}=\dfrac{1}{3^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 12 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 2 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}^3=\left(\dfrac{1}{3}\right)^3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 12 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}=\dfrac{1}{3^3}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 18 & 1 \end{pmatrix}$

$\cdots$

$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 2 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}^{10}=\dfrac{1}{3^{10}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 60 & 1 \end{pmatrix}$

$\therefore\ 3^{11}\cdot\dfrac{1}{3^{10}}(1+60+1)=3\cdot 62=186$

41. 답 30

[출제의도] 행렬의 곱셈을 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$A\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a+3b \\ 2c+3d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$A^2\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}=AA\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3a+4b \\ 3c+4d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$

$2a+3b=3,\ 3a+4b=5$

$\therefore a=3,\ b=-1$

$2c+3d=4,\ 3c+4d=7$

$\therefore c=5,\ d=-2$

따라서 $abcd=30$이다.

42. 답 6

$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\cdots\cdots$ ㉠

$A^2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=AA\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 15 \\ 11 \end{pmatrix}$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $A\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 15 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}$

$A=\begin{pmatrix} 4 & 15 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1}$

$=\begin{pmatrix} 4 & 15 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\therefore a=3,\ b=1, c=2,\ d=1$

$\therefore abcd=6$

43. 답 12

$a+b=a+c$ 에서 $b=c$ 이고,

$a+b=b+d$ 에서 $a=d$이다.

또, $b+d=12$ 이므로 $b=12-d=12-a$ 이다.

$\therefore A=\begin{pmatrix} a & 12-a \\ 12-a & a \end{pmatrix}$

$A^2=\begin{pmatrix} a^2+(12-a)^2 & 2a(12-a) \\ 2a(12-a) & (12-a)^2+a^2 \end{pmatrix}$

$A+(144-a)E=\begin{pmatrix} 144 & 12-a \\ 12-a & 144 \end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의해

$a^2+(12-a)^2=144,\ 2a(12-a)=12-a$

$a^2+(12-a)^2=144$에서 $a=0$ 또는 $a=12$

$2a(12-a)=12-a$에서 $a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=12$

따라서 구하는 a의 값은 12이다.

44. 답 21

$\begin{pmatrix} a & b \\ m & n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4a+2b & 2a+3b \\ 4m+2n & 2m+3n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} c & d \\ p & q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2c+3d & 2c+d \\ 2p+3q & 2p+q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$에서

$x=4a+2b,\ y=2a+3b, z=4c+2d,\ w=2c+3d$

$\therefore\ x+y+z+w=4+4+3\cdot 2+7=21$

45. 답 ⑤

ㄱ. $A*E=\frac{AE+EA}{2}=\frac{A+A}{2}=A$ $\therefore$ 참

ㄴ. $A*B=\frac{AB+BA}{2}=\frac{BA+AB}{2}=B*A$ $\therefore$ 참

ㄷ. $A*(B+C)=\frac{A(B+C)+(B+C)A}{2}$

$=\frac{AB+AC+BA+CA}{2}$

$(A*B)+(A*C)=\frac{AB+BA}{2}+\frac{AC+CA}{2}$

$=\frac{AB+AC+BA+CA}{2}$

$\therefore\ A*(B+C)=(A*B)+(A*C)$ $\therefore$ 참

46. 답 ②

$A+B=O$에서 $A^2+AB=O$

$AB=E$이므로 $A^2=-E,\ A^4=E$

또한 $A+B=O$에서 $AB+B^2=O$

$AB=E$이므로 $B^2=-E,\ B^4=E$

$\therefore A^2+B^2=-2E$

$A^3+B^3=AA^2+BB^2=-A-B=O$

$A^4+B^4=2E$

$A^5+B^5=A+B=O$

따라서 A^n+B^n은 4개씩 반복된다.

$\therefore \sum_{n=1}^{30}(A^n+B^n)$

$=\sum_{n=1}^{28}(A^n+B^n)+(A^{29}+B^{29})+(A^{30}+B^{30})$

$=O+O+(-2E)=-2E$

47. 답 102

행렬 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$에서 $A^3=-E$ 이므로 $A^6=E$ 이다.

따라서 다음 등식이 성립한다.

$A=A^7=A^{13}=\cdots=A^{97}$

$A^2=A^8=A^{14}=\cdots=A^{98}$

$A^3=A^9=A^{15}=\cdots=A^{99}$

$A^4=A^{10}=A^{16}=\cdots=A^{100}$

$A^5=A^{11}=A^{17}=\cdots=A^{95}$

$A^6=A^{12}=A^{18}=\cdots=A^{96}$

즉, $A^m=A^n$이 성립하려면 $|m-n|$의 값이 6의 배수가 되어야 한다.

따라서 $|m-n|$의 최댓값은 96, 최솟값은 6이다.

$\therefore\ p+q=96+6=102$

48. 답 ⑤

ㄱ. $A+B=E$이면 $B=E-A$이므로

$AB=A(E-A)=A-A^2$

$BA=(E-A)A=A-A^2$

$\therefore AB=BA$ (참)

ㄴ. $AB=BA$이므로 $A^2-B^2=(A+B)(A-B)$

따라서 $A^2-B^2=E(A-B)=O$이면 $A=B$이다. (참)

ㄷ. $A^2-B^2=(A+B)(A-B)$

$=E(A-B)=E$

이면 $A-B=E$이다.

$A+B=E,\ A-B=E$ 에서

$A=E,\ B=O$

$\therefore A^2+B^2=E$ (참)

49. 답 ③

ㄱ. $AB-A-B=O$에서

$(A-E)(B-E)=E$ 이므로

$(B-E)(A-E)=E,\ BA-A-B=O$

$\therefore\ BA=A+B=AB$ (참)

ㄴ. $AB=B$이면 $A^2B^2=A(AB)B=ABB=BB=B^2$ (참)

ㄷ. (반례) $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$이면

$A^2=B^2=E$ 이므로 $A^2B^2=E$이지만

$AB=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&1\end{pmatrix}\neq E$ (거짓)

50. 답 ④

$A=E-B$에서

$A^2=(E-B)^2=E-2B+B^2=O$

$\therefore\ B^2=2B-E$

$B^3=B\cdot B^2=B(2B-E)$

$\quad =2B^2-B=2(2B-E)-B=3B-2E$

$B^4=B\cdot B^3=B(3B-2E)$

$\quad =3B^2-2B=3(2B-E)-2B=4B-3E$

$\quad \vdots$

$\therefore\ B^{20}=20B-19E$

51. ⑤ 연역적 추론 능력

(증명) - 행렬$AB=A$의 양변의 왼쪽에 A를 곱하면 $A^2B=A^2$ 이므로 $A^2=O$이다.

ㄱ. (거짓) [반례] $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$이면 $AB=A$이고

$A^2=O$를 만족시킨다.

그러나 $BA=O\neq A$이므로 $AB\neq BA$이다.

ㄴ. (참) $(AB)^2=A^2=O$, $A^2B^2=O$ 이므로

$(AB)^2=A^2B^2$

ㄷ. (참) $AB=A$의 양변에 오른쪽에 B를 곱하면

$AB^2=AB=A$

$AB^3=AB^2B=AB=A$

$\vdots$

$AB^n=AB=A$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

$\therefore AB^{2010}A=A^2=O$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

52. 정답 ②

$A^2=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2+bc&ab+bd\\ac+cd&bc+d^2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}a^2+bc&ab+bd\\ac+cd&bc+d^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

두 행렬의 성분을 비교하면

$a^2+bc=1$, $bc+d^2=1$

$b(a+d)=2$, $c(a+d)=0$

(i) $a+d\neq 0$일 때: $b=0$, $c=0$이므로 $bc=0$

(ii) $a+d=0$일 때 : $d=-a$이므로

$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&-a\end{pmatrix}$

$A^2=E$이므로 $a^2+bc=1$, $a^2\geq 0$이므로 $bc\leq 1$

따라서 bc의 최댓값은 1이다.

53. 정답 37

$\begin{pmatrix}2&1\\0&-4\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}2&1\\0&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\0&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^2&2-2^2\\0&2^4\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}2&1\\0&-4\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}2^2&2-2^2\\0&2^4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\0&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^3&2^2-2^3+2^4\\0&-2^6\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}2&1\\0&-4\end{pmatrix}^4=\begin{pmatrix}2^3&2^2-2^3+2^4\\0&-2^6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\0&-4\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}2^4&2^3-2^4+2^5-2^6\\0&2^8\end{pmatrix}$

따라서 $(1,\ 2)$의 성분이 $2^4-2^5+2^6-2^7+2^8$

이 되는 행렬은 $\begin{pmatrix}2&1\\0&-4\end{pmatrix}^5$ 이고

그 때의 $(1,\ 1)$의 성분은 $2^5=32$ 이다.

$\therefore\ a+n=32+5=37$

54. 답 19

$A^2=\begin{pmatrix}3&3\\3&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&3\\3&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18&18\\18&18\end{pmatrix}=6A$

$\therefore A^n=6^{n-1}A$

$B^2=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=B$

$\therefore B^n=B$

한편 $AB=BA=O$이다.

$(A+AB+B)^{20}=A^{20}+B^{20}=6^{19}A+B$

$\therefore x=6^{19}$, $y=1$

$\therefore \log_6 xy=\log_6 6^{19}=19$

55. 정답 ②

㈎의 양쪽의 왼쪽에 $A-E$를 곱하면

$(A-E)(A^3+A^2+A+E)=O$

$A^4-E=O$, $A^4=E$

$\therefore\ A^7+A^6=A^3+A^2=-A-E$

따라서 A^7+A^6의 모든 성분의 합은 $-5-2=-7$이다.

56. 답 25

행렬의 거듭제곱

$A=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$

$A^2=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2\\-2&0\end{pmatrix}$

$A^3=\begin{pmatrix}0&2\\-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&2\\-2&-2\end{pmatrix}$

$A^4=\begin{pmatrix}-2&2\\-2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&0\\0&-4\end{pmatrix}=-4E$

따라서 $A^8=16E$이므로 $A^9=16A$에서 $p=9$, $q=16$

$\therefore p+q=9+16=25$

57. 답 512 행렬의 거듭제곱

$A^2=2A$에서 $A^3=A^2A=2A^2=2^2A$, $A^4=2^3A,\cdots$

이므로 $A^n=2^{n-1}A$

$B^2=2B$에서 같은 방법으로 $B^n=2^{n-1}B$

$$\begin{aligned}\therefore\ & A^{10}+A^9B+A^9B^2+\cdots+AB^9+B^{10}\\ &=2^9A+2^8AB+2^7A\cdot 2B+2^6A\cdot 2^2B+\cdots\\ &\qquad +A\cdot 2^8B+2^9B\\ &=2^9(A+B)+9\cdot 2^8AB\\ &=2^9\begin{pmatrix}3&2\\1&1\end{pmatrix}+9\cdot 2^8\begin{pmatrix}3&3\\0&0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

따라서 구하는 (2,1) 성분은 $2^9=512$이다.

58. 답 ⑤

행렬을 이용하면

$$\begin{pmatrix}800&900&500\\900&700&600\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&4\\3&5\\4&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8700&9200\\9000&8900\end{pmatrix}$$에서

갑 P; 8700원, 을 P:9200원, 갑 Q:9000원

을 Q:8900원으로 갑은 P에서 구입하는 것이 Q에서 구입하는 것보다 300원 저렴하며 을은 Q에서 구입하는 것이 P에서 구입하는 것보다 300원 저렴한다.

59. 정답 ②

2011년 말의 A공장의 직원 수를 a, B공장의 직원 수를 b라 하면

$a=0.8\times500+0.1\times500$

$b=0.2\times500+0.9\times500$

$$\therefore\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.8&0.1\\0.2&0.9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}500\\500\end{pmatrix}\quad\cdots㉠$$

2011년 말의 A공장의 직원 수를 a', B공장의 직원 수를 b'이라 하면

$a'=0.8\times a+0.1\times b$

$b'=0.2\times a+0.9\times b$

$$\begin{pmatrix}a'\\b'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.8&0.1\\0.2&0.9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\quad\cdots㉡$$

㉠, ㉡에서

$$\begin{pmatrix}a'\\b'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.8&0.1\\0.2&0.9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.8&0.1\\0.2&0.9\end{pmatrix}^2\begin{pmatrix}500\\500\end{pmatrix}=A^2C$$

따라서 구하는 것은 행렬 A^2C의 (2, 1)성분이다.

60. 정답 486

$\angle\mathrm{AOB}=\theta$라고 놓으면 $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}=2\sqrt{5}$ 이고

$\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{2}$ 이므로 제이코사인법칙에 의해서

$$\cos\theta=\frac{(2\sqrt{5})^2+(2\sqrt{5})^2-(2\sqrt{2})^2}{2\times2\sqrt{5}\times2\sqrt{5}}=\frac{4}{5}$$

$\sin\theta=\dfrac{3}{5}$ ($\because$ 두 점 A, B가 1사분면 위에 있으므로 θ는 예각)

그러므로 삼각형 AOB의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times2\sqrt{5}\times\sin\theta=6$이다.

$$MP=\begin{pmatrix}\sqrt{2}&-1\\1&\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1&x_2\\y_1&y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{2}x_1-y_1&\sqrt{2}x_2-y_2\\x_1+\sqrt{2}y_1&x_2+\sqrt{2}y_2\end{pmatrix}$$

이므로 원점 O로부터 행렬 P_1에 의해서 만들어지는 새로운 두 점까지의 거리는 각각 $\sqrt{3(x_1{}^2+y_1{}^2)}$과 $\sqrt{3(x_2{}^2+y_2{}^2)}$이다.

삼각형 AOB와 삼각형 $\mathrm{A_1OB_1}$은 길이의 비가 $1:\sqrt{3}$인 닮은 삼각형이므로 넓이의 비는 $1:3$이다.

따라서 삼각형 $\mathrm{A_4OB_4}$의 넓이는 $6\times3^4=486$이다.

61. 정답 ①

$AB=-B,\ AC=C$이므로

$A^nB=A^{n-1}AB=\boxed{-1}A^{n-1}B=\cdots$

$=\boxed{(-1)^n}B \quad\cdots\cdots㉠$

$A^nC=A^{n-1}AC=\boxed{1}A^{n-1}C=\cdots=\boxed{1}C \quad\cdots\cdots㉡$

이다. ㉠ +㉡에서

$2A^n=A^n(B+C)=(-1)^nB+C$

$$\therefore\ A^n=\boxed{\frac{(-1)^n}{2}}B+\boxed{\frac{1}{2}}C$$

62. 정답 7

$A^2=B^2=E,\ AB=-BA$ 이므로

$A^2B^2A=A,\ A^2B^2B=B,\ A^2B^2B^2=E$ 이고

$ABA=(-BA)A=-BA^2=-B$

$BAB=(-AB)B=-AB^2=-A$

$A^2BA=BA$

$A^2AB=AB$

따라서 집합 T의 원소는 7개다.

63. 답 ③

ㄱ. $X\in S,\ Y\in S$이므로

$X=\begin{pmatrix}a&b\\b&a\end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix}c&d\\d&c\end{pmatrix}$로 놓으면

$X+Y=\begin{pmatrix}a+c&b+d\\b+d&a+c\end{pmatrix}\in S$ (참)

ㄴ. $X^2=\begin{pmatrix}a&b\\b&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\b&a\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}a^2+b^2&2ab\\2ab&a^2+b^2\end{pmatrix}\in S$ (참)

ㄷ. [반례] $X=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$이면

$X^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\in S$이지만

$X\notin S$이다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

64. 답 ⑤

ㄱ. $A\in P,\ B\in P$인 두 행렬 $A,\ B$에 대하여

$A=\begin{pmatrix}p&q\\p&q\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}r&s\\r&s\end{pmatrix}$ $(p+q=1,\ r+s=1)$라 하면

$AB=\begin{pmatrix}p&q\\p&q\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r&s\\r&s\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}(p+q)r & (p+q)s \\ (p+q)r & (p+q)s\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}r & s \\ r & s\end{pmatrix}=B$$

즉, $A\in P,\ B\in P$이면 $AB=B$이다. (거짓)

ㄴ. $A\in P,\ B\in P$인 두 행렬 $A,\ B$에 대하여

$A^2=AA=A,\ B^2=BB=B,\ AB=B,\ BA=A$

이므로

$(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2$

$=A+B+A+B=2(A+B)$ (참)

ㄷ. $(A+B+C)^2=\{(A+B)+C\}^2$

$=(A+B)^2+(A+B)C+C(A+B)+C^2$

$=2(A+B)+AC+BC+CA+CB+C$

$=2(A+B)+C+C+A+B+C$

$=3(A+B+C)$

즉, $(A+CB+C)^2=3(A+B+C)$이므로

$(A+B+C)^3=3(A+B+C)^2=3^2(A+B+C)$

같은 방법으로 계속하면

$(A+B+C)^n=3^{n-1}(A+B+C)$

$\therefore\ (A+B+C)^{2011}=3^{2010}(A+B+C)$ (참)

65. ④

ㄱ. $A^2B^2=AABB=A(AB)B$

$=A(-BA)B=-ABAB$

$=-(AB)(AB)=-(AB)^2$ (거짓)

ㄴ. $AB=A$에서 양변의 왼쪽에 A를 곱하면

$A^2B=A^2$이고 $A^2=E$이므로 $B=E$

$\therefore\ BA=EA=A$ (참)

ㄷ. $A+B=E$에서 $B=E-A,\ A=E-B$

$AB=A(E-A)=A-A^2=O$이므로 $A^2=A$

$AB=(E-B)B=B-B^2=O$이므로 $B^2=B$

$\therefore\ A^3+B^3=A^2A+B^2B=AA+BB$

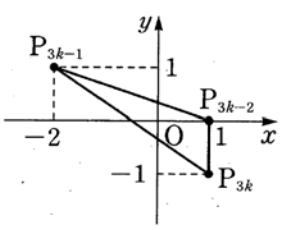
$=A+B=E$ (참)

66. 답 ② 행렬의 연산

[해설] $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -3\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix},$

$\begin{pmatrix}x_3\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -3\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},$

$\begin{pmatrix}x_4\\y_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -3\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$



이므로 점 $P_1,\ P_4,\ P_7,\ \cdots$의 좌표는 모두 $(1,0)$,

점 $P_2,\ P_5,\ P_8,\ \cdots$의 좌표는 모두 $(-2,1)$,

점 $P_3,\ P_6,\ P_9,\cdots$의 좌표는 모두 $(1,-1)$이다.

따라서 $S(1)+S(2)+S(3)=\triangle P_1P_2P_3=\dfrac{3}{2}$,

$S(4)+S(5)+S(6)=\triangle P_4P_5P_6=\dfrac{3}{2},\ \cdots$이므로

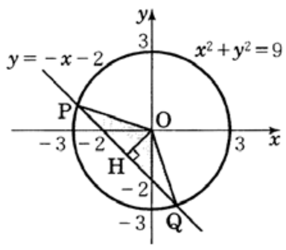
$S(1)+S(2)+S(3)+\cdots+S(2010)=\dfrac{3}{2}\times\dfrac{2010}{3}=1005$

67. 정답 ⑤

$(x^2+y^2)A-(x+y)E=B$에서

$$\begin{pmatrix}2(x^2+y^2)-(x+y) & x^2+y^2\\ x^2+y^2 & -(x+y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20 & 9\\ 9 & 2\end{pmatrix}$$

$\therefore\ x^2+y^2=9,\ x+y=-2$



이때, 두 점 P, Q는 원 $x^2+y^2=9$와 직선 $x+y=-2$의 교점이므로 오른쪽 그림에서 $\overline{\mathrm{OH}}=\dfrac{|0+0+0|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}$

$\overline{\mathrm{OP}}=3$

$\therefore\ \overline{\mathrm{PH}}=\sqrt{9-2}=\sqrt{7}$

$\therefore\ \triangle\mathrm{OPQ}=\dfrac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{PQ}}\cdot\overline{\mathrm{OH}}=\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{7}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{14}$

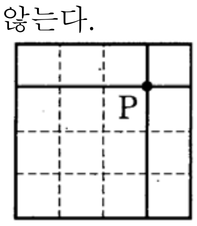
68. 답 ⑤

ㄱ. 정사각형의 넓이가 4이므로 $a+b+c+d=4$

만약 단위행렬이 된다면 $a+b+c+d=2$가 되어 모순이다.

ㄴ. 네 직사각형의 넓이의 비는 $a:b=c:d$와 같으므로 $ad-bc=0$

이 되어 A는 항상 역행렬이 존재하지 않는다. ∴참



ㄷ. $A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$

ㄴ에 의해 $A^2=(a+d)A$

이 때, 그림과 같이 $a=d=\dfrac{3}{4}$인 점 P가 존재한다. ∴참

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

69. ③

$S=\left\{\begin{pmatrix}a & x\\ x & b\end{pmatrix}\,\middle|\, a,\ b,\ x\text{는 상수}\right\},T=\left\{\begin{pmatrix}0 & y\\ -y & 0\end{pmatrix}\,\middle|\, y\text{는 상수}\right\}$

ㄱ. $S\cap T=\left\{\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\}$이므로 집합 $S\cap T$의 원소는 1개 뿐이다. (∴ 참)

ㄴ. $X=\begin{pmatrix}0 & a\\ -a & 0\end{pmatrix}$으로 놓으면

$X^2=\begin{pmatrix}0 & a\\ -a & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & a\\ -a & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-a^2 & 0\\ 0 & -a^2\end{pmatrix}\in S$ (∴ 참)

ㄷ. [반례] $X=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$일 때,

$XY=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\notin T$ (∴ 거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

70. 정답 ⑤

ㄱ. (참) $X=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$이라고 하면

$AX=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -6 & -10 \end{pmatrix}$

$XA=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -6 & -10 \end{pmatrix}$

이므로 $AX=XA$이다.

$\therefore \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \in M$

ㄴ. (참) $A(XY)=(AX)Y=(XA)Y$

$=X(AY)=X(YA)$

$=(XY)A$

$\therefore XY \in M$

ㄷ. (참) $AX=YA=AY$에서

$AX-AY=O,\ A(X-Y)=O$

양변의 왼쪽에 행렬 A의 역행렬을 A^{-1}를 곱하면

$A^{-1}A(X-Y)=O$이므로 $X-Y=O$이다.

$\therefore X=Y$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

71. 답 ③

$f(1)=3$이고, 함수 f는 일대일 대응이므로

$\begin{cases} f(2)=1 \\ f(3)=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} f(2)=2 \\ f(3)=1 \end{cases}$

즉, $A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f(1) \\ f(2) \\ f(3) \end{pmatrix}$을 만족시키는 행렬 A는 각 행에 있는 3개의 성분 중 하나만 1이고 나머지는 0이므로

$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 또는 $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(i) $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 일 때, $A^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

이므로 $A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$을 만족시키는 최소의 자연수 n은 3이다.

(ii) $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 일 때, $A^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

이므로 $A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$을 만족시키는 최소의 자연수 2이다. (모순)

(i), (ii)에서 구하는 행렬 $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 이므로

$A^2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

1. 정답 ③

$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

따라서 구하는 합은 11이다.

2. ⑤

$AX=B \qquad \therefore X=A^{-1}B$

$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$에서 $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$\therefore X=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

따라서, 행렬 X의 모든 성분의 합은 2이다.

3. 정답 ④

$A^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$

$A^{-1}B=\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 $A^{-1}B$의 모든 성분의 합은 7이다.

4. 답 ③

행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$에서 $A^{-1}=-\begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

$\therefore (E-A)A^{-1}=A^{-1}-E$

$=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$

5. 답 ②

$AB=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=E$이므로 $B^{-1}=A$이다.

$\therefore A+B^{-1}=2A=2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$

6. 답 ② 계산 능력-행렬

[해설]$A^2+A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1}$

$=\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 13 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$

7. 정답 ④

$AB^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

따라서 구하는 합은 2이다.

8. 정답 ⑤

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}A^{-1}$에서 $A^2=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

$\therefore A^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

9. 답 ③

$A(A^{-1}+B^{-1})B=AA^{-1}B+AB^{-1}B=B+A$

$=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

10. 정답 ④

발견적 추론 능력(추측) - 행렬

$(ABA^{-1})^5 = ABA^{-1}ABA^{-1}ABA^{-1}ABA^{-1}ABA^{-1} = AB^5A^{-1}$

이 때, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ 이고

$B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 2B$ 에서 $B^5 = 16B = \begin{pmatrix} 32 & 0 \\ 16 & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore\ (ABA^{-1})^5 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 32 & 0 \\ 16 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 & -80 \\ 48 & -48 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 $(ABA^{-1})^5$ 의 (1, 1) 성분은 80 이다.

11. 정답 ④

$A^{-1}BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$에서 $B = A\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}A^{-1}$이므로

$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 B의 모든 성분의 합은 6이다.

12. 답 ⑤

$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$에서 $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$이므로

$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

따라서, 행렬 X의 모든 성분의 합은 5이다.

13. 답 ①

[해설] $AX = BA$에서

$X = A^{-1}BA$

$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 X의 모든 성분의 합은

$5 + (-8) + 2 + (-3) = -4$

14. 답 ③

[해설] $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$이므로

$\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -7 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\therefore\ x = 1,\ y = 2$

$\therefore\ x + y = 1 + 2 = 3$

15. 답 ①

[출제의도] 역행렬을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$B^{-1}A = (A^{-1}B)^{-1}$이므로 모든 성분의 합은 -1

16. 정답 ④

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$이므로

$A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$

17. 정답 ③

$A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 2E$에서

$A = 2E\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = 2\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

따라서, 행렬 A의 모든 성분의 합은 0이다.

18. 정답 ①

계산능력 - 행렬

$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ 이므로

$B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

따라서, B 의 역행렬의 모든 성분의 합은 1 이다.

19. 정답 ①

$AX - BX = (A - B)X$이므로

$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$

$\therefore\ X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$

20. 정답 22

21. [출제의도] 행렬의 연산 이해하기

$A^{-1}(2A + B) = 2E + A^{-1}B$

$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

$\therefore$ 모든 성분의 합은 $7 + 6 + 3 + 6 = 22$

21. 정답 6

$B^{-1}A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$

$B^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}A$

$= \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$

$B = (B^{-1})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{11}\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$\therefore A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \dfrac{1}{11}\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$= \dfrac{1}{11}\begin{pmatrix} 18 & 15 \\ 10 & 23 \end{pmatrix}$

따라서 $A + B$의 모든 성분의 합은 6이다.

22. 정답 7

$A(B + E) = 2E$ 에서 $B + E = 2A^{-1}$이므로

$(B+E)A=2A^{-1}A=2E$

$BA+A=2E$

$A=2E-BA=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&-1\\-3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\3&1\end{pmatrix}$

따라서 구하는 성분의 합은 7이다.

23. 답 ④

$A^n=A^{-1}$ 의 양변에 행렬 A를 곱하면 $A^{n+1}=E$

$A^2=\begin{pmatrix}-1&1\\-3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1\\-3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&1\\-3&1\end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}-2&1\\-3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1\\-1&2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}=-E$

$\therefore A^6=E$

따라서 구하는 자연수 n의 최솟값은 5이다.

24. 정답 124

$A=2A^{-1}$에서 $A^2=2E$

$\therefore A^2+A^4+A^6+A^8+A^{10}$

$=2E+4E+8E+16E+32E$

$=62E$

따라서 구하는 모든 성분의 합은 $62\cdot 2=124$이다.

25. 정답 ④

[출제의도] 행렬의 연산을 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}$이다. $AB+A^{-1}=E$에서

$AB=E-A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&-1\end{pmatrix}$

따라서 $B=A^{-1}\begin{pmatrix}0&1\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&2\\2&-3\end{pmatrix}$

$\therefore\ a=2$

26. 정답 12

$A(2A-E)=2E$이므로 $(2A-E)^{-1}=\dfrac{1}{2}A$이다.

따라서 모든 성분의 합은 $\dfrac{1}{2}\cdot 24=12$

27. 정답 ①

$A=A^{-1}$ 이므로 $A^2=E$ 이다.

$A^2=\begin{pmatrix}a&-1\\b&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&-1\\b&-2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}a^2-b&-a+2\\ab-2b&-b+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

$a^2-b=1,\ -a+2=0$

$ab-2b=0,\ -b+4=1$

$\therefore\ a=2,\ b=3$

$\therefore\ A=\begin{pmatrix}2&-1\\3&-2\end{pmatrix}$

$A-xE=\begin{pmatrix}2-x&-1\\3&-2-x\end{pmatrix}$가 역행렬을 갖지 않으므로

$(2-x)(-2-x)+3=x^2-1=0$

$\therefore\ x=1\ (\because x>0\ )$

28. 답 ①

[해설] $A=\begin{pmatrix}a+\sqrt{2}&2a+\sqrt{2}\\b&\dfrac{\sqrt{2}}{2}a\end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않으므로

$(a+\sqrt{2})\dfrac{\sqrt{2}}{2}a-b(2a+\sqrt{2})=0$

$\dfrac{\sqrt{2}}{2}a^2+a-2ab-\sqrt{2}b=0$

$a(1-2b)=0,\ a^2-2b=0$

이때, a, b는 양의 유리수이므로 $b=\dfrac{1}{2}$, $a=1$이다.

$\therefore ab=\dfrac{1}{2}$

29. 답 ④

$A^2-A+E=O$이므로 $A^2=A-E$

$A^2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}-A\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

$(A-E)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}-A\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}-A\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$A^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$A^{-1}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$라 하면

$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b\\c+d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$\therefore\ a+b+c+d=0+1=1$

따라서 행렬 A^{-1}의 모든 성분의 합은 1이다.

30. 정답 ①

$A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ 이므로

$\therefore\ A\begin{pmatrix}1&6\\2&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&0\\8&0\end{pmatrix}$

$A=\begin{pmatrix}6&0\\8&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&6\\2&8\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-12&9\\-16&12\end{pmatrix}$

따라서 행렬 A의 모든 성분의 합은 -7이다.

31. 정답 ①

$A+A^{-1}=2E$에서 $A^2+E=2A$

$\therefore\ A^2=2A-E$

$A\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$에서 $A\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}=A^2\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$이므로

$A\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}=A^2\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=(2A-E)\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=2A\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$

$=2\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}-A\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

따라서 구하는 성분의 합은 3이다.

32. 답 ④

점 A의 좌표는 A(2, 2)이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=2-p$, $\overline{\mathrm{PR}}=\sqrt{8-p^2}-p$

$$\therefore \lim_{p\to 2-0}\frac{\overline{\mathrm{PR}}}{\overline{\mathrm{PQ}}}=\lim_{p\to 2-0}\frac{\sqrt{8-p^2}-p}{2-p}$$

$$=\lim_{p\to 2-0}\frac{8-2p^2}{(2-p)(\sqrt{8-p^2}+p)}$$

$$=\lim_{p\to 2-0}\frac{2(2+p)}{\sqrt{8-p^2}+p}=\frac{2(2+2)}{\sqrt{4}+2}=2$$

33. 답 ⑤

$A^2=O$에서 $A^2-E=-E$이므로

$(A-E)(A+E)=-E$

$(E-A)(A+E)=E$

$\therefore\ (E-A)^{-1}=A+E$

따라서 $p=1$, $q=1$이므로 $p+q=2$

34. 정답 ④

$\begin{pmatrix}1 & t\\-t & 1+t\end{pmatrix}^{-1}=\dfrac{1}{t^2+t+1}\begin{pmatrix}1+t & -t\\t & 1\end{pmatrix}$임므로

$\dfrac{1}{t^2+t+1}$의 최댓값은 t^2+t+1이 최소가 될 때이다.

$$\frac{1}{t^2+t+1}=\frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\le\frac{1}{\frac{3}{4}}=\frac{4}{3}$$

$$\therefore\frac{1}{t^2+t+1}\le\frac{4}{3}$$

따라서 2행 2열의 성분의 최댓값은 $\dfrac{4}{3}$이다.

35. 정답 ③

[출제의도] 역행렬을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$X=\sin\theta A+\cos\theta E$

$=\sin\theta\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}+\cos\theta\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$이므로

$X^{-1}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\-\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}=-\sin\theta\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}+\cos\theta\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$

$=-\sin\theta A+\cos\theta E$

36. 정답 ③

$(A^{-1}B)^{-1}=B^{-1}A=\begin{pmatrix}2 & -3\\-1 & 2\end{pmatrix}$

$(AB)(B^{-1}A)=\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -3\\-1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2\\0 & 1\end{pmatrix}$

$\therefore A^2=\begin{pmatrix}1 & -2\\0 & 1\end{pmatrix}$

따라서 행렬 A^2의 모든 성분의 합은 0이다.

37. 정답 ①

[출제의도] 행렬 사이의 관계를 통해 역행렬의 정의를 알고 있는가를 묻는 문제이다.

$AB^2C=AB=\begin{pmatrix}3 & -2\\-4 & 3\end{pmatrix}$, $CBA=\begin{pmatrix}1 & -2\\-1 & 3\end{pmatrix}$에서

$ABBC=\begin{pmatrix}3 & -2\\-4 & 3\end{pmatrix}BC=\begin{pmatrix}3 & -2\\-4 & 3\end{pmatrix}$이고 행렬 $\begin{pmatrix}3 & -2\\-4 & 3\end{pmatrix}$는 역행렬이 존재하므로 $BC=E=CB$이다.

$CBA=\begin{pmatrix}1 & -2\\-1 & 3\end{pmatrix}=A$이므로

$AB=\begin{pmatrix}3 & -2\\-4 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2\\-1 & 3\end{pmatrix}B$

$B=\begin{pmatrix}1 & 0\\-1 & 1\end{pmatrix}$이므로 성분의 합은 1이다.

38. ③

$A^2=O$이고, $A=2(B-E)$이므로

$A^2=4(B^2-2B+E)=O$

$\therefore\ B^2-2B+E=O$

$B(2E-B)=E$이므로 $B^{-1}=2E-B$이다.

$\therefore\ B+B^{-1}=B+2E-B=2E$

$(B+B^{-1})(B+B^{-1})=B^2+BB^{-1}+B^{-1}B+(B^{-1})^2=4E$

$\therefore\ B^2+(B^{-1})^2=2E$

$\{B^2+(B^{-1})^2\}(B+B^{-1})$

$=B^3+B+B^{-1}+(B^{-1})^3=4E$

$\therefore\ B^3+(B^{-1})^3=2E$

$\vdots$

$\therefore\ B^{2011}+(B^{-1})^{2011}=2E$

따라서 행렬 $B^{2011}+(B^{-1})^{2011}=2E$의 모든 성분의 합은 4이다.

39. 정답 8

$AB=\begin{pmatrix}\alpha & 1\\0 & \alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta & 1\\0 & \beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\beta & \alpha+\beta\\0 & \alpha\beta\end{pmatrix}$

근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+\beta=-10$, $\alpha\beta=-1$이므로

$AB=\begin{pmatrix}-1 & -10\\0 & -1\end{pmatrix}$

$(AB)^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & -10\\0 & -1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 10\\0 & -1\end{pmatrix}$

따라서 모든 성분의 합은 $-1+10-1=8$이다.

40. 정답 ②

[출제의도] 역행렬의 존재성 이해하기

$A-kE=\begin{pmatrix}2-k & 3\\3 & 4-k\end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지

않으려면 $(2-k)(4-k)-9=0$

$k^2-6k-1=0$ 의 두 근을 k_1, k_2 라 하면

$k_1+k_2=6$, $k_1k_2=-1$

$\therefore\ {k_1}^2+{k_2}^2=38$

41. 정답 ①

역행렬을 갖지 않으면 행렬식 D가 0이므로

$D=t(t^2+t)-2t(t+1)=t^3-t^2-2t=t(t-2)(t+1)=0$

$t=-1,\ 0,\ 2$ 이므로 모든 t의 합은 1이다.

42. 정답 ④

이해력 - 행렬

행렬 A에서 $a^2+b^2\neq 0$이므로 A의 역행렬이 존재한다. 이때, 행렬 AB의 역행렬이 존재하지 않으려면 B의 역행렬이 존재하지 않아야 한다.

따라서, $(a+1)^2-4b^2=0$이어야 한다.

$\therefore a+1=2b$ ($\because a>0,\quad b>0$)

$\therefore a-2b=-1$

43. 답 ①

[해설] $\begin{pmatrix} a+2 & 1 \\ b & a-3 \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하므로

$(a+2)(a-3)-b\neq 0$

$a^2-a-6-b\neq 0$

임의의 실수 a에 대하여 성립하려면

$D=(-1)^2-4(-6-b)<0$

$\therefore b<-\dfrac{25}{4}$

따라서, 정수 b의 최댓값은 -7이다.

44. 답 ②

ㄱ. (거짓) [반례] $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$이면

$A\neq O$, $AB=O$이지만 $B\neq O$ 이다.

ㄴ. (참) $A-E$의 역행렬이 존재한다고 하면

$A^2-2A+E=O$에서 $(A-E)^2=O$

$(A-E)^{-1}(A-E)^2=O$에서 $A-E=O$이므로

$A-E$의 역행렬이 존재하지 않는다 따라서, 모순이다.

따라서, $A-E$의 역행렬이 존재하지 않는다.

ㄷ. (거짓) [반례] $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 이면

$B^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=E$ 이므로

$AB^2=B^2A$이지만

$AB=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$BA=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

이므로 $AB\neq BA$

45. 답 ⑤ 추론 능력(추측)-행렬

[해설] $X^{-1}=X$이므로 $X^2=E$이다.

$A\in S,\ B\in S$이므로 $A^2=E,\ B^2=E$

ㄱ. (참) $(AB)^{-1}=AB$이므로 $(AB)^2=E$

ㄴ. (참) $AB=(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}=BA$

ㄷ. (참) $A^2=E,\ B^2=E$에서 $A^2-B^2=O$

$A^2+AB-BA-B^2=O$ ($\because\ AB=BA$)

$(A-B)(A+B)=O$

$A-B$의 역행렬이 존재하므로

$(A-B)^{-1}(A-B)(A+B)=O$

$A+B=O\qquad \therefore\ A=-B$

46. 답 ④

ㄱ. (참) $(-E)^3=-E$이므로 $-E\in M$이다.

ㄴ. (거짓) $A\in M$이면 $A^3=-E$이다.

이때, $(-A)^3=-A^3=E\neq -E$이므로

$-A\notin M$이다.

ㄷ. (참) $AA^{-1}=E$이므로 $A^3=-E$에서

$E=(A^3)(A^{-1})^3=(-E)(A^{-1})^3$

$\therefore\ (A^{-1})^3=-E$

그러므로 $A^{-1}\in M$이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

47. 정답 ④

ㄱ. (반례) $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$이면

$AB=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2$

$=A^2+BA+B^2\neq A^2+B^2$ (거짓)

ㄴ. A^{-1}가 존재한다고 가정하면 $AB=O$에서 양변의 왼쪽에 A^{-1}를 곱하면 $A^{-1}AB=A^{-1}O$

즉, $B=O$가 되어 가정에 모순이므로 A의 역행렬은 존재하지 않는다. (참)

ㄷ. $A^2=A$에서 $A^2-A=O$이므로

$(A+4E)(A-5E)=-20E$

$\therefore\ (A+4E)^{-1}=-\dfrac{1}{20}(A-5E)$

따라서 $A+4E$는 역행렬을 갖는다. (참)

48. 정답 ④

ㄱ. $AB=B^2B=B^3,\qquad BA=BB^2=B^3$이므로

$AB=BA\ \ \therefore$ 참

ㄴ. A의 역행렬은 $2A$이므로 $A(2A)=E$

$\therefore\ 2A^2=E$

$\therefore\ B^4=(B^2)^2=A^2=\dfrac{1}{2}E\qquad \therefore$ 거짓

ㄷ. $AB=BA$이므로

$(AB)^4 = A^4B^4 = B^{12} = (B^4)^3 = \frac{1}{8}E$

$(AB)^4$의 모든 성분의 합은 $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$ $\quad\therefore$ 참

따라서, 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

49. 정답 ③

ㄱ. $B=A-E$ 이므로

$AB=A(A-E)=A^2-A=(A-E)A=BA$

$\therefore\ AB=BA$

$(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2=A^2+2AB+B^2$ $\therefore$ 참

ㄴ. $B=A-E$이므로

$B^2=(A-E)^2=A^2-2A+E=A-2A+E=-A+E=-B$

$\therefore\ B^2=-B$ $\qquad\therefore$ 거짓

ㄷ. ㄴ에서 $B^2=-B$이고 B의 역행렬이 존재하므로

$B^2B^{-1}=-BB^{-1}$ $\qquad\therefore\ B=-E$ $\qquad\therefore$참

따라서, 옳은 것은 ㄱ,ㄷ이다.

50. 정답 6

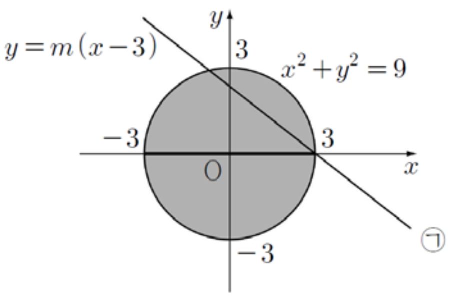
[출제의도] 역행렬을 이용하여 문제 해결하기

(가)에서 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$ 는 중심이 $(0,\ 0)$ 이고 반지름이 3 인 원의 내부 또는 경계선 위에 있다.

(나)에서 $\begin{pmatrix} m & y \\ 1 & x-3 \end{pmatrix}$는 역행렬이 존재하지 않으므로

$D=m(x-3)-y=0$ $\cdots\cdots$ ㉠ 이다. 그러므로 m 의 값에 관계없이 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$ 는 $(3,\ 0)$ 을 지나는 직선 위에 있다.

따라서 두 조건을 모두 만족시키는 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$ 가 나타내는 도형의 길이의 최댓값은 아래 그림과 같이 ㉠의 직선이 원의 중심을 지날 때, $m=0$ 이니 경우이므로 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$ 가 나타내는 도형의 길이의 최댓값은 6 이다.



51. [출제의도] 역행렬의 성질을 이해하여 역행렬의 존재성을 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $A(-A)=E$ 이므로 $A^{-1}=-A$ (참)

ㄴ. $A^3-E=-A-E$ 이고 $(-A-E)\left(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}E\right)=E$

$\therefore A^3-E$ 의 역행렬이 존재한다. (참)

ㄷ. $(A+kE)(A-kE)=A^2-k^2E=-(1+k^2)E$ 에서

$(A+kE)\left(-\frac{1}{1+k^2}A+\frac{k}{1+k^2}E\right)=E$

$\therefore A+kE$의 역행렬이 존재한다. (참)

52. 정답 ③

ㄱ. $A+B=E$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

㉠의 양변의 왼쪽에 A를 곱하여 정리하면

$A(A+B)=AE=A$

$\therefore\ A^2+AB=A$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠의 양변의 오른쪽에 A를 곱하여 정리하면

$(A+B)A=EA=A$

$\therefore\ A^2+BA=A$ $\quad\cdots\cdots$ ㉢

㉡, ㉢에서 $AB=BA$ $\qquad\therefore$ 참

ㄴ. $AB=A+B$

$AB-A-B=O,\ AB-A-B+E=E$

$(A-E)(B-E)=E\cdots\cdots$ ㉣

역행렬의 정의에 의해

$(B-E)(A-E)=E\cdots\cdots$ ㉤

㉣, ㉤에 의해

$(A-E)(B-E)=(B-E)(A-E)$

$AB-A-B+E=BA-A-B+E$

$\therefore\ AB=BA$ $\qquad\therefore$ 참

ㄷ. 【반례】 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$이면

$(A+E)(B-E)=O$

즉, $AB=A-B+E$이지만 $AB\neq BA$이다.

$\therefore$ 거짓

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

53. 정답 ⑤

ㄱ. [반례] $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$이면 $A^2=E$이므로 $A^4=E$ 이지만 $A\neq E,\ A\neq -E$ 이다. (거짓)

ㄴ. $((AB)^{-1})^{-1}=AB,$

$(A^{-1}B^{-1})^{-1}=(B^{-1})^{-1}(A^{-1})^{-1}=BA$ 이므로

$(AB)^{-1}=A^{-1}B^{-1}$이면 $AB=BA$ 이다. (참)

ㄷ. $2011=7\times 287+2$ 이므로

$A^{2011}=(A^7)^{287}\cdot A^2=A^2=E$

$A^7=(A^2)^3\cdot A=A=E$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

54. 답 ⑤

[해설]ㄱ. (참) A^2의 역행렬을 X라 하면

$A^2X=E,\ A(AX)=E$

따라서, A의 역행렬은 AX이다.

ㄴ. (참) A의 역행렬이 A^{-1}이므로 $A63$의 역행렬은 $(A^{-1})^3$이다. 따라서, A의 역행렬이 존재하면 A^3의 역행렬이 존재한다. 그러므로 위 명제의 대우인 'A^3의역행렬이 존재하지 않으면 A의역행렬도 존재하지 않는다.'도 성립한다.

ㄷ. (참) $A^2=O$이므로

$E-A^2=E,\ (E+A)(E-A)=E$

따라서, $E+A$의 역행렬은 $E-A$이다.

55. 정답 ⑤

ㄱ. $A^7 = A^3A^4 = A^3E = A^3 = E$

$A^4 = AA^3 = AE = A = E$

$\therefore\ A = E \quad \therefore$ 참

ㄴ. $A^2B = E$이면 $B = (A^2)^{-1}$

$A^3B = A^3(A^2)^{-1} = A$

$BA^3 = (A^2)^{-1}A^3 = A$

$\therefore\ A^3B = BA^3 \quad \therefore$ 참

ㄷ. $A^{-1}BA^{-1} = E$이면 $B = AEA = A^2$

$\therefore\ AB = AA^2 = A^3 = A^2A = BA \quad \therefore$ 참

따라서, ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

56. 정답 ⑤

$-1 < a < 2$인 실수 a에 대하여 행렬

$A = \begin{pmatrix} a+1 & 3 \\ b-1 & 2a \end{pmatrix}$가 역행렬을 갖지 않기 위해서는

$f(a) = 2a(a+1) - 3(b-1)$이라 하면

$f(a) = 2a^2 + 2a - 3b + 3$

$= 2\left(a + \frac{1}{2}\right)^2 - 3b + \frac{5}{2}$

이고 $f(a)$가 $-1 < a < 2$인 범위에서 방정식

$f(a) = 0$이 해를 가져야 한다.

(i) $\frac{D}{4} \geq 0$에서

$1^2 - 2(-3b+3) \geq 0 \qquad \therefore b \geq \frac{5}{6}$

(ii) $f(2) > 0$에서

$f(2) = 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 - 3b + 3 > 0 \qquad \therefore b < 5$

$\therefore \frac{5}{6} \leq b < 5$

$\therefore m = 1,\ M = 4$

$\therefore m + M = 5$

57. 답 ② 역행렬

$A^{-1} = \frac{1}{5a-2b}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2b & a \end{pmatrix}$

역행렬 A^{-1}의 성분이 모두 자연수이므로 $5a - 2b = 1$

$\therefore\ 5a = 2b + 1 \qquad \cdots ㉠$

이때, $2b+1$은 홀수이므로 a는 홀수이다.

$a = 1$일 때 $b = 2$, $a = 3$일 때 $b = 7$

$a > 3$일 때는 ㉠을 만족시키는 자연수 b가 집합 S의 원소가 아니다.

따라서 순서쌍 (a, b)는 $(1,2), (3,7)$로 2개이다.

58. 답 ③

ㄱ. (참) $AB = A(A^2) = (A^2)A = BA$

ㄴ. (참) $A^4 = (A^2)^2 = B^2 = 8A$이고 A의 역행렬이 존재하므로

$A^4A^{-1} = 8AA^{-1}$에서 $A^3 = 8E$

따라서 $AB = 8E$이므로 B의 역행렬은 $\frac{1}{8}A$이다.

ㄷ. (거짓) $A^3 = 8E$에서 $A^3 - 8E = O$

$(A - 2E)(A^2 + 2A + 4E) = O$

$A - 2E$의 역행렬을 양변의 왼쪽에 곱하면

$(A-2E)^{-1}(A-2E)(A^2+2A+4E) = O$

$\therefore\ (A^2 + 2A + 4E) = O$

따라서 $A^2 + 2A = 2A + B = -4E$이므로

$2A + B$의 역행렬은 $-\frac{1}{4}E$이다.

59. ①

㈎에서 점$P(a, b)$가 나타내는 점은 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 원의 내부이다.

㈏에서

$(a - \sin\theta)(b - \sin\theta) - (ab - \cos^2\theta) \neq 0$

$ab - (a+b)\sin\theta + \sin^2 + \cos^2 - ab \neq 0$

$\therefore\ (a+b)\sin\theta \neq 1$

i) $a + b = 0$일 때, $0 \neq 1$이므로 항상 성립한다

ii) $a + b \neq 0$이 때, $\sin\theta \neq \frac{1}{a+b}$

$-1 \leq \sin\theta \leq 1$이므로 임의의 θ에 대하여

$\sin\theta \neq \frac{1}{a+b}$이 성립하려면$\left|\frac{1}{a+b}\right| > 1$

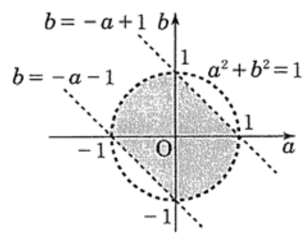
즉, $0 < |a+b| < 1$이어야 한다.

$\therefore\ -1 < a+b < 0$ 또는 $0 < a+b < 1$

i) ii)에 의하여 $-1 < a+b < 1$

$\therefore\ -a-1 < b < -a+1$

따라서 두 조건 ㈎㈏를 모두 만족시키는 점 $P(a, b)$가 나타내는 영역은 오른쪽 그림의 어두운 부분과 같다. 따라서 구하는 도형의 넓이는



$2 \cdot \frac{\pi}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{\pi}{2} + 1$

60. 답 ③

ㄱ. (참) $A^2 - AB = BA - B^2$이므로

$A^2 - AB - BA + B^2 = O$

$\therefore (A - B)^2 = O$

ㄴ. (참) $2AB - A + 2B = O$

$A(2B - E) + (2B - E) = -E$

$(A + E)(2B - E) = -E$

$(A + E)(E - 2B) = E$

이므로 행렬 $A + E$의 역행렬은 $E - 2B$이다.

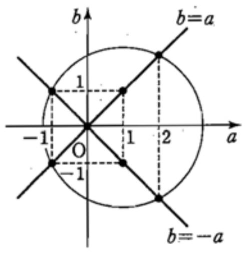
ㄷ.(거짓)[반례] $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$일 때, $A^nB^n = (AB)^n$이지만 $AB = O, BA = A$이다. 따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

61. 7

(나)에서 AB의 역행렬이 존재하지 않으므로 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & a+1 \end{pmatrix}$ 중 적어도 하나는 역행렬이 존재하지 않는다.

$\therefore\ a^2-b^2=0$ 또는 $a(a+1)+1=0$

이때 $a(a+1)+1=a^2+a+1\neq 0$이므로 구하는 정수 a, b는 $(a-1)^2+b^2\leq 5$, $(a+b)(a-b)=0$을 만족한다.



$a=-1$일 때, $b=\pm 1$ (2개)
$a=0$ 일 때, $b=0$ (1개)
$a=1$일 때, $b=\pm 1$ (2개)
$a=2$일 때, $b=\pm 2$ (2개)
따라서, 정수 a, b의 순서쌍(a, b)의 개수는 7이다.

62. 답 4

[해설] $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 2 & 4 \end{pmatrix}A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$에서 행렬 $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않으므로 행렬 $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않아야 한다.

즉, $4-2k=0$에서 $k=2$이므로

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 A의 모든 성분의 합은 4이다.

63. 정답 ⑤

[출제의도] 역행렬의 뜻을 알고 이를 이용하여 성질 추론하기

ㄱ. $k=0$일 때, $D=16\neq 0$이므로 A^{-1}이 존재한다. (참)

ㄴ. $k=1$일 때, A^{-1}이 존재하므로 $AB=O$의 양변에 A^{-1}을 곱하면 $B=O$이다. (참)

ㄷ. 두 실수 s, t에 대하여 $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2s & 2t \\ -s & -t \end{pmatrix}$일 때, $AB=O$이므로 영행렬이 아닌 행렬 B가 존재한다.

(단, $s\neq 0$ 또는 $t\neq 0$이다.) (참)

64. 정답 ①

[출제의도] 역행렬의 성질을 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$A^2-2A=A(A-2E)=E$ ⋯㉠

$A\left(\frac{1}{2}B\right)=E$ ⋯㉡

㉠, ㉡에서 $A^{-1}=A-2E=\frac{1}{2}B$

$\therefore\ B=2A-4E$

행렬 B의 모든 성분의 합은 $2\times 7-4\times 2=6$이다.

65. 답 ③

$PA_fP=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c & b \\ b & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}=A_f$

이므로 $a=c$이다.

$A_f^2=E$이므로

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2+b^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$b=0$, $a^2=1$

따라서 $a=c=1\,(\because a>0)$이므로 $f(x)=x^2+1$이 되어 최솟값은 1이다.

66. 정답 ②

[출제의도] 역행렬의 성질을 이용하여 수학내적 문제 해결하기

영역 $x^2+y^2<1$ 위의 임의의 두 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$에 대하여

$M+kE=\begin{pmatrix} x_1+k & y_1 \\ x_2 & y_2+k \end{pmatrix}$ 이고,

$M+kE$의 역행렬이 항상 존재해야 하므로

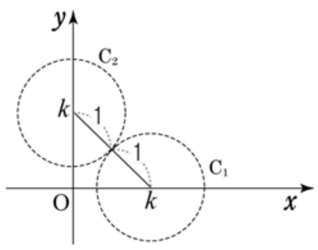
$\dfrac{y_1}{x_1+k}\neq\dfrac{y_2+k}{x_2}$ 이다.

따라서, 점 $\mathrm{C}(x_1+k, y_1)$, $\mathrm{D}(x_2, y_2+k)$ 라 하면

점 C는 $(x-k)^2+y^2<1$ 의 임의의 점이고 ⋯①

점 D는 $x^2+(y-k)^2<1$ 의 임의의 점이다. ⋯②

원점을 지나는 직선이 두 영역을 동시에 지나지 않아야 한다.



따라서 k의 최솟값은 $\sqrt{2}$ 이다.

67. 정답 ⑤

추론 능력(추측)–행렬

ㄱ. (거짓) [반례] $a=0$이면 $A+B=\begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2a \end{pmatrix}=O$이므로 $A+B$의 역행렬은 존재하지 않는다.

ㄴ. (참) 행렬 A의 역행렬이 존재하지 않으므로

$a^2-bc=0$

$AB=\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & -b \\ -c & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2-bc & 0 \\ 0 & a^2-bc \end{pmatrix}=O$

$BA=\begin{pmatrix} a & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2-bc & 0 \\ 0 & a^2-bc \end{pmatrix}=O$

$\therefore\ (AB)^3=A^3B^3$

ㄷ. (참) $A^2=\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+bc & 2ab \\ 2ac & a^2+bc \end{pmatrix}$

이때, $bc=a^2$이므로

$A^2=\begin{pmatrix} 2a^2 & 2ab \\ 2ac & 2a^2 \end{pmatrix}=2a\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}=2aA$

$\therefore\ A^3=A^2A=2aAA=2aA^2=(2a)^2A$

이때, $b^2+c^2 \neq 0$이므로 A는 영행렬이 아니다.

따라서 $A^3=O$이면 $a=0$이다.

$\therefore B^2=\begin{pmatrix} 0 & -b \\ -c & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -b \\ -c & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} bc & 0 \\ 0 & bc \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=O$

$\therefore\ B^3=O$

68. 답 ④

[해설] 행렬

ㄱ. [반례] $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$이면

$A^2=E$, $B^2=-E$이므로 $A^2+B^2=O$이다. (거짓)

ㄴ. $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에서

$A^2=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}$

이때, 행렬 A의 역행렬 A^{-1}가 존재하지 않으면 $ad=bc$이므로

$A^2=\begin{pmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+cd & ad+d^2 \end{pmatrix}=(a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$=(a+d)A$ (참)

ㄷ. $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\neq O$로 놓고, A^{-1}가 존재하지 않는다고 가정하면

$A^2=(a+d)A$가 성립한다. ($\because$ㄴ)

$A^3=(a+d)A^2=(a+d)^2A$이므로

$A^3+A=(a+d)^2A+A=\{(a+d)^2+1\}A=O$

그런데 a, d가 실수이므로 $(a+d)^2+1\neq 0$이 되어 $A=O$이다. (모순)

따라서 $A\neq O$, $A^3+A=O$이면 역행렬 A^{-1}가 존재한다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

69. 답 ④

ㄱ. $A^4B^4=A^2A^2B^2B^2=A^2EB^2=A^2B^2=E$ (참)

ㄴ. [반례] $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$이면

$A^2=B^2=E$이므로 $A^2B^2=E$이지만

$AB=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$이므로 $AB\neq BA$

ㄷ. $A^2B^2=AABB=E$이면 $A^{-1}=ABB$이므로

$(ABB)A=(AB)(BA)=E$이다.

$\therefore\ (AB)^{-1}=BA$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

70. 정답 ②

ㄱ. $AB=BA$의 양변에 왼쪽, 오른쪽에 B^{-1}를 곱하면

$B-1ABB^{-1}=B-1BAB^{-1}$

$\therefore\ B^{-1}A=AB^{-1}$ $\quad\therefore$ 참

ㄴ. $A^nB=A\cdots AB=A\cdots ABA=A\cdots BAA$

$=\cdots=BA\cdots A=BA^n$ $\quad\therefore$ 참

ㄷ. [반례] $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$이면

$AB=BA=O$이고 $A\neq O$, $B\neq O$이다. $\quad\therefore$ 거짓

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ 이다.

71. ②

$X^2-X+E=O$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

ㄱ. [반례] $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$은 ㉠을 만족시키는 행렬 이지만 $AB\neq E$ $\quad\therefore$ 거짓

ㄴ. $A^2-A+E=O$의 양변에 $A+E$를 곱하면

$(A+E)(A^2-A+E)=(A+E)O$

$\therefore A^3+E=O$ $\quad\therefore A^3=-E$

$B^2-B+E=O$에 대해서도 같은 방법으로 하면

$B^3=-E$ $\quad\therefore$ 참

ㄷ. [반례] $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ 은 ㉠을 만족시키지만

$A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B^2=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 이 되어 $A^{-1}\neq -B^2$ $\quad\therefore$ 거짓

따라서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

72. 정답 ③

[출제의도] 행렬의 연산의 성질을 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $(ABA)^2=(ABA)(ABA)=ABA^2BA$

$=AB^2A=A^2=E$ (참)

ㄴ. (반례) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$라 하면

$A^2=B^2=O$이지만 $AB\neq O$이다. (거짓)

ㄷ. $A^2+2A+E=O$, 즉 $A(-A-2E)=E$이므로 행렬 A는 역행렬을 갖는다.

$AB=A$의 양변에 A^{-1}을 곱하면 $B=E$ (참)

73. 정답 ⑤

[출제 의도] 행렬의 성질을 이해하고 추론하기

ㄱ. $(E+B)=A=2E$이므로 $A^{-1}=\dfrac{1}{2}(E+B)$ 이다. (참)

ㄴ. $(E+B)A=A(E+B)=2E$이므로 $AB=BA$ 이다.

따라서, $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$ 이다. (참)

ㄷ. $AB=BA$ 이므로 $2AB=2(2E-A)=-A+B$ 이다.

따라서, $A+B=4E$이다. (참)

74. **정답** ⑤

ㄱ. $ABA=E$이면 AB와 A는 역행렬 관계이다.

$(AB)A=A(AB)=A^2B$이므로

$A^{-1}(ABA)=A^{-1}(A^2B)$ $\quad\therefore BA=AB$(참)

ㄴ. $A^{-1}+B^{-1}=E$이면 $A+B=AB$이므로

$AB-A-B=O$, $(A-E)(B-E)=E$ 이다.

$A-E$와 $B-E$는 서로 역행렬 관계이므로

$(A-E)(B-E)=(B-E)(A-E)$ (참)

ㄷ. $AB=BA$이면 $B^{-1}A^{-1}=A^{-1}B^{-1}$이므로

$A^{-1}(B+B^{-1})A=A^{-1}BA+A^{-1}B^{-1}A$

$=A^{-1}BA+B^{-1}A^{-1}A=B+B^{-1}$ (참)

75. 정답 ③

[출제의도] 행렬의 성질 추론하기

ㄱ. $AB=O$ 이면

$A^2B^2=A(AB)B=AOB=O \quad \therefore$ 참

ㄴ. $A+B=E$ 에서 $A(A+B)=AE$이므로

$A^2+AB=A$ … ①

또 $A+B=E$ 에서 $(A+B)A=EA$ 이므로

$A^2+BA=A$ … ②

①, ② 에 의하여 $AB=BA=A-A^2 \quad \therefore$ 참

ㄷ. $A^2=O$ 이면 $A^2-E=-E$ 이므로

$(A-E)(A+E)=-E$

따라서 $A+E$ 의 역행렬이 존재한다. ∴ 거짓

76. 정답 ⑤

$AP=P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ … (1), $BP=P\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ … (2)라 하자.

ㄱ. $A=P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1}$, $B=P\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}P^{-1}$ 이므로 $a=c,\ b=d$ 이면 $A=B$이다. (참)

ㄴ. $AB=P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1}P\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}P^{-1}=P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}P^{-1}$

$=P\begin{pmatrix} ac & 0 \\ 0 & bd \end{pmatrix}P^{-1}$

$BA=P\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}P^{-1}P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1}=P\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1}$

$=P\begin{pmatrix} ac & 0 \\ 0 & bd \end{pmatrix}P^{-1}$

따라서 $AB=BA$ 이다. (참)

ㄷ. (1)−(2)하면 $(A-B)P=P\begin{pmatrix} a-c & 0 \\ 0 & b-d \end{pmatrix}$

$A-B$가 역행렬을 가지면 $\begin{pmatrix} a-c & 0 \\ 0 & b-d \end{pmatrix}$도 역행렬을 가지므로 행렬식 $D=(a-c)(b-d)\neq 0$ 이다.

따라서 $a\neq c,\ b\neq d$ 이다. (참)

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 참이므로 정답은 ⑤이다.

77. ⑤

$A^2+2A+4E=O$ …… ㉠

$(A-2E)(A^2+2A+4E)=O$에서 $A^3-8E=O$

$\therefore A^3=8E$

$B^2-B+E=O$ …… ㉡

$(B+E)(B^2-B+E)=O$에서 $B^3+E=O$

$\therefore B^3=-E$

ㄱ. ㉠−4×㉡에서 $A^2-4B^2+2A+4B=O$

$A^2-4B^2=-2A-4B$ (거짓)

ㄴ. $A^3B^3=-8E=B^3A^3$ (참)

ㄷ. $A^{-1}=\frac{1}{8}A^2$, $B^{-1}=-B^2$ 즉, A, B의 역행렬이 모두 존재하므로 AB의 역행렬도 존재한다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

78. 정답 ⑤

ㄱ. (반례) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$C=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$라고 하면

$A=E,\ ABC=E,\ ACB=E$ 이지만 $B\neq E$ 이다. (거짓)

ㄴ. $ABC=E$ 에서

$C=(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

$ACB=AB^{-1}A^{-1}B=E$

$B^{-1}A^{-1}=A^{-1}B^{-1}$

$(B^{-1}A^{-1})^{-1}=(A^{-1}B^{-1})^{-1}$

$AB=BA$ (참)

ㄷ. (i) $n=1$일 때 $ABC=E$ 이므로 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때 $A^nB^nC^n=E$가 성립한다고 가정하면

$n=k+1$ 일 때

$A^{n+1}B^{n+1}C^{n+1}$

$=A^nAB^nBC^nC=A^nB^nABC^nC$ (∵ ㄴ)

$=A^nB^nC^nABC(\because (AB)C=C(AB)=E)$

$=E$

따라서 $n=k+1$일 때도 성립하므로 모든 자연수 n에 대하여 $A^nB^nC^n=E$ 이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

79. 정답 ③ 연역적 추론능력(증명) - 행렬

임의의 두 이차정사각행렬 $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$에 대하여

$X+Y=\begin{pmatrix} a+p & b+q \\ c+r & d+s \end{pmatrix}$, $XY=\begin{pmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{pmatrix}$이므로

$S(X+Y)=(a+p)+(d+s)=(a+d)+(p+s)=S(X)+S(Y)$

$D(XY)=(ap+br)(cq+ds)-(aq+bx)(cp+dr)$

$=(ad-bc)(ps-qr)=D(X)D(Y)$

ㄱ. (참) $D(A)\neq 0$이면 A^{-1}이 존재하므로 $A^2=2A$의 양변에 A^{-1}을 곱하면 $A=2E$이다.

$\therefore S(A)=4$

ㄴ. (거짓) $D(AB)=D(A)=D(E)$에서

$D(A)D(B)=D(A)=1$이므로

$D(A)=D(B)=1$

[반례] $A=E,\ B=-E$일 때,

$D(A)=D(B)=1$이지만 $S(A)\neq S(B)$이다.

ㄷ. (참) $A^{-1}=\frac{1}{D(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ 에서

$S(A^{-1})=\frac{d+a}{D(A)}=\frac{S(A)}{D(A)}=1$이므로

$S(A+A^{-1})=S(A)+S(A^{-1})=2+1=3$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ 이다.

80. 정답 ⑤

ㄱ.(반례) $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{pmatrix}$이라 하면

$AB=\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}=O$

따라서 $AB=O$ 이지만 $A\neq O$이고$B\neq O$이다.

ㄴ. $A=\begin{pmatrix}a & b\\-b & a\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}x & y\\-y & x\end{pmatrix}$라 하면

$AB=\begin{pmatrix}a & b\\-b & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & y\\-y & x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax-by & ay+bx\\-ay-bx & ax-by\end{pmatrix}=O$

$ax-by=0, bx+ay=0$

$\therefore \quad \begin{pmatrix}a & -b\\b & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=O$

행렬 $\begin{pmatrix}a & -b\\b & a\end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하면

$x=y=0$이므로$B=O$

행렬 $\begin{pmatrix}a & -b\\b & a\end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않으면

$a^2+b^2=0$에서$a=b=0$이므로 $A=O$

따라서, $AB=O$ 이면 $A=O$또는 $B=O$이다

ㄷ. $A=\begin{pmatrix}a & b\\b & -a\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}x & y\\y & -x\end{pmatrix}$라 하면

$AB=\begin{pmatrix}a & b\\b & -a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & y\\y & -x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax+by & ay-bx\\-ay+bx & ax+by\end{pmatrix}=O$

$ax+by=0, bx=ay=0$

$\therefore \quad \begin{pmatrix}a & b\\b & -a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=O$

행렬 $\begin{pmatrix}a & b\\b & -a\end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하면

$x=y=0$이므로$B=O$

행렬 $\begin{pmatrix}a & b\\b & -a\end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않으면

$a^2+b^2=0$에서$a=b=0$이므로 $A=O$

따라서, $AB=O$ 이면 $A=O$또는 $B=O$이다

81. 정답 ③

행렬 $\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하려면

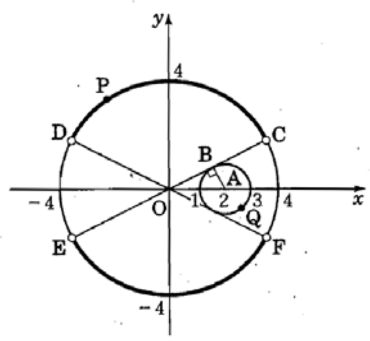
$ad-bc\neq 0$, $ad\neq bc$……㉠

i) $a=0$일 때

$b=4$ 또는 $b=-4$이고, 항상 $c\neq 0$이므로 ㉠은 성립한다.

ii) $a\neq 0$일 때

㉠은 $\dfrac{b}{a}\neq\dfrac{d}{c}$이므로 직선 OP의 기울기와 직선 OQ의 기울기가 같지 않아야 한다. 즉, 세 점 O, P, Q가 한 직선 위에 있지 않아야 한다.



따라서 점 P가 나타내는 부분은 그림에서 부채꼴 OCD의 호와 부채꼴 OEF의 호이다.

직각삼각형 OAB에서 $\overline{OA}=2$, $\overline{AB}=1$이므로

$\angle AOB=\dfrac{\pi}{6}, \angle COD=\dfrac{2}{3}\pi$

구하는 도형의 길이는 부채꼴 OCD의 호의 길이의 2배이므로

$2\times 4\times\dfrac{2}{3}\pi=\dfrac{16}{3}\pi$

82. 답 ⑤

[해설] 행렬M의 역행렬이 존재하지 않기 위해서는

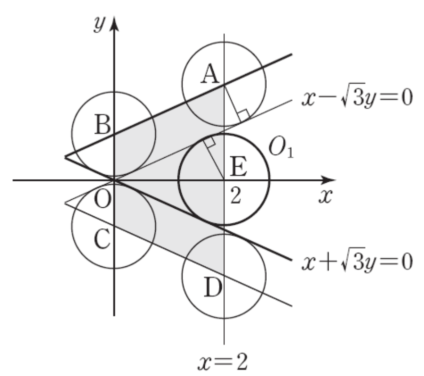
$ad-bc=0$ 즉, $\dfrac{b}{a}=\dfrac{d}{c}$ 이다.

이 때, $\dfrac{b}{a}$ 는 직선 OP의 기울기, $\dfrac{d}{c}$ 는 직선 OQ의 기울기이므로 점 P에 대하여

(직선 OP의 기울기)=(직선 OQ의 기울기)인 점 Q가 존재해야 한다.

O_1 에 접하고 원점을 지나는 접선의 방정식은

$x\pm\sqrt{3}y=0$ 이므로 원 O_2 는 두 접선과 만나야 한다.



위의 그림에서 $0\leq m\leq 2$ 일 때, 원 O_2 의 중심 $(m,\ n)$ 이 나타내는 영역은 등변사다리꼴 $ABCD$의 내부 및 경계이다. 점 $A(2,\ n)$에서 직선 $x-\sqrt{3}y=0$에 이르는 거리가 1이므로

$\dfrac{|2-\sqrt{3}n|}{\sqrt{1+3}}=1$ 에서 $n=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$ 이고, 점 E는 원 O_1 의 중심이므로

$\overline{OB}=\dfrac{1}{2}\overline{AE}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ 이다. 따라서 등변사다리꼴 $ABCD$의 넓이는

$\left\{\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}+\dfrac{4}{\sqrt{3}}\right)\times 2\times\dfrac{1}{2}\right\}\times 2=\dfrac{12}{\sqrt{3}}=4\sqrt{3}$

83. 정답 ③

$A=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$ $(a>0)$라 하면 $AP=PA$이므로

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -b & a \\ -d & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c & d \\ -a & -b \end{pmatrix}$

$\therefore a=d,\ b=-c$

$\therefore M=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle|\ a, b$는 실수, $a>0\right\}$

ㄱ. $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$이므로 $A \in M$ (참)

ㄴ. (반례) $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$이라 하면

$AB=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \notin M$ (거짓)

ㄷ. $A=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$라 하면 $a>0$이므로 $a^2+b^2 \neq 0$이다.

따라서 A^{-1}는 존재한다.,

$A^{-1}=\frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, $\frac{a}{a^2+b^2}>0$이므로

$A^{-1} \in M$ (참)

84. 답 ③

ㄱ. $A^3=E$를 만족시키는 이차정사각행렬 A에 대하여

$S=\{A, A^2, E\}$

$A^{-1}=A^2$, $(A^{-1})^2=(A^2)^{-1}=A$

$(A^{-1})^3=(A^3)^{-1}=E$ 이므로

$T=\{A, A^2, E\}$

$\therefore S=T$ (참)

ㄴ. $A^k=E$일 때, k 이하의 두 자연수 p, q에 대하여 $p>q$이고 $A^p=A^q$이라고 가정하면

$A^p(A^q)^{-1}=E \quad \therefore A^{p-q}=E$

이것은 $A^n=E$를 만족시키는 최소의 자연수가 k라는 조건에 모순이다.

따라서 S의 원소 $A, A^2, A^3, \cdots, A^{k-1}, E$는 모두 서로 다르므로 S의 원소의 개수는 k이다. (참)

ㄷ. $A^n=E$를 만족시키는 자연수 n의 최솟값이 k일 때 $A^k=E$이고

$S=\{A, A^2, A^3, \cdots, A^{k-1}, E\}$

$A^{-1}=A^{k-1}$

$(A^{-1})^2=(A^2)^{-1}=A^{k-2}$

$\cdots$

$(A^{-1})^{k-1}=(A^{k-1})^{-1}=A$

$(A^{-1})^k=(A^k)^{-1}=E$

이므로

$T=\{A, A^2, \cdots, A^{k-1}, E\}$

따라서 항상 $S=T$이다. (거짓)

85. ⑤

집합 T의 원소 $P=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$와 집합 S의 원소 $A=(a\ b)$에 대하여

ㄱ. $PA=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}(a\ b)$

$=\begin{pmatrix} pa & pb \\ qa & qb \end{pmatrix}$

이므로 $(pa)(qb)-(pb)(qa)=0$

이다. 즉 PA는 역행렬을 갖지 않는다. (참)

ㄴ. 집합 S의 원소 $B=(c\ d)$에 대하여

$PB=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}(c\ d)=\begin{pmatrix} pc & pd \\ qc & qd \end{pmatrix}$

이고 $PA=PB$이므로

$pa=pc,\ pb=pd$

$qa=qc,\ qb=qd\ \ (p \neq 0,\ \ q \neq 0)$

이다. 따라서

$a=c,\ b=d$

즉, $A=B$이다. (참)

ㄷ. $PA\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} pa & pb \\ qa & qb \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} pa+pb \\ qa+qb \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

이므로 $p(a+b)=1$, $q(a+b)=1$, $(a+b \neq 0)$

$p=\frac{1}{a+b}$, $q=\frac{1}{a+b}$

이다. 즉 T의 원소 $P=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{a+b} \\ \frac{1}{a+b} \end{pmatrix}$이 존재한다. (참0

따라서 ㄱ,ㄴ,ㄷ 모두 참이다.

86. 정답 51

$(kA)^{-1}=\frac{k}{100}A$ 이므로 $(kA)\left(\frac{k}{100}A\right)=E$

$\frac{k^2}{100}A^2=E \qquad \therefore A^2=\frac{100}{k^2}E$

$A^2=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & a \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 2 & -a-1 \\ -a-1 & a^2+1 \end{pmatrix}=\frac{100}{k^2}E$

$\therefore a=-1,\ \frac{100}{k^2}=2$

$\therefore a^2+k^2=51$

1. 정답 ⑤

$B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$에서 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=B^{-1}A\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdots$ ㉠

$A\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=B$ 에서 $B^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1}A^{-1}$이므로

㉠에서 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 17 \\ -12 \end{pmatrix}$

$\therefore \alpha+\beta=17+(-12)=5$

2. 답 ①

$\alpha \neq \beta$이고, $\alpha\beta \neq 0$에서 $\begin{pmatrix} k & 1 \\ 3 & k-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$은 $x=0,\ y=0$ 이외의

해를 가져야 하므로

$k(k-2)-3=0$

$k^2-2k-3=0$

$(k+1)(k-3)=0$

$k=-1$ 또는 $k=3$

(i) $k=-1$인 경우

$\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 3 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$에서 $-x+y=0$

$y=x$이므로 $\alpha\neq\beta$인 조건에 모순이다.

(ii) $k=3$인 경우

$\begin{pmatrix}3 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$에서 $3x+y=0$

$y=-3x$이므로 $\alpha\neq\beta$인 조건을 만족한다.

따라서, 연립방정식을 만족하는 $x=\alpha$, $y=\beta$에 대하여

$\frac{\beta}{\alpha}=-3$

3. 답 ③

[해설] 행렬 $\begin{pmatrix}a & b\\ b & -a\end{pmatrix}$에서 $-a^2-b^2\neq0(\because ab\neq0)$이므로 역행렬이 항상 존재한다. 따라서 집합 B에서

$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ b & -a\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\quad\therefore B=\left\{\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\right\}$

또 집합A에서

$\begin{pmatrix}2 & 1\\ a & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1 & 1\\ a & b-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$ …㉠

그런데 $A-B\neq\varnothing$이려면 ㉠이 $x=0$, $y=0$ 이외의 해를 가져야 하므로 $\begin{pmatrix}1 & 1\\ a & b-1\end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않아야 한다.

$b-1-a=0\quad\therefore a-b=-1$

4. 정답 17

$x=b$, $y=9$가 연립방정식을 만족하므로

$\begin{pmatrix}1 & -2\\ a & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b\\ 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}b-18\\ ab+18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$

즉, $b-18=0$, $ab+18=0$ 에서

$a=-1$, $b=18$

$\therefore\ a+b=17$

5. 답 ①

$A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p\\ q\end{pmatrix}$가 한 쌍의 해를 가질 때 A는 역행렬을 갖는다. 따라서 $A^2=-A$의 양변에 A^{-1}을 곱하여 정리하면

$A^2=\begin{pmatrix}2 & a\\ 1 & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & a\\ 1 & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+a & 2a+ab\\ 2+b & a+b^2\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

즉, $4+a=-1$, $2a+ab=0$, $2+b=0$, $a+b^2=-1$

따라서, $a=-5$, $b=-2$이므로 $a+b=-7$이다.

6. 답 ⑤

$\begin{pmatrix}2 & -3\\ 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\ 7\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 3 & 2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}-4\\ 7\end{pmatrix}$

$=\frac{1}{13}\begin{pmatrix}2 & 3\\ -3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4\\ 7\end{pmatrix}$

$=\frac{1}{13}\begin{pmatrix}13\\ 26\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$

따라서, 점 $(1,\ 2)$에서 $2x+y=2$까지 거리는

$\frac{|2\cdot1+2-2|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{2\sqrt5}{5}$

7. 정답 ④

이해력-행렬

$\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1-k & 3\\ 1 & -1-k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$ …㉠

이때, 위의 연립방정식은 $x=0,y=0$ 이외의 해를 가져야 하므로

행렬 $\begin{pmatrix}1-k & 3\\ 1 & -1-k\end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않아야 한다.

$\therefore\ (1-k)(-1-k)-3=0$

$k^2-4=0$

$\therefore\ k=\pm2$

(i) $k=-2$이면 ㉠에서 $\begin{pmatrix}3 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$이므로

$x+y=0$ …㉡

이때, ㉡을 만족시키는 자연수 x,y는 존재하지 않는다.

(ii) $k=2$이면 ㉠에서 $\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$이므로

$x-3y=0$ …㉢

이때, ㉢을 만족시키는 자연수 x,y는 무수히 많다.

따라서, k의 값은 2이다.

8. 답 ③

[해설] 연립방정식 $A^2\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ b\end{pmatrix}$의 해가 무수히 많으려면 행렬 A^2의 역행렬이 존재하지 않아야 한다.

따라서 $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -4 & a\end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않으려면 되므로

$2a-4=0\qquad\therefore\ a=2$

$A^2=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -4 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & -4\\ -16 & 8\end{pmatrix}$

즉, 연립방정식 $\begin{pmatrix}8 & -4\\ -16 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ b\end{pmatrix}$의 해가 무수히 많으므로

$\frac{8}{-16}=\frac{-4}{8}=\frac{1}{b}\ \therefore\ b=-2$

$\therefore a+b=2+(-2)=0$

9. 정답 4

[출제의도] 역행렬의 성질을 이용하여 연립방정식의 해를 판별할 수 있는가를 묻는 문제이다.

연립방정식 $\begin{pmatrix}a-3 & -2\\ -3 & b-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$이 $x=0$, $y=0$이외의 해를

갖기 위해서는 행렬 $\begin{pmatrix} a-3 & -2 \\ -3 & b-2 \end{pmatrix}$가 역행렬을 갖지 않아야 한다.

$(a-3)(b-2)-6=0$에서 $(a-3)(b-2)=6$

a, b는 자연수이므로

$a-3$	1	2	3	6
$b-2$	6	3	2	1

a, b의 값은 다음 표와 같다.

a	4	5	6	9
b	8	5	4	3

따라서 구하는 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 4이다.

10. 답 ④

[해설] 주어진 조건에서

$15p+15q=60$ $\quad\therefore\ p+q=4$ .... ㉠

$12p+20q=68$ $\quad\therefore\ 3p+5q=17$ .... ㉡

㉠, ㉡에서 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 17 \end{pmatrix}$이므로

$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 4 \\ 17 \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 17 \end{pmatrix}$

$\therefore\ a=2,\ b=5$ $\quad\therefore\ a+b=7$

11. 답 ①

$x=0,\ y=0$은 연립방정식 $\begin{pmatrix} a+1 & 1 \\ b & a-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$의 해가 되므로

주어진 방정식이 한 쌍의 해만 갖기 위해서는 $\begin{pmatrix} a+1 & 1 \\ b & a-2 \end{pmatrix}$의

역행렬이 존재해야 한다.

$(a+1)(a-2)-b\neq 0$ $\quad\cdots$ ㉠

a에 대한 이차방정식 ㉠은 실근을 갖지 않아야 하므로

$D=(-1)^2-4(-2-b)<0$

$\therefore\ b<-\frac{9}{4}$

따라서, 정수 b의 최댓값은 -3이다.

12. 정답 ③

x, y에 관한 연립방정식을 만들면

$\begin{cases} 0.6x+0.3y=45 \\ 0.5x+0.4y=42 \end{cases}$

$\begin{cases} 6x+3y=450 \\ 5x+4y=420 \end{cases}$

이것을 행렬을 이용하여 나타내면

$\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 450 \\ 420 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 450 \\ 420 \end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 450 \\ 420 \end{pmatrix}$

이다. 따라서 $a-b=9$

13. 답 13

A에서 B를 거쳐 C로 갈 때 1시간이 걸렸으므로

$\frac{x}{20}+\frac{y}{40}=1$ $\therefore 2x+y=40$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

C에서 B를 거쳐 A로 갈 때 $\frac{5}{4}$시간이 걸렸으므로

$\frac{x}{40}+\frac{y}{20}=\frac{5}{4}$ $\quad\therefore x+2y=50$ $\cdots\cdots$ ㉠

㉠, ㉡에서 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 40 \\ 50 \end{pmatrix}$

$\therefore\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 40 \\ 50 \end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 40 \\ 50 \end{pmatrix}$

$\therefore a=3,\ b=2$ $\quad\therefore a^2+b^2=13$

14. 정답 ⑤

[출제의도] 역행렬을 이용하여 연립방정식의 해 이해하기

$A^2-A+E=O$

$(A+E)(A-2E)+3E=O$

$(A+E)(A-2E)=-3E$

$(A+E)\left\{-\frac{1}{3}(A-2E)\right\}=E$ 이므로

$(A+E)^{-1}=-\frac{1}{3}(A-2E)$ 이다.

$(A+E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$에서

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=(A+E)^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}=-\frac{1}{3}(A-2E)\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

$=(-A+2E)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=-A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}+2E\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\alpha=-1,\ \beta=5$

$\therefore\ \alpha+\beta=4$

15. 답 ⑤ 연립일차방정식과 행렬

행렬 $\begin{pmatrix} a+1 & 2a+5 \\ 2 & a \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하면 연립방정식

$\begin{pmatrix} a+1 & 2a+5 \\ 2 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$의 해는 $x=0, y=0$뿐이므로

$X=\{(0,\ 0)\}$이다.

이때, $(0,\ 0)\not\in Y$이므로 $X\cap Y=\phi$이다.

따라서 행렬 $\begin{pmatrix} a+1 & 2a+5 \\ 2 & a \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않아야 하므로

$a(a+1)-2(2a+5)=0$

$a^2-3a-10=0,\quad (a+2)(a-5)=0$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=5$

(i) $a=-2$일 때,

$X=\left\{(x,\ y)\middle|\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

$=\{(x,\ y)\mid y=x\}$

$Y=\{(x,\ y)\mid y=x+1\}$

$\therefore X\cap Y=\phi$

(ii) $a=5$일 때,

$X=\left\{(x,\ y)\middle|\begin{pmatrix} 6 & 15 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

$=\left\{(x,\ y)\,|\,y=-\dfrac{2}{5}x\right\}$

$Y=\{(x,\ y)|y=x+1\}$

$\therefore X\cap Y\neq\phi$

따라서 구하는 실수 a의 값은 5이다.

16. 답 15

$A\cap B\neq\phi$이므로 연립방정식 $\begin{pmatrix} a & 4 \\ b & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$이 $x=0,\ y=0$ 이외의 해를 가져야 한다.

따라서 행렬 $\begin{pmatrix} a & 4 \\ b & 2 \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않아야 하므로 $2a-4b=0$에서 $a=2b$

이때, 집합 A의 원소를 좌표평면에 나타내면 직선 $ax+4y=0$이 된다.

따라서 $A\cap B\neq\phi$이려면 직선 $ax+4y=0$과 원 $(x-5)^2+y^2=9$가 만나야 하므로 원의 중심과 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이보다 작거나 같아야 한다.

즉, $\dfrac{|5a+0|}{\sqrt{a^2+16}}\leq 3$에서 $|5a|\leq 3\sqrt{a^2+16}$

위 식의 양변을 제곱하면 $25a^2\leq 9a^2+144$이므로

$a^2\leq\dfrac{144}{16}=9$

$\therefore -3\leq a\leq 3$

그런데, $a=2b$에서 $b=\dfrac{a}{2}$이므로 $a-b=\dfrac{a}{2}$

즉, $-\dfrac{3}{2}\leq\dfrac{a}{2}\leq\dfrac{3}{2}$이므로 $-\dfrac{3}{2}\leq a-b\leq\dfrac{3}{2}$

$\therefore -15\leq 10(a-b)\leq 15$

따라서 $10(a-b)$의 최댓값은 15이다.

17. 답 ②

$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}-kE\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1-k & 3 \\ 1 & 1-k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\cdots$ ㉠

이때, 연립방정식 ㉠이 $x^2+y^2=1$을 만족하는 해를 갖기 위해서는 $x=0, y=0$ 이외의 해를 가져야 한다.

따라서 행렬 $\begin{pmatrix} -1-k & 3 \\ 1 & 1-k \end{pmatrix}$의 역행렬은 존재하지 않아야 한다.

$(-1-k)(1-k)-3=k^2-4=0$

$\therefore k=2\ (\because k>0)$

18. 정답 45

$\begin{pmatrix} 7 & a \\ 3 & b+a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 6 & a \\ 3 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\therefore\ A=\left\{(x,y)\middle|\begin{pmatrix} 6 & a \\ 3 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\quad a,b\text{는 양수}\right\}$

$n(A\cap B)=1$이므로 집합 A의 원소는 무수히 많거나 오직 하나 $(0,0)$이다. 그러나 $(0,0)\notin B$이므로 연립방정식 $\begin{pmatrix} 6 & a \\ 3 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$은 $x=0,\ y=0$ 이외의 해를 가져야 한다. 따라서 행렬 $\begin{pmatrix} 6 & a \\ 3 & b \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않아야 하므로 $a=2b$

이때, 집합 A의 원소를 좌표평면 위에 나타내면 직선 $6x+ay=0$이고 $n(A\cap B)=1$이려면 직선 $6x+ay=0$과 원 $(x-3)^2+y^2=4$가 접해야 한다.

$\dfrac{|18|}{\sqrt{6^2+a^2}}=2,\ \sqrt{a^2+36}=9 \qquad \therefore\ a^2=45$

$\therefore\ 2ab=2a\cdot\dfrac{a}{2}=a^2=45$

19. 답 ①

$n(A\cap B)=2$ 이므로 연립방정식 $\begin{pmatrix} 6 & a \\ 3 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$이 $x=0,\ y=0$ 이외의 해를 가져야 한다.

즉, $\begin{pmatrix} 6 & a \\ 3 & b \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않아야 하므로

$6b=3a \qquad \therefore\ b=\dfrac{1}{2}a$

이 때 집합 A의 원소를 좌표평면에 나타내면 직선 $6x+ay=0$이 된다. 따라서 $n(A\cap B)=2$이려면 직선 $6x+ay=0$과 원 $(x-5)^2+y^2=9$가 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로

$\dfrac{|30|}{\sqrt{6^2+a^2}}<3,\ 10<\sqrt{a^2+36}$

양변을 제곱하면

$100<a^2+36,\ a^2>64$

$\therefore\ a<-8$ 또는 $a>8$

따라서 점 $(a,\,b)$를 좌표평면에 나타내면 ①과 같다.

20. 답 7

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$로 두자. 이때 두 연립방정식

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a+1 & b \\ c & d+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

이 모두 무수히 많은 해를 가지므로 계수를 비교하면

$c=-a$ …… ㉠ $\qquad d=-b$ …… ㉡

$a+1=-2c$ …… ㉢ $\qquad b=-2(d+1)$ …… ㉣

㉠, ㉢에서 $a=1,\ c=-1$

㉡, ㉣에서 $b=2,\ d=-2$

$\therefore\ A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\ \therefore\ (A-E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$

$=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 17 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\therefore\ p+q=\dfrac{1}{2}(17-3)=7$

21. 답 ⑤

$\begin{pmatrix} 2 & -\sin\theta \\ \sin\theta & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\cos\theta\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2+\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

이 연립방정식이 $x=y=0$ 이외의 해를 가지려면 행렬 $\begin{pmatrix} 2+\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않아야 한다.

따라서,

$$(2+\cos\theta)\cos\theta-(-\sin\theta)\sin\theta=0$$

$$2\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta=0$$

$2\cos\theta+1=0$ 이므로 $\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$

$0<\theta<\pi$ 에서 $\theta=\dfrac{2\pi}{3}$ 이므로

$$\therefore\ \sin\theta=\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

22. 정답 ②

수학 내적 문제 해결 능력 - 행렬

$\begin{pmatrix} 2+m & 1 \\ 8-m & 1+n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$에서

$\left[\begin{pmatrix} 2+m & 1 \\ 8-m & 1+n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 8-m & n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$x=0,\ y=0$ 이외의 해를 가지려면

$(1+m)n-(8-m)=0,\ mn+m+n-8=0$

$(m+1)(n+1)=9$

이때 $m,\ n$은 정수이므로

$m+1$	$n+1$	m	n	m^2+n^2
1	9	0	8	64
-1	-9	-2	-10	104
9	1	8	0	64
-9	-1	-10	-2	104
3	3	2	2	8
-3	-3	-4	-4	32

따라서 m^2+n^2의 최솟값은 $m=n=2$일 때 8이다.

23. 정답 ③

$\begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-b & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$에서 $\begin{pmatrix} a-k & 1-a \\ 1-b & b-k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

연립방정식 $\begin{pmatrix} a-k & 1-a \\ 1-b & b-k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$이 $xx=y=0$ 이외의 해를 가지려면

$(a-k)(b-k)-(1-a)(1-b)=0$

$ab-(a+b)k+k^2-1+(a+b)-ab=0$

$k^2-1-(a+b)(k-1)=0$

$(k-1)\{k+1-(a+b)\}=0$

$k=1$ 또는 $k=a+b-1$

$0<a<1,\ 0<b<1$이므로 $-1<a+b-1<1$

따라서 k의 최댓값은 1이다.

24. 정답 ③

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -k \\ k & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

이 $x=0,\ y=0$ 이외의 해를 가지므로 행렬 $\begin{pmatrix} 1 & -k \\ k & -4 \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않는다.

$D=-4+k^2=0$ 이므로 $k=\pm2$

따라서 모든 k의 값의 합은 0

25. 정답 ⑤

$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 6 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$를 정리하면

$\begin{pmatrix} a-3 & 1 \\ 6 & a+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$이고

$x=0,\ y=0$ 이외의 해를 가지려면 역행렬이 존재하지 않아야 하므로 $(a-3)(a+2)-6=0$이다.

$a^2-a-12=0$ 따라서 a의 값의 곱은 -12

26. 정답 ①

[출제의도] 연립방정식을 행렬을 이용해 문제해결하기

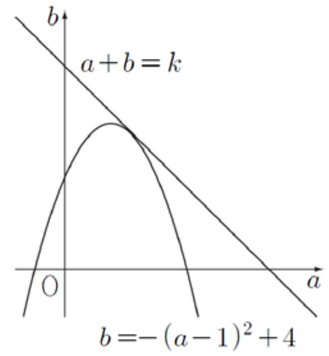
주어진 연립방정식이 $x=y=0$이외의 해를 가지므로

$D=(a-1)(1-a)-(b-4)=0$이다.

따라서, $-(a-1)^2=b-4$ …… ㉠이다.

이 때, $a+b=k$ …… ㉡이라 하면

$a+b$가 최대가 되는 경우는 아래 그림과 같이 직선 ㉡이 이차함수 ㉠의 그래프에 접하는 경우이다.



따라서, ㉡을 ㉠에 대입하여 정리한 a에 대한 이차방정식 $a^2-3a+k-3=0$에서

$D=9-4(k-3)=0$이므로 $k=\dfrac{21}{4}$이다.

27. 정답 50

[출제의도] 행렬을 이용해 실생활 문제해결하기

주어진 조건으로부터 $\begin{cases} a-0.04a+0.12c=c \\ b-0.12b+0.04a=d \end{cases}$

즉, $\begin{cases} 0.96a+0.12b=c \\ 0.04a+0.88b=d \end{cases}$ 이다.

연립방정식을 행렬을 이용하여 나타내면

$\dfrac{1}{25}\begin{pmatrix} 24 & 3 \\ 1 & 22 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$이므로 행렬 $A=\begin{pmatrix} 24 & 3 \\ 1 & 22 \end{pmatrix}$이다.

따라서, 행렬 A의 모든 성분의 합은 50이다.

28. 답 32

$4x+3y=70,\ 2x+4y=60$이므로

$\begin{pmatrix}4&3\\2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}70\\60\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&3\\2&4\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}70\\60\end{pmatrix}=\dfrac{1}{10}\begin{pmatrix}4&-3\\-2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}70\\60\end{pmatrix}$

$\therefore A=\dfrac{1}{10}\begin{pmatrix}4&-3\\-2&4\end{pmatrix}$

만들어진 제품의 전체 판매 가격의 합이 p(만 원)이므로

$p=120x+100y$

$(p)=(120\quad 100)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

$\therefore B=(120\quad 100)$

$BA=\dfrac{1}{10}(120\quad 100)\begin{pmatrix}4&-3\\-2&4\end{pmatrix}=(28\quad 4)$

$\therefore m=28, n=4$

$\therefore m+n=32$

29. 정답 16

주어진 표에서

$(1800+2400)x+(2\times1800+2400)y=51000$

$(1200+2400)x+(2\times1200+3000)y=48000$

$\therefore \begin{cases}7x+10y=85\\7x+9y=80\end{cases}$

$\begin{pmatrix}7&10\\7&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}80\\85\end{pmatrix}$이므로

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=-\dfrac{1}{7}\begin{pmatrix}9&-10\\-7&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}85\\80\end{pmatrix}$

$\therefore a+b=16$

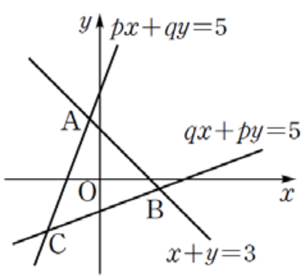
30. 정답 ⑤

연립방정식 $\begin{pmatrix}1&1\\p&q\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$의 해는

두 직선 $x+y=3$, $px+qy=5$의 교점의 좌표이고,

연립방정식 $\begin{pmatrix}1&1\\q&p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$의 해는

두 직선 $x+y=3$, $qx+py=5$의 교점의 좌표이다.



이때, 두 직선 $px+qy=5$, $qx+py=5$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 세 점 $\mathrm{A}(a, b)$, $\mathrm{B}(c, d)$, $\mathrm{C}(u, v)$를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

점 $\mathrm{O}(0, 0)$에서 $x+y-3=0$까지의 거리는 $\dfrac{|-3|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$이고, 점

$\mathrm{O}(0, 0)$에은 삼각형 ABC의 무게중심이므로

$\overline{\mathrm{CO}}=2\cdot\dfrac{3\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$

따라서 점 C의 좌표는 $(-3, -3)$이다.

즉, 연립방정식 $\begin{pmatrix}p&q\\q&p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}$의 해는 $x=-3$, $y=-3$이므로

$\begin{pmatrix}p&q\\q&p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}$에서

$-3(p+q)=5 \qquad \therefore p+q=-\dfrac{5}{3}$

31. ①

$\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$에서 $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}=\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}3&-2\\-2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$

응시자 A의 각 원점수는

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}3&-2\\-2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}45\\40\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11\\6\end{pmatrix}$

응시자 B의 각 원점수는

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}3&-2\\-2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}50\\50\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\10\end{pmatrix}$

응시자 C의 각 원점수는

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}3&-2\\-2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}45\\50\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\12\end{pmatrix}$

따라서 $a=11, b=10, c=7$이므로 $a>b>c$

32. [출제의도] 행렬과 연립방정식의 관계와 부등식의 영역을 이용할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\begin{pmatrix}4&-1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$에서 $\begin{pmatrix}4-k&-1\\1&2-k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$(4-k)(2-k)+1=0 \quad \therefore k=3$

따라서 $x-y=0$이므로 두 조건을 만족시키는 순서쌍 (α, β)의 개수는 21이다.

33. 정답 ①

(가)에서 직선 $y=ax+b$가 원 $x^2+y^2=1$과 만나므로 원의 중심

$(0,\ 0)$과 직선

$ax-y+b=0$ 사이의 거리가 1이하이다.

즉, $\dfrac{|b|}{\sqrt{a^2+1}}\le 1$에서 $|b|\le\sqrt{a^2+1}$

양변을 제곱하면

$b^2\le a^2+1$ .... ㉠

(나)에서 연립방정식 $\begin{pmatrix}a&b\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$이 $x=0$, $y=0$이외의 해를 가지

므로 행렬 $\begin{pmatrix}a&b\\1&2\end{pmatrix}$의 역행렬은 존재하지 않는다.

$2a-b=0$, $b=2a$ .... ㉡

㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면

$3a^2\le 1 \qquad \therefore -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\le a\le\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

따라서 점 $(a,\ b)$가 나타내는 도형은 직선

$b=2a$에서 $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\le a\le\dfrac{1}{\sqrt{3}}$인 부분이다.

34. 정답 ④

$\begin{pmatrix}4&3\\-2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$에서

$\begin{pmatrix}4-k&3\\-2&-1-k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$의 해가 $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$이외의 해를 가지므로

$(4-k)(-1-k)-3(-2)=0$

정리하면 $(k-1)(k-2)=0$

(ⅰ) $k=1$일 때, $\begin{pmatrix}3&3\\-2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$\therefore\ x+y=0$

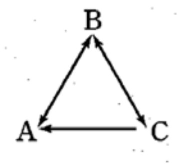
(ii) $k=2$일 때, $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\therefore\ 2x+3y=0$

따라서, 점$(x,\ y)$가 나타내는 도형을 좌표평면 위에 나타내면 ④번과 같다.

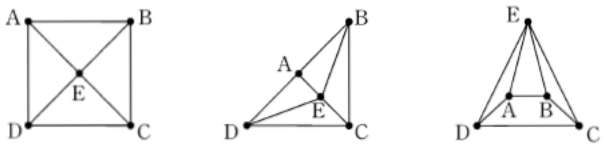
1. 정답 ③

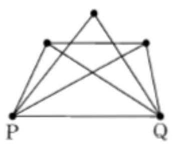
통행이 개선된 후 행렬로 표현된 연락망을 그림으로 표현하면 다음과 같다.



2. 정답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

그래프 ㄱ,ㄴ,ㄷ은 다음 그림과 같이 꼭짓점을 이동하고, 변을 줄이거나 늘리면 같은 모양으로 만들 수 있으므로 서로 연결 상태가 같은 그래프이다.





그래프 ㄹ의 꼭짓점 P, Q는 자신이 아닌 다른 꼭짓점 4개의 변으로 연결되어 있지만, 그래프 ㄱ, ㄴ,ㄷ에서는 이와 같은 꼭짓점이 E 하나뿐이므로 서로 연결 상태가 같지 않은 그래프이다.

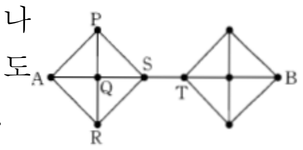
따라서 서로 연결 상태가 같은 그래프는 ㄱ,ㄴ,ㄷ이다.

3. 정답 ④

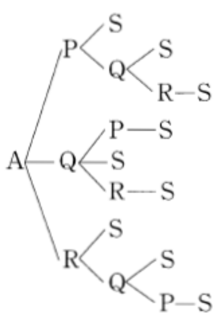
모든 꼭짓점을 연결하는 변이 존재할 때 그래프의 변의 개수가 최댓값을 가지므로 구하는 최댓값은

${}_8C_2=\dfrac{8\cdot 7}{2}=28$이다.

4. 정답 ④



꼭짓점 A에서 한 번 지난 꼭짓점은 지나지 않고 꼭짓점 S로 가는 경로를 수형도로 나타내면 다음과 같이 9가지이다.



또한, 두 꼭짓점 S, T를 연결하는 경로의 수는 1이고, 꼭짓점 T에서 한 번 지난 꼭짓점은 지나지 않고 꼭짓점 B로 가는 경로의 수는 9이다.

따라서 구하는 경로의 수는 $9\times1\times9=81$이다.

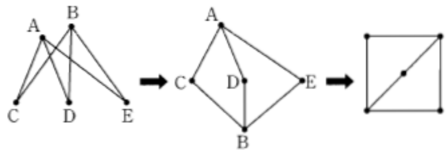
5. 정답 ⑤

주어진 그래프와 보기의 그래프들은 5개의 꼭짓점과 10개의 변을 가지고 있으며 모든 꼭짓점은 자신이 아닌 꼭짓점과 직접 연결하는 경로를 지니고 있다.

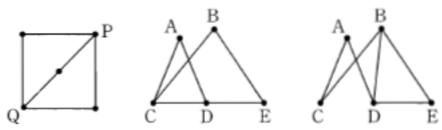
따라서 ㄱ,ㄴ,ㄷ의 그래프는 모두 주어진 그래프와 연결 상태가 같은 그래프이다.

6. 정답 ①

ㄱ. AE와 BD를 연결한 다음 꼭짓점 B를 이동하면 연결 상태가 같은 그래프가 된다.



ㄴ,ㄷ 주어진 그래프에서는 세 개의 변이 연결된 꼭짓점 P와 Q가 한 개의 변으로 연결되어 있지 않다. 하지만, CD와 DE를 연결한 그래프에서는 세 개의 변이 연결된 꼭짓점 C와 D가 한 개의 변으로 연결되어 있고, BD와 DE를 연결한 그래프에서는 세 개의 변이 연결된 꼭짓점 B와 D가 한 개의 변으로 연결되어 있다.



따라서 두 그래프의 연결 상태가 같게 하기 위해서 필요한 변을 옳게 짝지은 것은 ㄱ이다.

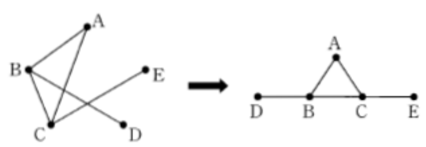
7. 정답 ④

그래프에서 두 꼭짓점이 변으로 연결되어 있으면 1을 성분으로 하고, 변으로 연결되어 있지 않으면 0을 성분으로 하는 행렬로부터 두 꼭짓점 사이의 관계를 표로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array}\begin{array}{c} A\ B\ C\ D\ E \\ \begin{pmatrix} 0&1&1&0&0 \\ 1&0&1&1&0 \\ 1&1&0&0&1 \\ 0&1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0 \end{pmatrix}\end{array}$$

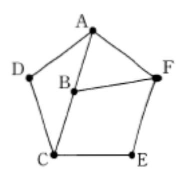
	A	B	C	D	E
A	0	1	1	0	0
B	1	0	1	1	0
C	1	1	0	0	1
D	0	1	0	0	0
E	0	0	1	0	0

따라서 주어진 행렬이 나타낼 수 있는 그래프를 그려 보면 다음과 같다.

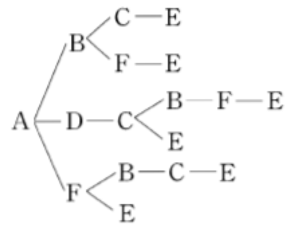


8. 정답 6

주어진 행렬은 그래프에서 두 꼭짓점이 변으로 연결되어 있으면 1을 성분으로 하고, 변으로 연결되어 있지 않으면 0을 성분으로 하므로 이를 만족시키도록 그래프를 그려 보면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 꼭짓점 A에서 한 번 지난 꼭짓점은 지나지 않고 꼭짓점 E로 가는 경로를 수형도로 나타내면 다음과 같다.



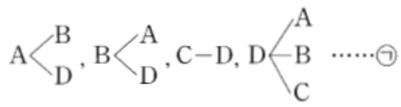
그러므로 구하는 모든 경로는 ABCE, ABFE, ADCBFE, ADCE, AFBCE, AFE 이다.

9. 정답 ②

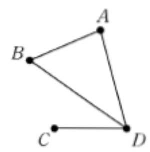
그래프 G_1의 변의 개수는 9이고, 그래프 G_2의 변의 개수는 10이다. 따라서 행렬 P의 모든 성분의 합은 18이고 행렬 Q의 모든 성분의 합은 20이므로 $P-Q$의 모든 성분의 합은 $18-20=-2$이다.

10. 정답 ②

꼭짓점이 A, B, C, D이고, 변의 집합이 {AB, AD, BD, CD}이므로 변으로 연결되는 꼭짓점을 나열하면



이때, ㉠을 만족시키는 그래프는 오른쪽 그림과 같이 나타낼 수 있다.



ㄱ. 그래프에서 변이 4개이므로 행렬의 모든 성분의 합은 8이 되어야 한다.

따라서 ㄱ은 그래프 G를 나타내는 행렬이 될 수 없다.

ㄴ. 위 그래프를 나타내는 행렬은 다음과 같다.

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} A & B & C & D \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

ㄷ. 그래프에서 점 D에 연결된 변이 3개이므로 행렬의 어느 한 행(열)의 성분의 합이 3인 경우가 있어야 하는데 ㄷ의 행렬에서는 없다. 따라서 ㄷ은 그래프 G를 나타내는 행렬이 될 수 없다.

따라서 그래프 G를 나타내는 행렬이 될 수 있는 것은 ㄴ이다.

11. 정답 ③

(i) 경로가 A−㈀−F−㈁−㈂−㈃−A인 경우

㈀에 들어갈 수 있는 꼭짓점은 B, C, D, E 중 하나이므로 4가지

㈀에 B가 들어갔다고 하면 ㈁−㈂−㈃에는

(C)−(D)−(E), (E)−(D)−(C)로 2가지

$\therefore 4\times2=8$

(ii) 경로가 A−㈀−㈁−F−㈂−㈃−A인 경우

㈀−㈁에는 (B)−(C),(C)−(D),(D)−(E),(E)−(B),(C)−(B), (D)−(C),(E)−(D),(B)−(E)로 8가지

㈀−㈁에 (B)−(C)가 들어갔다고 하면 ㈂−㈃에는 (D)−(E), (E)−(D)로 2가지

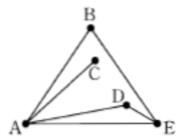
$\therefore 8\times2=16$

(iii) 경로가 A−㈀−㈁−㈂−F−㈃−A인 경우

(i)과 같이 8가지

따라서 구하는 경로의 수는 $8+16+8=32$이다.

12. 정답 ③



$$\begin{pmatrix} 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & d & 1 & e & f \\ g & h & i & j & k \\ l & 1 & m & n & o \\ p & 1 & q & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(i) $d=i=n=0$

(ii) 행렬에서 (i, j)성분과 (j, i)성분이 같아야 하므로

$a=o=p=0$, $e=f=h=1$

$\therefore e+f+h=3$ (ㄱ.참)

(iii) 그래프에서 점 A에 연결된 선분이 4개이므로

$b=m=q=1$, $g=j=k=1$이다.

$\therefore g=1$ (ㄴ. 거짓)

(iv) 그래프에서 변의 개수가 6개이므로 행렬의 선분의 합은 12이다.

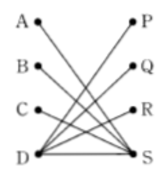
따라서 $c=l=0$이다.

$\therefore c\times l=0$ (ㄷ. 참)

따라서 옳은 것은 ㄱ,ㄷ이다.

13. 정답 3

주어진 조건에서 선수 D와 S는 상대 학교의 모든 선수와 경기를 해야 하므로 이를 만족하도록 그래프를 그려 보면 오른쪽 그림과 같다.



이제 남은 경기는 선수 B는 1경기, 선수 C는 2경기, 선수 P, Q, R는 각각 1경기씩이다.

따라서 선수 B가 상대 선수를 정하는 방법의 수는 3가지이고, 남은 상대 선수는 선수 C와 경기를 하면 되므로 구하는 방법의 수는 3가지이다.

14. 정답 37

그래프의 꼭짓점의 개수가 12이므로

$a+b+c=12$ … ㉠

그래프의 변의 개수가 15이므로

$a+2b+3c=30$ … ㉡

㉡−㉠을 하면 $b+2c=18$ $\quad\therefore b=18-2c$ … ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$a-c=-6$ $\quad\therefore a=c-6$ … ㉣

$a<b<c$에서 ㉢,㉣을 대입하면

$c-6<18-2c<c$ $\quad\therefore 6<c<8$

이때, c는 양의 정수이므로 $c=7$이고, 이를 ㉢,㉣에 대입하면 $a=1$, $b=4$이다.

$\therefore a+2b+4c=1+2\cdot4+4\cdot7=37$

15. 정답 ③

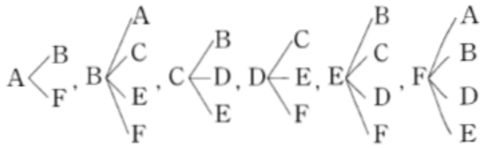
ㄱ. 행렬의 행의 개수가 6이므로 꼭짓점의 개수는 6이다. (참)

ㄴ. 행렬의 모든 성분의 합이 20이므로 변의 개수는 $\frac{20}{2}=10$이다. (거짓)

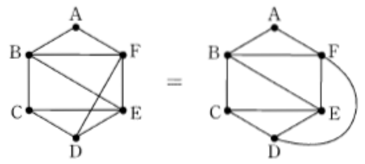
ㄷ. 주어진 행렬에 6개의 꼭짓점 A, B, C, D, E, F를 대응시키면 다음과 같다.

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & F \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

이때, 각 꼭짓점 A, B, C, D, E, F와 변으로 연결되는 꼭짓점을 나열하면



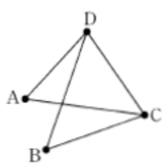
따라서 이를 만족시키는 그래프는 다음과 같이 나타낼 수 있으므로 변이 꼭짓점에서만 만나도록 한 평면 위에 그릴 수 있다. (참)



따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

16. 정답 20

그래프를 나타내는 행렬은 다음과 같다.



$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

㈎ 그래프를 나타내는 행렬의 모든 성분의 합은 10이다.

$\therefore a = 10$

㈏ $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 으로 놓으면

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

이때, 각 꼭짓점에서 한 꼭짓점을 거쳐 다시 출발한 꼭짓점으로 돌아오는 방법의 수는 행렬 M^2의 (i, j)성분 $(i = 1, 2, 3, 4)$의 합과 같으므로 $b = 2+2+3+3 = 10$

따라서 $a+b = 10+10 = 20$이다.

정답 및 풀이

1. 정답 ③
[출제의도] 지수의 성질을 이용하여 식의 값을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.
$\sqrt[3]{8} \div 2^{-2} = (2^3)^{\frac{1}{3}} \div 2^{-2} = 2^{1-(-2)} = 2^3 = 8$

2. 정답 ②
$a^{\frac{1}{3}} = 0.5 = \frac{1}{2}$에서 $\log_a \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$
$\therefore \quad \log_a \frac{1}{4} = \log_a \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2\log_a \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$

3. 정답 ③
$4^{\frac{3}{2}} \times 16^{-\frac{3}{4}} = (2^2)^{\frac{3}{2}} \times (2^4)^{-\frac{3}{4}} = 2^{3-3} = 1$

4. 정답 ①
$\sqrt[3]{\sqrt[4]{8}} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{2^3}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{2^3}} = \sqrt[4]{2}$ 이므로
$\sqrt[3]{\sqrt[4]{8}} \times \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{2} \times \sqrt[4]{2} = 2^{\frac{1}{4}} \times 2^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{2}}$

5. 정답 ③
$(\sqrt[3]{2} \times 2^2 \div \sqrt{2^3})^{\frac{6}{5}} = \left(2^{\frac{1}{3}} \times 2^2 \div 2^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{6}{5}}$
$= \left(2^{\frac{1}{3}+2-\frac{3}{2}}\right)^{\frac{6}{5}} = \left(2^{\frac{5}{6}}\right)^{\frac{6}{5}} = 2$

6. 정답 ③ 계산능력-지수와 로그
$\sqrt[4]{\sqrt[3]{16}} \times \sqrt[3]{4} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{2^4}} \times \sqrt[3]{2^2} = 2^{\frac{4}{4\times3}} \times 2^{\frac{2}{3}}$
$= 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}} = 2^1 = 2$

7. 정답 ④
(주어진 식)$= \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{\sqrt[4]{(-4)^4}} = \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{8} = 2$

8. ①
$\sqrt[4]{5} \div \sqrt[3]{5\sqrt{5}} = 5^{\frac{1}{4}} \div \left(5^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}} = 5^{-\frac{1}{4}}$
$\therefore \ k = -\frac{1}{4}$

9. 정답 ④
[출제의도] 지수를 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.
$2^{\frac{2}{3}} \times 5^{-\frac{1}{3}} \times 10^{\frac{4}{3}} = 2^{\frac{2}{3}} \times 5^{-\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{4}{3}} \times 5^{\frac{4}{3}}$
$= 2^{\frac{2}{3}+\frac{4}{3}} \times 5^{-\frac{1}{3}+\frac{4}{3}} = 2^2 \times 5 = 20$

10. 정답 ⑤
$2^{-\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}} \times 6^{\frac{1}{3}} = 2^{-\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}} \times 2^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{3}} = 3$

11. 정답 ①
$\sqrt{2\sqrt{2}} \div \sqrt[3]{4} = \sqrt{\sqrt{2^3}} \div \sqrt[3]{2^2} = 2^{\frac{3}{4}-\frac{2}{3}} = 2^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{2}$

12. 정답 ⑤
(주어진 식)$= 2^{\frac{4}{3}} \div (2 \times 3^2)^{\frac{1}{3}} \times (2^3 \times 3^2)^{\frac{1}{3}}$
$= 2^{\frac{4}{3}-\frac{1}{3}+1} \times 3^{\frac{2}{3}-\frac{2}{3}} = 2^2 \times 1 = 4$

13. 정답 ②
[출제의도]거듭제곱근의 성질을 이해하여 계산하기
$3^{\frac{2}{5}} = (3^2)^{\frac{k}{2}} = 3^k$이므로 $k = \frac{2}{5}$이다.

14. 정답 ④
$(ab)^6 = a^6 b^6 = (\sqrt[3]{2})^6 (b^3)^2 = 4 \cdot 9 = 36$

15. 정답 ②
$\left\{\left(\frac{9}{4}\right)^{-\frac{3}{4}}\right\}^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2\times\left(-\frac{3}{4}\right)\times\frac{2}{3}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} = \frac{2}{3}$

16. 정답 ④
$\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{x}{2}} = (3^{-3})^{\frac{x}{2}} = (3^x)^{-\frac{3}{2}} = 4^{-\frac{3}{2}}$
$= (2^2)^{-\frac{3}{2}} = 2^{-3} = \frac{1}{8}$

17. 정답 ⑤
$\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = 2 \cdot \sqrt[3]{3}$, $\sqrt[6]{9} = \sqrt[6]{3^2} = \sqrt[3]{3}$
$\sqrt[3]{-\frac{8}{9}} = \sqrt[3]{\frac{2^3 \cdot 3}{-27}} = \frac{2 \cdot \sqrt[3]{3}}{-3}$ 이므로
(주어진 식)$= 2 \cdot \sqrt[3]{3} - \frac{1}{3} \cdot \sqrt[3]{3} - \frac{2}{3} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3}$

18. 정답 81
$x = \log_2 9$, $y = \log_5 4$이므로
$xy = \log_2 9 \times \log_5 4 = 2\log_2 3 \times 2\log_5 2$
$= 4 \times \frac{\log_5 3}{\log_5 2} \times \log_5 2 = 4\log_5 3 = \log_5 3^4$
$\therefore 5^{xy} = 3^4 = 81$

19. 정답 ②
$5^a = 3$에서 $a = \log_5 3$

$5^b=10$에서 $b=\log_5 10$

$\therefore\ \dfrac{a}{b}=\dfrac{\log_5 3}{\log_5 10}=\log 3$

20. 정답 ②

$2^a=10\ \ \therefore\ 2=10^{\frac{1}{a}}$ ⋯㉠

$5^b=10\ \ \therefore\ 5=10^{\frac{1}{b}}$ ⋯㉡

㉠, ㉡에서

$2\times5=10^{\frac{1}{a}}\times10^{\frac{1}{b}}=10^{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$

$\therefore\ \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=1$

$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{a+b}{ab}=1$이므로

$\dfrac{ab}{a+b}=1$

21. 정답 ④

$8^{\frac{1}{a}}=36$에서 $36^a=8$ ⋯⋯⋯ ㉠

$27^{\frac{1}{b}}=36$에서 $36^b=27$ ⋯⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $36^a\cdot36^b=8\cdot27$

$36^{a+b}=2^3\cdot363,\ 6^{2(a+b)}=6^3$

$2(a+b)=3$ $\qquad\therefore\ a+b=\dfrac{3}{2}$

22. 정답 ④ 지수법칙

$(a+a^{-1})^2=a^2+a^{-2}+2=5$에서

$a+a^{-1}=\sqrt{5}\ \ (\because\ a>0)$

$\therefore\ a^3+a^{-3}=(a+a^{-1})^3-3(a+a^{-1})$

$=5\sqrt{5}-3\sqrt{5}=2\sqrt{5}$

23. 정답 ③

[출제의도] 지수의 유리수까지의 확장을 이해하기

$\dfrac{a+b}{4}=\dfrac{b+c}{7}=\dfrac{c+a}{9}=k(\neq0)$라 하면

$a+b=4k,\ b+c=7k,\ c+a=9k$이다.

$\therefore\ a=3k,\ b=k,\ c=6k$

따라서 (준식)$=2^{\frac{a+b}{c}}=2^{\frac{4k}{6k}}=2^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{4}$ 이다.

24. 정답 ②

[출제의도]지수법칙을 이용해 식을 간단히 하기

$3^{\frac{1}{n(n+1)}}=3^{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}$ 이므로

$P_1\times P_2\times P_3\times\cdots\times P_{2010}$

$=3^{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2010}-\frac{1}{2011}\right)}=3^{1-\frac{1}{2011}}=3^{\frac{2010}{2011}}$ 이다.

따라서 $k=\dfrac{2010}{2011}$ 이다.

25. 정답 15

$a=\log_2(2+\sqrt{3})$ 일 때, $2^a=2+\sqrt{3}$, $4^a=(2^a)^2=7+4\sqrt{3}$ 이다.

$\therefore\ 4^a+\dfrac{4}{2^a}=7+4\sqrt{3}+\dfrac{4}{2+\sqrt{3}}=7+4\sqrt{3}+4(2-\sqrt{3})=15$

26. 정답 21

$a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=3$ 의 양변을 제곱하면

$a+2+a^{-1}=9,\ a+a^{-1}=7$

$(a-a^{-1})^2=(a+a^{-1})^2-4=49-4=45$

$\therefore\ a-a^{-1}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}\ \ (\because\ a>1)$

$\therefore\ a^2-a^{-2}=(a+a^{-1})(a-a^{-1})=21\sqrt{5}$

$\therefore\ p=21$

27. 정답 ② 지수법칙

$a=b^{\frac{n}{m}}=b^{\frac{q}{p}}$ 이므로 $\dfrac{n}{m}=\dfrac{q}{p}$ 이다.

$\therefore\ mq=np$

28. 정답 ③

$\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2}}=\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}}=2^{\frac{1}{3}}\cdot2^{\frac{1}{12}}=2^{\frac{1}{3}+\frac{1}{12}}=2^{\frac{5}{12}}$

$p=12,\quad q=5\qquad\therefore p+q=17$

29. ③

[출제 의도] 지수의 성질을 이해하고 계산할 수 있는 가를 묻는 문제이다.

$4^x=2^y$에서 $2^{2x}=2^y,\ y=2x$ 이므로 $\dfrac{y}{x}+\dfrac{2x}{y}=3$이다.

30. 답 ⑤

$5^{(a+b)c}=(5^a\cdot5^b)^c=(5^c)^a\cdot(5^c)^b=(3^b)^a\cdot(2^a)^b=3\cdot2=6$

31. 정답 81

$a^x=3$에서 $a=3^{\frac{1}{x}}$,

$b^y=3$에서 $b=3^{\frac{1}{y}}$

$\therefore ab=3^{\frac{1}{x}}\cdot3^{\frac{1}{y}}=3^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=3^4=81$

32. 정답 ⑤

$2^{x+2}=9$

$\therefore 2^x=\dfrac{9}{4}$

$2^{\frac{x}{2}}-2^{-\frac{x}{2}}=t$라 하면

$t^2=\left(2^{\frac{x}{2}}-2^{-\frac{x}{2}}\right)^2=2^x+2^{-x}-2$

$=\frac{9}{4}+\frac{4}{9}-2=\frac{25}{36}$

$\therefore t=\frac{5}{6}\,(\because 2^{\frac{x}{2}}>2^{-\frac{x}{2}})$

33. 정답 ①

주어진 식의 좌변의 분모, 분자에 2^a을 곱하면

$\frac{2^{4a}+1}{2^2a-1}=-\frac{5}{3}$

$2^{2a}=t\ (t>0)$로 놓으면 $\frac{t^2+1}{t-1}=-\frac{5}{3}$

$3t^2+3=-5t+5,\ 3t^2+5t-2=0$

$(t+2)(3t-1)=0 \qquad \therefore\ t=\frac{1}{3}\ (\because\ t>0)$

즉, $2^{2a}=\frac{1}{3}$ 이므로

$2a=\log_2\frac{1}{3}=-\log_2 3$

$\therefore\ a=-\frac{1}{2}\log_2 3=-\log_2\sqrt{3}$

34. 정답 42

$\frac{3^{3x}+3^{-3x}}{3^x+3^{-x}}=\frac{3^{4x}+3^{-2x}}{2^x+1}=\frac{25+\frac{1}{5}}{5+1}=\frac{21}{5}$

$\therefore 10k=42$

35. 정답 ②

$x=a^{a^1},\ y=a^{a^2},\ z=a^{a^a}$이고 $1<a<2$에서

$a^1<a^a<a^2$이므로

$a^{a^1}<a^{a^a}<a^{a^2}$

$\therefore\ x<z<y$

36. ⑤

(주어진 식)$=2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{2}{3}-\frac{1}{4}}=2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}-\frac{1}{4}}$

$=2^{\frac{7}{12}}=\sqrt[12]{2^7}$

$\therefore\ a=12,\ b=7$

$\therefore\ a-b=5$

37. 정답 ④

$\sqrt[3]{n^m}=n^{\frac{m}{3}}$ 에서 $n^{\frac{m}{3}}$ 이 자연수가 되는 경우는

$n=1$ 인 경우에 $m=1,2,3$

$2\le n\le 7$인 경우에 $m=3$

$n=8$인 경우에 $m=1,2,3$

따라서 순서쌍 (m,n)의 개수는 $3+6+3=12$

38. ①

$x^3=512^{\frac{1}{8}}=2^{\frac{9}{8}}$ 이므로 $x=2^{\frac{3}{8}}$

n이 자연수일 때, x^n이 자연수이기 위한 필요충분조건은 n이 8의 배수인 것이다.

그런데, $x^{24}=2^9<1000<x^{32}=2^{12}$ 이므로 구하는 자연수 n은 $n=8,16,24$이다.

따라서 모든 n의 값의 합은 $8+16+24=48$이다.

39. 정답 15

$a^2-1=\left\{\frac{1}{2}(8^{40}+8^{-40})\right\}^2-1$

$=\frac{1}{4}(8^{80}+2+8^{-80})-1$

$=\frac{1}{4}(8^{80}-2+8^{-80})$

$=\left\{\frac{1}{2}(8^{40}-8^{-40})\right\}^2-1$

이므로

$a+\sqrt{a^2-1}=\frac{1}{2}(8^{40}+8^{-40})+\frac{1}{2}(8^{40}-8^{-40})$

$=8^{40}=2^{120}$

$\therefore\ \sqrt[n]{a+\sqrt{a^2-1}}=\sqrt[n]{2^{120}}=2^{\frac{120}{n}}$

따라서 n이 120의 양의 약수이면 문제의 조건을 만족시킨다.

이때, $120=2^3\times 3\times 5$이고, n은 2 이상의 자연수이므로 구하는 n의 개수는 $4\times 2\times 2-1=15$(개)

40. 정답 ⑤

이해력 - 지수와 로그

$a=4^4\times 8^8=2^8\times 2^{24}=2^{32}$이므로

$\frac{a}{2^n}=2^{32-n}$

이때, 2^{32-n}의 n제곱근 중 양의 실수는

$\sqrt[n]{2^{32-n}}=2^{\frac{32-n}{n}}$ 이다.

따라서 n이 자연수이므로 $2^{\frac{32-n}{n}}$ 이 자연수이려면 $\frac{32-n}{n}$이 0 이상의 정수이어야 한다.

$\frac{32-n}{n}=k$ (k는 0 이상의 정수)라 하면

$n=\frac{32}{k+1}$

따라서 $k=0,\ 1,\ 3,\ 7,\ 15,\ 31$일 때,

$n=32,\ 16,\ 8,\ 4,\ 2,\ 1$

그런데 $n\ge 2$이므로 구하는 자연수 n의 개수는 5이다.

41. 정답 ⑤

ㄱ. [반례]

$x=\frac{1}{2}$이면 $x\in A$이지만 $2^x=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}\not\in A$이다. (거짓)

ㄴ. $2\in A$이므로 $2^2\in B$이다.

이때, $4\in A$이므로 $4\in A\cap B$, 즉, $A\cap B\neq\phi$이다. (참)

ㄷ. 집합 B의 임의의 두 원소 2^x, 2^y에 대하여 $x\in A$, $y\in A$이고, $x+y$는 유리수이므로 $x+y\in A$이다.

$$\therefore 2^x\times 2^y=2^{x+y}\in B$$

따라서 집합 B는 곱셈에 대하여 닫혀 있다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

다른 풀이

ㄴ. k가 정수이면 $k\in A$이므로 $2^k\in B$

이때, 2^k도 정수이므로 $2^k\in A$

$$\therefore A\cap B\neq\phi$$

42. 정답 ④

$$N_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{200}{T}}\div N_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{500}{T}}=8$$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{200}{T}-\frac{500}{T}}=8$ 이므로 $\frac{200}{T}-\frac{500}{T}=-3$

$\therefore\ T=100$

43. 정답 ①

$$f(5)=100\cdot a^{-\frac{5}{5}}=100a^{-1}=\frac{100}{a}$$

$$f(10)=100\cdot a^{\frac{-10}{5}}=100a^{-2}=\frac{100}{a^2}$$

$$\therefore\frac{f(5)}{f(10)}=\frac{\frac{100}{a}}{\frac{100}{a^2}}=a$$

44. 정답 ①

수학 외적 문제 해결능력 - 지수함수와 로그함수

$f(1)=110$이므로 $a^{1-k}+20=110$

$\therefore a^{1-k}=90\cdots\cdots$㉠

$f(3)=80$이므로 $a^{3-k}+20=80$

$\therefore a^{3-k}=60\cdots\cdots$㉡

㉡÷㉠에서 $a^2=\frac{2}{3}$

한편, ㉡에서 $a^{-k}=\frac{60}{a^3}$이므로

$$f(7)=a^{7-k}+20=a^7\cdot a^{-k}+20$$
$$=a^7\cdot\frac{60}{a^3}+20=a^4\cdot 60+20$$
$$=\frac{4}{9}\cdot 60+20=\frac{140}{3}$$

45. 정답 ①　　수학 외적 문제 해결 능력 - 수열

신도시의 인구는 매년 일정한 비율로 증가하므로 n년 후의 인구를 ar^n이라 놓으면

$x=ar^5$ ⋯⋯ ㉠

$y=ar^{10}$ ⋯⋯ ㉡

㉡의 양변을 ㉠의 양변으로 각각 나누면 $\frac{y}{x}=r^5$

$$\therefore\ r=\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{5}}$$

이 신도시가 조성된 지 7년 후의 인구는

$$ar^7=ar^5r^2=x\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2}{5}}=x^{\frac{3}{5}}y^{\frac{2}{5}}$$

$$\therefore\ \alpha=\frac{2}{5}$$

46. 정답 ⑤

$S=NQ^{\frac{1}{2}}H^{-\frac{3}{4}}$에서

$Q=24$, $H=5$일 때, $S_1=N\times 24^{\frac{1}{2}}\times 5^{-\frac{3}{4}}$

$Q=12$, $H=10$일 때, $S_2=N\times 12^{\frac{1}{2}}\times 10^{-\frac{3}{4}}$

$$\therefore\ \frac{S_1}{S_2}=\frac{N\times 24^{\frac{1}{2}}\times 5^{-\frac{3}{4}}}{N\times 12^{\frac{1}{2}}\times 10^{-\frac{3}{4}}}=\frac{N\times 2^{\frac{1}{2}}\times 12^{\frac{1}{2}}\times 10^{-\frac{3}{4}}}{N\times 12^{\frac{1}{2}}\times 2^{-\frac{3}{4}}\times 5^{-\frac{3}{4}}}$$

$$=\frac{2^{\frac{1}{2}}}{2^{-\frac{3}{4}}}=2^{\frac{1}{2}-\left(-\frac{3}{4}\right)}=2^{\frac{5}{4}}$$

47. 정답 ⑤

1990년 이 공장의 전체 생산량을 t, A제품의 생산량을 a라 하면 n년 후전체 생산량은 $(1.02)^n t$, n년 후 A제품의 생산량은 $(1.03)^n a$이다.

1990년 이 공장의 전체 생산량 중 A제품이 차지하는 비율은 65%이므로 $\frac{a}{t}=0.65$

2010년에 전체 생산량 중에서 A제품의 생산량이 차지하는 비율은

$$\frac{(1.03)^{20}a}{(1.02)^{20}t}\times 100=\frac{1.8}{1.5}\times 0.65\times 100=78(\%)$$

48. 정답 ③

$L=\frac{I\cdot 10^{-kx}}{x^2}$ (k는 기상상태에 따른 상수)에서

$$4\times 10^{-6}=\frac{10^7\cdot 10^{-1000k}}{1000^2}$$

$$4\times 10^{-7}=10^{-1000k}$$

따라서 500m 떨어진 곳에서 측정한 조도 L'은

$$L'=\frac{10^7\cdot 10^{-500k}}{500^2}=\frac{10^7\cdot\left(10^{-1000k}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1000}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{10^7(4\times 10^{-7})^{\frac{1}{2}}}{\frac{10^6}{2^2}} = 2^2\cdot 10\cdot 4^{\frac{1}{2}}\cdot 10^{-\frac{7}{2}} = 8\cdot 10^{-2.5}$$

1. 정답 ③

[출제의도] 식을 변형하여 함숫값 이해하기

$f(1)=f\left(2\times\frac{1}{2}\right)=\left\{f\left(\frac{1}{2}\right)\right\}^2=64$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=8$

$f(1)=f\left(3\times\frac{1}{3}\right)=\left\{f\left(\frac{1}{3}\right)\right\}^3=64$, $f\left(\frac{1}{3}\right)=4$

$f(1)=f\left(6\times\frac{1}{6}\right)=\left\{f\left(\frac{1}{6}\right)\right\}^6=64$, $f\left(\frac{1}{6}\right)=2$

$\therefore\ f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{1}{6}\right)=14$

2. 정답 ②

$f(x)=\frac{a^{x+1}}{3^{x-1}}a^{-x}=3a\left(\frac{a}{3}\right)^x+\left(\frac{1}{a}\right)^x$

이때 $\frac{1}{3}<\frac{a}{3}\le\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}\le\frac{1}{a}<1$ 이므로

$3a\left(\frac{a}{3}\right)^x$ 과 $\left(\frac{1}{a}\right)^x$ 은 모두 $x=-1$ 일 때 최대이다.

따라서, 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 일 때 최대이다.

$\therefore\ f(-1)=\frac{a^0}{3^{-2}}+a^1=9+a$

3. ①

$f(x)=ax+b$라 두면 $y=\log_2\frac{1}{f(x)}=\log_2\frac{1}{ax+b}$ 이

점 $(0,-1)$, $(1,0)$을 지나므로

$\log_2\frac{1}{b}=-1$, $\log_2\frac{1}{a+b}=0$

$\therefore a=-1,\ b=2$

$\therefore f(x)=-x+2$

따라서, $y=2^{f(x)}=2^{-x+2}$의 그래프는 ①과 같다.

4. 정답 10

$3^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$f(x)=-t^2+kt+1=-\left(t-\frac{k}{2}\right)^2+\frac{k^2}{4}+1$에서

$t=\frac{k}{2}$일 때, 최댓값 $1+\frac{k^2}{4}$을 갖는다.

$1+\frac{k^2}{4}=26,\ k^2=100$

$\therefore k=10\ (\because\ k>0)$

5. ⑤

$f(x)=4^{1-x}=4\left(\frac{1}{4}\right)^x$ 이므로 x의 값이 증가할수록 $f(x)$의 값은 감소한다.

따라서, $0\leqq x\leqq 1$에서 $f(1)\leqq f(x)\leqq f(0)$이다.

$\therefore\ M=f(0)=4,\ m=f(1)=4\cdot\frac{1}{4}=1$

$\therefore\ \ M+m=5$

6. 정답 ④

$\overline{\mathrm{PH}}:\overline{\mathrm{AH}}=1:2$에서 직선 AP의 기울기가 2이므로 직선 AP와 직선 $y=2x-4$는 평행하다. 즉, 점 P에서 직선 $y=2x-4$까지의 거리와 점A$(0,\ 1)$에서 직선 $y=2x-4$까지의 거리가 같다. 따라서 점 P에서 직선 $y=2x-4$까지의 거리를 d라 하면

$d=\frac{|0-1-4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

7. 정답 2

[출제의도] 지수함수의 값 구하기

(가)에서 $f\left(\frac{5}{2}\right)=2^{\frac{5}{2}a+b}=2\sqrt{2}=2^{\frac{3}{2}}$

$\therefore\ \frac{5}{2}a+b=\frac{3}{2}$

(나)에서 $f(x+y)=2f(x)f(y)$에 $x=y=0$을 대입하면

$f(0)=2f(0)f(0)$이고 $f(0)>0$이므로 $f(0)=2^b=\frac{1}{2}$ 이다.

$\therefore\ b=-1$

따라서 $a=1,\ b=-1$ 이다.

8. 정답 ⑤

이해 능력–지수함수와 로그함수

$A(a,\ 3^a)$, $B(b,\ 3^b)$이라 두자. $(a<b)$

직선 l의 기울기가 1이므로 $\frac{3^b-3^a}{b-a}=1$에서

$3^b-3^a=b-a$ ⋯ ㉠

$\overline{AB}=4\sqrt{2}$ 이므로 $(b-a)^2+(3^b-3^a)^2=32$

⋯ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $2(b-a)^2=32$에서 $b-a=4$

$\therefore\ \frac{\overline{\mathrm{OD}}}{\overline{\mathrm{OC}}}=\frac{3^b}{3^a}=3^{b-a}=3^4=81$

9. 정답 ⑤

[해설] $\overline{\mathrm{OQ}}:\overline{\mathrm{QB}}=5:2$이므로 $\overline{OQ}=5k$, $\overline{OB}=7k$ (k는 실수)라 두자.

점 A의 y좌표는 1이므로

$3^{10-ak}=1$에서 $10-7ak=0$

$\therefore a=\frac{10}{7k}$ ⋯⋯㉠

점 P의 y좌표를 구하면

$3^{10-5ak}=3^{5k}$에서 $10-5ak=5k$

㉠을 대입하면 $10-5\times\frac{10}{7k}\times k=5k$에서 $k=\frac{4}{7}$

$\therefore a=\frac{10}{7}\times\frac{7}{4}=\frac{5}{2}$

10. 정답 ②

조건 ㈐에서 $f(3-x)=f(3+x)$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 직선 $x=3$에 대하여 대칭이고, 조건 ㈎에서 꼭짓점이 $(3,\ -5)$인 이차함수이다.

$\therefore\ f(x)=(x-3)^2-5$

조건 ㈏에서 $g(3)=a^3=\frac{1}{3}$ $\qquad\therefore\ a=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$

이때 $(g\circ f)(x)=g(f(x))=\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^{f(x)}=\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^{(x-3)^2-5}$

은 $0<(\text{밑})=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}<1$이므로 함수 $f(x)=(x-3)^2-5$가 최대일 때 최솟값을 갖는다. 그런데 $2\le x\le 5$에서 함수 $f(x)=(x-3)^2-5$는 $x=5$일 때 최댓값 -1을 갖는다.

따라서 구하는 함수 $y=(g\circ f)(x)$의 최솟값은

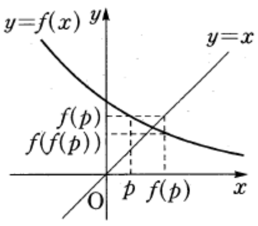
$(g\circ f)(x)=g(f(5))=g(-1)=\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^{-1}=\sqrt[3]{3}$

11. 답 ①

[해설] 지수함수의 그래프

ㄱ. 오른쪽 그림과 같이 $p<f(p)$이면

$f(p)>f(f(p))$ (거짓)



ㄴ. 함수 $f(x)=a^x\,(0<a<1)$은 감소함수이므로

$p<q \Leftrightarrow f(p)>f(q)$

$\Leftrightarrow f(f(p))<f(f(q))$ (참)

ㄷ. $f^{-1}(p)=b,\ f^{-1}(q)=c$라 하면

$f(b)=p,\ f(c)=q$

그런데 $p<q$이므로 $f(b)<f(c)$에서 $b>c$

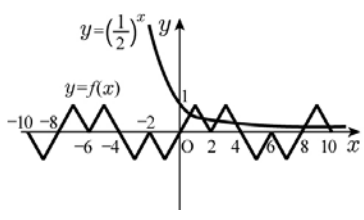
$\therefore f^{-1}(p)>f^{-1}(q)$ (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄴ이다.

12. 정답 ⑤

[출제의도] 지수함수의 그래프를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$y=f(x)$ 와 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 의 그래프는 그림과 같다.



따라서 두 그래프의 교점의 개수는 6이다.

13. 정답 3

이해력-지수함수와 로그함수

$S_1=\frac{k}{2}(2^k-2^{-k})=\frac{k}{2}\cdot\frac{(2^k)^2-1}{2^k},\ S_2=\frac{k}{2}\cdot(2^k-1)$이고

$S_1=\frac{9}{8}S_2$이므로 $8S_1=9S_2$

$8\cdot\frac{k}{2}\cdot\frac{(2^k)^2-1}{2}=9\cdot\frac{k}{2}(2^k-1)$

$8\{(2^k)^2-1\}=9\cdot 2^k\cdot(2^k-1)$

$2^k=t\ \ (t>1)$라 하면 $8(t^2-1)=9t(t-1)$이므로

$t^2-9t+8=0,\quad (t-1)(t-8)=0$

$\therefore\ t=1$ 또는 $t=8$

$t>1$이므로 $t=8$

$\therefore\ k=3$

14. 정답 ②

ㄱ. $f(x)g(x)=\frac{a^{2x}-a^{-2x}}{4}$ 에서

$f(-x)g(-x)=\frac{a^{2x}-a^{-2x}}{4}=-\left(\frac{a^{2x}-a^{-2x}}{4}\right)=-f(x)g(x)$

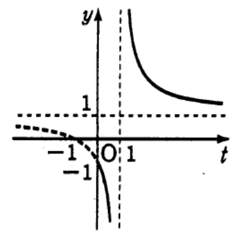
이므로 $y=f(x)g(x)$는 기함수이고 원점 대칭의 성질을 갖는다.

$\therefore$거짓

ㄴ. $\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2=\{f(x)+g(x)\}\{f(x)-g(x)\}$

$a^x\cdot a^{-x}=1$ $\qquad\qquad\therefore$참

ㄷ. $y=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a^x+a^{-x}}{a^x-a^{-x}}=\frac{a^{2x}+1}{a^{2x}-1}$ 에서



a^{2x}을 $t\ \ (t>0)$로 치환한 후 분수함수 $y=\frac{t+1}{t-1}$의 그래프는 그림과 같으므로 치역은 $\{y\,|\,y<-1$ 또는 $y>1\}$이다. $\therefore$거짓

따라서 옳은 것은 ㄴ 뿐이다.

15. ①

$y=a^x$ 를 y축 대칭시키면 $y=a^{-x}$ 이다.

이것을 다시 x축으로 3 , y축으로 2만큼 평행이동하면

$y=a^{-(x-3)}+2$ ------ *

* 의 그래프가 (1,4)를 지나므로

$4=a^{-(1-3)}+2$

$\therefore\ a^2=2$

$\therefore\ a=\sqrt{2}\ (\because a>0)$

16. 정답 71

[출제의도] 지수함수의 그래프를 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.

삼각형 AOB의 넓이가 16이고 $\overline{OB}=4$이므로 점 A의 y좌표는 8이다. 점 A는 곡선 $y=2^x-1$위의 점이므로 점 A의 x좌표를 α라 하면 $2^\alpha-1=8\ \ \therefore\alpha=\log_2 9$

이때, 점 $A(\log_2 9,\ 8)$은 곡선 $y=2^{-x}+\frac{\alpha}{9}$위의 점이므로

$8=2^{-\log_2 9}+\frac{\alpha}{9}=\frac{1}{9}+\frac{\alpha}{9}$

$\therefore\alpha=71$

17. 정답 : ⑤

점 P_n의 좌표를 a_n이라 하면

$9^{a_n}=\dfrac{2n+1}{2n-1}$

$\therefore\ a_n=\log_9\dfrac{2n+1}{2n-1}=\dfrac{1}{2}\log_3\dfrac{2n+1}{2n-1}$

점 Q_n의 좌표를 b_n이라 하면

$3^{b_n}=\dfrac{2n+1}{2n-1}$

$\therefore\ b_n=\log_3\dfrac{2n+1}{2n-1}$

$\therefore\ \overline{P_nQ_n}=b_n-a_n=\log_3\dfrac{2n+1}{2n-1}-\dfrac{1}{2}\log_3\dfrac{2n+1}{2n-1}$

$=\dfrac{1}{2}\log_3\dfrac{2n+1}{2n-1}$

$\therefore$ (주어진 식)

$=\dfrac{1}{2}\left(\log_3\dfrac{3}{1}+\log_3\dfrac{5}{3}+\log_3\dfrac{7}{5}+\cdots+\log_3\dfrac{81}{79}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left(\log_3\dfrac{3}{1}\times\dfrac{5}{3}\times\dfrac{7}{5}\times\cdots\times\dfrac{81}{79}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\log_3 81=2$

18. 정답 22

[출제의도] 지수함수의 평행이동을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$y=2^{x-2}$ 의 그래프는 $y=2^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 것이므로 $\overline{\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k}=2$

$\therefore A_k=\dfrac{1}{2}\times 2\times k=k\quad \therefore A_1+A_4+A_7+A_{10}=22$

19. 정답 ④

$a^2-b^2=\overline{\mathrm{AB}}=2,\ b^4-c^4=\overline{\mathrm{CD}}=2$

A, D 의 y좌표가 같으므로

$a^2=b^4\qquad \therefore\ a=b^2$

B, C 의 y좌표가 같으므로

$b^2=c^4\qquad \therefore\ b=c^2$

$b^4-b^2-2=(b^2-2)(b^2+1)=0\qquad \therefore\ b^2=2$

$\therefore \log_2 a+\log_2 b-\log_2 c=\log_2\dfrac{ab}{c}=\log_2\dfrac{b^3}{\sqrt{b}}$

$=\dfrac{5}{2}\log_2 b=\dfrac{5}{2}\log_2\sqrt{2}$

$=\dfrac{5}{4}$

20. ③

그래프에서 $0<a<1,\ b>1$

$\therefore\ 0<a<1<b$ ………………… ㉠

$(x_2-x_1)\{f(x_2)-f(x_1)\}>0$이므로

ⅰ) $x_2>x_1$이면 $f(x_2)>f(x_1)$

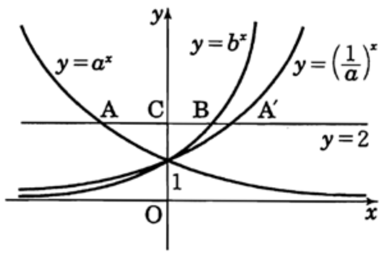
ⅱ) $x_2<x_1$이면 $f(x_2)<f(x_1)$

ⅰ), ⅱ) 모두 함수 $f(x)$가 증가하는 함수임을 나타낸다.

ㄱ. ㉠의 각 변을 a로 나누면 $\dfrac{b}{a}>1$이므로 함수 $f(x)=\left(\dfrac{b}{a}\right)^x$은 증가하는 함수이다.

ㄴ. ㉡의 각 변을 b로 나누면 $0<\dfrac{a}{b}<1$이므로 함수 $f(x)=\log_{\frac{a}{b}}x$는 감소하는 함수이다.

ㄷ. 그림과 같이 함수 $y=a^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동시킨 $y=\left(\dfrac{1}{a}\right)^x$의 그래프와 $y=2$가 만나는 점을 A'이라 하면 $\overline{AC}=\overline{A'C}>\overline{BC}$이므로 $b>\dfrac{1}{a}$이다.



$\therefore\ ab>1\ (\because\ a>0)$

따라서 함수 $f(x)=(ab)^x$은 증가하는 함수이다.

21. 정답 ②

$h(x)=2^{-2x+10}-3$으로 놓으면

$2^{-2x+10}-3=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x-10}-3$이므로 $y=h(x)$의 그래프는

$y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x}$의 그래프를 평행이동시킨 것이다.

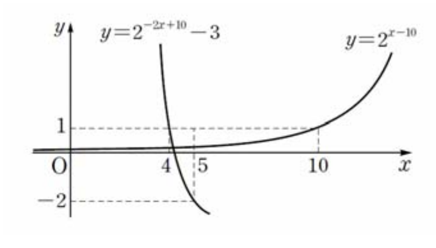
$h(x)=2^{-2x+10}-3=1$에서

$2^{-2x+10}=4$

$-2x+10=2\qquad \therefore x=4$

즉, $y=h(x)$의 그래프는 점 $(4,1)$을 지난다.

또, $h(5)=2^{-10+10}-3=-2$이므로 $y=h(x)$의 그래프는 점 $(5,-2)$를 지난다.

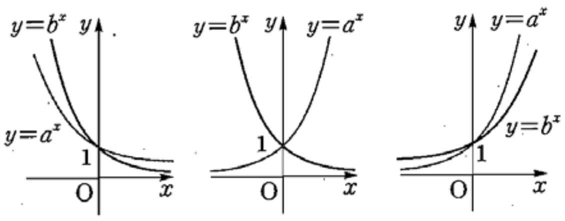


따라서 두 함수 $y=2^{x-10},\ y=2^{-2x+10}-3$의 그래프의 교점은 위의 그림과 같이 네 점 $(4,0),\ (5,0),\ (5,1),\ (4,1)$을 꼭짓점으로 하는 정사각형의 내부에 있으므로

$\langle 2^{x-10},\ 2^{-2x+10}-3\rangle=4+0=4$

22. 정답 ③

$0<b<a$일 때 지수함수 $y=a^x,\ y=b^x$의 그래프는 다음 그림과 같다.



ㄱ. 위의 그림에서 $x>0$일 때, $a>b>0$이면 $a^x>b^x$이다. (참)

ㄴ. 위의 그림에서 $x<0$일 때, $a^x<b^x$이면 $a>b$이다.

따라서 $x<0$일 때, $a>0$, $b>0$이고, $a^x>b^x$이면 $a<b$이다. (참)

ㄷ. $x>0$이면 $\frac{1}{x}>0$이므로 $a^x>b^x$이면 $(a^x)^{\frac{1}{x}}>(b^x)^{\frac{1}{x}}$이다. (∵ ㄱ)

$\therefore\ a>b$

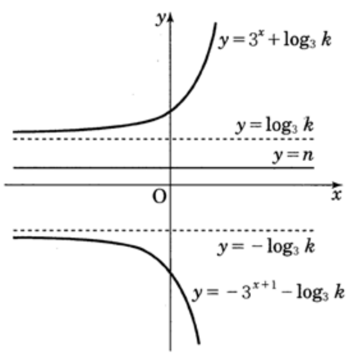
또, ㄱ에서 $\frac{1}{x}>0$에 대하여 $a>b$이면 $a^{\frac{1}{x}}>b^{\frac{1}{x}}$이므로 $x>0$일 때,$a^x>b^x$이면 $a^{\frac{1}{x}}>b^{\frac{1}{x}}$이다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

23. 정답 323

두 함수 $y=3^x+\log_3 k$, $y=-3^{x+1}+\log_{\frac{1}{3}} k$의 점근선의 방정식은 각각 $y=\log_3 k$, $y=\log_{\frac{1}{3}} k=-\log_3 k$

두 함수의 그래프는 다음과 같다.



$-\log_3 k\le n\le \log_3 k$

이때, 주어진 조건을 만족시키는 정수 n의 개수가 9이므로 $4\le \log_3 k<5$이어야 한다.

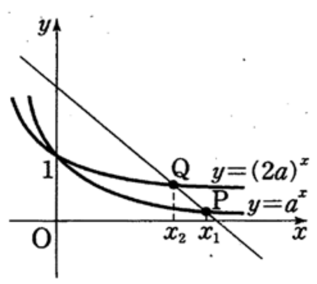
$\therefore\ 3^4\le k<3^5$

따라서 자연수 k의 최댓값과 최솟값의 합은

$(3^5-1)+3^4=242+81=323$

24. 정답 ③

감소하는 두 곡선 $y=a^x$, $y=(2a)^x$과 직선 $y=2-x$를 그리면 아래와 같다.



ㄱ. 두 곡선 $y=a^x$, $y=(2a)^x$이 모두 감소하므로

$0<a<1$, $0<2a<1$에서 $0<a<\frac{1}{2}$ ∴ 참

ㄴ. 위 그래프에서 $x_2<x_1$이다. ∴ 거짓

ㄷ. $\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2-x_1}>1$이면

$x_2-x_1<0$이므로 $x_2y_1-x_1y_2<x_2-x_1$

$x_2(y_1-1)<x_1(y_2-1)$, $\frac{y_1-1}{x_1-0}<\frac{y_2-1}{x_2-0}$

점 $A(0,1)$과 점 $P(x_1,y_1)$, $Q(x_2,y_2)$를 연결한 직선의 기울기는 $(\overline{AP}$의 기울기$)<(\overline{AQ}$의 기울기$)$이므로 성립한다. ∴ 참

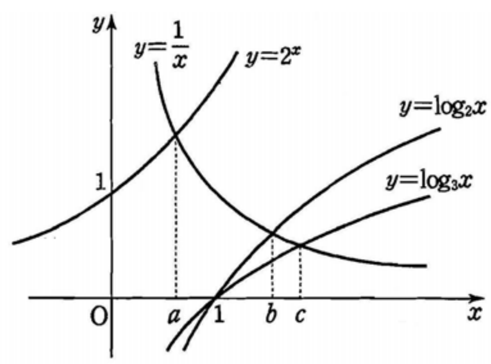
[참고]

$\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2-x_1}=\frac{x_2(2-x_1)-x_1(2-x_2)}{x_2-x_1}=2>1$

따라서 옳은 것은 ㄱ,ㄷ이다.

25. ① 수학 내적 문제 해결 능력 – 지수함수와 로그함수

네 곡선 $y=2^x$, $y=\log_2 x$, $y=\log_3 x$, $y=\frac{1}{x}$ 의 그래프를 같은 좌표평면 위에 나타내면 다음과 같다.



이때 방정식 $2^x=\frac{1}{x}$의 실근은 a, 방정식 $\log_2 x=\frac{1}{x}$의 실근은 b, 방정식 $\log_3 x=\frac{1}{x}$의 실근은 c이므로 위의 그림에서 $a<b<c$이다.

26. 정답 12

[출제의도] 지수방정식의 해 계산하기

$3^{-\frac{3}{2}x}=3^{6-2x}$

$-\frac{3}{2}x=6-2x$

$\therefore\ x=12$

27. 정답 ①

$3^x=t\ (t>0)$라 하면 $-1\le x\le 1$이므로

$\frac{1}{3}\le t\le 3$

$\therefore\ y=2\cdot 3^x-9^x=-t^2+2t=-(t-1)^2+1$

따라서, $t=1$일 때 최댓값 1, $t=3$일 때 최솟값 -3을 갖는다.

$\therefore\ M=1,\ m=-3$

$\therefore\ M+m=-2$

28. 정답 ④

$\frac{16^x}{2}=2^{x+3} \Leftrightarrow 2^{4x-1}=2^{x+3} \Leftrightarrow 4x-1=x+3$

$\therefore\ x=\frac{4}{3}$

29. 정답 891

$2^x=t$라 하고 $t^2-at+8=0$에서 두 근을 $t_1, t_2(t_1<t_2)$라 하면

$t_1\times t_2=8,\ x\ge -1$이므로 $t\ge 2^{-1}$인 범위를 고려하면

$t_1=2^{-1}, t_2=2^4 \Longrightarrow a=\frac{1}{2}+16=\frac{33}{2}$

$t_1=2^0, t_2=2^3 \Longrightarrow a=1+8=9$

$t_1=2^1, t_2=2^2 \Longrightarrow a=2+4=6$

따라서, 모든 a의 값의 곱은 $\frac{33}{2}\times 9\times 6=891$

30. ④

$2^x=t$로 치환하면 주어진 식은 $t^2-7t+12=0$

$(t-3)(t-4)=0$

$\therefore t=3$ 또는 $t=4$

이 식의 두 근은 $2^\alpha, 2^\beta$ 이므로

$2^\alpha=3, 2^\beta=4$ 또는 $2^\alpha=4, 2^\beta=3$

$\therefore 2^{\alpha+\beta}=2^\alpha\cdot 2^\beta=12$

31. 정답 16

$3^x=t(t>0)$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2-3at+8=0$ …… ㉠

t에 대한 이차방정식 ㉠의 두 근은 3^α, 3^β 이므로 근과 계수의 관계에 의해

$3^\alpha\cdot 3^\beta=3^{\alpha+\beta}=8$

$\beta=2\alpha$ 이므로 $3^{3\alpha}=8$

$\therefore\ 3^\alpha=2$

따라서 방정식 ㉠의 한 근이 2이므로

$4-6a+8=0$ $\therefore\ a=2$

$\therefore\ a^4=16$

32. 정답 10

$2^x-8=0$ 에서 $x=3$

$3^{2x}-9=9^x-9=0$ 에서 $x=1$

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2=3^2+1^2=10$

33. ③

$5<3^x<100$ 에서 $x=2,3,4$

x의 값의 합은 $2+3+4=9$

34. 정답 2

$\sin^2x+\cos^2x=1$이므로 $2^{\cos^2x}=2^{1-\sin^2x}$이다.

$2^{\sin^2x}+5\cdot\frac{2}{2^{\sin^2x}}=7$

$2^{\sin^2x}=t\ (1\le t\le 2)$로 치환하면

$t+\frac{10}{t}=7,\quad t^2-7t+10=0$

$(t-2)(t-5)=0,\quad t=2$

$\therefore\ \sin^2x=1,\ \sin x=\pm1$

즉, $x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}\pi$

따라서 실근의 개수는 2이다.

35. 정답 ②

$3^x=t(t>0)$라 하면 $3t-t^2\ge\frac{8}{9}$에서

$9t^2-27t+8\le 0,\quad (3t-1)(3t-8)\le 0$

$\frac{1}{3}\le t\le\frac{8}{3}$ 에서 $\frac{1}{3}\le 3^x\le\frac{8}{3}$

$3^0=1\le 3^{x+1}\le 8<3^2$ 이므로 $-1\le x<1$

따라서 부등식을 만족시키는 정수x는 -1, 0의 2개이다.

36. 정답 10

$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1}\le\left(\frac{1}{3}\right)^{3x-3}$

$2x+1\ge 3x-3,\ x\le 4$

따라서 구하는 합은 $1+2+3+4=10$이다.

37. 답 20

$2^{-x}=t(t>0)$로 놓으면 주어진 부등식은 $t^2-5t+4\le 0$

따라서 $2^0\le 2^{-x}\le 2^2$이므로 $-2\le x\le 0$

$\therefore\ 10(\beta-\alpha)-10\times(0+2)=20$

38. 12

$|2x-3|<1 \Leftrightarrow -1<2x-3<1 \Leftrightarrow 1<x<2$

$\therefore 2<2^x<4$

$2^x=t$로 놓으면 $t^2-4at+b<0$ 의 해가 $2<t<4$ 이므로

$4a=2+4,\quad b=2\times 4$

$\therefore a=\frac{3}{2},\ b=8 \qquad \therefore ab=12$

39. 정답 ⑤

$3^{2x}-12\cdot 3^x+27=(3^x-3)(3^x-9)<0$

$\therefore 3<3^x<9$

$\therefore A=\{x|1<x<2\}$

이때, $A=B$이려면

$2^{2x}-a\cdot 2^x+b=(2^x-2^1)(2^x-2^2)$

$=2^{2x}-6\cdot 2^x+8<0$

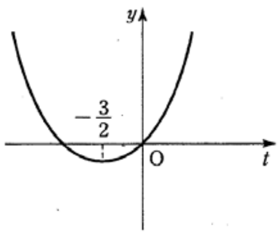
$\therefore a=6,\ b=8 \qquad \therefore a+b=14$

40. 정답 ④

$9^x+3^{x+1}-3>k$에서 $3^x=t\,(t>0)$로 치환하면

$$t^2+3t-k-3>0$$

따라서 모든 양수 t에 대하여 이차부등식 $t^2+3t-k-3>0$이 성립해야 한다.



그런데, $t>0$에서

이때 $f(t)=t^2+3t-k-3$이라 하면 그림과 같이 $f(0)\ge 0$일 때 조건을 만족한다.

$$-k-3\ge 0 \qquad \therefore\ k\le -3$$

따라서 구하는 정수 k의 최댓값은 -3이다.

41. 답 101

$a^x b^{100-x}=a^x\times\dfrac{b^{100}}{b^x}=b^{100}\times\left(\dfrac{a}{b}\right)^x$이므로 주어진 부등식은

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{100}\le\left(\frac{a}{b}\right)^x\le\frac{b^{100}}{b^{100}}=1$$

그런데 $0<a<b$에서 $0<\dfrac{a}{b}<1$이므로 $0\le x\le 100$

따라서 구하는 정수 x는 0, 1, 2, ⋯, 100의 101개다.

정답 및 풀이

1. 정답 ⑤

$\log_3 \frac{1}{\sqrt{3}} = \log_3 3^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$ 이므로

$\left(\log_3 \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-2} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} = (-2)^2 = 4$

2. 정답 ⑤

$\log_3 \frac{1}{9} = \log_3 3^{-2} = -2$ 이므로 $4^{-\log_3 \frac{1}{9}} = 4^2 = 16$

3. 정답 ③
계산능력 – 지수와 로그

$9^{\frac{1}{2}} \times \log_3 \sqrt[6]{9} = 3 \times \frac{1}{6} \log_3 9 = 3 \times \frac{2}{6} = 1$

4. 정답 ②

$4^{\frac{3}{2}} \times \log_3 \sqrt{3} = (2^2)^{\frac{3}{2}} \times \frac{1}{2} \log_3 3 = 2^3 \times \frac{1}{2} = 2^2 = 4$

5. 정답 ③

$\log_{\sqrt{3}} 4 = \log_3 16 = 4\log_3 2, \ \log_{16} 3 = \frac{1}{4} \log_2 3$

$\therefore \ \log_{\sqrt{3}} 4 \times \log_{16} 3 = 4\log_3 2 \times \frac{1}{4} \log_2 3$

$= 4 \times \frac{1}{4} \times \log_3 2 \times \frac{1}{\log_3 2} = 1$

6. 답 ②

$\log_4 27 \times \log_9 2\sqrt{2} = \log_{2^2} 3^3 \times \log_{3^2} 2^{\frac{3}{2}} = \frac{3\log 3}{2\log 2} \times \frac{\frac{3}{2}\log 2}{2\log 3} = \frac{9}{8}$

7. 답 ②

$\log_4 5 \cdot \log_5 8 = \log_4 8 = \frac{3}{2}$

8. 답 ① 로그의 계산

$\log_3 \sqrt{54} - \log_9 6 = \frac{1}{2}\log_3 54 - \frac{1}{2}\log_3 6$

$= \frac{1}{2}\log_3 \frac{54}{6} = \frac{1}{2}\log_3 9 = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$

9. 정답 ②

$\log_5 250 - \frac{1}{\log 5} = \log_5 250 - \log_5 10 = \log_5 25 = 2$

10. 정답 ②

$\log_3 6 - 4\log_3 \sqrt[4]{2} = \log_3 6 - \log_3 (\sqrt[4]{2})^4 = \log_3 \frac{6}{2} = \log_3 3 = 1$

11. 정답 ②

$$\begin{aligned}\log_3 6 - \log_3 \sqrt{12} &= \log_3 6 - \log_3 2\sqrt{3} \\ &= \log_3 \frac{6}{2\sqrt{3}} \\ &= \log_3 \sqrt{3} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

12. 답 ②

[해설]$\log_2 6 - \log_2 3\sqrt{2} = \log_2 \frac{6}{3\sqrt{2}} = \log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$

13. 정답 ③

$\log_2 \sqrt{32} - \log_4 \sqrt{8} = \frac{1}{2}\log_2 2^5 - \frac{1}{4}\log_2 2^3 = \frac{5}{2} - \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$

14. 정답 ④ 계산능력 – 지수와 로그

$\log_2 5 + \log_4 \frac{1}{100} = \log_2 5 + \log_4 10^{-2}$

$= \log_2 5 + \left(\frac{-2}{2}\log_2 10\right) = \log_2 \frac{5}{10}$

$= \log_2 2^{-1} = -1$

15. 정답 ①

$\sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{4 \times 9} = \sqrt[3]{36} = 6^{\frac{2}{3}}$ 이므로

$\log_6 \sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{9} = \log_6 6^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$

16. 정답 ④

(주어진 식)$= \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^6 + \log_3 3^2 = 9 + 2 = 11$

17. 답 ① 로그의 계산

$(\log_6 2)^2 + 2\log_6 2 \cdot \log_6 3 + (\log_6 3)^2$

$= (\log_6 2 + \log_6 3)^2 = (\log_6 6)^2 = 1$

18. 정답 ①

$\log_3 6 + \log_3 2 - \log_3 4 = \log_3 \frac{6 \times 2}{4} = \log_3 3 = 1$

19. 정답 ⑤

$\sqrt[3]{27} + \log_3 81 = \sqrt[3]{3^3} + \log_3 \sqrt{(3^2)^2} = 3 + 2 = 5$

20. 정답 ①

$\log_2(2+\sqrt{2})-\log_2(\sqrt{2}+1)$

$=\log_2\dfrac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}=\log_2\sqrt{2}=\log_2 2^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}$

21. 정답 ②

$\dfrac{1}{\sqrt[3]{8}}\times\log_3 81=\dfrac{1}{2}\times\log_3 3^4=\dfrac{1}{2}\times 4=2$

22. 정답 ③

[출제의도] 로그 계산하기

$\log_3\left(\sqrt{3^3}\cdot\sqrt[3]{3}\right)^2=\log_3\left(3^{\frac{3}{2}}\times 3^{\frac{1}{3}}\right)^2=\log_3 3^{\frac{11}{3}}=\dfrac{11}{3}$

23. 정답 ⑤

[출제의도] 로그를 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\log_5 3\times\left(\log_3\sqrt{5}-\log_{\frac{1}{9}}125\right)=\log_5 3\times\left(\dfrac{1}{2}\log_3 5+\dfrac{3}{2}\log_3 5\right)$

$=\log_5 3\times 2\log_3 5=2$

24. 정답 3

[출제의도] 로그의 성질을 이해하여 계산하기

$\log_2 3-\log_2\dfrac{9}{2}+\log_2 12=\log_2\dfrac{3\times 12}{\frac{9}{2}}=\log_2 8=3$

25. 정답 ②

$(\text{ 주어진 식 })=\dfrac{1}{2}(\log_2 2^4-\log_2 7)+\dfrac{1}{2}\log_2 7$

$=2-\dfrac{1}{2}\log_2 7+\dfrac{1}{2}\log_2 7=2$

26. 정답 ①

$\log_2\dfrac{1}{\sqrt{5}+1}+\log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{5}-1)$

$=\log_2\dfrac{1}{\sqrt{5}+1}+\log_2\dfrac{1}{\sqrt{5}-1}$

$=\log_2\dfrac{1}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}$

$=\log_2\dfrac{1}{4}=\log_2 2^{-2}=-2$

27. 답 40

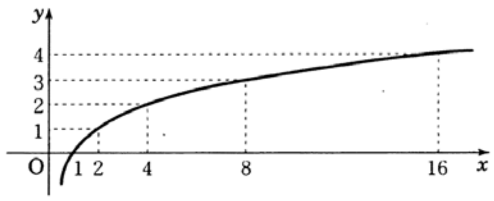
$3a-b=3\log_3 2-(-\log_3 5)=\log_3 2^3+\log_3 5$

$=\log_3(2^3\cdot 5)=\log_3 40$

$\therefore\ 3^{3a-b}=3^{\log_3 40}=40$

28. 답 ①

$y=\log_2 x$ 의 그래프를 그리면 아래 그림과 같다.



$y=1$ 일 때, $x=2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ (2^2-1)$ 의 14 개

$y=2$ 일 때, $x=4,\ 5,\ 6,\ \cdots,\ (2^3-1)$ 의 12 개

$y=3$ 일 때, $x=8,\ 9,\ 10,\ \cdots,\ (2^4-1)$ 의 8 개

따라서 구하는 두 자연수 $x,\ y$ 의 순서쌍 $(x,\ y)$ 의 개수는 $14+12+8=34$ (개)

29. 정답 ③

$1<a<b<10$이므로 $\log_a b=k$라 하면

$1<k=\log_a b<\log_a 10\le\log_2 10<4$

$k=2$ 또는 $k=3$

(i) $k=2$일 때, $a=2$이면 $b=4$이고, $a=3$이면 $b=9$이다.

(ii) $k=3$일 때, $a=2$이면 $b=8$이다.

따라서, 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 3개다.

30. 정답 ②

이해력–지수함수와 로그함수

$\log_a b=\log_b a^4$

$\log_a b=\dfrac{4}{\log_a b}$

$(\log_a b)^2=4$

$\log_a b=2\ (\because\ \log_a b>0)$

$\therefore\ b=a^2$

따라서 구하는 순서쌍 (a,b)는 $(2,4),(3,9),(4,16),\cdots,(9,81)$로 8개이다.

31. 정답 ② 이해력 – 지수와 로그

$-3=\log_3\dfrac{1}{27}<\log_3\dfrac{1}{10}<\log_3\dfrac{1}{9}=-2$ 이므로

$-3<\log_3\dfrac{1}{10}<-2$

$3=\log_2 8<\log_2 10<\log_2 16=4$ 이므로

$3<\log_2 10<4$

따라서, 정수n 은 $-2,-1,0,1,2,3$ 이므로 구하는 모든 정수 n의 값의 합은 $-2-1+0+1+2+3=3$

32. 정답 5

$n<\log_4 2010<n+1$에서

$4^4=1024<2010<4^6=4096$이므로 $5<\log_4 2010<6$

$\therefore\ n=5$

33. 정답 23

$(\log_4 243+\log_8 81)\log_3 64$

$=\left(\frac{5\log 3}{2\log 2}+\frac{4\log 3}{3\log 2}\right)\frac{6\log 2}{\log 3}=15+8=23$

34. 답 ④

$N=2^4\cdot 3^2=144$이므로 N의 양의 약수의 개수는

$(4+1)\cdot(2+1)=15$

이들 15개의 약수 중 k번째로 작은 수와 k번째로 큰 수를 곱하면

$144=12^2$이다.

예를 들면 $1\cdot 144,\ 2\cdot 72,\ 3\cdot 48,\ \cdots$

따라서 $a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdots a_{15}=(12^2)^7\cdot 12=12^{15}$이므로

$\log_{12}a_1+\log_{12}a_2+\log_{12}a_3+\cdots+\log_2 a_{15}$

$=\log_{12}(a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdots a_{15})=\log_{12}12^{15}=15$

35. 답 670

$x^3=1$의 한 허근이 ω이므로 $\omega=1,\ \omega^2+\omega+1=0$

$\therefore\ (1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega^3)$

$=(1+\omega^4)(1+\omega^5)(1+\omega^6)$

$\vdots$

$=(1+\omega^{2008})(1+\omega^{2009})(1+\omega^{2010})$

$\therefore\ P=\{(1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega^3)\}^{670}$

$=\{2(1+\omega+\omega^2+\omega^3)\}^{670}=2^{670}$

$\therefore\ \log_2 P=670$

36. 정답 ⑤

$a=\log_2 3^b=b\log_2 3\quad\therefore\ \frac{a}{b}=\log_2 3$

$a=\log_2 5^c=c\log_2 5\quad\therefore\ \frac{a}{c}=\log_2 5$

$\therefore\ \frac{a}{b}+\frac{a}{c}=\log_2 3+\log_2 5=\log_2 15$

37. 정답 ④

$x^2=y^3=z^4=a$라 하면 $x=a^{\frac{1}{2}},\ y=a^{\frac{1}{3}},\ z=a^{\frac{1}{4}}$

$\log_x y+\log_y z+\log_z x=\log_{a^{\frac{1}{2}}}a^{\frac{1}{3}}+\log_{a^{\frac{1}{3}}}a^{\frac{1}{4}}+\log_{a^{\frac{1}{4}}}a^{\frac{1}{2}}$

$=\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+2=\frac{41}{12}$

38. 정답 36

$5^{a+b}=4$에서 $a+b=\log_5 4\ \cdots$ ㉠

$2^{a-b}=6$에서 $a-b=\log_2 6\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 변끼리 곱하면

$a^2-b^2=\log_5 4\times\log_2 6$

$=2\log_5 2\times\frac{\log_5 6}{\log_5 2}$

$=2\log_5 6=\log_5 36$

$\therefore 5^{a^2-b^2}=36$

39. 정답 225

$2^a\times 9^b=2^a\times 3^{2b}=2^{\log_2 9}\times 3^{2\log_3 5}=9\times 25=225$

40. 정답 80

$\log_a b^4=\log_b a^9$에서 $4\log_a b=9\log_b a$

$4\log_a b=\frac{9}{\log_a b},\ (\log_a b)^2=\frac{9}{4}$

$\log_a b=\frac{3}{2}\ (\because\ \log_a b>0)\qquad\therefore\ b=a^{\frac{3}{2}}$

따라서 구하는 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(4,\ 8),\ (9,\ 27),\ (16,\ 64)$의 3개가 존재한다.

따라서 $a+b$의 최댓값은 $16+64=80$이다.

41. 정답 19

$x=\log(t-5),\ \ y=\log(t-8)$ 이므로

$x+y=\log(t-5)+\log(t-8)$

$=\log\{(t-5)(t-8)\}\le 1$

$t^2-13t+40\le 10,\ (t-3)(t-10)\le 0$

$\therefore\ 3\le t\le 10$

이때, 진수 조건에서 $t>8$이므로 $8<t\le 10$이다.

따라서 모든 정수 t의 값의 합은 $9+10=19$이다.

42. 정답 ①

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해

$\log_2\alpha+\log_2\beta=\log_2\alpha\beta=5$

$\therefore\alpha\beta=2^5=32$

43. 정답 32

$ab=64$의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$\log_2 ab=\log_2 64$

$\log_2 a+\log_2 b=6\qquad\cdots$㉠

$\log_4\frac{b}{a}=4$에서

$\log_2\frac{b}{a}=8$

$\log_2 b-\log_2 a=8\qquad\cdots$㉡

㉠, ㉡에서 $\log_2 a=-1,\ \log_2 b=7$

$\therefore 3\log_2 a+5\log_2 b=3(-1)+5\cdot 7=32$

44. 답 25

$A=\begin{pmatrix}0&2\\5&0\end{pmatrix}$에서

$A^2=\begin{pmatrix}0&2\\5&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2\\5&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&0\\0&10\end{pmatrix}=10E$

$\therefore A^{25}=(A^2)^{12}A=10^{12}A=\begin{pmatrix}0&2\cdot 10^{12}\\5\cdot 10^{12}&0\end{pmatrix}$

$\therefore \log_{10}bc=\log_{10}2\cdot 10^{12}\cdot 5\cdot 10^{12}=\log_{10}10^{25}=25$

45. 정답 ⑤

$\log(\sin\theta)-\log(-\cos\theta)=-\frac{1}{2}\log 3$에서

$\log\left(\frac{\sin\theta}{-\cos\theta}\right)=\log 3^{-\frac{1}{2}}$

$\log(-\tan\theta)=\log\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore -\tan\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\therefore \cot\theta=\sqrt{3}$

$\therefore \log_3(-\cot\theta)=\log_3\sqrt{3}=\frac{1}{2}$

46. 정답 ①

$1<\log_2\frac{7}{2}<2$이므로 $x=1$, $y=\log_2\frac{7}{2}-1=\log_2\frac{7}{4}$

$\therefore \left(\frac{1}{4}\right)^x+2^y=\left(\frac{1}{4}\right)^1+2^{\log_1\frac{7}{4}}=\frac{1}{4}+\frac{7}{4}=2$

47. 답 53

$\log_3 n=f(n)+\alpha$ $(f(n)$은 정수, $0\le\alpha<1)$라 하면

$\log_3 2n=\log_3 2+\log_3 n=\log_3 2+f(n)+\alpha$

$=(f(n)+1)+(\log_3 2+\alpha-1)$이므로

$f(2n)=f(n)+1$이 성립하려면

$0\le\log_3 2+\alpha-1<1$

$1-\log_3 2\le\alpha<2-\log_3 2$

$\log_3\frac{3}{2}\le\alpha<1$ $(\because 0\le\alpha<1)$

$f(n)+\log_3\frac{3}{2}\le f(n)+\alpha<f(n)+1$

$f(n)+\log_3\frac{3}{2}\le\log_3 n<f(n)+1$

$3^{f(n)+\log_3\frac{3}{2}}\le n<3^{f(n)+1}$

$\frac{3}{2}\cdot 3^{f(n)}\le n<3\cdot 3^{f(n)}$

(i) $f(n)=2$일 때

$\frac{3}{2}\cdot 3^2\le n<3\cdot 3^2$에서 $13.5\le n<27$

$n=14,\ 15,\ \cdots,\ 26$

따라서 n의 개수는 13이다.

(ii) $f(n)=3$일 때

$\frac{3}{2}\cdot 3^2\le n<3\cdot 3^2$에서 $40.5\le n<81$

$n=41,\ 15,\ \cdots,\ 80$

따라서 n의 개수는 40이다.

(iii) $f(n)=4$일 때

$\frac{3}{2}\cdot 3^4\le n<3\cdot 3^4$에서 $121.5\le n<243$

따라서 $f(n)$이 4 이상일 때는 조건을 만족하는 두 자리의 자연수가 존재하지 않는다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 자연수 조건을 만족하는 두 자리의 자연수 n의 개수는 $13+40=53$이다.

48. 정답 ③

$2\circ 4=2^{-4}\times 4^{\frac{1}{2}}=2^{-4}\times 2=2^{-3}$

$4\circ 2=4^{-2}\times 2^{\frac{1}{4}}=2^{-4}\times 2^{\frac{1}{4}}=2^{-\frac{15}{4}}$

$\therefore \frac{2\circ 4}{4\circ 2}=\frac{2^{-3}}{2^{-\frac{15}{4}}}=2^{-3+\frac{15}{4}}=2^{\frac{3}{4}}$

$\therefore \log_2\left(\frac{2\circ 4}{4\circ 2}\right)=\log_2 2^{\frac{3}{4}}=\frac{3}{4}$

49. 정답 13

$20^{1+1}=400$은 세 자리의 자연수이므로 $a_{11}=2$

$20^{1+2}=20^{2+1}=8000$은 네 자리의 자연수이므로

$a_{12}=a_{21}=3$

$20^{2+2}=160000$은 여섯 자리의 자연수이므로 $a_{22}=5$

$\therefore A=\begin{pmatrix}2&3\\3&5\end{pmatrix}$

따라서 구하는 합은 13이다.

50. 답 72

$3^2\diamondsuit 2^3=(3^2)^{\log_3 2^3}=(2^3)^{\log_3 3^2}=(2^3)^2=2^6$

$2^6\diamondsuit 9^6=(2^6)^{\log_3 9^6}=(2^6)^{\log_3 3^{12}}=(2^6)^{12}=2^{72}$

이므로 $\log_2\{(3^2\diamondsuit 2^3)\diamondsuit 9^6\}=2^6\diamondsuit 9^6=2^{72}$

$\therefore \log_2\{(3^2\diamondsuit 2^3)\diamondsuit 9^6\}=\log_2 2^{72}=72$

51. 답 29

x를 $x-\sqrt{3}$으로 나누었을 때의 나머지 R_1은

$R_1=\sqrt{3}=3^{\frac{1}{2}}$

x^2을 $x-\sqrt[3]{R_1}$로 나누었을 때의 나머지 R_2는

$R_2=(\sqrt[3]{R_1})^2=R_1^{\frac{2}{3}}=\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}=3^{\frac{1}{3}}$

x^3을 $x-\sqrt[4]{R_2}$로 나누었을 때의 나머지 R_3은

$R_3=(\sqrt[4]{R_2})^3=R_2^{\frac{3}{4}}=\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}=3^{\frac{1}{4}}$

x^4을 $x-\sqrt[5]{R_3}$으로 나누었을 때의 나머지 R_4는

$R_4=(\sqrt[5]{R_3})^4=R_3^{\frac{4}{5}}=\left(3^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{4}{5}}=3^{\frac{1}{5}}$

$\therefore \log_3(R_3R_4)=\log_3 3^{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}}=\log_3 3^{\frac{9}{20}}=\frac{9}{20}$

$\therefore p+q=9+20=29$

52. 정답 ⑤

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해

$(\log_3\alpha)(\log_3\beta)=\dfrac{6}{a}=2 \qquad \therefore a=3$

이 때, $\log_3\alpha+\log_3\beta=\dfrac{12}{a}$ 이므로 $\log_3\alpha\beta=\dfrac{12}{3}=4$

$\therefore \alpha\beta=3^4=81$

53. 정답 5

$f(x)=\log_2\dfrac{x+4}{x+3}$ 이므로

$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(124)$

$=\log_2\dfrac{5}{4}+\log_2\dfrac{6}{5}+\log_2\dfrac{7}{6}+\cdots+\log_2\dfrac{128}{127}$

$=\log_2\left(\dfrac{5}{4}\times\dfrac{6}{5}\times\dfrac{7}{6}\times\cdots\times\dfrac{128}{127}\right)$

$=\log_2 32=5$

54. 정답 39

$\dfrac{1}{2}\leq\log_{10}N<1\Leftrightarrow\sqrt{10}\leq N<10$

따라서 $N=4,5,6,7,8,9$ 이므로 모든 N의 합은

$4+5+6+7+8+9=39$

55. 정답 967

$\log 3^{2010}=2010\log 3=2010\times 0.4771$

$=958.971$

$n+\log a<958.971<n+\log(a+1)$

$\therefore\ n=958$

$\log a<0.971<\log(a+1)$

$\log 9=2\log 3=2\times 0.4771=0.9542$ 이므로

$\log 9<0.971<\log 10$

$\therefore\ a=9$

$\therefore\ a+n=9+958=967$

56. 정답 ⑤

ㄱ. $2^x\cdot 3^y=6^z\cdot 6^z=36^z$ (참)

ㄴ. $2^z\cdot 3^{z-y}=\dfrac{2^z\cdot 3^z}{3^y}=\dfrac{6^z}{3^y}=1$ (참)

ㄷ. $2^x=3^y=3^{1-x}$ 에서 $6^x=3,\ x=\log_6 3$

$6^z=2^x=2^{\log_6 3}$ 에서 $z=\log_6 2^{\log_6 3}=\log_6 2\cdot\log_6 3$ (참)

57. 답 ④

ㄱ. (참) $N(b,\ a)=\log_b a=\dfrac{\log_a a}{\log_a b}=\dfrac{1}{\log_a b}=\dfrac{1}{N(a,\ b)}$

ㄴ. (참) $N\left(\dfrac{1}{a},\ \dfrac{1}{b}\right)=\log_{\frac{1}{a}}\dfrac{1}{b}=\log_{a^{-1}}b^{-1}=\log_a b=N(a,\ b)$

ㄷ. (거짓) [반례] $a=2,\ b=4, m=2$라 하면

$N(2\cdot 2,\ 2\cdot 4)=N(4,\ 8)=\log_4 8=\dfrac{3}{2}$

$N(2,\ 4)=\log_2 4=2$

$\therefore N(ma,\ mb)\neq N(a,\ b)$

58. 정답 ①

a의 네제곱근 중 1보다 큰 실수인 것이 존재하기 위한 필요충분 조건은 $a>1$인 것이다.

ㄱ. $a=-\sqrt[3]{-2}=\sqrt[3]{2}>1$ 이므로 $-\sqrt[3]{-2}$ 의 네제곱근 중 1보다 큰 실수인 것이 존재한다.

ㄴ. $\log_{0.2}1<\log_{0.2}0.5<\log_{0.2}0.2$ 이므로 $0<a<1$

따라서, a의 네제곱근 중 1보다 큰 실수는 존재하지 않는다.

ㄷ. $\log_\pi\dfrac{3}{\pi}<\log_\pi 1=0$ 이므로 $a<0$

따라서, a의 네제곱근 중 실수인 것이 존재하지 않는다.

따라서, a의 네제곱근 중 1보다 큰 것이 존재하는 것은 ㄱ뿐이다.

59. 정답 400

$80=10\left(12+\log\dfrac{a}{4\times 10^6}\right)$ 에서

$\log\dfrac{a}{4\times 10^6}=-4,\ \dfrac{a}{4\times 10^6}=10^{-4}$

$\therefore\ a=4\times 10^2=400$

60. 정답 ③

$8\rightarrow\boxed{\mathrm{P}}\rightarrow 2^8\rightarrow\boxed{\mathrm{Q}}\rightarrow 8\cdot\dfrac{1}{2}\rightarrow\boxed{\mathrm{P}}\rightarrow 2^4\rightarrow\boxed{\mathrm{P}}\rightarrow$

$2^{16}\rightarrow\boxed{\mathrm{Q}}\rightarrow 16\cdot\dfrac{1}{2}=k$

$\therefore\ k=2^3$

$\therefore\ \log_2 k=3$

61. 정답 ③

$A_2=\left\{x\ \middle|\ \dfrac{1}{2}\log 2\leq x\leq\dfrac{1}{2}\log 3\right\}$

$=\left\{x\ \middle|\ \dfrac{1}{12}\log 2^6\leq x\leq\dfrac{1}{12}\log 3^6\right\}$

$=\left\{x\ \middle|\ \dfrac{1}{12}\log 64\leq x\leq\dfrac{1}{12}\log 729\right\}$

$A_3=\left\{x\ \middle|\ \dfrac{1}{3}\log 3\leq x\leq\dfrac{1}{3}\log 4\right\}$

$=\left\{x\ \middle|\ \dfrac{1}{12}\log 3^4\leq x\leq\dfrac{1}{12}\log 4^4\right\}$

$=\left\{x\ \middle|\ \dfrac{1}{12}\log 3^4\leq x\leq\dfrac{1}{12}\log 256\right\}$

$A_4=\left\{x\ \middle|\ \dfrac{1}{4}\log 4\leq x\leq\dfrac{1}{4}\log 5\right\}$

$=\left\{x\ \middle|\ \dfrac{1}{12}\log 4^3\leq x\leq\dfrac{1}{12}\log 5^3\right\}$

$=\left\{x\ \middle|\ \dfrac{1}{12}\log 64\leq x\leq\dfrac{1}{12}\log 125\right\}$

이므로 $A_3 \subset A_2$, $A_4 \not\subset A_3$, $A_4 \subset A_2$
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

62. 정답 ③
[출제의도] 로그의 뜻과 그 성질을 이해하여 추론하기
(가) $\log_a b$ (나) 1 (다) a^2

63. 정답 128
빛의 투과도가 a일 때 흡광도가 0.32이므로 관계식에 의해 $0.32 = \log\frac{1}{a}$이 성립한다. 따라서 투과도가 $\frac{a}{9}$일 때의 흡광도 A는

$A = \log\frac{9}{a} = 2\log 3 + \log\frac{1}{a} = 2\times 0.48 + 0.32 = 1.28$

$\therefore 100A = 128$

64. 정답 3
두 약물의 시간 간격을 각각 T_A, T_B라 한다. C_1, C_2의 비례상수를 각각 k_1, k_2라 하면

$T_A = 3\log_a\frac{bk_2}{bk_1}$, $T_B = 3\log_a\frac{2ak_2}{2a^2k_1}$

$\therefore\ T_A - T_B = 3\log_a\frac{bk_2}{bk_1} - 3\log_a\frac{2ak_2}{2a^2k_1} = 3\log_a a = 3$

65. 정답 12
$xyz\cdot\log x = 2\log y$, …… ㉠
$(xyz+1)\cdot\log y = 3\log z$, …… ㉡
$(xyz+2)\cdot\log z = 4\log x$ …… ㉢
각 변끼리 곱하면
$xyz(xyz+1)(xyz+2)\log x\cdot\log y\cdot\log z = 24\log x\cdot\log y\cdot\log z$
$\log x\cdot\log y\cdot\log z \neq 0$이므로 $xyz(xyz+1)(xyz+2) = 24$
$xyz = t$로 놓으면 $t(t+1)(t+2) - 24 = 0$
$t^3 + 3t^2 + 2t - 24 = 0$, $(t-2)(t^2+5t+12) = 0$
$\therefore t = 2\ (\because\ t>0)$ $\therefore xyz = 2$
㉠, ㉡, ㉢에서 $\log x = \log t = \log z$이므로
$x = y = z = \sqrt[3]{2}$
$\therefore x^6 + y^6 + z^6 = 2^2 + 2^2 + 2^2 = 12$

66. 정답 13
[출제의도] 로그의 기본성질을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.
주어진 조건에서 각 변끼리 더하면
$2(\log_2 ab + \log_2 bc + \log_2 ca) = 20$
$\log_2 ab + \log_2 bc + \log_2 ca = 10$ …㉠
따라서 $\log_2 ab = 2$, $\log_2 bc = 3$, $\log_2 ca = 5$이므로
$ab = 4$, $bc = 8$, $ca = 32$ …㉡
㉠에서 $\log_2 (abc)^2 = 10$, $\log_2 abc = 5$
$\therefore\ abc = 32$ …㉢
㉡, ㉢에서 $a = 4$, $b = 1$, $c = 8$이므로 $a+b+c = 13$

67. 답 157 로그의 성질
$\log_m n = \frac{3}{2}$, $\log_p q = \frac{5}{4}$에서

$n = m^{\frac{3}{2}}$, $q = p^{\frac{5}{4}}$ …㉠

이므로 $m = n^{\frac{2}{3}}$, $p = q^{\frac{4}{5}}$

$\therefore\ m - p = n^{\frac{2}{3}} - q^{\frac{4}{5}} = \left(n^{\frac{1}{3}} - q^{\frac{2}{5}}\right)\left(n^{\frac{1}{3}} + q^{\frac{2}{5}}\right) = 9$

㉠에서 $m^3 = n^2$이고, m, n은 자연수이므로 m은 제곱수이고, n은 세제곱수이다.
마찬가지로 $p^5 = q^4$이므로 p는 네제곱수, q는 다섯제곱수이다.
따라서 $n^{\frac{1}{3}} - q^{\frac{2}{5}} = 1$, $n^{\frac{1}{3}} + q^{\frac{2}{5}} = 9$이므로
$n^{\frac{1}{3}} = 5$, $q^{\frac{2}{5}} = 4$에서 $n = 125$, $q = 32$
$\therefore\ n + q = 157$

68. **정답** 48 이해능력 – 지수와 로그
$[\log_{16} x] = n$ 에서
$n \le \log_{16} x < n+1$ …… ㉠
$[\log_4 x] = 2n$ 에서
$2n \le \log_4 x < 2n+1$ 이므로
$n \le \log_{16} x < n + \frac{1}{2}$ …… ㉡
㉠, ㉡ 에서 $n \le \log_{16} x < n + \frac{1}{2}$
따라서 구하는 자연수 x 의 값의 범위는
$16^n \le x < 16^{n+\frac{1}{2}}$
$n = 1$ 일 때, $16 \le x < 16^{\frac{3}{2}} = 2^6 = 64$
따라서 구하는 개수는 $64 - 16 = 48$ (개) 이다.

69. 답 ②
$\log(x+y) = \log x + \log y$에서
$x + y = xy$ ……… ㉠
$y + 4x = k$라 하면 $y = -4x + k$이므로 이식을 ㉠에 대입하면
$x + (k - 4x) = x(k - 4x)$
$4x^2 - (k+3)x + k = 0$
위의 방정식이 1보다 큰 근을 가져야 하고 $f(x) = 4x^2 - (k+3)x + k$라 하면 $f(1) = 1$이므로
$D = (k+3)^2 - 16k \ge 0$
$k^2 - 10k + 9 \ge 0$, $(k-1)(k-9) \ge 0$
$k \le 1$ 또는 $k \ge 9$ ……… ㉡
대칭축이 1보다 커야하므로 $-\frac{-(k+3)}{8} > 1$
$k > 5$ ……… ㉢
㉡, ㉢에서 $k \ge 9$

따라서 $y+4x$의 최솟값은 9이다.

70. 정답 35

$\log 13^{30}=30\times1.114=33.42$

$\log 2=0.301$, $\log 3=0.477$이므로

$\log 2<0.42<\log 3$

양변에 33을 더하여 정리하면

$\log(2\times10^{33})<33.42=\log 13^{30}<\log(3\times10^{33})$

$\therefore 2\times10^{33}<13^{30}<3\times10^{33}$

$a=2$, $b=33$

$\therefore\ a+b=35$

71. 정답 ②

$2\log_3(a^2+b^2-c^2)=1+2\log_3 a+2\log_3 b$에서

$\log_3(a^2+b^2-c^2)=\frac{1}{2}+\log_3 a+\log_3 b=\log_3\sqrt{3}\,ab$

제이코사인법칙에서 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$이므로

$2ab\cos C=\sqrt{3}\,ab$, $\cos C=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore\ C=\frac{\pi}{6}$

이 때, 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면 사인법칙에서

$\frac{c}{\sin\frac{\pi}{6}}=2R \quad \therefore R=c$

72. 답 ③

ㄱ. $8<10<16$, $8<12<16$이므로

$f(10)=[\log_2 10]=3$, $f(12)=[\log_2 12]=3$

$\therefore\ f(10)=f(12)$ (참)

ㄴ. $g(6)=\log_2 6-[\log_2 6]=\log_2 6-2$

$=\log_2\frac{6}{4}=\log_2\frac{3}{2}$

$g(20)=\log_2 20-[\log_2 20]=\log_2 20-4$

$=\log_2\frac{20}{16}=\log_2\frac{5}{4}$

$\therefore\ g(6)>g(20)$ (거짓)

ㄷ. $g(5)=\log_2 5-[\log_2 5]=\log_2 5-2=\log_2\frac{5}{4}$

이때 $g(a)=\log_2\frac{5}{4}$를 만족시키는 자연수 a는

$a=\frac{5}{4}\cdot 2^n$의 꼴이고, 이 중 두 자릿수는

$n=3, 4, 5, 6$일 때 10, 20, 40, 80의 4개다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

73. 정답 ④

$0\le\log_2 x-[\log_2 x]<1$, $0\le\log_2 y-[\log_2 y]<1$이므로

$\log_2 x-[\log_2 x]+\log_2 y-[\log_2 y]=0$이 성립하려면

$\log_2 x-[\log_2 x]=0$, $\log_2 y-[\log_2 y]=0$

그러므로 x, y는 모두 $2^k\,(k=0, 1, 2, 3, \cdots, 9)$의 꼴이다.

$\therefore\{xy|\log_2 x+\log_2 y=[\log_2 x]+[\log_2 y]\}$

$=\{2^m|m=0, 1, 2, \cdots, 18\}$

따라서 구하는 원소의 합은 $\frac{2^0\times(2^{19}-1)}{2-1}=2^{19}-1$이다.

74. 정답 ⑤

$\log_5 x^2=2 \Leftrightarrow x^2=25$에서 $x=\pm5$

$\therefore\ A=\{-5, 5\}$

또, $\sqrt{10}^{\log|x-3|}=\sqrt{2} \Leftrightarrow |x-3|^{\log\sqrt{10}}=\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow |x-3|^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$에서 $x-3=\pm2$

$\therefore\ x=1$ 또는 $x=5$ $\qquad\therefore\ B=\{1, 5\}$

$A\cap C=\phi$이므로 집합 C는 -5와 5를 원소로 갖지 않고

$B\cap C\ne\phi$이므로 집합 C는 1 또는 5를 원소로 갖는다.

따라서 집합 C는 1을 원소로 갖고, -5와 5를 원소로 갖지 않는다.

1이 방정식 $x^2+ax+a^2-21=0$의 해이므로 $a^2+a-20=0$

$\therefore\ (a+5)(a-4)=0 \qquad \therefore\ a=-5$ 또는 $a=4$

(i) $a=-5$일 때 $C=\{x|x^2-5x+4=0\}=\{1, 4\}$

(ii) $a=4$일 때 $C=\{x|x^2+4x-5=0\}=\{-5, 1\}$ (조건을 만족하지 못한다.)

따라서 집합 C의 원소의 총합은 $1+4=5$이다.

75. 답 ③

$2<\log 150<3$이므로

$x=2$, $y=\log 150-2=\log\frac{150}{100}=\log\frac{3}{2}$

$\therefore 10^x+10^{-y}=10^2+10^{-\log\frac{3}{2}}=100+\frac{2}{3}=\frac{302}{3}$

76. 정답 ③

ㄱ. (참) 2010은 네 자리의 수이므로 $\log 2010$의 지표는 3이다.

$\therefore\ I(2010)=3$

ㄴ. (거짓) $I(x)=n$

즉, $\log x=n+\alpha\ (0<\alpha<1)$라 할 때,

$\log\frac{1}{x}=-\log x=-n-\alpha=-n-1+(1-\alpha)$

$\therefore\ I\left(\frac{1}{x}\right)=-n-1$

$\therefore\ I(x)+I\left(\frac{1}{x}\right)=n-n-1=-1$

ㄷ. (참) $I(x)=n$이라 하면

$\log x=n+\alpha\ (0\le x<1)$이므로

$\log(x\sqrt{10})=\log x+\frac{1}{2}=n+a+\frac{1}{2}$,

$\log x^2=2\log x=2n+2\alpha$

(i) $0\le\alpha<\frac{1}{2}$이면 $I(x\sqrt{10})=n$, $I(x^2)=2n$

(ii) $\frac{1}{2} \le \alpha < 1$이면 $I(x\sqrt{10}) = n+1$, $I(x^2) = 2n+1$

그러므로 (i), (ii)에 의해

$I(x\sqrt{10}) + I(x) = I(x^2)$이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

77. 정답 ④

$\log x^2 = 2\log x$이므로 $\frac{5}{2} \le \log x < 3$

$\therefore \log x = 2 + \alpha \quad \left(\frac{1}{2} \le \alpha < 1\right)$

$\log x^2 = 2\log x = 4 + 2\alpha$

$\log\sqrt{x} = \frac{1}{2}\log x = 1 + \frac{\alpha}{2}$

$\therefore \log x^2 + \log\sqrt{x} - [\log\sqrt{x}]$

$= (4+2\alpha) + \left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) - 1 = 4 + \frac{5\alpha}{2}$

이므로 $4 + \frac{5\alpha}{2} = 6$에서 $\frac{5\alpha}{2} = 2$

$\therefore \alpha = \frac{4}{5}$

$\therefore \log x = 2 + \frac{4}{5} = \frac{14}{5}$

78. 정답 16

$x^a = y^b = (xy)^2$ 의 각 변에 상용로그를 취하면

$a\log x = b\log y = 2(\log x + \log y)$

$a = 2\left(1 + \frac{\log y}{\log x}\right)$, $b = 2\left(1 + \frac{\log x}{\log y}\right)$

$a - 2 = 2\left(\frac{\log y}{\log x}\right)$, $b - 2 = 2\left(\frac{\log x}{\log y}\right)$

$\therefore \ (a-2)(b-2) = 4$

$ab = 2(a+b)$

$(ab)^2 - 4(a^2+b^2) = 4(a+b)^2 - 4(a^2+b^2) = 8ab$

$\frac{(ab)^2 - 4(a^2+b^2)}{a+b} = \frac{8ab}{a+b} = \frac{16(a+b)}{a+b} = 16$

79. 답 ⑤

$100 < x < 1000$이므로 $2 < \log x < 3 \cdots\cdots$ ㉠

조건에서 $\log x$와 $\log\frac{1}{x}$의 가수가 같으므로

$\log x - \log\frac{1}{x} = \log x - (-\log x)$

$= 2\log x = (\text{정수})$

그런데. ㉠에서 $4 < 2\log x < 6$이므로 $2\log x = 5$

$\therefore \log x = \frac{5}{2}$

80. 답 10

$\log x$의 지표가 3이므로 $\log x = 3 + \alpha\,(0 \le \alpha < 1)$라 하면

$\log\sqrt{x} = \frac{1}{2}\log x = \frac{1}{2}(3+\alpha) = \frac{3}{2} + \frac{\alpha}{2}$

$= 1 + \frac{1+\alpha}{2} \quad \left(\because \frac{1}{2} \le \frac{1+\alpha}{2} < 1\right)$

$\log x$의 가수와 $\log\sqrt{x}$의 가수의 합이 1이므로

$\alpha + \frac{1+\alpha}{2} = 1$

$\frac{3}{2}\alpha = \frac{1}{2}$

$\therefore \alpha = \frac{1}{3}$

$\log x = 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$

$\therefore \log x^3 = 3\log x = 3 \times \frac{10}{3} = 10$

81. 정답 ①

[출제의도] 상용로그의 지표를 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$A = \{2,\ 2^2,\ 2^3,\ 2^4,\ \cdots\}$이고 집합 A의 원소 중에서 상용로그의 지표가 1인 자연수는 두 자리 자연수이다.

따라서 주어진 조건을 만족시키는 원소는 2^4, 2^5, 2^6이므로 $2^4 + 2^5 + 2^6 = 112$이다.

82. 정답 14

$\log 20 = 1 + \log 2 = 1.301$이므로

$\log 20^{-10} = -10\log 20 = -13.01 = -14 + 0.99$

그러므로 $\log 20^{-10}$의 지표는 -14, 가수는 0.99이다.

따라서 20^{-10}은 소수 14번째 자리에서 처음으로 0이 아닌 수가 나온다.

$\therefore \ n = 14$

83. 정답 ④ [출제의도] 추론 능력(추측) - 지수와 로그

a^{100} 은 70자리의 자연수이므로

$69 \le \log a^{100} < 70$

$69 \le 100\log a < 70$

$0.69 \le \log a < 0.7 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

또한 a^b 은 15자리의 자연수이므로

$14 \le \log a^b < 15$

$14 \le b\log a < 15 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉡÷㉠을 하면

$20 < b < 21.7\cdots$

따라서, 구하는 자연수 b 는 21 이다.

84. 정답 ②

[출제의도] 지표와 가수의 성질을 이해하기

(가) $[\log x] = [\log 365] = 2$에서 $2 \le \log x < 3$이다.

(나) $\log x^3$과 $\log\frac{1}{x}$의 가수가 같으므로 $\log x^3 - \log\frac{1}{x} = 4\log x$는 정수이다. $8 \le 4\log x < 12$이므로 $4\log x = 8,\ 9,\ 10,\ 11$이다.

따라서 $x=10^2,\ 10^{\frac{9}{4}},\ 10^{\frac{5}{2}},\ 10^{\frac{11}{4}}$ 이므로 모든 양의 실수 x의 곱은 $10^{2+\frac{9}{4}+\frac{5}{2}+\frac{11}{4}}=10^{\frac{19}{2}}$ 이다.

85. 정답 ①

$\log A$ 의 지표와 가수를 각각 n, α 로 놓으면

이차방정식 $6x^2+16x+k=0$ 의 두 근이 n, α 이므로

$$n+\alpha=-\frac{8}{3}=-3+\frac{1}{3}$$

이때 n은 정수이고 $0\le\alpha<1$ 이므로

$$n=-3,\ \alpha=\frac{1}{3}$$

따라서 $n\alpha=\frac{k}{6}$ 에서

$$k=6n\alpha=6\cdot(-3)\cdot\frac{1}{3}=-6$$

86. 정답 17

$\log x, \log x^2, \log x^3$의 지표의 비가 $1:3:5$이므로

$\log x=n+\alpha\ (0\le\alpha<1)$ ……㉠

$\log x^2=3n+\beta\ (0\le\beta<1)$ ……㉡

$\log x^3=5n+\gamma\ (0\le\gamma<1)$ ……㉢

라 하자.

$\log x^2=2\log x,\ \log x^3=3\log x$이므로 ㉠, ㉡, ㉢의 각 변끼리 더하면

$6\log x=9n+(\alpha+\beta+\gamma)=9n+2$ ……㉣

㉠, ㉣에서

$6(n+\alpha)=9n+2$

$\therefore \alpha=\frac{3n+2}{6}$

$0\le\alpha<1$이므로 $0\le\frac{3n+2}{6}<1$

$0\le 3n+2<6,\ -\frac{2}{3}\le n<\frac{4}{3}$

$n\ne0$이므로 $n=1,\ \alpha=\frac{5}{6}$

$\therefore \log x=1+\frac{5}{6}=\frac{11}{6}$

$\therefore p+q=6+11=17$

87. 답 ② 상용로그

$N(x)$는 상용로그 $\log x$의 지표이고, 2010은 네 자리의 자연수이므로 x의 값에 따라 $f(x)$의 값의 변화를 살펴보면 다음 표와 같다.

x	$N(x+2010)$	$N(x)$	$f(x)$
$1\le x<10$	3	0	3
$10\le x<100$	3	1	2
$100\le x<1000$	3	2	1
$1000\le x<7990$	3	3	0
$7990\le x<10000$	4	3	1

$x\ge1000$이면 $f(x)=N(x+2010)-N(x)$의 값은 0또는 1이다. 따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 3이고 최솟값은 0이므로 $f(x)$의 최댓값과 최솟값의 합은 3이다.

88. 정답 29

(가)에서 $3.3010<\log x<3.7781$이므로

$\log x$의 가수를 $a(0\le a<1)$라 하면

$0.3010<a<0.7781$ ……㉠

(나)에서 $\log x^3$과 $\log x$의 가수의 합은 1이다.

$\log x^3$의 가수는 $3a-k\,(k=0,\ 1,\ 2)$이므로

$4a-k=1 \quad \therefore\ a=\frac{1+k}{4}\ (k=0,\ 1,\ 2)$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $k=1$ 또는 $k=2$일 때 성립한다.

$\therefore\ \log x=3+\frac{1}{2}$ 또는 $\log x=3+\frac{3}{4}$

따라서, $x=10^{\frac{7}{2}}$ 또는 $x=10^{\frac{15}{4}}$이므로 $\alpha=\frac{29}{4}$이다.

$\therefore\ 4\alpha=29$

89. 정답 ⑤

$\sum_{k=1}^{2010}\alpha_k$는 $\sum_{k=1}^{2010}\alpha^k$의 실수부분이고 $\alpha^3=-8$이므로

$$\sum_{k=1}^{2010}\alpha^k=\frac{\alpha(\alpha^{2010}-1)}{\alpha-1}$$

$$=\frac{1+\sqrt{3}i)\{(\alpha^3)^{670}-1\}}{(a+\sqrt{3}i)-1}=\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}i}\right)(2^{2010}-1)$$

$\therefore\ 1+\sum_{k=1}^{2010}\alpha_k=1+2^{2010}-1=2^{2010}$

$\log 2^{2010}=2010\cdot\log2=2010\cdot(0.3010)=605.01$

따라서, 606자리의 수이다.

90. 정답 ②

$\log_3 n-[\log_3 n]$은 $\log_3 n$의 소수부분을 의미하므로 주어진 등식은 $\log_3 n$과 $\log_3\frac{9}{n}$의 소수부분이 같다는 뜻이다. 즉,

$$\log_3 n-\log_3\frac{9}{n}=2\log_3 n-2=2(\log_3 n-1)$$

이 정수가 된다.

따라서, n이 3의 거듭제곱 꼴이면 되므로 $1\le n\le10^2$의 범위에서 3의 거듭제곱 꼴은

$$3^0,\ 3^1,\ 3^2,\ 3^3,\ 3^4<10^2<3^5=243$$

이므로 모두 5개이다.

91. 정답 ⑤

$P(x)=[\log x]$는 $\log x$의 지표이고,

$Q(x)=\log x-[\log x]$는 $\log x$의 가수이다.

$P(x)=2$이므로 $\log x$의 지표가 2이고

$2\le\log x<3$ ……㉠

$Q(x^2)=Q(\sqrt{x})$에서 $\log x^2$의 가수와 $\log\sqrt{x}$의 가수가 서로 같

으므로

$\log x^2-\log\sqrt{x}=2\log x-\frac{1}{2}\log x$

$=\frac{3}{2}\log x=$ (정수)

㉠에서 $3\le\frac{3}{2}\log x<\frac{9}{2}$ 이므로 $\frac{3}{2}\log x$ 의 값은 3 또는 4이다.

$\frac{3}{2}\log x=3$ 에서 $\log x=2$ $\quad\therefore\ x=10^2$

$\frac{3}{2}\log x=4$ 에서 $\log x=\frac{8}{3}$ $\quad\therefore\ x=10^{\frac{8}{3}}$

$\therefore\ a=10^2\times10^{\frac{8}{3}}=10^{\frac{14}{3}}$ $\quad\therefore\ \log a=\log 10^{\frac{14}{3}}=\frac{14}{3}$

92. 정답 40

$\log\frac{1}{2}=-\log2=-1+(1-\log2)$ 이므로 $\log\frac{1}{2}$ 의 가수는 $1-\log2$ 이다.

$\log n=1+\alpha$ $(0\le\alpha<1)$라 하면 $0\le\alpha<1-\log2$ 이므로

$1\le\log n<2-\log2=\log50$

$\therefore\ 10\le n<50$

따라서 자연수 n 의 개수는 40 개다.

93. 정답 756

㈎ $3^{[\log_3 x]}=x$ 에서 $[\log_3 x]=\log_3 x$

$\therefore\log_3 x=k$ (k는 정수) $\therefore\ x=3^k$ $\cdots$ ㉠

㈏ $0<[\log x]\le2$ 에서 $[\log x]=1$ 또는 $[\log x]=2$

$\log x$ 의 지표가 1 또는 2 이므로 x 는 두 자리 또는 세 자리의 수이고 그 중 ㉠을 만족시키는 양수 x 는 $3^3, 3^4, 3^5, 3^6$ 이므로 구하는 x 의 최댓값은 $3^6=729$ 이고, 최솟값은 $3^3=27$ 이다.

$\therefore\ 729+27=756$

94. 정답 159

$\log 3^{1000}=1000\times\log3=477.1$ 이므로

$f(3^{1000})=477=a$

$\log\sqrt[3]{10^4}=\log10^{\frac{4}{3}}=\frac{4}{3}=1+\frac{1}{3}$ 이므로

$g(\sqrt[3]{10^4})=\frac{1}{3}=b$

$\therefore ab=477\times\frac{1}{3}=159$

95. 정답 25 이해력 - 지수와 로그

(i) $\log\frac{1}{50}=\log\frac{2}{100}=\log2-2$ 이므로

$-2<\log\frac{1}{50}<-1$

$\therefore f(a)=f\left(\frac{1}{50}\right)=-2$

(ii) $\log\frac{1}{10}<\log\frac{1}{4}<\log1$, 즉 $-1<\log\frac{1}{4}<0$ 이므로

$g(a)=g\left(\frac{1}{4}\right)=\log\frac{1}{4}+1=\log\frac{5}{2}$

(i), (ii)에서

$\log a=f(a)+g(a)=-2+\log\frac{5}{2}=\log\frac{5}{200}$

$\therefore a=\frac{5}{200}$

$\therefore 1000a=25$

96. 답 ④

$\log^2=n+\alpha$ (n은 정수, $0\le\alpha<1$)로 놓으면 $[\log x^2]=n$ 이고,

$\log\frac{1}{x^2}=-n-\alpha$

이때, $[\log x^2]+\left[\log\frac{1}{x^2}\right]=0$ 인 경우는 $\alpha=0$ 이다.

즉, $\log x^2$ 은 정수이고 $10^{-2}\le x^2\le10^8$ 이므로

$-2\le\log x^2\le8$

$\log x^2=-2, -1, 0, \cdots, 8$

$x^2=10^{-2},\ 10^{-1},\ 10^0,\ \cdots,\ 10^8$

$\therefore\ x=10^{-1},\ 10^{-\frac{1}{2}},\ 10^0,\ \cdots,\ 10^4$

따라서 주어진 식을 만족시키는 실수 x 는 11 개이다.

97. 정답 ③

(i) $\log0.11^{10}=10(\log1.1-1)=-10+0.414$ 이므로

$\log0.11^{10}$ 의 가수는 0.414 이다.

이 때 $\log2<0.414<\log3$ 이므로 $f(a)=2$

(ii) $\log1.1^{100}=100\log1.1=4.14$ 이므로 $\log1.1^{100}$ 의 가수는 0.14 이다.

이 때 $\log1<0.14<\log2$ 이므로 $f(b)=1$

(iii) $\log1.1^{1000}=1000(\log1.1+1)=1041+0.4$ 이므로 $\log11^{1000}=$ 의 가수는 0.4 이다.

(i), (ii), (iii)에서 $f(a)=f(c)>f(b)$

98. 정답 ④

㈏에서 $\log xy-\log\frac{y}{x^2}=\log x^3=k$ (k는 정수)이므로

$x^3=10^k$ $\quad\therefore x=10^{\frac{k}{3}}$

이때 $\log x=\frac{k}{3}$ 이므로 ㈎에서 $k=5$ 이어야 한다.

$\therefore x=10^{\frac{5}{3}}$

99. 정답 30 수학내적문제 해결능력-지수와 로그

$\log a-f(a)=3$ 이므로

$\log a-(\log a-[\log a])=3$

$\therefore\ [\log a]=3$

따라서 $\log a$의 지표가 3이므로

$\log a = 3+\alpha \quad (0 \le \alpha < 1)$라 하자.

$f(x) = \log x - [\log x]$이므로 $f(x)$는 $\log x$의 가수이다.

$\log\sqrt{a} = \frac{1}{2}\log a = \frac{1}{2}(3+\alpha) = 1+\frac{1}{2}(1+\alpha)$

$\therefore \quad f(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}(1+\alpha)$

$f(a)+f(\sqrt{a}) = \alpha+\frac{1}{2}(1+\alpha) = 1$

$\therefore \quad \alpha = \frac{1}{3}$

$\therefore \quad \log a^9 = 9\log a = 9\left(3+\frac{1}{3}\right) = 30$

100. 정답 125

$\log x$, $\log y$의 가수를 각각 α, β $(0 \le \alpha < 1,\ 0 \le \beta < 1)$라 하면 x, y가 모두 세 자리 자연수이므로

$\log x = 2+\alpha$, $\log y = 2+\beta$에서

$\log\sqrt{x} = 1+\frac{\alpha}{2}$, $\log\sqrt{y} = 1+\frac{\beta}{2}$

$\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}$이므로 $\alpha+\beta = 1$

$\therefore \quad \log x+\log y = 4+\alpha+\beta = 5$

$\therefore \quad xy = 10^5 = 2^5\times 5^5$

구하는 최소의 자연수의 값은 $5^3 = 125$이다.

$(\because \quad 10^5 = 125\times 800 = 160\times 625 = \cdots)$

101. 정답 ②

$1 < \log 40 < 2$이므로

$f(2) = \log 40 - 1 = \log 40 - \log 10$

$= \log 4$

그러므로 가수가 $\log 4$인 수는 진수$(=10x^2)$가 400, 4000, 40000이어야 한다.

$\therefore x = 2\sqrt{10}$, $x = 20$, $x = 20\sqrt{10}$

따라서 $f(a) = f(2)$를 만족하는 실수 a는 3개다.

102. 답 ⑤

$\log x = f(x)+g(x)$이고, $\log f(x) = g(x)$

즉, $f(x) = 10^{g(x)}$에서 $0 \le g(x) < 1$이므로

$10^0 \le 10^{g(x)} < 10^1$

$\therefore\ 1 \le f(x) < 10$

이때, $f(x)$는 정수이므로 $f(x) = k$라 하면 정수 k는 $1 \le k \le 9$이고, $g(x) = \log k$이므로

$\log x = f(x)+g(x) = k+\log k$

$\therefore x = 10^{k+\log k} = 10^k\cdot 10^{\log k} = k\cdot 10^k$

따라서 구하는 모든 실수 x의 값의 합은

$\sum_{k=1}^{9} k\cdot 10^k = 10+2\cdot 10^2+3\cdot 10^3+\cdots+9\cdot 10^9$

$= 9876543210$

103. 답 ③

$f_n(x) = f_{n^2}(x)$에서 $\log_n x$의 소수 부분과 $\log_{n^2} x$의 소수 부분이 같으므로

$\log_{n^2} x - \log_n x = \frac{1}{2}\log_n x$ (정수)

$1 \le x < n^{2011}$에서 $0 \le \frac{1}{2}\log_n x < \frac{2011}{2}$

$\frac{1}{2}\log_n x = 0,\ 2,\ 4,\ \cdots,\ 2010$

$\therefore\ x = 1,\ n^2,\ n^4,\ \cdots,\ n^{2010}$

따라서 위 식에서 $n = 2^{2011}$일 때, 정수가 되는 x의 개수는 1006이다.

104. ②

ㄱ. (반례) $a=2$, $b=20$ 이면 $a \ne b$ 이지만 2 와 20 은 숫자 배열이 같으므로 $f(a) = f(b)$ (거짓)

ㄴ. $f(a) = f(b)$ 이므로 $\log a - \log b = $(정수)

$\log 2a - \log 2b = \log 2 + \log a - \log 2 - \log b$

$= \log a - \log b = $(정수)

$\therefore\ f(2a) = f(2b)$ (참)

ㄷ. (반례) $a = 1$, $b = \sqrt{10} = 3.16\cdots$ 이면

$f(1) = f(10)$ 이므로 $f(a^2) = f(b^2)$ 이지만 1 과 $\sqrt{10}$ 은 숫자 배열이 다르므로

$f(1) \ne f(\sqrt{10})$ 즉, $f(a) \ne f(b)$ 이다. (거짓)

105. 정답

[출제의도] 상용로그의 지표와 가수의 성질을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

(가)에서 $1 \le \log M < 2$임을 알 수 있고 (가)에 의해 $\log M = 1+\alpha$ $(0 \le \alpha < 1)$라 하면 $\log M^2 = 2+2\alpha = 2\log M$에서

$2 \le \log M^2 < 3$ 이므로 $0 \le 2\alpha < 1$ 즉, $0 \le \alpha < \frac{1}{2}$ 이다.

이때, (다)는 $\log M$과 $\log M^2$ 의 가수의 합이 1 임을 나타내므로 $\log M + \log M^2 = 3+3\alpha$ 는 정수이다.

$0 \le 3\alpha < 3$ 이므로 $3\alpha = 0, 1, 2$ 이고 $\alpha = \frac{1}{3}$ ($\because$ 가수의 합이 1 이고 $0 \le \alpha < \frac{1}{2}$)

$\log M = 1+\frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ $\quad\therefore\ 36\log M = 36\times\frac{4}{3} = 48$

106. 정답 77

가수 α의 범위는 $0 \le \alpha < 1$ 이므로

(ⅰ) $n = 0$일 때

$n \le 2\alpha$에서 $0 \le \alpha < 1$이므로

따라서 만족하는 자연수 A는

1, 2, 3, $\cdots$, 9

이므로 9개다.

(ⅱ) $n = 1$일 때

$1 \le 2\alpha$에서 $\frac{1}{2} \le \alpha < 1$이므로

이때 $3.1 < \sqrt{10} < 3.2$ 이므로

$$\log 3.1 < \frac{1}{2} < \log 3.2$$

따라서 만족하는 자연수 A는

32, 33, 34, ⋯, 99

이므로 68개다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하고자 하는 자연수 A의 개수는

$$9+68=77$$

107. 정답 ④

ㄱ. 반례 $n=1$일 때 $g(1)=0$이지만 $1-g(1)=1$이므로

$g\left(\frac{1}{n}\right) \ne 1-g(n)$ (거짓)

ㄴ. $\log n^2$의 가수와 $\log n$의 가수가 같으므로

정수 k에 대하여

$\log n^2 - \log n = \log n = k$

$\log n^3 = 3\log n = 3k$(정수)

$\therefore g(n^3)=0$ (참)

ㄷ. $\log n^2$의 지표와 $\log n$의 지표가 같으므로 n의 자릿수와 n의 자릿수가 같다.

두 자리 이상의 자연수를 곱하면 세 자리 이상의 자연수가 나오므로 n은 한 자릿수이다.

$1^2=1,\ 2^2=4,\ 3^3=9,\ 4^4=16$이므로

조건을 만족시키는 자연수 n은 1, 2, 3이고 그 개수는 3이다. (참)

108. 정답 ③

$\frac{1}{2}$ 희석법을 10회 실행한 후의 농도는 $80\left(1-\frac{1}{2}\right)^{10}(\%)$이고 $\frac{1}{5}$ 희석법을 n회 실행한 후의 농도는 $80\left(1-\frac{1}{5}\right)^{n}(\%)$이다.

$80\left(1-\frac{1}{2}\right)^{10} = 80\left(1-\frac{1}{5}\right)^{n}$

$\therefore\ \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \left(\frac{4}{5}\right)^{n}$

양변에 상용로그를 취하면 $10\log\frac{1}{2} = n\log\frac{4}{5}$

$-10\log 2 = n(3\log 2 - 1)$

$\therefore\ n = \frac{10\log 2}{1-3\log 2} = \frac{10\times 0.3010}{1-3\times 0.3010} = \frac{3.010}{0.097} = 31.03\times\times$

따라서 구하는 횟수는 31이다.

109. 정답 ④

빛의 밝기가 1(mL)일 때의 동공의 지름의 길이를 d_1이라 하면

$\log d_1 = 0.855 - k(8+\log 1)^3 = 0.855 - k\cdot 8^3$ ⋯ ㉠

빛의 밝기가 10(mL)일 때의 동공의 지름의 길이를 d_2라 하면

$\log d_2 = 0.855 - k(8+\log 10)^3 = 0.855 - k\cdot 9^3$ ⋯ ㉡

㉠−㉡을 하면

$\log\frac{d_1}{d_2} = k\cdot(9^3-8^3) = k\cdot(9-8)(9^2+9\cdot 8+8^2) = 217k$

이때, $\frac{d_1}{d_2}=1.221$이므로 $\log 1.221 = 217k$에서 $0.0868 = 217k$

$\therefore k = 4\times 10^{-4}$

110. 정답 ③

원금을 a라 하면 n년 후 원금과 이자의 합계 S는

$S=a(1+0.2)^n$이므로 12년 후에는

$S=a(1+0.2)^{12}=a(1.2)^{12}$이다.

$\log(1.2)^{12} = 12\log 1.2 = 12\times 0.0792 = 0.9504$

$\log x = 0.9504$인 $x=8.92$이므로

$a(1.2)^{12} = 7.5\times 10^6\times 8.92 = 66.9\times 10^6$

111. 정답 ①

2009년부터 n년 후 한 해 동안의 A자치단체의 온실가스 배출량은 $25(0.9)^n$

2009년부터 n년 후 한 해 동안의 A자치단체의 온실가스 배출량이 B자치단체의 온실가스 배출량의 $\frac{5}{4}$배 이하가 되어야 하므로

$25(0.9)^n \le \frac{5}{4}\times 15(0.95)^n$

$\left(\frac{0.9}{0.95}\right)^n \le \frac{3}{4}\ \therefore \left(\frac{9}{9.5}\right)^n \le \frac{3}{4}$

양변에 상용로그를 취하면

$n(\log 9 - \log 9.5) \le \log 3 - \log 4$

$n(-0.0235) \le -0.1249$

$\therefore n \ge \frac{0.1249}{0.0235} = 5.3\times\times\times$

따라서 구하는 해는 2015년이다.

112. 정답 ②

수학 외적 문제 해결 능력–지수와 로그

80℃, 40℃일 때의 시간을 각각 t, $t+5$로 놓으면

$k(t-t-5) = -\log_3\frac{40-20}{80-20}$

$k=\frac{1}{5}\log_3\frac{1}{3} = -\frac{1}{5}$

40℃에서 25℃까지 떨어지는 데 걸리는 시간을 $T(T>0)$분이라 하면

$-T = 5\log_3\frac{25-20}{40-20} = -5\log_3 4$

$= -5\times\frac{\log 4}{\log 3} = -5\times\frac{0.60}{0.48} = -6.25$

$\therefore\ T=6.25$(분)

113. 답 ③

$W=50,\ H=5$일 때 $Q=60$이므로

$100\log(5-a\cdot 50^b+c)=60$

$\log(5-a\cdot 50^b+c)=0.6$

$\therefore 5-a\cdot 50^b+c=10^{0.6}=(10^{0.3})^2$ ($\because$ $\log2=0.3$에서 $10^{0.3}=2$)

$=2^2=4$

따라서 $W=50$, $H=6$일 때 구하는 달걀의 품질 지수는

$100\log(6-a\cdot 50^b+c)=100\log5$

$=100(1-\log2)$

$=100(1-0.3)=70$

114. 정답 17

$r=(6.37+0.63)\times10^6=7\times10^6$(m)

$T=97\times60=5.82\times10^3$(초)

$$G=\frac{39.5\times r^2}{MT^2}$$

$\therefore \log G$

$=\{\log3.95+1+3(\log7+6)\}-\{\log6+24+2(\log5.82+3)\}$

$=(\log3.95+3\log7-\log6-2\log5.82)-11$

$=-11+0.8239$

$\log x=0.8239$ 라 하면 $\log6<\log x<\log7$ 이므로 $6<x<7$ 이다.

따라서 G는 소수점 아래 11 번째에서 처음으로 0 아닌 수 6 이 나온다.

$\therefore\ m+n=17$

115. 정답 ④

지반 A, B의 유효수직응력을 각각 S_A, S_B

저항력을 각각 R_A, R_B

상대밀도를 각각 D_A, D_B라 하면

$S_A=1.44S_B$

$R_A=1.5R_B$

$D_B=65$이므로

$$D_B=-98+66\log\frac{R_B}{\sqrt{S_B}}=65$$

$$\frac{R_B}{\sqrt{S_B}}=10^{\frac{163}{66}}$$

$$\frac{R_A}{\sqrt{S_A}}=\frac{1.5R_B}{\sqrt{1.44S_B}}=\frac{5}{4}\cdot10^{\frac{163}{66}}$$

$$D_A=-98+66\log\frac{R_A}{\sqrt{S_A}}$$

$$=-98+66\log\left(\frac{5}{4}\cdot10^{\frac{163}{66}}\right)$$

$$=-98+66\left(0.1+\frac{163}{66}\right)$$

$=71.6$

116. 정답 ②

[출제의도] 상용로그의 가수를 이해하고 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\log x^3-\log x=3\log x-\log x=2\log x=$(정수)이므로

ㄱ. $\sqrt{10}<x<1000$에서 $1<2\log x<6$

$\therefore N(\sqrt{10}\,,\,1000)=4$ (참)

ㄴ. $10^p<x<10^{p+10}$에서 $2p<2\log x<2p+20$

$\therefore N(10^p,\,10^{p+10})=19$ (참)

ㄷ. $2^{10}<x<2^{50}$에서 $6.02<2\log x<30.10$

$\therefore N(2^{10},\,2^{50})=24$ (거짓)

117. 정답 ③

[출제의도] 상용로그의 지표와 가수의 성질을 알고 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $f(2010)=f(0.201)=\log2.01$ (참)

ㄴ. (반례) $x=10$, $y=\sqrt{10}$ 이면 $f\left(\dfrac{x}{y}\right)=0.5$,

$f(x)-f(y)=-0.5$이다. (거짓)

ㄷ. $f(x)+f(y)=0$이므로 $f(x)=f(y)=0$이다. 따라서

$x=10^m$, $y=10^n$ (m, n은 정수)이다. 그런데 $x>1$, $y>1$ 이므로 x, y는 모두 정수이다. (참)

118. 답 71

$\log N=n+\alpha\ (0\le\alpha<1)$라 하면

$\log N^2=2\log N=2n+2\alpha$

(i) $0\le\alpha<\dfrac{1}{2}$일 때, $0\le2\alpha<1$이므로

$f(N^2)=3f(N)$에서 $2n=3n\ \therefore\ n=0$

즉, $\log N=\alpha$이므로 $0\le\log N<\dfrac{1}{2}$

$1\le N<\sqrt{10}$ $\qquad\therefore\ 1\le N<3.\times\times\times$

이 중 자연수 N은 1, 2, 3의 3개다.

(ii) $\dfrac{1}{2}\le\alpha<1$일 때, $1\le2\alpha<2$이므로

$f(N^2)=3f(N)$에서 $2n+1=3n$ $\qquad\therefore\ n=1$

즉, $\log N=1+\alpha$이므로 $\dfrac{3}{2}\le\log N<2$

$\sqrt{1000}\le N<100$

$\therefore\ 31.\times\times\times\le N<100$

이 중 자연수 N은 32부터 99까지 68개다.

(i), (ii)에서 구하는 자연수 N은 모두 71개다.

119. 정답 29

N^{20}이 77자리의 정수이므로

$76\le\log N^{20}<77$

$76\le2\log N^{10}<77$이므로 $38\le\log N^{10}<38.5$

이때 $28\le\log N^{10}-10<28.5$에서

$$28\le\log\left(\frac{N}{10}\right)^{10}<28.5$$

따라서, $\left(\dfrac{N}{10}\right)^{10}$ 의 지표가 28이므로 29자리의 수이다.

120. 정답 6
[출제의도] 상용로그의 가수를 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.
$\log n=\alpha$라 하면 $1<n<10$이므로 $0<\alpha<1$이다.

$\log\frac{1}{n}=-\log n=-\alpha=-1+(1-\alpha)$

$\log n^2=2\log n=2\alpha$

(i) $0<\alpha<\frac{1}{2}$일 때,

$1-\alpha>2\alpha$이므로 $0<\alpha<\frac{1}{3}$

따라서 $0<\log n<\frac{1}{3}$이므로 $1<n<\sqrt[3]{10}$

$\therefore n=2$

(ii) $\frac{1}{x}\le\alpha<1$일 때,

$1-\alpha>2a-1$이므로 $\frac{1}{2}\le\alpha<\frac{2}{3}$

따라서 $\frac{1}{2}\le\log n<\frac{2}{3}$이므로 $\sqrt{10}\le n<\sqrt[3]{100}$

$\therefore n=4$

따라서 구하는 모든 자연수 n의 값의 합은 $2+4=6$이다.

121. 답 ① 로그의 활용

$L_{13}=\frac{1}{2}L_1$이므로

$\log L_{13}=k(13-1)+\log L_1=\log\frac{1}{2}L_1$

$12k+\log L_1=\log\frac{1}{2}+\log L_1$

$\therefore\ k=-\frac{1}{12}\log 2$

$$\begin{aligned}\log\frac{L_5}{L_{13}}&=\log L_5-\log L_{13}\\&=4k+\log L_1-12k-\log L_1\\&=-8k=-8\cdot\left(-\frac{1}{12}\log 2\right)\\&=\frac{2}{3}\log 2=\log 2^{\frac{2}{3}}\end{aligned}$$

따라서 $\frac{L_5}{L_{13}}=2^{\frac{2}{3}}$이므로 $p=3,\ q=2$이다.

$\therefore\ p+q=5$

122. 정답 ⑤

$A_0=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 9\}$

$B_0=\{\log 1,\ \log 2,\ \log 3,\ \cdots,\ \log 9\}$

$A_1=\{10,\ 11,\ 12,\ \cdots,\ 99\}$

$B_1=\{\log 1.0,\ \log 1.1,\ \log 1.2,\ \cdots,\ \log 9.9\}$

$A_2=\{100,\ 101, 102,\ \cdots,\ 999\}$

$B_2=\{\log 1.00,\ \log 1.01,\ \log 1.02,\ \cdots,\ \log 9.99\}$

$\cdots$

$A_k=\{10^k,\ 10^k+1,\ 10^k+2,\ \cdots,\ 10^{k+1}-1\}$

$B_k=\left\{\log\frac{10^k}{10^k},\ \log\frac{10^k+1}{10^k},\ \log\frac{10^k+2}{10^k},\ \cdots,\ \log\frac{10^{k+1}-1}{10^k}\right\}$

ㄱ. A_k에 속하는 서로 다른 임의의 두 원소 n_1, n_2에 대하여 $\log n_1$의 가수와 $\log n_2$의 가수가 서로 다르므로 $n(A_k)=n(B_k)$이다. (참)

ㄴ. $n(A_k)=9\times 10^k$이므로
$n(A_{k+1})=10\times n(A_k)$ (참)

ㄷ. $n\in A_k$이면 $10n\in A_{k+1}$이고 $\log n$의 가수와 $\log 10n$의 가수는 서로 같으므로 $\mathrm{B}_k\subset\mathrm{B}_{k+1}$이다. (참)

123. 정답 ③
[출제의도] 상용로그의 성질을 이용하여 실생활 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$80=10\left(12+\log\frac{I}{1^2}\right)=120+10\log I$에서 $\log I=-4$

$\therefore a=10\left(12+\log\frac{I}{10^2}\right)=120+10\log I-20=60$

124. 정답 ②

$T=2T_0$일 때, $v=\sqrt{10}\,v_0$이므로 이를 대입하면

$\log\sqrt{10}=K\left(\frac{1}{T_0}-\frac{1}{2T_0}\right)$

$\frac{1}{2}=\frac{K}{2T_0}\quad\therefore\frac{K}{T_0}=1$

$T=4T_0$일 때

$\log\frac{v}{v_0}=K\left(\frac{1}{T_0}-\frac{1}{4T_0}\right)=\frac{3K}{4T_0}=\frac{3}{4}$

$\frac{v}{v_0}=10^{\frac{3}{4}}$

$\therefore v=10^{\frac{3}{4}}v_0=\sqrt[4]{1000}\,v_0$

125. 정답 ②

10초일 때와 20초일 때의 열전도계수를 구하면

$k=C\frac{\log t_2-\log t_1}{T_2-T_1}=C\frac{\log 20-\log 10}{202-200}$이고

10초일 때와 x초일 때의 열전도계수를 구하면

$k=C\frac{\log t_2-\log t_1}{T_2-T_1}=C\frac{\log x-\log 10}{206-200}$이므로

$C\frac{\log 20-\log 10}{202-200}=C\frac{\log x-\log 10}{206-200}$

$\frac{(\log 2+1)-1}{2}=\frac{\log x-1}{6}$

$\frac{\log 2}{2}=\frac{\log x-1}{6}$

$6\times\frac{\log 2}{2}=6\times\frac{\log x-1}{6}$

$3\log 2=\log x-1$

$\log 2^3 + \log 10 = \log 80 = \log x$
$\therefore x = 80$

126. 정답. ②
n년 후 이산화탄소 배출량은 $6\times(1-0.05)^n$억 톤이므로
$6\times0.96^n \le 4,\quad 0.95^n \le \frac{2}{3}$
양변에 상용로그를 취하면 $n(\log 9.5-1) \le \log 2 - \log 3$
$0.022n \ge 0.176,\quad n \ge 8$
따라서, 8년 후에 4억 톤 이하가 된다.

127. 답 ②
2010년 발생한 지진의 강도를 I_1, 2005년 발생한 지진의 강도를 I_2라 하면

$\log\frac{I_1}{k} = 7.7$ ········· ㉠

$\log\frac{I_2}{k} = 8.7$ ········· ㉡

㉠－㉡에서 $\log\frac{I_1}{I_2} = -1$ $\quad\therefore \frac{I_1}{I_2} = \frac{1}{10}$

128. 답 ①
$V_1 = kc^{6-\frac{9}{4}} = kc^{\frac{15}{4}}$
$V_2 = kc^{4-1} = kc^3$
이 때, $V_1 = pV_2$이므로
$kc^{\frac{15}{4}} = p\cdot kc^3,\quad \therefore p = c^{\frac{15}{4}-3} = c^{\frac{3}{4}}$ ······ ㉠
㉠의 양변에 상용로그를 취하면
$\log p = \frac{3}{4}\log c = \frac{3}{4}\times0.4 = 0.3 = \log 2$
$\therefore p = 2$

129. 285
해수면으로부터의 높이가 a(km)인 A지점에서의 기압이 1000(hPa)이므로

$$P_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{a}{5.5}} = 1000$$

이때, B지점은 해수면으로부터의 높이가 $a+10$(km)이므로 B지점에서의 기압 x는

$$x = P_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{a+10}{5.5}} = P_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{a}{5.5}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{10}{5.5}} = 1000\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{20}{11}}$$

$$\therefore \log x = \log 1000 + \log\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{20}{11}}$$
$$= 3 - \frac{20}{11}\log 2 = 3 - \frac{20}{11}\cdot\frac{3}{10}$$
$$= 3 - \frac{6}{11} = \log 1000 - \log 3.5 = \log\frac{1000}{3.5}$$

$\therefore x = \frac{1000}{3.5} = 285.71\cdots$
따라서 x의 정수 부분은 285이다.

130. 답 10
투과되기 전의 빛의 양을 a라 하면
$a\times0.06\times0.2^n < a\times10^{-8}$
$0.06\times0.2^n < 10^{-8}$
양변에 상용로그를 취하여 계산하면
$\log 0.06 + n\log 0.2 < -8$
$(\log 2 + \log 3 - 2) + n(\log 2 - 1) < -8$
$0.7n > 6.78 \qquad \therefore n > 9.68\times\times$
따라서, n의 최솟값은 10이다.

131. 답 ④
처음 박테리아 수를 A, 박테리아를 공기 중에 n시간 동안 두었다면 10시간 후 박테리아 수는
$0.9^n\times1.2^{10-n}A$
10시간이 지난 후 박테리아 수가 처음 수의 $\frac{3}{4}$미만이 되어야 하므로
$0.9^n\times1.2^{10-n}A < \frac{3}{4}A$
$0.9^n\times1.2^{10-n} < \frac{3}{4}$
$\log(0.9^n\times1.2^{10-n}) < \log\frac{3}{4}$
$n(2\log 3-1)+(10-n)(2\log 2+\log 3-1) < \log 3 - 2\log 2$
$-0.12n < -0.92$
$\therefore n > \frac{0.92}{0.12} = 7.6\times\times\times$
따라서, 최소한 8시간은 공기 중에 두어야 한다.

132. 정답 ②
A, B 도시의 현재 인구를 a라 하자. 문제로부터
$a(1+0.05)^n = 2a(1-0.05)^n$
$(1.05)^n = 2\times(0.95)^n$
양변 상용로그를 취하면
$n\log 1.05 = \log 2 + n\log 0.95$
$n(\log 1.05 - \log 0.95) = \log 2$
$n\log\frac{21}{19} = n(\log 2.1 - \log 1.9) = \log 2$이므로
$n = \frac{\log 2}{\log 2.1 - \log 1.9} = \frac{0.3010}{0.3222-0.2788} = \frac{0.3010}{0.0434}$
$= 6.93\times\times\times$
따라서 7년째에 통합된다.

133. 답 ③
n끼째에 섭취하는 열량은 $1440\times\left(\frac{9}{10}\right)^n$이므로

$1440\times\left(\frac{9}{10}\right)^n \le 600$

$\therefore \left(\frac{9}{10}\right)^n \le \frac{10}{24}$

위의 부등식의 양변에 상용로그를 취하여 정리하면

$n(2\log3-1) \le \log10-\log24=1-\log3-3\log2$

$n(0.954-1) \le 1-(0.477+0.903)$

$\therefore\ -0.046n \le -0.380$

$\therefore\ n \ge \frac{380}{46}=8.26\times\times\times$

따라서 구하는 것은 9끼 째의 식사이다.

134. 답 ②

작년 D시의 예산을 A, 관광시설 투자비를 B라 하면

$B=0.04A$

올해부터 n년 후의 시의 예산을 $(1+0.12)^{n+1}A$

올해부터 n년 후의 관광시설 투자비는 $(1+0.2)^{n+1}B$

$\therefore \frac{1.2^{n+1}B}{1.12^{n+1}A} \ge 0.06$

$\frac{1.2^{n+1}\times0.04A}{1.12^{n+1}A} \ge 0.06$

$\frac{1.2^{n+1}}{1.12^{n+1}} \ge 1.5$

위 식의 양변에 상용로그를 취하여 정리하면

$n+1 \ge \frac{\log3-\log2}{\log1.2-\log1.12}=\frac{0.1761}{0.03}=5.87$

$\therefore n \ge 4.87$

따라서 올해부터 5년 후 관광시설 투자비가 시의 예산의 6%를 넘어서게 된다.

135. 정답 ②

A 도시의 인구가 2011 년부터 4 년 동안 매년 전년도보다 5 % 씩 늘어나고 2015 년부터는 매년 전년도보다 8 % 씩 늘어나므로 처음으로 10 만 명 이상이 되는 것이 2010 년부터 $n(n \ge 4)$ 년 후라고 하면

$5\times10^4\times1.05^4\times1.08^{n-4} \ge 10^5$

$1.05^4\times1.08^{n-4} \ge 2$

양변에 상용로그를 취하면

$\log(1.05^4\times1.08^{n-4}) \ge \log2$

$4\log1.05+(n-4)\log1.08 \ge \log2$

$n-4 \ge \frac{0.3010-4\times0.0212}{0.0334}$

$n \ge 10.47\times\times$

따라서 구하는 시기는 2020 년~2021 년이다.

136. 정답 ④ 수학 외적 문제 해결 능력 – 지수함수와 로그함수

1개월 후의 가격 : $a\times1.1$

3개월 후의 가격 : $a\times(1.1)^2\times0.9$

5개월 후의 가격 : $a\times(1.1)^3\times(0.9)^2$

$\cdots\cdots\cdots$

$(2n-1)$개월 후의 가격 : $a\times(1.1)^n\times(0.9)^{n-1}$

$a\times(1.1)^n\times(0.9)^{n-1} \le a,\quad (1.1)^n\times(0.9)^{n-1} \le 1$

양변에 상용로그를 취하면 $n\log1.1+(n-1)\log0.9 \le 0$

$n(\log1.1+\log0.9) \le \log0.9$

$\therefore n \ge \frac{458}{44}=10.\times\times\times \therefore n=11$

따라서 2009년 12월부터 $2\times11-1=21$개월 후이므로 2011년 9월이다.

137. 정답 ③

$10^8=\frac{A}{1.05^{10}}$에서 $A=10^8\times1.05^{10}$

따라서 6%로 계산했을 때 실제로 받는 금액 X는

$$X=\frac{10^8\times1.05^{10}}{1.06^{10}}$$

양변에 상용로그를 취하면

$\log X=8+10\log1.05-10\log1.06$

$=8+10(0.0212-0.0253)$

$=7.959=\log(9.1\times10^7)$

$\therefore X=9.1\times10^7$

따라서 9100만 원이다.

138. 정답 ⑤

[출제의도] 로그 방정식을 이용하여 수학 외적 문제 해결하기

$90=100\log(h+7.57-1.7\times50^{0.37})$

$0.9=\log(h+7.57-7.24)$

$3\log2=\log(h+0.33)$

$\log8=\log(h+0.33)$

$\therefore\ h=7.67$

139. 정답 ②

$\log x=-\frac{4}{5}$이므로

$\log x^2=-\frac{8}{5}=-2+0.4$

이고 $\log2<0.4<\log3$ 이므로

따라서 x^2은 소수점 아래 2번째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자 2가 나타난다.

$\therefore a+b=2+2=4$

140. 정답 ⑤

2분 만에 교실 안의 미세 먼지의 양이 절반으로 줄었으므로 남아 있는 미세 먼지의 양은 $\frac{1}{2}C_0$이다.

$C_2=C_0=\left(\frac{1}{3}\right)^{2k}=\frac{1}{2}C_0$

$\left(\frac{1}{3}\right)^{2k}=\frac{1}{2}\qquad \therefore\left(\frac{1}{3}\right)^k=\frac{1}{\sqrt{2}}$

남아 있는 미세 먼지의 양이 20%가 되는데 걸리는 시간을 t라 하면

$C_0\left(\frac{1}{3}\right)^{kt}=\frac{1}{5}C_0$ $\therefore\left(\frac{1}{3}\right)^{k}=\frac{1}{5}$

그런데, $\left(\frac{1}{3}\right)^{k}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 이므로

$\left(\frac{1}{3}\right)^{kt}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{t}=\frac{1}{5}$

위 식의 양변에 상용로그를 취하여 정리하면

$\frac{1}{2}t\log2=\log5$

$\therefore t=\frac{2\log5}{\log2}=\frac{2(1-\log2)}{0.3}=\frac{2\times0.7}{0.3}\fallingdotseq4.7$(분)

141. 정답 ④

ㄱ. 2011과 201.1의 숫자 배열이 일치하므로 가수는 같다.

$\therefore g(2011)=g(201.1)$ (거짓)

ㄴ. $f(a)=g(a)$ㄷ.$\Leftrightarrow\log a=0\Leftrightarrow a=1$(참)

ㄷ. $\log a$의 가수와 $\log b$의 가수의 합이 1이면 $\log a+\log b$는 정수이다. (참)

142. 정답 530

100명이 동시에 다운로드를 받을 때의 속도를 v라고 하면 n명이 동시에 다운로드를 받을 때의 속도는

$v\times(1-0.0016)^{n-100}=v\times0.9984^{n-100}$

이므로 $v\times0.9984^{n-100}=\frac{1}{2}v$

$\therefore\ 0.9984^{n-100}=\frac{1}{2}$

$\therefore\ n-100=\log_{0.9984}\frac{1}{2}=-\log_{0.9984}2$

$=-\frac{\log2}{\log9.984-1}=\frac{03010}{0.0007}=\frac{3010}{7}=430$

따라서 구하는 접속자 수는 $n=430+100=430$

143. 답 10 지수부등식의 활용

이 동물이 태어났을 때 몸의 길이는

$l(0)=\frac{300}{1+9\cdot(0.8)^0}=\frac{300}{1+9\cdot1}=30$

몸의 길이가 태어날 당시의 5배 이상이 되려면

$\frac{300}{1+9\cdot(0.8)^x}\geq5\cdot30$에서

$1+9\cdot(0.8)^x\leq2$

$(0.8)^x\leq\frac{1}{9}$

이 식의 양변에 상용로그를 취하면

$x\log\frac{8}{10}\leq\log\frac{1}{9}$

$x(3\log2-1)\leq-2\log3$

$\therefore x\geq\frac{-2\times0.48}{3\times0.30-1}=\frac{0.96}{0.1}=9.6$

$\therefore a=10$

1. 정답 ①

$y=\log_a\frac{1}{x}=-\log_a x$이고

$y=\log_{\frac{1}{a}}(-x)=-\log_a(-x)$이므로

$y=\log_{\frac{1}{a}}(-x)$의 그래프는 $y=\log_a\frac{1}{x}$의 그래프와 y축에 대하여 대칭이다.

따라서 구하는 그래프의 개형으로 옳은 것은 ①이다.

2. 답 ②

$f(x)=x+2$이므로

$y=\log_2\frac{2}{x+2}=\log_2 2-\log_2(x+2)$

$=1-\log_2(x+2)$

따라서, 구하는 그래프는 $y=-\log_2 x$의 그래프를 x축 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동시킨 그래프이다.

3. 답 ③

함수 $y=a^{\frac{x}{a}}$의 그래프가 x의 값이 커짐에 따라 y의 값이 작아지므로 $0<a<1$이다.

따라서 $\frac{1}{a}>1$이므로 함수 $y=\log_{\frac{1}{a}}ax$의 그래프는 x의 값이 커짐에 따라 y의 값이 커지고

$x=\frac{1}{a}$일 때, $y=\log_{\frac{1}{a}}1=0$

$x=a$일 때, $y=\log_{\frac{1}{a}}a^2=-2$이므로 그래프의 개형은 ③이다.

4. 정답 ③

$y=\log_3(x+9)+1$에 $y=0$을 대입하여 정리하면

$\log_3(x+9)+1=0$

$x+9=\frac{1}{3}$ $\therefore\ x=-\frac{26}{3}$

$\therefore \mathrm{A}\left(-\frac{26}{3},0\right)$

$y=\log_3(x+9)+1$에 $x=0$을 대입하여 정리하면

$y=\log_3 9+1=2+1=3$

$\therefore \mathrm{B}(0,3)$

따라서 직선 AB의 기울기는 $\frac{3-0}{0-\left(-\frac{26}{3}\right)}=\frac{9}{26}$ 이다.

5. 정답 ④

ㄱ. $y=\log_3 3x=\log_3 x+1$ 이므로 $y=3\log_3 x$를 평행이동해도 겹쳐질 수 없다.

ㄴ. $y=3\log_3\frac{x}{3}+1=3(\log_3 x-1)+1=3\log_3 x-2$

따라서 곡선$y=3\log_3 x$ 를 y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동하면 주어진 곡선과 겹쳐질 수 있다.

ㄷ. $y=\log_3(3x+6)^3=3\log_3\{3(x+2)\}$

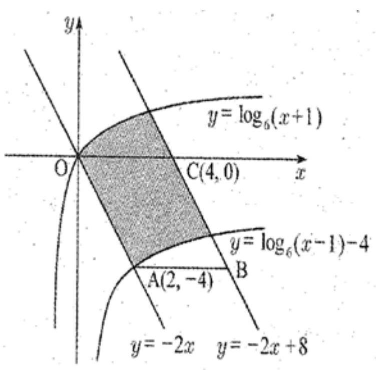
$=3\{1+\log_3(x+2)\}=3\log_3(x+2)+3$

따라서 곡선$y=3\log_3 x$ 를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동하면 주어진 곡선과 겹쳐질 수 있다.

6. 정답 16

[출제의도] 로그함수의 그래프를 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.

주어진 두 곡선과 두 직선으로 둘러싸인 부분의 넓이는 그림과 같이 평행사변형 OABC의 넓이와 같다.



$y=\log_6(x-1)-4$의 그래프는 $y=\log_6(x+1)$의 그래프를 x축, y축 방향으로 각각 2, -4만큼 평행이동시킨 것이다. 원점을 x축, y축의 방향으로 각각 2, -4만큼 평행이동시키면 $(2,\ -4)$이고, 점 $(2,\ -4)$는 직선 $y=-2x$ 위의 점이다.

따라서 $y=\log_6(x-1)-4$의 그래프와 직선 $y=-2x$의 교점 A의 좌표는 $\mathrm{A}(2,\ -4)$이다. 이때, 점 C의 좌표는 $(4,\ 0)$이므로 $\overline{\mathrm{OC}}=4$이고, 평행사변형 OABC의 넓이는 $4\times4=16$이다.

7. 정답 ②

$0<0.2<1$이고

$x^2-2x+a=(x-1)^2+a-1\ge a-1$이므로

$y=\log_{0.2}(x^2-2x+a)\le\log_{0.2}(a-1)$

따라서 $\log_{0.2}(a-1)=-1$이므로

$a-1=0.2^{-1}=\dfrac{1}{0.2}=5$ $\therefore\ a=6$

따라서 $y=a^{x^2}\times a^{2x}=6^{x^2+2x}$이고

$x^2+2x=(x+1)^2-1\ge-1$이므로

$y=6^{x^2+2x}\ge6^{-1}=\dfrac{1}{6}$

8. 정답 25

$g(27)=a$로 놓으면 $f(a)=27$

$1-\log_3 a=27$ 에서 $a=3^{-26}$

$\therefore h(27)=9g(27)=9\times3^{-26}=3^{-24}$

$\therefore(f\circ h)(27)=1-\log_3 3^{-24}=25$

[다른 풀이]

$f(x)$의 역함수 $g(x)$를 구하면

$y=1-\log_3 x$ 에서 $1-y=\log_3 x$

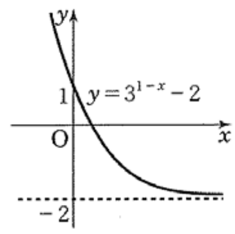
$\therefore x=3^{1-y}$ $\therefore g(x)=3^{1-x}$

$h(x)=9\cdot3^{1-x}=3^{3-x}$

$\therefore(f\circ h)(x)=f(h(x))=1-\log_3 3^{3-x}=x-2$

$\therefore(f\circ h)(27)=25$

9. 정답 ③



$y=1-\log_3(x+2)$에서 x,y를 바꾸어 y에 대하여 정리하면

$\therefore\ g(x)=3^{1-x}-2$

ㄱ. 함수 $g(x)=3^{-(x-1)}-2$의 그래프는 $y=3^{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동하여 얻을 수 있으므로 점근선의 방정식은 $y=-2$이다. (참)

ㄴ. 함수 $y=g(x)$의 그래프는 제 1, 2, 4사분면을 지나고, 제 3사분면은 지나지 않는다. (거짓)

ㄷ. $g(a)+g(-a)=(3^{1-a}-2)+(3^{1+a}-2)$

$=3^{1-a}+3^{1+a}-4$

이때, $3^{1-a}>0,\ 3^{1+a}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에서

$3^{1-a}+3^{1+a}\ge2\sqrt{3^{1-a}\cdot3^{1+a}}=6$ (단, 등호는 $a=0$일 때 성립)

이므로 $3^{1-a}+3^{1+a}-4\ge6-4=2$이다.

$\therefore g(a)+g(-a)\ge2$ (참)

10. 답 ⑤

$a=1,\ b=3, c=3^3=27,\ d=3^{27}$

$\therefore abcd=3^{31}$

$\therefore\log_9(abcd)=\log_9 3^{31}=31\log_9 3=\dfrac{31}{2}$

11. 정답 60

$P_n(n,\ \log_4 n),\ Q_n(\log_2 n,\ n)$이므로 자연수 n에 대하여

$f(n)=|\overline{A_nP_n}-\overline{A_nQ_n}|$

$=|(n-\log_4 n)-(n-\log_2 n)|$

$=\left|n-\dfrac{1}{2}\log_2 n-n+\log_2 n\right|$

$=\left|\dfrac{1}{2}\log_2 n\right|$

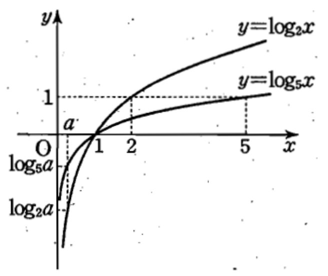
$=\dfrac{1}{2}\log_2 n$

$\therefore\ \displaystyle\sum_{k=1}^{15}f(2^k)=\sum_{k=1}^{15}\frac{k}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{15\cdot16}{2}=60$

12. 정답 ①

추론능력(추측) – 지수함수와 로그함수

ㄱ. (참) 그림에서



$0 < a < 1$ 이면 $\log_2 a < \log_5 a$ 이다.

ㄴ. (거짓) $0 < \log_5 2 < 1$ 이므로

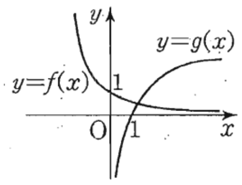
$a < b$ 이면 $(\log_5 2)^a > (\log_5 2)^b$ 이다.

ㄷ. (거짓) [반례] $a = \dfrac{1}{2}, b = \dfrac{1}{5}$ 이면

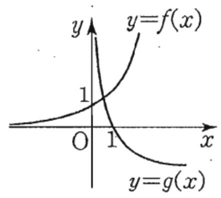
$\log_2 a = \log_5 b = -1$ 이지만 $a > b$ 이다.

13. 정답 ③

ㄱ. 두 함수 $f(x) = a^x$, $g(x) = \log_b x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 항상 만난다.

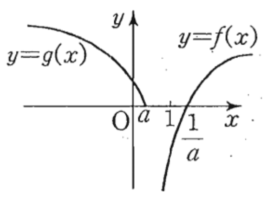


ㄴ. $f(x) = \left(\dfrac{1}{a}\right)^x \left(\dfrac{1}{a} > 1\right)$, $g(x) = -\log_b x$이므로 두 함수 $f(x) = \dfrac{1}{a^x}$, $g(x) = \log_b \dfrac{1}{x}$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 항상 만난다.

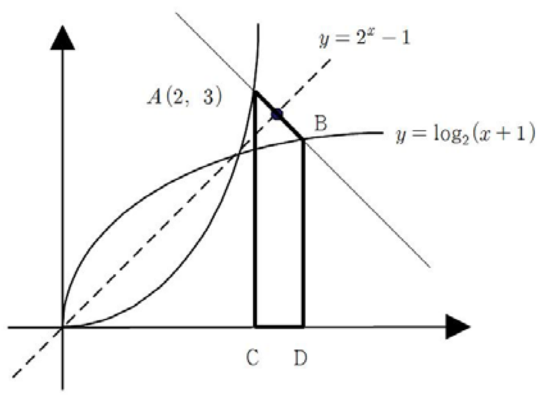


ㄷ. $f(x) = \log_b x + \log_b a$에서 $\log_b a < 0$이므로 두 함수 $f(x) = \log_b ax$,

$g(x) = \sqrt{-b(x-a)}$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 항상 만나지 않는다.



14. 정답 ①



$y = 2^x - 1$ 과 $y = \log_2(x+1)$는 서로 역함수 관계이므로 두 함수는 $y = x$에 대칭이다.

$A(2,3)$을 기울기가 -1인 직선이 $y = \log_2(x+1)$와 만나는 점은 $A(2,3)$를 $y = x$에 대칭이동한 점이 된다.

그러므로 $B(3,2)$가 된다.

따라서 사각형 $ACDB$의 넓이는 $\dfrac{1}{2} \cdot (2+3) \cdot 1 = \dfrac{5}{2}$ 이다.

15. 정답 ②

[출제의도] 함수의 그래프를 해석하여 수학 내적 문제 해결하기

$\mathrm{A}(\alpha, m\alpha)$, $\mathrm{B}(\beta, m\beta)$ 라 하자. (단, $\alpha \neq 0$)

$\triangle\mathrm{OBD} : \triangle\mathrm{OAC} = 4:1$ 이므로

$\overline{\mathrm{OB}} : \overline{\mathrm{OA}} = 2:1$. 즉, $\beta = 2\alpha$

$m\alpha = \log_2 \alpha$ 이고 $2m\alpha = \log_2 2\alpha$ 이므로

$2\log_2 \alpha = \log_2 2\alpha$, $\alpha^2 = 2\alpha$

$\alpha \neq 0$ 이므로 $\therefore \alpha = 2, \beta = 4$

사각형 ABDC 는 등변사다리꼴이므로,

$y = mx$ 은 $y = nx$ 의 역함수이다.

따라서 $\mathrm{C}(2m,\ 2)$, $\mathrm{D}(4m,\ 4)$ 이므로

$2^{2m} = 2$ 에서 $m = \dfrac{1}{2}$, $n = 2$

$\therefore\ m + n = \dfrac{5}{2}$

16. 답 ④

$y = \log_2(x+1)$의 역함수는

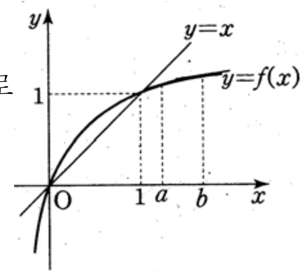
$2^y = x+1$

$x = 2^y - 1$

x와 y를 서로 바꾸면 $y = 2^x - 1$이므로 $g(x) = 2^x - 1$이다.

ㄱ. (참) $g(2) = 2^2 - 1 = 3$

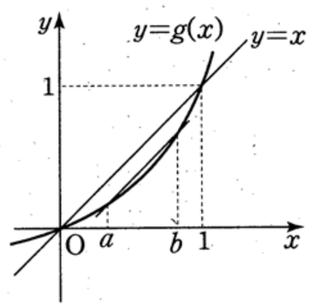
ㄴ. (거짓) 함수 $f(x) = \log_2(x+1)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $1 < a < b$일 때, 두점 $(a, f(a)), (b, f(b))$를 지나는 직선의 기울기는 1보다 작으므로



$\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} < 1$

$\therefore f(b) - f(a) < b - a$

ㄷ. (참) 함수 $g(x) = 2^x - 1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $0 < a < b < 1$이면 두 점 $(a, g(a))$, $(b, g(b))$를 지나는 직선의 기울기가 1인 a, b가 존재한다.



$\dfrac{g(b) - g(a)}{b - a} = 1$

따라서, $g(b) - g(a) = b - a$를 만족하는 a, b가 존재한다.

17. 정답 ②

A, B의 좌표는 각각 $A(-2,\ 1)$, $B(a+2,\ 1)$ 이므로

$\overline{AB} = a + 2 - (-2) = a + 4 = 8$

$\therefore\ a = 4$

18. 정답 ①

$g(2) = 4$ 이므로 $(f \circ g)(2) = f(4) = 2^4 = 16$,

$h(2) = 1$ 이므로 $(g \circ h)(2) = g(1) = 1$

$\therefore (f \circ g)(2) + (g \circ h)(2) = 16 + 1 = 17$

19. 답 ③ 로그함수의 그래프

진수 조건에서

$24+2x-x^2>0,\ x^2-2x-24<0$

$(x+4)(x-6)<0 \qquad \therefore\ -4<x<6$

그런데 $y=24+2x-x^2=-(x-1)^2+25$이므로

진수는 $-4<x<1$에서 증가하고 $1<x<6$에서 감소한다.

따라서 함수 $y=f(x)$는 $-4<x<1$에서 감소하고 $1<x<6$에서 증가한다.

그러므로 주어진 조건을 만족시키는 정수 p,q에 대하여 $q-p$의 최댓값은 $q=6,\ p=1$일 때이므로 5이다.

20. 답 ④ 이해력-지수함수와 로그함수

$y=\log_2\dfrac{4}{x+1}=\log_2 4-\log_2(x+1)=-\log_2(x+1)+2$

따라서, 위의 함수의 그래프는 $y=-\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동시킨 그래프이다.

$\therefore\ m+n=-1+2=1$

21. 정답 ④

$y=\log_3 5x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프는

$y=\log_3 5(x-m)+n$이다. 이 때

$y=\log_3(15x-180)=\log_3(3\cdot 5(x-12))$

$=1+\log_3 5(x-12)$

이므로 $m=12,\ n=1$이다.

$\therefore m+n=13$

22. 정답 ③

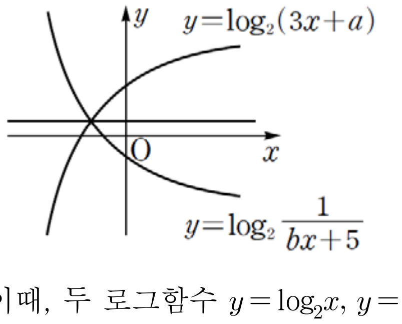
$y=\log_2(3x+a)=\log_2 3\left(x+\dfrac{a}{3}\right)$

$=\log_2\left(x+\dfrac{a}{3}\right)+\log_2 3 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$y=\log_2\dfrac{1}{bx+5}=-\log_2(bx+5)$

$=\log_{\frac{1}{2}}(bx+5)=\log_{\frac{1}{2}}b\left(x+\dfrac{5}{b}\right)$

$=\log_{\frac{1}{2}}\left(x+\dfrac{5}{b}\right)+\log_{\frac{1}{2}}b\ (\because\ b>0) \qquad \cdots\cdots$ ㉡



이때, 두 로그함수 $y=\log_2 x,\ y=\log_{\frac{1}{2}}x$의 그래프는 x축에 대하여 대칭이므로 주어진 두 로그함수의 그래프가 x축에 평행한 직선에 대하여 대칭이 되려면 ㉠, ㉡에서 x축의 방향으로 평행이동한 값이 같아야 한다.

$\dfrac{a}{3}=\dfrac{5}{6} \qquad \therefore ab=15$

23. 정답 ⑤

ㄱ. $\log_9 4>\log_9 3=\dfrac{1}{2} \qquad \therefore$ 거짓

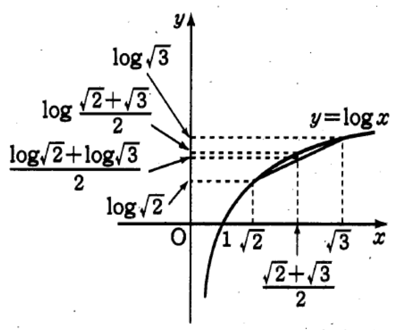
ㄴ. $\log_2 3$과 $\log_3 7$에 3을 각각 곱해서 비교해 보면

$3\log_2 3=\log_2 27<\log_2 32=5$

$3\log_3 7=\log_3 343>\log_3 243=5$

$\therefore\ \log_2 3<\log_3 7\ \therefore$참

ㄷ. $\dfrac{1}{3}\log 6=\dfrac{\log\sqrt{2}+\log\sqrt{3}}{2}$이고, $y=\log x$의 그래프는 위로 볼록인 곡선이다. 그래프를 이용하여 다소 비교하면 다음과 같다.



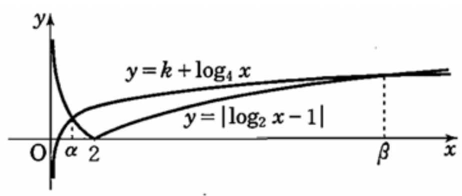
즉, $\log\left(\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}\right)>\dfrac{\log\sqrt{2}+\log\sqrt{3}}{2}$임을 알 수 있다.

$\therefore\ \log\left(\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}\right)>\dfrac{1}{4}\log 6 \qquad \therefore$ 참

따라서 옳은 것은 ㄴ,ㄷ이다.

24. 정답 4

두 교점의 x좌표를 $\alpha,\beta\ (\alpha<\beta)$라 하면



$1-\log_2\alpha=k+\log_4\alpha$에서 $\log_4\alpha^2+\log_4\alpha=1-k$

$\log_4\alpha^3=1-k \qquad \therefore\ \alpha=4^{\frac{1-k}{3}}$

$\log_2\beta-1=k+\log_4\beta$에서 $\log_4\beta^2-\log_4\beta=1+k$

$\log_4\beta=1+k \qquad \therefore\ \beta=4^{1+k}$

$\therefore\ \alpha\beta=4^{\frac{1-k}{3}+1+k}=2^{\frac{8+4k}{3}}=256=2^8$

$\therefore\ \dfrac{8+4k}{3}=8 \qquad \therefore\ k=4$

25. 답 108 로그함수의 그래프

두 정사각형의 넓이의 비가 $4:9$이므로 $\overline{OA}:\overline{OB}=2:3$이다. 또, 선분 PQ의 길이가 $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$이므로 선분 AB의 길이는 $\dfrac{1}{6}$이다.

두 점 A,B의 x좌표를 각각 $2k,3k$라 하면

$3k-2k=\frac{1}{6}$　　$\therefore\ k=\frac{1}{6}$

즉, $P\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$, $Q\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$이므로

$\frac{1}{3}=\log_a\frac{1}{3}$, 즉 $a^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}$에서 $a=\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$

$\frac{1}{2}=\log_b\frac{1}{2}$, 즉 $b^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$에서 $b=\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{4}$

$\therefore\ \frac{1}{ab}=108$

26. 답 ④ 지수함수와 로그함수

ㄱ. 모든 실수 x에 대하여 $\frac{a^x+a^{-x}}{2}\geq\sqrt{a^x\cdot a^{-x}}=1$

(단, 등호는 $a^x=a^{-x}$일 때 성립)

따라서 $f(x)\geq 0$이므로 함수 $f(x)$의 최솟값은 0이다.(참)

ㄴ. [반례] $a=2$일 때, $x_1=1$, $x_2=0$이면

$f(x_1)=\log_3\frac{2^{-1}+2^1}{2}=\log_3\frac{5}{4}$

$f(x_2)=\log_3\frac{2^0+2^0}{2}=0$

이므로 $f(x_1)>f(x_2)$이다. (거짓)

ㄷ. $f(p+q)-\{f(p)+f(q)\}$

$=\log_3\frac{a^{p+q}+a^{-p-q}}{2}-\log_3\left(\frac{a^p+a^{-p}}{2}\cdot\frac{a^q+q^{-q}}{2}\right)$

$=\log_3\frac{2(a^{p+q}+a^{-p-q})}{(a^p+a^{-p})(a^q+a^{-q})}$

여기서 $2(a^{p+q}+a^{-p-q})-(a^p+a^{-p})(a^q+a^{-q})$

$=a^{p+q}+a^{-p-q}-a^{p-q}-a^{-p+q}$

$=(a^p-a^{-p})(a^q-a^{-q})\geq 0$

이므로 $\frac{2(a^{p+q}+a^{-p-q})}{(a^p+a^{-p})(a^q+a^{-q})}\geq 1$이다.

따라서 $\log_3\frac{2(a^{p+q}+a^{-p-q})}{(a^p+a^{-p})(a^q+a^{-q})}\geq 0$이므로

$f(p+q)\geq f(p)+f(q)$이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ,ㄷ이다.

27. 정답 ③

ㄱ. $\sqrt{a}=\sqrt[3]{b}$에서 $a^{\frac{1}{2}}=b^{\frac{1}{3}}$

$a^3=b^2$

$f(x)=a^x$, $g(x)=b^x$

으로 놓으면 그래프에서

$f(3)=g(2)$이기 위해서는

$a>b$ ∴ 참

ㄴ. $f(x)=2^x$, $g(x)=3^x$으로

놓으면 그래프에서

$f(z)=g(b)$이기 위해서는

$a>b$ ∴ 거짓

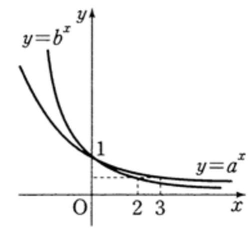
ㄷ. $f(x)=\log_a x$,

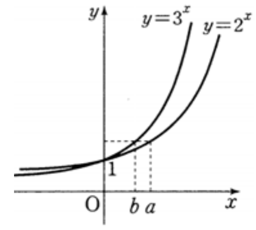
$g(x)=\log_b x$로 놓으면

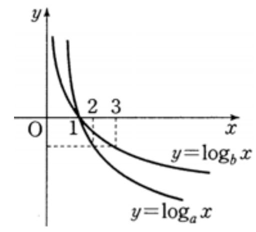
그래프에서 $f(2)=g(3)$이기 위해서는

$a>b$ ∴ 참

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.







28. 정답 ④

$\overline{AB}=\log_{10}a$, $\overline{AC}=\log_2 a$ 이므로

$\frac{1}{\log_{10}a}+\frac{1}{\log_2 a}=1$

$\log_a 10+\log_a 2=\log_a 20=1$　　$\therefore\ a=20$

$\therefore\ \overline{BC}=\log_2 20-\log_{10}20$

$=\log_2(2\cdot 10)-(1+\log_{10}2)$

$=1+\frac{1}{\log_{10}2}-(1+\log_{10}2)=\frac{1}{b}-b$

29. 정답 ①

$f(x)=\log x-[\log x]$는 $\log x$의 가수이다.

$\log\frac{1}{5}=\log\frac{2}{10}=-1+\log 2$　　$\therefore\ f\left(\frac{1}{5}\right)=\log 2$

$\log\frac{1}{2}=\log\frac{5}{10}=-1+\log 5$　　$\therefore\ f\left(\frac{1}{2}\right)=\log 5$

$\therefore\ \log 2<f(n)<\log 5$

n은 두 자리의 자연수이므로 $\log n=1+f(n)$

$1+\log 2<\log n<\log 50$　　$\therefore\ 20<n<50$

따라서 구하는 자연수 n의 개수는 29이다.

30. 답 ③

$\log x=m+\alpha$ (m은 정수, $0\leq\alpha<1$)라 하면

$f(x)=m+\alpha-[m+\alpha]=m+\alpha-m=\alpha$

ㄱ. (참) $f(2)=\log 2-[\log 2]=\log 2$

$f(8)=\log 8-[\log 8]=\log 8$

$\therefore f(2)<f(8)$

ㄴ. (참) $f(a)=f(b)$이므로

$\log a-\log b=\log\frac{a}{b}=n$ (n은 정수)

$\therefore\frac{a}{b}=10^n$

$\therefore a=b\times 10^n$

ㄷ. (거짓) [반례] $a=10^{\frac{1}{3}}$, $b=10^{\frac{2}{3}}$, $c=10^{\frac{1}{3}}$ 이면

$f(a)=\frac{1}{3}$, $f(b)=\frac{2}{3}$, $f(c)=\frac{1}{3}$ 이므로

$f(a)+f(b)=1$, $f(b)+f(c)=1$ 이지만

$f(a)+f(c)=\frac{2}{3}$ 이다.

31. 답 ④

$\cdots$, $\frac{1}{1000}\le x<\frac{1}{100}$ 이면 $-3\le \log x<-2$ 이므로

$f(x)=\log x+3$

$\frac{1}{100}\le x<\frac{1}{10}$ 이면 $-2\le \log x<-1$ 이므로

$f(x)=\log x+2$

$\frac{1}{10}\le x<1$ 이면 $-1\le \log x<0$ 이므로

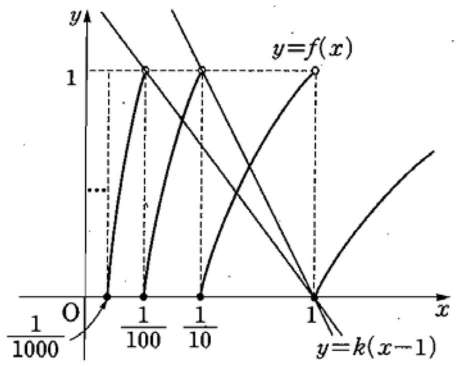
$f(x)=\log x+1$

$1\le x<10$ 이면 $0\le \log x<1$ 이므로 $f(x)=\log x$

$10\le x<100$ 이면 $1\le \log x<2$ 이므로

$f(x)=\log x-1$, $\cdots$

따라서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k(x-1)$ $(k<0)$을 좌표평면에 나타내면 다음 그림과 같다.



이때, 주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k(x-1)$이 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로 구하는 k의 값의 범위는

$$\frac{0-1}{1-\frac{1}{10}}<k\le\frac{0-1}{1-\frac{1}{100}}$$

$$\therefore -\frac{10}{9}<k\le-\frac{100}{99}$$

따라서 k의 최댓값은 $-\frac{100}{99}$ 이다.

32. 답 ③

$f_n(x)=f_{n^2}(x)$에서 $\log_n x$ 의 소수 부분과 $\log_{n^2}x$ 의 소수 부분이 같으므로

$\log_{n^2}x-\log_n x=\frac{1}{2}\log_n x$ (정수)

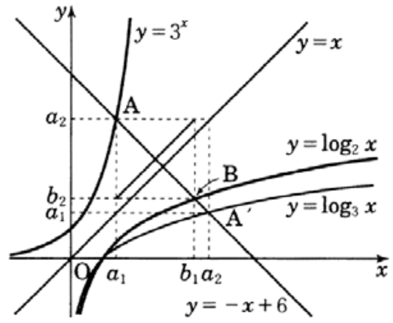
$1\le x<n^{2011}$ 에서 $0\le\frac{1}{2}\log_n x<\frac{2011}{2}$

$\frac{1}{2}\log_n x=0,\ 2,\ 4,\ \cdots,\ 2010$

$\therefore\ x=1,\ n^2,\ n^4,\ \cdots,\ n^{2010}$

따라서 위 식에서 $n=2^{2011}$일 때, 정수가 되는 x의 개수는 1006이다.

33. 정답 ③



ㄱ. 위 그림에서 점 $A(a_1, a_2)$가 영역 $y>x$에 있으므로 $a_1<a_2$이다. (참)

ㄴ. 함수 $y=3^x$의 역함수는 $y=\log_3 x$이므로 점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 A'이라 하면 점 A'은 곡선 $y=\log_3 x$와 직선 $y=-x+6$이 만나는 점이다. $\therefore\ A'(a_2,\ a_1)$

따라서 위 그림에서 $b_1<a_2$(거짓)

ㄷ. 직선 AB의 기울기는 $\frac{b_2-a_2}{b_1-a_1}=-1$

따라서 두 점 (a_1, b_2), (b_1, a_2)를 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{a_2-b_2}{b_1-a_1}=\frac{-(b_2-a_2)}{b_1-a_1}=1\text{(참)}$$

34. 정답 ⑤

$A(2^{-a},\ a)$, $B(2^a,\ a)$, $C(2^a,\ -a)$, $D(2^{-a},\ -a)$이므로 직사각형 ADCB 의 넓이는 $2a(2^a-2^{-a})$이다.

이때, $2^a+2^{-a}=\frac{17}{4}4\cdot(2^a)^2-17\cdot 2^a+4=0$

$2^a=t\ (t>0)$로 치환하면 $4t^2-17t+4=0$

$(4t-1)(t-4)=0$

$\therefore t=\frac{1}{4}$ 또는 $t=4$

$\therefore a=2\ (\because a>0)$

$\therefore$ (직사각형 ADCB 의 넓이)$=2a(2^a-2^{-a})$

$=2\cdot 2\cdot\left(4-\frac{1}{4}\right)=15$

35. 50

$y=\log_{\sqrt{a}}x=2\log_a x$이므로 $x>1$일 때

$\log_{\sqrt{a}}x>\log_a x$

$B(k, \log_a k)$, $C(k, 2\log_a k)$

점 D의 x좌표를 t로 놓으면

$\log_a t=2\log_a k=\log_a k^2$

$\therefore\ t=k^2$

$\therefore \overline{AB}=\log_a k$, $\overline{AC}=2\log_a k$

($\square PABQ$의 넓이) $=(k-1)\log_a k=8$ $\cdots\cdots$ ㉠

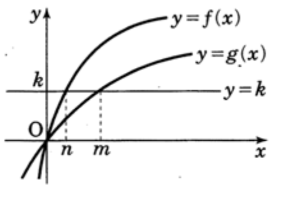
($\square AEDC$의 넓이) $=(k^2-k)2\log_a k$

$=2k(k-1)\log_a k=80$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$k=5 \therefore 10k=50$

36. 정답 ⑤



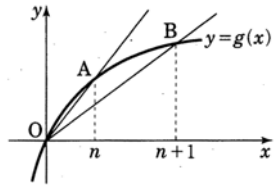
ㄱ. $f(1)=\log_2(1+1)=\log_2 2=1$

$=\log_3 3=\log_3(2+1)=g(2)$ (참)

ㄴ. 오른쪽 그림에서 $f(n)=g(m)$이면

$n<m$이다. (참)

ㄷ.



$2^{f(n)}-1=2^{\log_2(n+1)}-1=(n+1)-1=n$

$3^{g(n)}=3^{\log_3(n+1)}=n+1$

이므로

$\dfrac{\log_3(n+1)}{2^{f(n)}-1}=\dfrac{g(n)}{n}=$(직선 OA의 기울기)

$\dfrac{\log_3(n+2)}{3^{g(n)}}=\dfrac{g(n+1)}{n+1}=$(직선 OB의 기울기)

이 때, 위의 그림에서

(직선 OA의 기울기)>(직선 OB의 기울기)

이므로

$\dfrac{\log_3(n+1)}{2^{f(n)}-1}>\dfrac{\log_3(n+2)}{3^{g(n)}}$ (참)

37. 정답 ③

[출제의도] 지수함수와 로그함수의 그래프의 성질과 관계를 파악할 수 있는가를 묻는 문제이다.

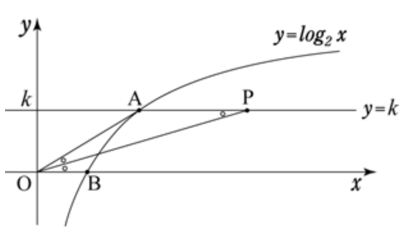
ㄱ. $f(x)$는 감소함수이고, $g(x)$는 증가함수이다. 따라서, 제 1사분면의 한 점에서 만나므로 $k=1$이다.(참)

ㄴ. $y=(\sqrt{2})^x$는 $y=x$와 두 점 (2, 2), (4, 4)에서 만난다. 따라서, $y=f(x)$와 $y=g(x)$ 서로 다른 두 점에서 만나므로 $k=2$이다.(참)

ㄷ. (반례) $a=6,\ b=\dfrac{1}{2}$이라 하면, $k=1$이다.(거짓)

38. 정답 370

[출제의도] 로그함수의 그래프를 이용하여 수학 내적 문제 해결하기



직선 OP 가 ∠AOB 의 이등분선이므로

$\angle AOP=\angle POB$ 이고

$\angle POB=\angle APO$ (엇각)이므로

$\angle AOP=\angle APO$, $\overline{OA}=\overline{AP}$ 이다.

$\overline{AP}=f(k)$ 이므로 $\overline{OA}=f(k)$.

A 의 좌표가 $(2^k,\ k)$ 이므로

$f(k)=\sqrt{4^k+k^2}$

$\therefore\ \sum_{k=1}^{4}\{f(k)\}^2=\sum_{k=1}^{4}(4^k+k^2)=370$

39. 정답 5

점 Q의 좌표가 $(k^2, \log_b k^2)$이므로 점 P의 x좌표와 y좌표는 모두 $\log_b k^2$이다. 즉, $P(\log_b k^2, \log_b k^2)$

이때, 점 R의 x좌표가 $\log_b k^2$이므로 점 R의 y좌표는

$a^{\log_b k^2}=(k^2)^{\log_b a}=k$

$\therefore 2\log_b a=1, b=a^2$

$\therefore a-b=a-a^2=-\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}$

따라서 $a-b$의 최댓값은 $a=\dfrac{1}{2}, b=\dfrac{1}{4}$일 때 $\dfrac{1}{4}$이다.

$\therefore m+n=5$

40. 정답 ③

ㄱ. $y=-\log_2 x$의 그래프 위의 점 $\left(\dfrac{1}{2},\ 1\right)$과 $P(x_1, y_1)$의 위치를 비교하면 $y_1<1$이므로 $\dfrac{1}{2}<x_1<1$ ∴ 참

ㄴ. $y=2^x$의 역함수는 $y=\log_2 x$이고,

$y=-\log_2 x$의 역함수는 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$이므로

$y=2^x$와 $y=-\log_2 x$의 교점 $R(x_3,\ y_3)$와 $y=\log_2 x$와 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$의 교점 $Q(x_2, y_2)$는 직선 $y=x$에 대해 대칭이다.

$\therefore x_3=y_2, x_2=y_3$…… (*)

$\therefore x_2y_2-x_3y_3=0$ ∴ 참

ㄷ. 점 점 (1, 0)을 S라 하면

($\overline{RS}$의 기울기) < ($\overline{PS}$의 기울기)이므로

$\dfrac{y_3}{x_3-1}<\dfrac{y_1}{x_1-1}$이고, 여기에 위의 (*)을 대입하면

$\dfrac{x_2}{y_2-1}<\dfrac{y_1}{x_1-1}$이 성립하므로

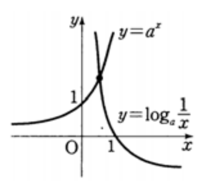
$x_2(x_1-1)<y_1(y_2-1)$ $(\because x_1-1<0, y_2-1<0)$ ∴거짓

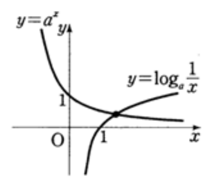
따라서, 옳은 것은 ㄱ,ㄴ이다.

41. 정답 ③

$y=\log_a\dfrac{1}{x}=-\log_a x$이므로

ㄱ. (ⅰ) $a>1$일 때 (ⅱ) $0<a<1$일 때,



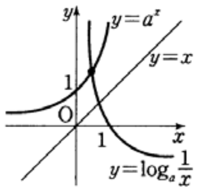


∴ $n(A\cap B)=1$ ∴ 참

ㄴ. $a>1$일 때 두 함수 $y=a^x,\ y=\log_a\dfrac{1}{x}$의 그래프의 교점 (x,y)는 직선 $y=x$ 의 위쪽 부분에 있고, 이때 $9<x<1,\ a^0=1<y$이

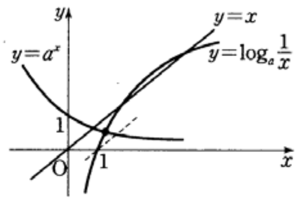
므로

$0<x<1<y$이다. $\therefore$ 참



ㄷ. [반례] $a=\frac{1}{\sqrt{2}}$일 때, 두 함수 $y=a^x$,

$y=\log_a \frac{1}{x}$의 그래프의 교점 $(x,\ y)$는 그림과 같이 나타난다.



$\frac{y-0}{x-1}>1$ $\therefore$ $y>x-1$ $\therefore$ 거짓

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

42. 답 ③

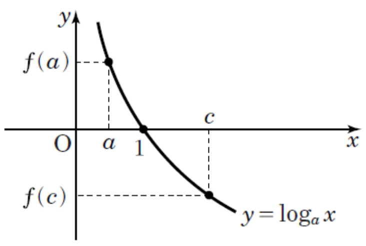
ㄱ. 함수 $f(x)=\log_a x$의 그래프는 $0<a<1$이므로 아래로 볼록이다.

$\therefore f\left(\frac{a+b}{2}\right)>\frac{f(a)+f(b)}{2}$ (참)

ㄴ. $1<b<c$에서 $f(c)<f(b)<0$이므로 $c\cdot f(c)<b\cdot f(b)$

$\therefore \frac{f(b)}{f(c)}<\frac{c}{b}$ (거짓)

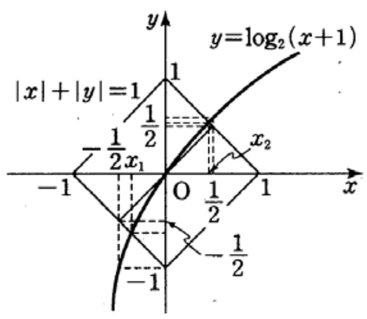
ㄷ. $\frac{f(a)}{a-1}$, $\frac{f(c)}{c-1}$는 각각 점 $(1,\ 0)$과 점 $(a,\ f(a))$, 점 $(c,\ f(c))$를 잇는 직선의 기울기이다.



$\therefore \frac{f(a)}{a-1}<\frac{f(c)}{c-1}$

$\therefore \frac{f(a)}{f(c)}<\frac{a-1}{c-1}$ (참)

43. 정답 ③



ㄱ. $\log_2(x_1+1)>-1=\log_2\left(-\frac{1}{2}+1\right)$ $\therefore$ $x_1>-\frac{1}{2}$

$\log_2\left(\frac{1}{2}+1\right)=\log_2\frac{3}{2}>\log_2(x_2+1)$

$\therefore$ $x_2<\frac{1}{2}$ $\therefore$참

ㄴ. 점 (x_2, y_2)는 $y=\log_2(x+1)$의 그래프와 직선 $y=-x+1$과의 교점이므로

$y_2=\log_2(x_2+1)=-x_2+1$

$x_2y_2=x_2(-x_2+1)$

$=-x_2^2+x_2$

$=-\left(x_2-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}<\frac{1}{4}$ ($\because$ $x_2\neq\frac{1}{2}$) $\therefore$ 거짓

ㄷ. $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{(-x_2+1)-(-x_1-1)}{x_2-x_1}=\frac{2-x_2+x_1}{x_2-x_1}$

$=\frac{2}{x_2-x_1}-1>1$ ($\because x_2-x_1<1$) $\therefore$참

따라서 옳은 것은 ㄱ,ㄷ이다.

44. 답 ⑤

ㄱ. $\log x^2=\log(x+n)$의 두 근이 a_n, c_n이므로 $x^2=x+n$의 두 근이 a_n, c_n이다. 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a_n+c_n=1$, $a_nc_n=-n$

$\therefore$ $a_3+c_3=1$ (참)

ㄴ. $a_n<c_n$이고 $a_nc_n=-n<0$이므로

$a_n<0<c_n$

$b_n=\log {a_n}^2=\log(-a_n)^2=2\log(-a_n)$

$d_n=\log {c_n}^2=2\log c_n$

$\therefore$ $b_n+d_n=2\log(-a_n\cdot c_n)=2\log n$ (참)

ㄷ. $c_n>1$이고 $\log {c_n}^2=\log(c_n+n)$

$\therefore {c_n}^2=c_n+n$

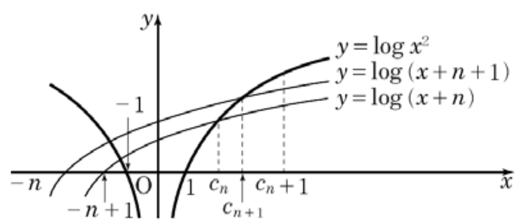
$\log {c_{n+1}}^2=\log(c_{n+1}+n+1)$

$\log(c_n+1)^2=\log({c_n}^2+2c_n+1)$

$=\log(c_n+n+2c_n+1)>\log(c_n+1+n+1)$ ($\because$ $2c_n>1$)

그림에서

$c_{n+1}<c_n+1$ (참)



45. 정답 ⑤

$A(1,\ 0)$, $D(b,\ \log b)$, $E(c,\ \log c)$

$\overline{BD}=\overline{CE}$에서 $\log b=-\log c$이므로 $c=\frac{1}{b}$

$\therefore$ $C\left(\frac{1}{b},\ 0\right)$

$\triangle ACF$와 $\triangle ABD$는 서로 닮음이므로

$\overline{CF}:\overline{CE}=\overline{CF}:\overline{BD}=\overline{AC}:\overline{AB}$

$\overline{AC}=1-\frac{1}{b}$, $\overline{AB}=b-1$이므로

$\overline{CF}:\overline{CE}=\frac{b-1}{b}:b-1=1:b$

46. 정답 ③

선분 AC가 y축에 평행하므로

두 점 A, C의 좌표를 각각

$A(t,\ \log_2 4t)$, $B(t,\ \log_2 t)$ $(t>1)$라고 하면

$\overline{AB}=\log_2 4t-\log_2 t=\log_2\frac{4t}{t}=2$

선분 AC의 중점을 M이라 하면 삼각형 ABC가 정삼각형이므로

$\overline{BM}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2=\sqrt{3}$

따라서 점 B의 좌표는

$B(t-\sqrt{3},\ \log_2 4(t-\sqrt{3}))$ 이고

$\overline{AB}=\sqrt{(t-\sqrt{3}-t)^2+\{\log_2 4(t-\sqrt{3})-\log_2 4t\}^2}$

$=\sqrt{3+\left\{\log_2\frac{(t-\sqrt{3})}{t}\right\}^2}=2$

이므로 $\log_2\frac{(t-\sqrt{3})}{t}=\pm 1$이다.

그런데 $t>1$이므로 $\frac{t-\sqrt{3}}{t}<1$

따라서 $\log_2\frac{(t-\sqrt{3})}{t}=-1$ 이고

$\frac{(t-\sqrt{3})}{t}=\frac{1}{2}$, $2(t-\sqrt{3})=t$

$\therefore\ t=2\sqrt{3}$

이 때 점 B의 좌표는

$B(\sqrt{3},\ \log_2 4\sqrt{3})$이므로

$p=\sqrt{3}$, $q=\log_2 4\sqrt{3}$

$\therefore\ p^2\times 2^q=(\sqrt{3})^2\times 2^{\log_2 4\sqrt{3}}=3\times 4\sqrt{3}=12\sqrt{3}$

47. 81

[출제의도] 로그방정식의 해를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$(\log_3 x)^2-12=\log_3 x^4$ 는 $(\log_3 x)^2-\log_3 x^4-12=0$

$(\log_3 x-6)(\log_3 x+2)=0$, $\log_3 x=6,\ -2$ 이므로

$x=3^6,\ 3^{-2}$ 이다. $\therefore\ \alpha\beta=81$

48. 정답 4

주어진 식의 진수 조건에서

$x-2>0,\quad x+4>0$ 이므로 $x>2$

$\log_2(x-2)+\log_2(x+4)=4$

$\log_{211(x-2)(}x+4)=4$

$(x-2)(x+4)=16,\quad x^2+2x-24=0$

$(x+6)(x-4)=0$

$\therefore\ x=4\ (\because\ x>2)$

49. 답 ②

$(\log_2 x-\log_2 3)\log_2 x=\log_2 x^2+8$에서

$\log_2 x=t$라 하면 주어진 방정식은

$(t-\log_2 3)t-2t-8=0$

$\therefore\ t^2-(2+\log_2 3)t-8=0$ ……㉠

이때, 이차방정식 ㉠의 두 근이 $\log_2\alpha$, $\log_2\beta$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_2\alpha+\log_2\beta=2+\log_2 3$이므로

$\log_2\alpha\beta=\log_2 12$

$\therefore\alpha\beta=12$

50. 정답 12

$\log_3(x-4)=\log_{3^2}(5x+4)$

$\log_3(x-4)=\frac{1}{2}log_3(5x+4)$

$2\log_3(x-4)=\log_3(5x+4)$

$\log_3(x-4)^2=\log_3(5x+4)$

$(x-4)^2=5x+4,\ x^2-13x+12=0$

$(x-1)(x-12)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=12$

이때 진수조건에 의하여 $x>4$이므로 $\alpha=12$

51. 답 64

진수조건에서 $x-2>0$, $x+4>0$ $\therefore\ x>2$ …㉠

$2\log_{\frac{1}{3}}(x-2)-\log_{\frac{1}{3}}(x+4)=-1$

$2\log_{\frac{1}{3}}(x-2)=\log_{\frac{1}{3}}(x+4)-\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3}$

$\log_{\frac{1}{3}}(x-2)^2=\log_{\frac{1}{3}}(x+4)+\log_{\frac{1}{3}}3$

$(x-2)^2=3(x+4)$, $x^2-4x+4=3x+12$

$x^2-7x-8=0,\quad ,(x-8)(x+1)=0$

$\therefore\ x=8\ (\because㉠)\quad \therefore\ \alpha^2=64$

52. 답 8

$(\log_2 x-2)^2-8\log_4 x+11=0$이므로 $\log_2 x=t$로 놓으면 주어진 식은

$(t-2)^2-4t+11=0$

$t^2-8t+15=0$ $(t-3)(t-5)=0$

$\therefore\ t=3$ 또는 $t=5$

$t=3$ 일 때 $\log_2\alpha=3$

$t=5$ 일 때 $\log_2\beta=5$

$\therefore\log_2\alpha\beta=\log_2\alpha+\log_2\beta=3+5=8$

53. 33

$\log_2(x^3-1)=\log_2(x^2+x+1)+5$

$\Leftrightarrow\ \log_2(x^3-1)=\log_2 2^5(x^2+x+1)$

$\Leftrightarrow\ x^3-1=32(x^2+x+1)$

$\Leftrightarrow\ (x-1)(x^2+x+1)=32(x^2+x+1)$

$\Leftrightarrow\ x-1=32\quad(\because\ x^2+x+1>0)$

$\therefore\ x=33$

54. 정답 ②

$\log\frac{x^2}{7}=2\log x-\log 7$ 이므로 $\log x=t$ 로 놓으면 주어진 식은

$t(2t-\log 7)=32$

$\therefore 2t^2-t\log 7-32=0$ …… ㉠

주어진 방정식의 두 근이 α, β 이므로 방정식 ㉠의 두 근은 $\log\alpha$, $\log\beta$ 가 된다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log\alpha+\log\beta=\frac{\log 7}{2}=\frac{1}{2}\log 7=\log\sqrt{7}$

이 때, $\log\alpha+\log\beta=\log\alpha\beta$ 이므로 $\alpha\beta=\sqrt{7}$

55. 정답 24

$\log_x=t$로 치환하면 방정식 $t^2-3t+1=0$의 두 근이 $\log\alpha$, $\log\beta$ 이므로 근과 계수의 관계에서

$\log\alpha+\log\beta=3$, $\log\alpha\cdot\log\beta=1$

방정식 $t^2-at+b=0$의 두 근이 $\log\alpha^2$, $\log\beta^2$ 이므로

근과 계수의 관계에서

$\log\alpha^2+\log\beta^2=a$, $\log\alpha^2\cdot\log\beta^2-b$

$\therefore\ a=2(\log\alpha+\log\beta)=6$

$b=4\log\alpha\cdot\log\beta=4$

$\therefore ab=24$

56. 답 ③

[해설] 로그방정식

$\log_x y=t$로 놓으면 (가)에서 $1<x<y$이므로 $t>1$이고

$5t+\frac{3}{t}=16$, $5t^2-16t+3=0$

$(t-3)(5t-1)=0$

$\therefore t=3(\because t>1)$

즉, $\log_x y=3$이므로 $y=x^3$

$\therefore\frac{x^3+y^2}{x^6+y}=\frac{x^3+x^6}{x^6+x^3}=1$

57. 정답 ① 이해 능력-지수함수와 로그함수

$\log_2 x=X$라 하면

$X^2-(\log_2 a+\log_2 b)X+(\log_2 a)(\log_2 b)+1=0$

주어진 방정식이 단 하나의 실근을 가지므로 판별식 $D=0$을 만족시킨다.

즉, $(\log_2 a+\log_2 b)^2-4\{(\log_2 a)(\log_2 b)+1\}=0$

$(\log_2 a)^2+2(\log_2 a)(\log_2 b)+(\log_2 b)^2-4(\log_2 a)(\log_2 b)-4=0$

$(\log_2 a-\log_2 b)^2=4$, $\left(\log_2\frac{a}{b}\right)^2=4$

$\therefore\ \log_2\frac{a}{b}=2$ ($\because\ a>b$) $\qquad\therefore\ \frac{a}{b}=4$

58. 답 ③

진수는 양수이어야 하므로 $x-1>0$, $3-x>0$

$\therefore 1<x<3$ …㉠

주어진 식을 정리하면

$\log_3(x-1)(3-x)<0$

$(x-1)(3-x)<1$에서 $-x^2+4x-3<1$

$x^2-4x+4>0$, $(x-1)^2>0$

$\therefore x\neq 2$ …㉡

㉠, ㉡에서 $1<x<2$ 또는 $2<x<3$

$\therefore a=1$, $b=2, c=2$, $d=3$

$\therefore a+b+c+d=1+2+2+3=8$

59. 정답 ②

[출제의도] 지수부등식과 로그부등식을 풀 수 있는가를 묻는 문제이다.

$a^{x-1}<a^{2x+1}$ 의 해가 $x<-2$ 이려면

$x<-2\Leftrightarrow x-1>2x+1$

$\therefore\ 0<a<1$

$\log_a(x-2)<\log_a(4-x)$ 에서

$x-2>4-x\qquad\therefore\ x>3$ … ㉠

진수는 양수이어야 하므로 $x-2>0, 4-x>0$

$\therefore\ 2<x<4$ … ㉡

㉠, ㉡에서 주어진 부등식의 해는 $3<x<4$ 이다.

60. 답 ②

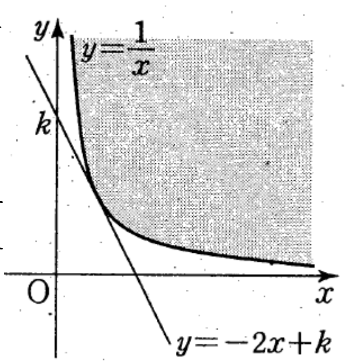
$\log_2 x+\log_2 y\geq 0$

$\log_2 xy\geq\log_2 1$

$\therefore y\geq\frac{1}{x}$ $(x>0, y>0)$

$2x+y=k$라 하면 $\qquad y=-2x+k$

그림과 같이 $y=\frac{1}{x}$ 의 그래프와 직선 $y=-2x+k$가 접할 때 k는 최솟값을 가진다.



따라서, 두 방정식을 연립하면

$\frac{1}{x}=-2x+k$

$2x^2-kx+1=0$

위의 방정식이 중근을 가질 때 두 개의 그래프가 접하므로 판별식을 D라 하면

$D=k^2-8=0$

$\therefore k=2\sqrt{2}$ $(\because k>0)$

61. 정답 ①

이해력 - 지수함수와 로그함수

$\log_{(x-2)}(2x^2-11x+14)$ 가 정의되기 위해서는 진수 조건에서

$2x^2-11x+14=(x-2)(2x-7)>0$

$\therefore\ x<2$ 또는 $x>\frac{7}{2}$ ....㉠

밑의 조건에서 $x-2>0$, $x-2\neq 1$

$\therefore\ 2<x<3$ 또는 $x>3$ ....㉡

㉠, ㉡에서 $x>\frac{7}{2}$ ....㉢

이 때, $\log_{(x-2)}(2x^2-11x+14)<2$ 에서 $x-2>1$ 이므로

$2x^2-11x+14<(x-2)^2$ $x^2-7x+10<0$, $(x-2)(x-5)<0$

$\therefore$ $2<x<5$ ....㉣

㉢, ㉣에서 $\frac{7}{2}<x<5$

따라서, 구하는 자연수 x는 4로 1개이다.

62. 답 20 로그부등식

$\log_2 x=t$로 놓으면

$\log_2\frac{x}{2}\ge 0$에서 $\log_2 x-1\ge 0$이므로

$t-1\ge 0$ $\therefore t\ge 1$ …㉠

$\left(\log_2\frac{x}{4}\right)\left(1+3\log_2\frac{x}{2}\right)<0$에서

$(\log_2 x-2)(3\log_2 x-2)<0$이므로

$(t-2)(3t-2)<0$ $\therefore \frac{2}{3}<t<2$ … ㉡

㉠, ㉡에서 $1\le t<2$

$1\le\log_2 x<2$ $\therefore 2\le x<4$

따라서 $\alpha=2,\ \beta=4$이므로 $\alpha^2+\beta^2=20$

63. 정답 14

ⅰ) 진수 조건에서 $x^2+2>0$이고

$3(x+4)>0$이므로 $x>-4$ ……㉠

$\log_{\frac{1}{3}}(x^2+2)\ge\log_{\frac{1}{3}}3(x+4)$에서

$x^2+2\le 3x+12,\ x^2-3x-10\le 0$

$(x-5)(x+2)\le 0$ $\therefore -2\le x\le 5$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $-2\le x\le 5$

ⅱ) 진수 조건에서 $x>0$이고

$(\log_2 x)^2-4\log_2 x+3\le 0$에서

$(\log_2 x-1)(\log_2 x-3)\le 0,\ 1\le\log_2 x\le 3$

$\therefore 2\le x\le 8$

ⅰ), ⅱ)에서 주어진 연립부등식의 해는 $2\le x\le 5$

따라서 구하는 정수 x값의 합은

$2+3+4+5=14$

64. 답 9

$(\log_3 x)^2-\frac{2\log_3 x}{\log_5 3}+\log_3 x<0$ 에서

$(\log_3 x)^2-2\log_3 5\times\log_3 x+\log_3 x<0$

$\log_3 x=t$라 하면

$t^2-2\log_3 5\times t+t<0$

$t(t-2\log_3 5+1)<0$

$t\left(t-\log_3\frac{25}{3}\right)<0$

$\therefore 0<t<\log_3\frac{25}{3}$

$0<\log_3 x<\log_3\frac{25}{3}$

$\therefore 1<x<\frac{25}{3}$

$\left(\frac{1}{3}\right)^{a\log_3 2}<\left(\frac{1}{2}\right)^{x(x-a+1)}$의 양변에 3을 밑으로 하는 로그를 취하면

$(a\log_3 2)\log_3\frac{1}{3}<x(x-a+1)\log_3\frac{1}{2}$

$a\log_3 2>x(x-a+1)\log_3 2$

$a>x(x-a+1)$

$x^2-(a-1)x-a<0$

$(x+1)(x-a)<0$

그런데, $A\cap B=A$ 즉, $A\subset B$ 이므로 해는 $-1<x<a$가 되어야 한다.

따라서 $A\subset B$가 되기 위해서는 $\frac{25}{3}\le a$이어야 하므로 정수 a의 최솟값은 9이다.

65. 답 504

$0<\log_4\{\log_3(\log_2 x)\}\le\frac{1}{2}$에서 진수조건에 의하여

$\log_3(\log_2 x)>0$

$\log_2 x>1$

$\therefore x>2$ ……㉠

$0<\log_4\{\log_3(\log_2 x)\}\le\frac{1}{2}$

$4^0<\log_3(\log_2 x)\le 4^{\frac{1}{2}}$

$1<\log_3(\log_2 x)\le 2$

$3^1<\log_2 x\le 3^2$

$3<\log_2 x\le 9$

$\therefore 2^3<x\le 2^9$ ……㉡

㉠과 ㉡에 의하여 $2^3<x\le 2^9$ 이므로 정수 x의 개수는

$2^9-2^3=512-8=504$

66. 정답 ②

$\frac{1}{3}<x<9$에서

$\log_3\frac{1}{3}<\log_3 x<\log_3 9$

$-1<\log_3 x<2$…㉠

$(1+\log_3 x)(a-\log_3 x)>0$에서

$(\log_3 x+1)(\log_3 x-a)<0$

이 부등식의 해가 ㉠이므로 $a=2$

67. 정답 ④

진수의 조건에 의해 $x^2+x-2>0$, $-2x+2>0$

$x^2+x-2>0 \iff x>1$ 또는 $x<-2$

$-2x+2>0 \iff x<1$

두 조건을 모두 만족시키는 범위는 $x<-2$ $\cdots$ (1)

$\log_2(x^2+x-2)<\log_2(-2x+2) \iff x^2+x-2<-2x+2 \iff$

$x^2+3x-4<0$

부등식을 풀면 $-4<x<1$ $\cdots$ (2)

(1), (2)를 동시에 만족하는 범위는 $-4<x<-2$ 이다.

$\alpha=-4,\ \beta=-2$ 이므로 $\alpha\beta=8$

68. 답 12

$\log_{\frac{1}{2}}\left\{\log_2(x-3)^2\right\}>-2$에서

$\log_{\frac{1}{2}}\left\{\log_2(x-3)^2\right\}>\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

$\log_2(x-3)^2<4$

$(x-3)^2<2^4$

$x^2-6x-7<0$

$(x+1)(x-7)<0$

$\therefore\ -1<x<7$ $\cdots$ ㉠

진수 조건에 의하여 $(x-3)^2>0,\ x\neq 3$

$\log_2(x-3)^2>0$에서

$x<2$ 또는 $x>4$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 조건을 만족하는 정후는 0,1,5,6이므로 그 합은 12이다.

69. 3 수학 내적 문제 해결 능력 - 지수함수와 로그함수

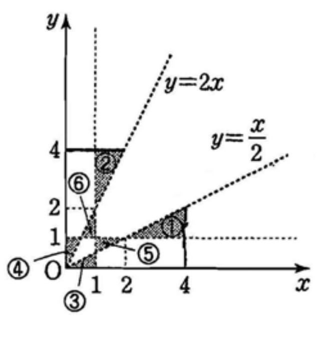
$(\log_2 x)(\log_2 y)\cdot\left\{(\log_2 x)^2-2(\log_2 x)(\log_2 y)+(\log_2 y)^2-1\right\}>0$

$(\log_2 x)(\log_2 y)\left\{(\log_2 x-\log_2 y)^2-1\right\}>0$

$(\log_2 x)(\log_2 y)\cdot(\log_2 x-\log_2 y+1)(\log_2 x-\log_2 y-1)>0$

$\therefore\ (\log_2 x)(\log_2 y)\left(\log_2\frac{2x}{y}\right)\left(\log_2\frac{x}{2y}\right)>0$

그러므로 부등식을 만족하는 점 $(x,\ y)$를 좌표평면에 나타내면 다음 그림과 같다.



$\log_2 x$	$\log_2 y$	$\log_2\frac{2x}{y}$	$\log_2\frac{x}{2y}$	
+	+	+	+	……①
+	+	−	−	……②
−	−	+	+	……③
−	−	−	−	……④
+	−	+	−	……⑤
−	+	+	−	……⑥

따라서 구하는 영역의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times1\times4+\frac{1}{2}\times2\times1\times2=3$$

70. 정답 ④

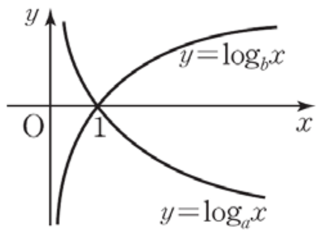
ㄱ. (참) $a>1$ 이면 $\log_a x<\log_a y$ 에서 $x<y$ 이다.

$x<y$ 이고 $\log_b y<\log_b x$ 이므로 $b<1$ 이다.

ㄴ. (거짓) $a<1$ 이면 $\log_a x<\log_a y$ 에서 $x>y$ 이다.

$x>y$ 이고 $\log_b y<\log_b x$ 이므로 $b>1$ 이다.

이때, $\log_a y<\log_b y$ 이므로 오른쪽 그림에 의해 $y>1$ 이다.



즉, $a<1$ 이면 $y>1$ 이다.

ㄷ. (참) ㄱ에서 $a>1$ 이면 $b<1$ 이므로 $b<1<a$ 이고, ㄴ에서 $a<1$ 이면 $b>1$이므로 $a<1<b$ 이다.

(i) $b<1<a$ 인 경우

$\log_a x<\log_b x$ 에서 $0<x<1$ 이고,

$\log_a y<\log_b y$ 에서 $0<y<1$ 이므로

$\log_x y=\dfrac{\log y}{\log x}>0$

(ii) $a<1<b$ 인 경우

$\log_a x<\log_b x$ 에서 $x>1$ 이고,

$\log_a y<\log_b y$ 에서 $y>1$ 이므로

$\log_x y=\dfrac{\log y}{\log x}>0$

그러므로 (i), (ii)에서 $\log_x y>0$ 이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

71. 정답 ②

[출제의도] 로그함수의 성질 이해하기

$\log_2(y+1)-\log_2|x|=\log_2\dfrac{y+1}{|x|}$ 에서

$\dfrac{y+1}{|x|}=k\ (k>0)$ 즉, $y=k|x|-1$ 로 놓으면

k 가 최솟값을 가질 때, $\log_2\dfrac{y+1}{|x|}$ 즉, $\log_2 k$ 도 최솟값을 갖는다.

$y=x^2$ 과 $y=k|x|-1$ 이 접할 때,

즉, 방정식 $x^2-k|x|+1=0$ 이 중근을 가질 때, k 가 최솟값을 가지므로 $k=2$ 이다.

$\therefore\ \log_2\dfrac{y+1}{|x|}=\log_2 k=\log_2 2=1$

72. 정답 ④

$\dfrac{1}{\log_m x}=\log_x m,\ \dfrac{1}{\log_n x}=\log_x n$이므로 주어진 부등식은

$1+\log_x m-2\log_x n<0,\ 1<-\log_x m+\log_x n^2$

에서 $\log_x x<\log_x\dfrac{n^2}{m}$

(i) $0<x<1$일 때, $x>\frac{n^2}{m}>1$이므로 모순이다.

(ii) $x>1$일 때, $1<x<\frac{n^2}{m}$

따라서, 구하는 정수 x의 개수는 2, 3, $\cdots$, $\left[\frac{n^2}{m}\right]$의 $\left[\frac{n^2}{m}\right]-1$(개)

이다.

73. 정답 246
[출제의도] 함수의 최대, 최소 구하기
$f(x)=9x^{-2+\log_3 x}$의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면
$\log_3 f(x)=\log_3 9+\log_3 x^{-2+\log_3 x}$
$=2+(-2+\log_3 x)\log_3 x$
$\log_3 x=t$라 하면 $\frac{1}{3}\leq x\leq 3$에서 $-1\leq t\leq 1$이다.
$\log_3 f(x)=t^2-2t+2=(t-1)^2+1$에서
$t=-1$일 때, 최댓값 $M=243$
$t=1$일 때, 최솟값 $m=3$이므로 $M+m=246$이다.

1. 정답 ②
수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면
$a_5=17$에서 $a+4d=17$ …㉠
$a_{20}=77$에서 $a+19d=77$ …㉡
㉠, ㉡에서 $a=1$, $d=4$
$\therefore a_n=1+4(n-1)$
$\therefore a_9=1+4\cdot 8=33$

2. 정답 ④
수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면
$a_2=a+d=6$…… ㉠
$a_2=a+4d=18$……㉡
㉠-㉡을 하면
$3d=12$, $\therefore d=4$, $a=2$
$\therefore a_{10}=a+9d=38$

3. 정답 20
[출제의도] 등차수열의 성질을 이용하여 식의 값을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.
수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a, 공차를 d 라 하면
$a_2+a_4+a_6=3a+9d=30$ $\quad\therefore a+3d=10$
$\therefore a_1+a_7=2(a+3d)=20$

4. 정답 27
[출제 의도] 등차수열의 첫째항과 공차를 구하고 일반항을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.
등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면
$a_3=a+2d=2$ ····· ㉠
$a_6=a+5d=17$ ····· ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-8$, $d=5$
$\therefore a_8=27$

5. 정답 ④
이해력 - 수열
1, a, b, 5, c 의 공차를 d 라 하면
$5=1+3d \quad \therefore d=\frac{4}{3}$
$\therefore\ a=\frac{7}{3},\ b=\frac{11}{3},\quad c=5+\frac{4}{3}=\frac{19}{3}$
$\therefore\ a+2b+c=\frac{7+22+19}{3}=\frac{48}{3}=16$

6. 답 ③
등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면
$a_2+a_{10}=-40$에서 $2a+10d=-40$…… ㉠
$a_8-a_4=8$에서 $4d=8 \quad \therefore d=2$
$d=2$를 ㉠에 대입하면 $a=-30$
$\therefore a_n=-30+(n-1)\cdot 2=2n-32$
$\therefore a_{15}=-2$

7. 정답 ④
세 수 $\log_p a$, $\log_p b$, $\log_p c$가 이 순서대로 등차수열이므로
$2\log_p b=\log_p a+\log_p c$
$\therefore b^2=ac$

8. ③ 이해능력-수열
첫째항을 a, 공차를 d라 하면 $a_5+a_8+a_{11}=51$에서
$3a+(4d+7d+10d)=51$
$a+7d=17$ … ㉠
$a_3+a_5+a_7=33$에서 $3a+(2d+4d+6d)=33$
$a+4d=11$ … ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $d=2$
$\therefore\ a_n=3+2(n-1)=2n+1$
$\therefore\ a_{10}=2\times 10+1=21$

9. 답 ⑤
수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면
$a_1+a_2+a_3=3a+3d=15$ …… ㉠
$a_7+a_8+a_9=3a+21d=69$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 $a=2$, $d=3$
$a_{13}+a_{14}+a_{15}=3a+39d=123$
[다른 풀이]
$b_n=a_{6n-5}+a_{6n-4}+a_{6n-3}$으로 놓으면 $\{a_n\}$이 등차수열일 때, $\{b_n\}$도 등차수열이다.
$b_1=a_1+a_2+a_3=15$, $b_2=a_7+a_8+a_9=69$
$b_3=a_{13}+a_{14}+a_{15}$에서 $b_1+b_3=2b_2$이므로 $b_3=123$

10. 정답 ③
$a_n=S_n-S_{n-1}(n\geq 2)$
$\therefore a_{10}=S_{10}-S_9=210-171=39$

11. 정답 ③
첫째항이 a, 공차를 d, 첫째항부터 제n항 까지의 합을 S_n이라 하면
$S_{10}=\frac{10(2a+9d)}{2}=30$
$\therefore\ 2a+9d=6$ ········· ㉠
$S_{20}-S_{10}=60$에서 $S_{20}=S_{10}+60=90$
즉, $S_{20}=\frac{20(2a+19d)}{2}=90$
$\therefore 2a+19d=9$ ········· ㉡
㉠, ㉡을 연립하면 $a=\frac{33}{20}$, $d=\frac{3}{10}$

$S_{30}=\frac{30(2a+29d)}{2}=\frac{30\left(\frac{33}{10}+\frac{87}{10}\right)}{2}=\frac{30\times 12}{2}=180$

12. 정답 ④

등차수열의 합 공식에 의해 $\frac{(n+2)(1+3)}{2}=24$ 이므로 $n=14$

13. 답 ④ 등차수열

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d $(d\neq 0)$라 하면

$a_1+a_2=a+(a+d)=0$이므로

$d=-2a$ … ㉠

$a_k=3a_4$에서 $a_k=a+(k-1)d=3(a+3d)$이므로

$a+(k-1)(-2a)=3(a-6a)$ ($\because$ ㉠)

이때, $a\neq 0$이므로 $(3-2k)a=-15a$에서

$3-2k=-15$ $\therefore\ k=9$

14. 정답 19

등차수열 a_n의 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$a_3=a+2d=5,\ \ a_6-a_4=2d=4$

$\therefore\ a=1,\ d=2$

$\therefore\ a_{10}=a+9d=1+18=19$

15. 정답 ①

등차수열$\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_1=5,\ a_5=a_1+4d=17$이므로 $d=3$

$\therefore\ a_2+a_3=(a_1+d)+(a_1+2d)$

$=2a_1+3d=19$

16. 정답 ②

등차수열의 성질에 의해

$a+b=\log_6 3+\log_6 12=\log_6(3\times 12)=\log_6 36=2$

17. 답 ④

[해설] $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_m=2m$에서

$\frac{m\{2a_1+(m-1)\cdot 1\}}{2}=2m$

$\therefore\ 2a_1+m=5$ ……… ㉠

$b_1+b_2+b_3+\cdots+b_m=m$에서

$\frac{2m\{2b_1+(2m-1)\cdot 1\}}{2}=m$

$\therefore\ b_1+m=1$ ……… ㉡

$b_{2m}-a_m=99$에서

$b_1+(2m-1)-\{a_1+(m-1)\}=99$

$\therefore\ b_1-a_1+m=99$ ……… ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a_1=-98,\ b=-200,\ m=201$

$\therefore\ a_{2m}-b_m=a_1+(2m-1)-\{b_1+(m-1)\}$

$=a_1-b_1+m$

$=-98-(-200)+201=303$

18. 정답 17

합을 각각 S_n, T_n이라 하면 $S_n=2n^2+pn$, $T_n=3n^2-2n$이므로

$a_n=4n+p-2,\ b_n=6n-5$이다.

$a_{10}=b_{10}$에서 $38+p=55$이므로 $p=17$

19. 정답 ④

[출제의도] 등차수열의 합과 일반항의 관계 이해하기

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항과 공차를 a_1 $(a_1\neq 0)$ 라 하면 $S_n=ka_n$ 에서

$\frac{n\{2a_1+(n-1)a_1\}}{2}=k\{a_1+(n-1)a_1\}$

$\frac{na_1(n+1)}{2}=kna_1$

양변을 na_1 으로 나누면 $k=\frac{n+1}{2}$

두 자리 자연수 k 가 최댓값 99 일 때, n 은 최댓값 197 을 갖는다.

$\therefore$ 197

20. 답 ①

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_{10}=a+9d=10$ … ㉠

$S_{10}=\frac{10(a+a_{10})}{2}=5(a+10)=20$이므로 $a+10=4$

$\therefore a=-6$ … ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $-6+9d=10$

$\therefore d=\frac{16}{9}$

$\therefore a_{19}=a+18d=-6+18\cdot\frac{16}{9}=26$

21. 정답 ⑤

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공차가 모두 3이므로

$a_n=3+(n-1)\cdot 3=3n$

$S_n=\frac{n\{2\cdot 3+(n-1)\cdot 3\}}{2}=\frac{3n(n+1)}{2}$

이때, $a_nb_n=S_n$이므로

$b_n=\frac{n+1}{2}$

$\therefore\ b_{19}=\frac{19+1}{2}=10$

22. 정답 90

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_m-a_3=a_{16}-a_k$에서

$\{a+(m-1)d-(a+2d)=(a+15d)-\{a+(k-1)d\}$

$(m-1)d+(k-1)d=17d$

$d\neq 0$이므로 $m-1+k-1=17$

$\therefore m+k=19$

$\therefore mk=m(19-m)=-m^2+19m$

$=-\left(m-\dfrac{19}{2}\right)^2+\dfrac{19^2}{4}$

따라서 mk의 최댓값은 $m=9$ 또는 $m=10$일 때 $9\cdot 10=90$이다.

23. 정답 ③

이차방정식의 근과 계수의 관계에서

$\alpha+\beta=\dfrac{6}{3}=2,\ \alpha\beta=\dfrac{1}{3}$

$\alpha^3,\ p,\ \beta^3$이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2p=\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=2^3-3\cdot\dfrac{1}{3}\cdot 2=6$

$\therefore p=3$

24. 답 6

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d 라 하자.

$a_3=a+2d=1$

$a_2+a_6=(a+d)+(a+5d)=2a+6d=1$

$\therefore\ a=-3d \qquad \therefore\ a=3,\ d=-1$

따라서 수열 $\{a_n\}$: $3,\ 2,\ 1,\ 0,\ -1,\ -2,\ \cdots$

에 대하여 S_n 의 최댓값 $S_3=S_4=6$

25. 정답 320

[출제의도] a_n과 S_n 사이의 관계를 알고 있는가를 묻는 문제이다.

$a_7=S_7-S_6=320$

26. 답 ③

$n\geq 2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(-2n^2+28n)-\{-2(n-1)^2+28(n-1)\}$

$=-4n+30$

또, $a_1=S_1=26$이므로 $a_n=-4n+30$이다.

$\therefore\ =-4\times 5+30=10$

27. 정답 11

그림의 어두운 부분의 모든 수의 합은

$2(1+2+3+\cdots+n)+2n(1+2+3+\cdots+n)=(1+2n+n^2)$

$=n^3+n^2-n-1$

$=(n+1)^2(n-1)=1440$

$\therefore n=11$

28. 답 ①

$a_{(4,\ 4)}=1+3+5+7+9$

이므로 $a_{(4,\ 4)}$는 첫째항이 1, 공차가 2인 등차수열의 제5항까지의 합이다.

$a_{(5,\ 5)}=1+4+7+10+13+16$

이므로 $a_{(5,\ 5)}$는 첫째항이 1, 공차가 3인 등차수열의 제 6항까지의 합이다.

⋮

따라서 $a_{(10,\ 10)}$는 첫째항이 1, 공차가 8인 등차수열의 제 11항까지의 합이므로

$a_{(10,\ 10)}=\dfrac{11(2\cdot 1+8\cdot 10)}{2}=451$

29. 정답 ②

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$(n^2-3n)-\{(n-1)^2-3(n-1)\}=2n-4\,(n\geq 2)$

$\therefore a_4=4,\ a_5=6$

$\mathrm{P}_4(4,\ 1),\ \mathrm{P}_5(6,\ 2)$이고, 각 원 $x^2+y^2=r^2$의 내부와 외부에 있으므로 $4^2+1^2<r^2,\ 6^2+2^2>r^2$

즉, $17<r^2<40$

따라서 자연수 r^2의 최댓값은 39이다.

30. 정답 12

주어진 사차방정식이 복이차방정식이므로 α가 근이면 $-\alpha$도 근이다.

따라서 네 실근 $-\beta,\ -\alpha,\ \alpha,\ \beta\,(\alpha<\beta)$라 하면

$\alpha-(-\alpha)=2\alpha=6 \qquad \therefore\ \alpha=3$

$\beta-\alpha=6 \qquad \therefore\ \beta=9$

따라서 사차방정식은 $(x^2-9)(x^2-81)=x^4-90x^2+729=0$

$x^4-10\times 3^2\times x^2+9\times 3^4=0$

$\therefore a=3,\ b=9$

$\therefore a+b=3+9=12$

26. 정답 641

$a_n=3n+2,\ b_n=5m-3$ 이므로

$3n+2=5m-3$ 에서 $3n=5(m-1)$

3, 5 가 서로소이므로

$n=5k,\ m-1=3k\,(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 의 공통인 항을 항으로 갖는 수열을 $\{c_k\}$ 라 하면

$c_k=a_{5k}=b_{3k+1}=15k+2$

$15k+2\leq 1202$ 에서 $k\leq 80$ 이므로 최댓값은 $k=80$ 일 때이다.

따라서, $p+q$ 의 최댓값은 $400+241=641$ 이다.

27. 정답 18

[출제의도] 등차수열의 뜻을 알고 문제해결하기

$\overline{\mathrm{AD}}=a-d,\ \overline{\mathrm{CD}}=a,\ \overline{\mathrm{AB}}=a+d$라 하면,

$\triangle ABD \backsim \triangle ACB$ 이므로 $(a+d)^2=(a-d)(2a-d)$ 이다.

$a^2=5ad$ 에서 $a>0$ 이므로 $a=5d$ 이다.

이 때, $\overline{AC}=9d$, $\overline{BC}=6\sqrt{5}$, $\overline{AB}=6d$ 이므로

피타고라스의 정리에 의하여 $81d^2=36d^2+180$ 에서

$d=2$ $(\because d>0)$

따라서, $\overline{AC}=18$

28. 답 200

왼쪽 아래에서 오른쪽 위 방향으로 흰색 타일의 개수를 세어보면 2, 6, 10, ⋯이므로 첫째항이 2, 공차가 4인 등차수열을 이룬다. 마지막 흰색 타일이 놓이는 것은 10번째이므로 필요한 흰색 타일의 총 개수는

$$\frac{10\cdot(2\cdot2+9\cdot4)}{2}=200$$

이다.

29. 답 533

구하는 수는 $20+10-1$, 즉 29번째 등차수열의 제20항이다. 이 등차수열은 첫째항이 1, 공차가 28이므로 구하는 제20행 제10열의 수는 $1+(20-1)\cdot28=533$

30. 67

제2행의 수열은 둘째항부터 공차가 4인 등차수열이므로 a, b 주위의 수들을 표와 같이 나타낼 수 있다.

⋯		$a-2$	a
⋯	$b-8$	$b-4$	b
⋯		76	

주어진 규칙에 의해

$(b-8)+(b-4)=76$ 에서 $b=44$

$(a-2)+a=b$ 에서 $a=23$ $\qquad \therefore a+b=67$

31. 답 660 등차수열의 합

집합 A는 집합 U의 서로 다른 세 원소의 합을 원소로 하는 집합이므로 집합 A의 원소의 최솟값은

$1+3+5=9$ 이고, 최댓값은 $15+17+17=51$ 이다.

$\therefore A=\{9,11,13,15,\cdots,49,51\}$

따라서 집합 A의 원소의 개수는 22개이므로 집합 A의 모든 원소의 합은 $\dfrac{22(9+51)}{2}=11\times60=660$

32. 답 64

(나), (다)에서 홀수 번째 항들의 합이 짝수 번째 항들의 합보다 크고, 공차가 양수이므로 m은 홀수이어야 한다.

$m=2k-1$, 수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공차를 각각 a, d라 하면

$a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2k-1}=128$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2k-2}=96$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠−㉡을 하면

$a+d+d+\cdots+d=32$

$a+(k-1)d=32$

$\therefore a_1+a_m=a+\{a+(m-1)d\}$

$=a+\{a+(2k-1-1)d\}=2\{a+(k-1)d\}$

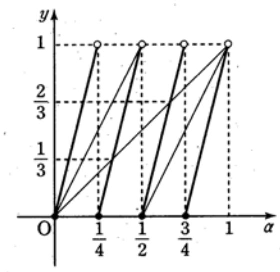
$=2\times32=64$

33. 정답 ⑤

$\log x=1+\alpha$, $\log x^2=2+2\alpha$, $\log x^4=4+4\alpha$

$$\beta=\begin{cases}2\alpha & \left(0\le\alpha<\dfrac{1}{2}\right)\\ 2\alpha-1 & \left(\dfrac{1}{2}\le\alpha<1\right)\end{cases}$$

$$\gamma=\begin{cases}4\alpha & \left(0\le\alpha<\dfrac{1}{4}\right)\\ 4\alpha-1 & \left(\dfrac{1}{4}\le\alpha<\dfrac{1}{2}\right)\\ 4\alpha-2 & \left(\dfrac{1}{2}\le\alpha<\dfrac{3}{4}\right)\\ 4\alpha-3 & \left(\dfrac{3}{4}\le\alpha<1\right)\end{cases}$$



α, β, γ의 그래프를 그리면 위 오른쪽 그림과 같다.

즉, $\beta<\gamma<\alpha$ 를 만족하는 α 의 범위는 $\dfrac{1}{2}<\alpha<\dfrac{2}{3}$ 이다.

$\beta=2\alpha-1$, $\gamma=4\alpha-2$ 이고 β, γ, α 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2\gamma=\beta+\alpha$

$8\alpha-4=2\alpha-1+\alpha$

$3\alpha=3$ $\qquad \therefore \alpha=\dfrac{3}{5}$

즉, $\log x=1+\dfrac{3}{5}$ 이고 $x=10^{\frac{8}{5}}$ 이다.

$\therefore p+q=5+8=13$

34. 답 20

조건 ㈎, ㈏에서

$a_4+a_5+a_6+a_7=76$

$a_{n-6}+a_{n-5}+a_{n-3}+a_{n-3}=236$

이므로

$a_4+a_5+a_6+a_7+a_{n-6}+a_{n-5}+a_{n-3}+a_{n-3}=312$

이때,

$a_4+a_{n-3}=a_5+a_{n-4}=a_6+a_{n-5}=a_7+a_{n-6}=a_1+a_n$

이므로

$4(a_1+a_n)=312$ $\qquad \therefore a_1+a_n=78$

한편, 조건 ㈐에서 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=780$ 이므로

$\dfrac{78n}{2}=780$ $\qquad \therefore n=20$

35. 정답 64

첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$ar^6=4$ $\quad\cdots$ ㉠

$ar^8=8$ $\cdots$㉡

㉡의 양변을 ㉠의 양변으로 각각 나누면 $r^2=2$

$\therefore a_{15}=ar^{14}=ar^8\cdot r^6=8\cdot(r^2)^3=8\cdot 2^3=64$

36. [출제의도] 등비수열의 일반항을 이해하여 식의 값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_1a_{10}=a^2r^9=9$에서

$a_1\times a_2\times\cdots\times a_{10}=a^{10}\times r^{45}=(a^2r^9)^5=9^5=3^{10}$

37. 정답 : 16

수열$\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_1+a_4=a(1+r^3)=72\cdots$ ㉠

$a_4+a_7=ar^3(1+r^3)=9\cdots$ ㉡

㉡÷㉠을 하면

$r^3=\frac{1}{8}$ $\therefore r=\frac{1}{2}$, $a=64$

$\therefore a_3=ar^2=64\left(\frac{1}{2}\right)^2=16$

38. 정답 64

등비수열의 첫항을 a, 공비를 r이라 하면, $a>0$, $r>0$이므로

$a_2a_4=ar\times ar^3=a^2r^4=16$이므로 $ar^2=4$ $\cdots$ (1)

$a_3a_5=ar^2ar^4=a^2r^6=64$이므로 $ar^3=8$ $\cdots$ (2)

(1), (2)를 연립하면 $a=1$, $r=2$

$\therefore$ $a_7=ar^6=2^6=64$

39. 답 ①

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하자.

$a_1+a_2+a_3=2$에서 $a_1+a_1r+a_1r^2=2$

$\therefore$ $a_1(1+r+r^2)=2$ $\cdots\cdots\cdots$ ㉠

또, $a_{10}+a_{11}+a_{12}=2^{10}$에서

$a_1r^9+a_1r^{10}+a_1r^{11}=2^{10}$

$a_1r^9(1+r+r^2)=2^{10}$ $\cdots\cdots\cdots$ ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^9=2^9$ $\therefore$ $r=2$

$\therefore$ $a_{20}+a_{21}+a_{22}=a_1r^{19}+a_1r^{20}+a_1r^{21}$

$=a_1r^{19}(1+r+r^2)=2\cdot 2^{19}=2^{20}$

40. 답 ①

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_3=ar^2=2$ $\cdots\cdots\cdots$ ㉠

$a_6=ar^5=54$ $\cdots\cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠으로 나누면 $r^3=27$에서 $r=3$

$r=3$을 ㉠에 대입하면 $a=\frac{2}{9}$

41. 정답 256

$a_1a_7=(a_1)^2\cdot 2^6=1$에서 $(a_1)^2=\frac{1}{2^6}$

$\therefore$ $a_1=\frac{1}{2^3}$ ($\because$ $a_1>0$)

$\therefore$ $a_{12}=a\cdot 2^{11}=\frac{1}{2^3}\cdot 2^{11}=256$

42. 정답 10

[출제의도] 등차수열과 등비수열의 성질을 이해하여 각 수열의 항을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

수열 $\{a_n\}$의 공차를 d, 수열 $\{b_n\}$의 공비를 r라 하면

$a_2=b_2$이므로 $2+d=2r$ $\cdots\cdots$㉠

$a_4=b_4$이므로 $2+3d=2^3$ $\cdots\cdots$㉡

㉠, ㉡에서 $r^3-3r+2=0$

$(r-1)^2(r+2)=0$

$\therefore r=-2$ ($\because$ $r\neq 1$), $d=-6$

$\therefore a_5+b_5=(2+4d)+2r^4=-22+32=10$

43. 정답 ①

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d, 등비수열 $\{b_n\}$의 공비를 r라 하자.

$a_{11}=a_1+10d$이므로 $16=1+10d$ $\therefore$ $d=\frac{15}{10}=\frac{3}{2}$

$b_{11}=b_1\times r^{10}$이므로 $16=1\times r^{10}$ $\therefore r^{10}=16$

이때 $b_{21}=b_1\times r^{20}=16^2$이므로

$16^2=1+(k-1)\times\frac{3}{2}$

따라서, $3(k-1)=2(16^2-1)=2(16+1)(16-1)$이므로

$k-1=170$ $\therefore k=171$

44. 답 ④

$a_1+a_2+a_3=a+ar+ar^2$

$=a(1+r+r^2)=6$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ ㉠

$a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1=a^2r+a^2r^3+a^2r^2$

$=a^2r(1+r+r^2)=-24$ $\cdots\cdots\cdots$ ㉡

㉡÷ ㉠을 하면 $ar=-4$

㉠에 대입하면 $\frac{-4}{r}(1+r+r^2)=6$

$1+r+r^2=-\frac{3}{2}r$

$2r^2+5r+2=0$, $(r+2)(2r+1)=0$

$\therefore r=-2$, $a=2$ ($\because |r|>1$)

$\therefore a_9=ar^8=2\cdot(-2)^8=2^9$

45. ②

등차수열의 공차를 $d(\neq 0)$로 놓으면

$a_2=a_1+d,\ a_5=a_1+4d$

a_1, a_2, a_5는 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$(a_1+d)^2=a_1(a_1+4d)$

$a_1^2+2a_1d+d^2=a_1^2+4a_1d$

$2a_1d=d^2\ \therefore\ d=2a_1\ (\because\ d\neq 0)$

$\therefore a_2=a_1+d=3a_1,\ a_5=a_1+4d=9a_1$

$\therefore \dfrac{a_5}{a_2}=3$

46. 15

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라고 하면

$a_2=a_1+d$

$a_4=a_1+3d$

$a_9=a_1+8d$

이때 세 항 a_2, a_4, a_9는 등비수열을 이루므로 등비중항에 의해

$(a_1+3d)^2=(a_1+d)(a_1+8d)$

$a_1^2+6a_1d+9d^2=a_1^2+9a_1d+8d^2$

$d(3a_1-d)=0$

$\therefore d=3a_1\ (\because d\neq 0)$

즉, $a_2=4a_1$, $a_4=10a_1$ 이므로

$r=\dfrac{10a_1}{4a_1}=\dfrac{5}{2}$

$\therefore 6r=15$

47. 정답 ②

$a_1+a_2+a_3+a_4=63$

$(a_3+a_4+a_5+a_6)+(a_7+a_8+a_9+a_{10})$

$=r^2(a_1+a_2+a_3+a_4)+r^6(a_1+a_2+a_3+a_4)$

$=63(r^2+r^6)=63\times 10$

$r^6+r^2-10=0,\ (r^2-2)(r^4+2r^2+5)=0$

$r^2=2\quad \therefore\ r=\sqrt{2}$

$\therefore\ a_2+a_3+a_4+a_5=\sqrt{2}(a_1+a_2+a_3+a_4)=63\sqrt{2}$

48. 정답 80

$a, 2, b$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$a+b=4$ …… ㉠

$2, a, b$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$a^2=2b$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하여 풀면 $a=-4,\ b=8\ (\because\ a\neq b)$

$\therefore\ a^2+b^2=80$

49. 정답 4

a, b, c가 이 순서대로 등비수열을 이루므로 공비를 r 라 하면 a, ar, ar^2이다.

$4ar=a+ar^2,\ r^2-4r+1=0\ (a\neq 0)$

따라서 가능한 공비들의 합은 4이다.

50. 정답 ⑤

공비를 r라 하면

$a_1=2r,\ a_2=2r^2,\ a_3=2r^3,\ a_4=2r^4,\ 5=2r^5$

$\therefore\ r^5=\dfrac{5}{2}$

$\therefore\ a_1\times a_2\times a_3\times a_4=2^4r^{10}=16\times\dfrac{25}{4}=4\times 25=100$

51. 정답 ③

ㄱ. $a_n=S_n-S_{n-1}=3^n-2-(3^{n-1}-2)=2\cdot 3^{n-1}(n\geq 2)$

$\therefore\ a_6=2\times 3^5=486\quad \therefore$ 참

ㄴ. $S_1=3-2=1=a_1$

따라서, $a_n=\begin{cases}1 & (n=1)\\ 2\cdot 3^{n-1} & (n\geq 2)\end{cases}$이므로 등비수열이 아니다.

$\therefore$ 거짓

ㄷ. $b_n=\log a_{n+2}-\log a_{n+1}=\log\dfrac{2\cdot 3^{n+1}}{2\cdot 3^n}=\log 3$

수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 $\log 3$, 공차가 0인 등차수열이다. $\therefore$ 참

따라서, 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

52. 정답 ②

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$b_{2n-1}=a_n,\ b_{2n}=a_na_{n+1}$이므로

$\dfrac{b_2b_4b_6b_8}{b_1b_3b_5b_7}=\dfrac{a_1a_2a_2a_3a_3a_4a_4a_5}{a_1a_2a_3a_4}=a_2a_3a_4a_5$

$=r^1r^2r^3r64=r^{10}=a_{11}=b_{21}$

53. 답 ⑤

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 1, 공비가 r이므로

$S_{20}=5S_{10}$에서 $\dfrac{1-r^{20}}{1-r}=5\cdot\dfrac{1-r^{10}}{1-r}$

$1+r^{10}=5\qquad \therefore r^{10}=4$

$S_{40}=\dfrac{1-r^{40}}{1-r}=\dfrac{1-r^{20}}{1-r}(1+r^{20})=S_{20}\cdot 17$

$5S_{10}\cdot 17=85S_{10}$

$\therefore k=85$

54. 정답 2

다항식 $f(x)=x^{2n}+3x^2+nx+1$ 을 $x(x-1)(x+1)$로 나누었을 때의 나머지는 2차식이므로

$f(x)=x^{2n}+3x^2+nx+1=x(x-1)(x+1)Q(x)+ax^2+bx+c$이다. $x=0,1,-1$을 각각 대입하면

$c=1$

$a+b+c=5+n$ …… ①

$a-b+c=5-n$ …… ②

이다. 즉 ①,②에서 $a=4, b=n, c=1$ 이다. 따라서, $b^2=ac$ 이므로 $b=\pm 2$ 이다. n은 자연수이므로 $n=2$ 이다.

55. 12
등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면
$a_5+a_8+a_9=12$ 에서
$r^4(1+r^3+r^4)=12$
…… ㉠
$\frac{1}{a_5}+\frac{1}{a_6}+\frac{1}{a_9}=\frac{1}{12}$ 에서
$\frac{1}{r^4}+\frac{1}{r^5}+\frac{1}{r^8}=\frac{r^4+r^3+1}{r^8}=\frac{1}{12}$ …… ㉡
㉠÷㉡에서 $r^{12}=12^2$ ∴ $r^6=12$
∴ $a_2a_3a_4=rr^2r^3=r^6=12$

56. 정답 11
16, a, 1이 이 순서대로 등비수열을 이루므로
$a^2=16\times 1=16$ $\therefore a=4$
이때 1, x, 4, y가 이 순서대로 등차수열을 이루므로
$2x=1+4,\ 8=x+y$ $\therefore x=\frac{5}{2},\ y=\frac{11}{2}$
또, 16, z, $\frac{11}{2}$이 이 순서대로 등비수열을 이루므로
$z^2=16\times\frac{11}{2}=88$
$\therefore \frac{z^2}{x+y}=\frac{88}{8}=11$

57. 정답 ①
[출제의도] 등비수열의 뜻을 알고 문제해결하기
(다)에서 $\log_6 abc=3$이므로 $abc=6^3$ …… ㉠이다.
(가)에서 a, b, c가 등비수열을 이루므로
$b^2=ac$ …… ㉡이다.
그러므로 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면, $b=6$ …… ㉢이다.
이 때, ㉢을 ㉡에 대입하여 풀면 $ac=6^2$이다.
그러므로 (나)로부터 $6-a=1$, 4이므로 $a=5$, 2이다.
한편, $ac=6^2$에서 a는 6^2의 약수이므로 $a=2$뿐이다.
그러므로 $a=2$를 $ac=6^2$에 대입하면 $b=6$, $c=18$이다. 따라서, $a+b+c=26$이다.

58. 답 126
세 자연수 x, y, z가 이 순서로 등비수열을 이루므로
$xz=y^2$ ……… ㉠
$\log_{36}x+\log_{36}y+\log_{36}z=3$에서 $\log_{36}xyz=3$
㉠을 대입하면 $\log_{36}y^3=3$
$3\log_{36}y=3$, $\log_{36}y=1$ ∴ $y=36$
한편, $z-x=54$이므로 $xz=36^2=1296$과 연립하면
$x(x+54)=1296$, $x^2+54x-1296=0$
$(x-18)(x+72)=0$
∴ $x=18$ ($\because x>0$)
∴ $z=x+54=18+54=72$
∴ $x+y+z=18+36+72=126$

59. 정답 ②
[출제의도] 등차수열과 등비수열의 성질을 이용하여 일반항을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.
등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면
$b_1+b_3+b_5+\cdots+b_{15}+b_{17}$
$=\log_3 a+\log_3 ar^2+\log_3 ar^4+\cdots+\log_3 ar^{14}+\log_3 ar^{16}$
$=\log_3 a^9r^{72}=9\log_3 ar^8=36$
∴ $ar^8=3^4$ …㉠
$b_2+b_4+b_6+\cdots+b_{16}+b_{18}$
$=\log_3 ar+\log_3 ar^3+\log_3 ar^5+\cdots+\log_3 ar^{15}+\log_3 ar^{17}$
$=\log_3 a^9r^{81}=9\log_3 ar^9=45$
∴ $ar^9=3^5$ …㉡
㉠, ㉡에서 $r=3$, $a=\frac{1}{81}$이므로 $a_n=3^{n-5}$이다.
∴ $a_{11}=3^{11-5}=3^6$

60. 답 62
a, b, c는 이 순서로 등차수열을 이루므로
$a=b-d,\ c=b+d\ (d\neq 0)$로 놓으면
$f(a)=(b-d)^2+1,\ f(b)=b^2+1,\ f(c)=(b+d)^2+1$
$f(a),\ f(b),\ f(c)$가 이 순서로 등비수열을 이루므로
$(b^2+1^2)=\{(b-d)^2+1\}\{(b+d)^2+1\}$
정리하면 $d^2(d^2-2b^2+2)=0$
$d\neq 0$이므로 $d^2-2d^2+2=0$에서 $d^2=2b^2-2$
이때, b, d는 모두 정수이고, $b| < 10$이므로
$b^2=9,\ d^2=16$
즉, $b=3$이 때, $d=4$이면 $a=-1$, $c=7$이고,
$d=-4$이면 $a=7$, $c=-1$
또, $b=-3$일 때, $d=4$이면 $a=-7$, $c=1$이고,
$d=-4$이면 $a=1$, $c=-7$
∴ $f(a)+f(b)+f(c)=(1+1)+(9+1)+(49+1)=62$

61. 답 ③
의진이가 2001년부터 10년간 적립한 금액의 2010년 말의 원리합계는
$\frac{100\times 1.05(1.05^{10}-1)}{1.05-1}=2100\times 0.6=1260$(만 원)
또, 1260만 원의 2020년 말의 원리합계는
$1260\times 1.06^{10}=1260\times 1.8=2268$(만 원)

62. 답 250

적립 금액은

$K(1.06)^{10}+(K\times1.06)\times(1.06)^9+(K\times1.06^2)\times(1.06)^8+\cdots$

$+(K\times1.06^9)\times1.06=10\times K(1.06)^{10}=18K$

$\therefore 18K\ge 4500$

$K\ge 250$

따라서, K의 최솟값은 250이다.

63. 답 ③

홍도가 매달 저축하는 돈을 x원이라 하면 올해 5월부터 내년 2월까지 매달 초에 저축하는 돈의 원리합계는

$x(1+0.007)+x(1+0.007)^2+\cdots+x(1+0.007)^{10}$

$=\dfrac{x(1+0.007)\{(1+0.007)^{10}-1\}}{(1+0.007)-1}$

$=\dfrac{x\cdot1.007(1.07-1)}{0.007}=10.07x$ ········· ㉠

한편, 새 컴퓨터의 내년 3월 초의 가격은

$A\left(1-\dfrac{p}{100}\right)=\dfrac{A(100-p)}{100}$ ········· ㉡

㉠, ㉡이 같아야 하므로

$10.07x=\dfrac{A(100-p)}{100}$

$\therefore\ a=\dfrac{A(100-p)}{1007}$

64. 정답 ④ 수학 외적 문제 해결 능력 – 수열

해마다 530만 원씩 20년간 지급하는 금액의 원리합계는

$\dfrac{530(1.05^{20}-1)}{1.05-1}=17490$ (만원)

한편, 예치된 돈의 20년 후의 원리합계는 $a\times1.05^{20}$ (만원)이므로

$a\times1.05^{20}=17490$

$\therefore\ a=\dfrac{17490}{2.65}=6600$

65. 답 ⑤

2010년 초에 예금한 돈의 2020년 초의 원리합계는

$a\times1.05^{10}$(억 원)

2011년 초에 예금한 돈의 2020년 초의 원리합계는

$a\times0.9\times1.05^9$(억 원)

2012년 초에 예금한 돈의 2020년 초의 원리합계는

$a\times0.9^2\times1.05^8$(억 원)

$\vdots$

2019년 초에 예금한 돈의 2020년 초의 원리합계는

$a\times0.9^9\times1.05$(억 원)

따라서 A가 10년 동안 예금한 금액의 2020년 초의 원리합계는

$a\times1.05^{10}+a\times0.9\times1.05^9+\cdots+a\times0.9^9\times1.05$

$=\dfrac{a\times1.05^{10}\left\{1-\left(\dfrac{0.9}{1.05}\right)^{10}\right\}}{1-\dfrac{0.9}{1.05}}$ (억 원)

한편, 2020년 초의 이 주택의 가격은 1.05^{10}(억 원)이므로

$$\dfrac{a\times1.05^{10}\left\{1-\left(\dfrac{0.9}{1.05}\right)^{10}\right\}}{1-\dfrac{0.9}{1.05}}=1.05^{10}$$

$$\therefore\ a=\dfrac{\dfrac{0.15}{1.05}}{1-\left(\dfrac{0.9}{1.05}\right)^{10}}=\dfrac{1}{7(1-p)}$$

66. 답 ② 등비수열의 활용

A통장의 원리합계는 $5000\times\left(1+\dfrac{r}{100}\right)^{10}$ (만 원)

B통장의 원리합계는 $4000\times\left(1+\dfrac{2r}{100}\right)^{10}$ (만 원)

이때, $5000\times\left(1+\dfrac{r}{100}\right)^{10}=4000\times\left(1+\dfrac{2r}{100}\right)^{10}$ 이어야 하므로

$\left(\dfrac{\dfrac{100+2r}{100}}{\dfrac{100+r}{100}}\right)^{10}=\dfrac{5}{4}\qquad\therefore\ \left(\dfrac{100+2r}{100+r}\right)^{10}=\dfrac{10}{8}$

양변에 상용로그를 취하여 정리하면

$10\log\dfrac{100+2r}{100+r}=1-3\log2=0.1$

$\log\dfrac{100+2r}{100+r}=0.01$

이때, $\log1.02=0.01$이므로

$\dfrac{100+2r}{100+r}=1.02,\ 100+2r=102+1.02r$

$\therefore\ r=\dfrac{2}{0.98}=2.040\cdots$

따라서 r의 값은 소수 셋째 자리에서 반올림하여 구하면 2.04이다.

67. 정답 27

첫째항이 16이고 공비가 $2^{\frac{1}{10}}$인 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n을 구하면 $a_n=16\times\left(2^{\frac{1}{10}}\right)^{n-1}$

$\log a_n$의 가수를 b_n이라 하고,

$b_1,\ b_2,\ b_3,\ \cdots,\ b_{k-1},\ b_k,\ b_{k+1}+1$

이 주어진 순서로 등차수열을 이루기 때문에 첫째항과 공차를 각각 구하면 다음과 같다.

$a_1=16$,

$\log16=4\log2=4\times0.301=1.204$

$\therefore\ b_1=0.204$

$a_2=16\times2^{\frac{1}{10}}$,

$\log\left(16\times2^{\frac{1}{10}}\right)=4\log2+\dfrac{1}{10}\log2=4\times0.301+\dfrac{1}{10}\times0.301=1.2341$

$\therefore\ b_2=0.2341$

공차 $d=b_2-b_1=0.2341-0.204=0.0301$

따라서 일반항

$b_k = b_1 + (k-1)\times 0.0301 = 0.204 + (k-1)\times 0.0301$

이 때 $b_k + 0.0301 = b_{k+1} + 1$이므로

$b_k \geq 1$이 되는 최소의 자연수보다 1 작은 수 k를 구하면 된다.

$b_k = 0.204 + (k-1)\times 0.0301 \geq 1$

$\therefore\ k \geq 27.\times\times\times\times$

따라서 $k = 27$

68. 정답 ③

[출제의도] 등비수열을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

$\overline{\mathrm{CE}} = a$, $\overline{\mathrm{EB}} = ar$, $\overline{\mathrm{BD}} = ar^2$ 이라 하자.

(삼각형EBC의 넓이)= $\frac{1}{5}$ (사각형ABCD의 넓이)

$\therefore\ a = 4\ \cdots$ ①

$\angle\mathrm{ABD} = \angle\mathrm{A'BD}$, $\angle\mathrm{ABD} = \angle\mathrm{BDC}$

$\triangle\mathrm{DEB}$ 는 이등변 삼각형이므로 $\overline{\mathrm{DE}} = \overline{\mathrm{EB}}$

$\therefore\ r = \frac{3}{2}\ \cdots$ ②

①, ② 에 의하여

$\overline{\mathrm{CE}}$, $\overline{\mathrm{EB}}$, $\overline{\mathrm{BD}}$ 의 길이는 각각 4, 6, 9.

$\angle\mathrm{EDB} = \theta$ 이라 할 때, $\triangle\mathrm{DEB}$ 에서

제이코사인법칙에 의하여

$\cos\theta = \frac{36+81-36}{2\times6\times9} = \frac{3}{4}$.

$\triangle\mathrm{ABD}$ 에서 제이코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{AD}}^2 = 10^2 + 9^2 - 2\times9\times10\times\cos\theta$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AD}} = \sqrt{46}$

69. 정답 ⑤

$\frac{1}{2}\times 2n\times h_n = S_n \qquad \therefore\ h_n = \frac{S_n}{n}$

ㄱ. 수열 $\{S_n\}$이 등차수열, 즉 상수항이거나 n의 1차식이면 수열 $\{h_n\}$은 수렴한다. $\therefore$ 참

ㄴ. 수열 $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$이 등차수열이면 $S_n = \frac{1}{an+b}$ 의 꼴로 나타낼 수 있다.

따라서, $h_n = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{(an+b)}$ 이므로 수열 $\{h_n\}$은 수렴한다.

$\therefore$ 참

ㄷ. 수열 $\{h_n\}$이 등비수열이고 수열 $\{S_n\}$이 수렴하면 $h_n = h_1\cdot r^{n-1}$이라 하면 $S_n = n\cdot h_1\cdot r^{n-1}$이고

$r^{n-1} = \frac{S_n}{nh_1},\ \lim_{n\to\infty} r^{n-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\cdot h_1}\cdot S_n = 0$

이므로 $|r| < 1$이다. $\therefore$ 참

따라서, ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

70. 정답 ⑤

[출제의도] 등차수열과 등비수열의 일반항 추론하기

(가) 등차 (나) $\frac{1}{2}(n+1)^2$ (다) $\frac{n(n+1)}{2}$

71. 정답 ④

$0 \leq \log_2 x - [\log_2 x] < 1,\ 0 \leq \log_2 y - [\log_2 y] < 1$ 이므로

$\log_2 x - [\log_2 x] + \log_2 y - [\log_2 y] = 0$ 이 성립하려면

$\log_2 x - [\log_2 x] = 0,\ \log_2 y - [\log_2 y] = 0$

그러므로 x, y는 모두 $2^k\ (k = 0, 1, 2, 3, \cdots, 9)$의 꼴이다.

$\therefore \{xy \mid \log_2 x + \log_2 y = [\log_2 x] + [\log_2 y]\}$

$= \{2^m \mid m = 0, 1, 2, \cdots, 18\}$

따라서 구하는 원소의 합은 $\frac{2^0\times(2^{19}-1)}{2-1} = 2^{19}-1$ 이다.

1. 정답 205

$\sum_{k=1}^{10}(k-2)^2 = \sum_{k=1}^{10}(k^2-4k+4) = \sum_{k=1}^{10}k^2 - 4\sum_{k=1}^{10}k + \sum_{k=1}^{10}4$

$= \frac{10\times11\times21}{6} - 4\times\frac{10\times11}{2} + 40 = 205$

2. 정답 1

$\sum_{k=1}^{30}\log_5\{\log_{k+1}(k+2)\}$

$= \sum_{k=1}^{30}\log_5\left\{\frac{\log_2(k+2)}{\log_2(k+1)}\right\}$

$= \sum_{k=1}^{30}\left[\log_5\{\log_2(k+2)\} - \log_5\{\log_2(k+1)\}\right]$

$= \log_5(\log_2 32) - \log_5(\log_2 2)$

$= \log_5 5 - \log_5 1 = 1$

3. 정답 ③

$\sum_{n=1}^{\infty}(\log 2)^n = \frac{\log 2}{1-\log 2} = \log_5 x$ 에서

$\frac{\log 2}{1-\log 2} = \frac{\log 2}{\log\frac{10}{2}} = \frac{\log 2}{\log 5} = \log_5 2$

$\therefore x = 2$

4. 답 538

[해설] **여러 가지 수열**

$b_{n+1} - a_{n+1} = b_n$에 $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 19$를 차례로 대입하면

$b_3 - a_3 = b_2$

$b_4 - a_4 = b_3$

$b_5 - a_5 = b_4$

$\vdots$

$b_{20} - a_{20} = b_{19}$

위 식을 변끼리 모두 더하면

$b_{20} - (a_2 + a_3 + \cdots + a_{20}) = b_1$

$\therefore b_{20}=b_1+(a_2+a_3+\cdots+a_{20})=6+\dfrac{19(2\cdot 10+18\cdot 2)}{2}$

$=6+19\cdot 28=538$

[다른 풀이]

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 8, 공차가 2인 등차수열이므로

$a_n=8+(n-1)\cdot 2=2n+6$

$b_{n+1}-a_{n+1}=b_n$에서 $b_{n+1}-b_n=a_{n+1}$이므로

수열 $\{b_n\}$의 계차수열은 $\{a_{n+1}\}$이다.

이때, $a_{n+1}=2(n+1)+6=2n+8$이므로

$b_{20}=b_1+\sum_{k=1}^{19}a_{k+1}=6+\sum_{k=1}^{19}(2k+8)$

$=6+2\cdot\dfrac{19\cdot 20}{2}+19\cdot 8=6+380+152=538$

5. 답 270

$n=1$일 때 $a_2=-2$

$n=2$일 때 $a_5=4$

$n=3$일 때 $a_8=10$

$\vdots$

수열 $-2,4,10,\cdots$은 공차가 6인 등차수열이므로 등차수열 $\{a_n\}$의 공차는 2이다.

$a_2=a_1+2=-2$이므로 $a_1=-4$

$\therefore\ a_n=2n-6$

$\therefore\ \sum_{k=1}^{10}a_{3k}=\sum_{k=1}^{10}(6k-6)=6\cdot\dfrac{10\cdot 11}{2}-6\cdot 10$

$=330-60=270$

6. 답 ①

$\sum_{k=1}^{100}\log f(k)+\sum_{k=1}^{100}\log f(-k)$

$=\sum_{k=1}^{100}(\log 2^k+\log 2^{-k})=\sum_{k=1}^{100}\log 2^k\cdot 2^{-k}$

$=\sum_{k=1}^{100}\log 1=0$

7. 답 20

$\sum_{k=1}^{10}(k^2+1)-\sum_{k=1}^{10}(k^2-1)$

$=\sum_{k=1}^{10}\{(k^2+1)-(k^2-1)\}$

$=\sum_{k=1}^{10}(k^2+1-k^2+1)$

$=\sum_{k=1}^{10}2=2\times 10=20$

8. 정답 ③

$S_n=\sum_{k=1}^{n+1}(k^2+1)-\sum_{k=1}^{n}(k^2-1)$

$=\sum_{k=1}^{n}(k^2+1)+(n+1)^2+1-\sum_{k=1}^{n}(k^2-1)$

$=\sum_{k=1}^{n}(k^2+1-k^2+1)+(n+1)^2+1$

$=2n+(n+1)^2+1$

$=n^2+4n+2$

$\therefore\ a_{10}=S_{10}-S_9=(10^2+40+2)-(9^2+36+2)=19+4=23$

9. 답 ⑤

$\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}b_k=65$에서

$\dfrac{10(a_1+a_{10})}{2}+\dfrac{10(b_1+b_{10})}{2}=65$

$(a_1+b_1)+(a_{10}+b_{10})=13$

$3+(a_{10}+b_{10})=13$

$\therefore a_{10}+b_{10}=10$

10. 답 ③

등차수열 $\{a_n\}$의 공차는

$a_{11}-a_{10}=-3-1=-4<0$

이므로 제 10항까지의 합이 최대이다.

따라서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항은

$a_{10}=a_1+9\cdot(-4)=1$에서 $a_1=37$

$\therefore\ \sum_{k=1}^{10}a_k=\dfrac{10\cdot\{2\cdot 37+9\cdot(-4)\}}{2}=190$

11. 정답 ④

$\sum_{k=2}^{15}\log_2(\log_{k+1}k)$

$=\log_2(\log_3 2)+\log_2(\log_4 3)+\log_2(\log_5 4)+\cdots+\log_2(\log_{16}15)$

$=\log_2(\log_3 2\cdot\log_4 3\cdot\log_5 4\cdot\ \cdots\ \cdot\log_{16}15)$

$=\log_2(\log_{16}2)=\log_2\dfrac{1}{4}=-2$

12. 답 402

$A=\begin{pmatrix}2&1\\-3&-1\end{pmatrix}$이므로 $a_1=6$

$A^2=\begin{pmatrix}1&1\\-3&-2\end{pmatrix}$이므로 $a_2=6$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1&1\\-3&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\-3&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}=-E$

이므로 $a_3=0$

$A^4=-A$ 이므로 $a_4=6$

$A^5=-A^2$이므로 $a_5=6$

$A^6=E$이므로 $a_6=0$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 다음과 같다.

$\{a_n\}$: 6, 6, 0, 6, 6, 0, 6, 6, 0, $\cdots$

$\therefore \sum_{n=1}^{100} a_n = (6+6+0)+(6+6+0)+\cdots+(6+6+0)+6$

$=12\times33+6=402$

13. **정답** 22

이해능력 - 수열

$\sum_{n=1}^{10}\frac{m}{n^2+n}=\sum_{n=1}^{10}\frac{m}{n(n+1)}=m\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$=m\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ \cdots\ +\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)\right\}$

$=m\left(1-\frac{1}{11}\right)=\frac{10m}{11}$

따라서 $\frac{10m}{11}=20$ 에서 $m=22$ 이다.

14. **답** 50

$100a_{100}-(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{99})$

$=100\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{200}\right)-\left(\frac{99}{2}+\frac{98}{4}+\frac{97}{6}+\cdots+\frac{1}{198}\right)$

$=\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{6}+\cdots+\frac{99}{198}+\frac{100}{200}$

$=\frac{1}{2}\cdot100=50$

15. **정답** ③

$a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n=10_n-n^2$ …… ㉠

$a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}=10(n-1)-(n-1)^2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$a_n=11-2n\ (n\geqq2)$

그런데 ㉠에서 $a_1=9$이므로

$a_n=11-2n(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

그런데 $a_n=11-2n>0$에서 $n\leqq5$

이때 $|a_n|=\begin{cases}11-2n\ (n\leqq5)\\2n-11\ (n\geqq6)\end{cases}$이므로

수열 $\{|a_n|\}$은 첫째항에서 제5항까지는 공차가 -2인 등차수열이고, 제6항부터는 공차가 2인 등차수열을 이룬다.

$\therefore \sum_{n=1}^{25}|a_n|=\sum_{n=1}^{5}|a_n|+\sum_{n=6}^{25}|a_n|$

$=\frac{5(9+1)}{2}+\frac{20(2\cdot1+19\cdot2)}{2}$

$=425$

16. **정답** ①

$\sum_{k=1}^{n}a_k=S_n$이라 하면

$x^2-3x=(x+n)Q(x)+S_n$

$\therefore S_n=(-n)^2-3\cdot(-n)=n^2+3n$

$a_5=S_5-S_4=(25+15)-(16+12)=12$

17. 정답 ①

$[\log_2 2^n]=n$이므로 $2^n\leq x<2^{n+1}$이면 $[\log_2 x]=n$이다.

$\therefore \sum_{k=1}^{30}[\log1_2 k]=0+1\times2+2\times4+3\times8+4\times15=94$

18. **답** 167 여러 가지 수열

(ⅰ) $2\leq k<5$이면 $[\log_5 k]=0$,

$5\leq k<25$이면 $[\log_5 k]=1$,

$25\leq k\leq100$이면 $[\log_5 k]=2$

$\therefore \sum_{k=2}^{100}[\log_5 k]=3\cdot0+20\cdot1+76\cdot2=172$

(ⅱ) $2<\log_2 5<3$이므로 $[\log_2 5]=2$,

$1=\log_5 5<\log_4 5<\log_3 5<2$이므로

$[\log_3 5]=[\log_4 5]=[\log_5 5]=1$

$k>5$이면 $0<\log_k 5<1$이므로 $[\log_k 5]=0$

$\therefore \sum_{k=2}^{100}[\log_k 5]=2+3\cdot1+0=5$

(ⅰ), (ⅱ)에서

$\sum_{k=2}^{100}([\log_5 k]-[\log_k 5])=172-5=167$

19. 답 ④

$\sum_{n=1}^{2010}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)$

$=\left(1+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)-\cdots-\left(\frac{1}{2010}+\frac{1}{2011}\right)$

$=1-\frac{1}{2011}=\frac{2010}{2011}$

20. 답 ⑤

ㄱ. 수열 $\{a_n\}$을 첫째항부터 차례로 나열해 보면

$1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3,\ \cdots$

이므로 $a_{10}=-5$ (참)

ㄴ. n이 자연수일 때, $a_{2n-1}+a_{2n}=0$이므로

$a_{2009}+a_{2010}=0$ (참)

ㄷ. 수열 $\{a_n\}$을 첫째항부터 임의의 짝수항까지의 합은 0이 된다.

$\therefore \sum_{n=1}^{101}a_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{101}$

$=(a_1+a_2+\cdots+a_{100})+a_{101}=0+a_{101}=51$ (참)

21. 정답 : 652

조건 (가), (나)에서

$a_1=1,\ a_2=4,\ a_3=7,\ \cdots,\ a_{12}=34$

조건 (다)에서 수열 $\{a_n\}$의 주기는 12이다.

$\therefore \sum_{k=1}^{40}a_k=3\sum_{k=1}^{12}(3k-2)+(1+4+7+10)$

$=3\left(3\times\frac{12\times13}{2}-12\times2\right)+22$

$=652$

22. ①

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$\sum_{k=1}^{10}(a_{3k-2}+2d)=\sum_{k=1}^{10}a_{3k}=40$

$\sum_{k=1}^{10}a_{3k-2}+20d=30+20d=40$ $\quad\therefore d=\frac{1}{2}$

$\sum_{k=1}^{10}a_{3k-2}=a_1+a_4+a_7+\cdots+a_{28}=\frac{10(2a_1+9\times3d)}{2}=30$

$2a_1+\frac{27}{2}=6\quad\therefore a_1=-\frac{15}{4}$

23. 정답 ①

$a_{n+1}=2-\frac{1}{a_n}$에 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$을 차례로 대입하면

$a_1=2,\ a_2=2-\frac{1}{a_1}=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

$a_3=2-\frac{1}{a_2}=2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$

$a_4=2-\frac{1}{a_3}=2-\frac{3}{4}=\frac{5}{4},\ \cdots$

$\therefore\ a_n=\frac{n+1}{n}$

$a_{n+1}=2-\frac{1}{a_n}=2-\frac{n}{n+1}=\frac{n+2}{n+1}$ 이다.

$\therefore\ \log a_1+\log a_2+\log a_3+\cdots+\log a_{99}$

$=\sum_{n=1}^{99}\left(\log\frac{n+1}{n}\right)=\sum_{n=1}^{99}\{\log(n+1)-\log n\}$

$=\log100-\log1=2$

24. 정답 716

$S_n=\frac{a_1}{1}+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_n}{n}=n^2+1$ 라 하면

$S_{n-1}=\frac{a_1}{1}+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{n-1}=(n-1)^2+1\ \ (n\geq2)$

$S_n-S_{n-1}=\frac{a_n}{n}=2n-1\ \ (n\geq2)$

$a_n=n(2n-1)\ \ (n\geq2),\ \ a_1=2$

$\therefore\ \sum_{k=1}^{10}a_k=a_1+\sum_{k=2}^{10}a_k=2+\sum_{k=2}^{10}k(2k-1)=716$

25. 100

$n=2$일 때, $\{3,\ 3^3\}$이므로

$S=\{3^4\}$ 즉, $f(2)=1$

$n=3$일 때, $\{3,\ 3^3,\ 3^5\}$이므로

$S=\{3^4,\ 3^6,\ 3^8\}$ 즉, $f(3)=3$

$n=4$일 때 $\{3,\ 3^3,\ 3^5,\ 3^7\}$이므로

$S=\{3^4,\ 3^6,\ 3^8,\ 3^{10},\ 3^{12}\}$ 즉, $f(4)=5$

……

$n=k$일 때, $\{3,\ 3^3,\ \cdots,\ 3^{2k-1}\}$이므로

$S=\{3^4,\ 3^6,\cdots,\ 3^{4(k-1)}\}$ 즉, $f(k)=2k-3$

$\therefore\ \sum_{n=2}^{11}f(n)=\sum_{n=2}^{11}(2n-3)$

$=1+3+5+\cdots+19$

$=10^2=100$

26. 답 176

$P_k=\sum_{i=1}^{k}ia_i$이므로

$P_n=a_1+2a_2+3a_3+\cdots+(n-1)a_{n-1}+na_n$ $\cdots$ ㉠

$P_{n-1}=a_1+2a_2+3a_3+\cdots+(n-1)a_{n-1}$ $\cdots$ ㉡

㉠-㉡을 하면

$P_n-P_{n-1}=na_n$

$P_k=k(k+1)(2k-1)$이므로

$na_n=n(n+1)(2n-1)-(n-1)n(2n-3)$

$=n\{(2n^2+n-1)-(2n^2-5n+3)\}$

$\therefore a_n=6n-4$

$\therefore a_{30}=176$

27. 정답 ①

수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d, 수열 $\{b_n\}$의 첫째항을 b, 공차를 s라 하면

$b+s=2(a+d)$

$b+6s=2(a+6d)$

이므로 $b=2a,\ s=2d$

$\therefore\ b_n=2a_n$

$\therefore\ \sum_{k=1}^{10}a_k:\sum_{k=1}^{10}b_k=1:2$

28. 정답 5

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a+ar+ar^2+\cdots+ar^9=100$ $\cdots\cdots$ ㉠

$\frac{1}{a}+\frac{1}{ar}+\frac{1}{ar^2}+\cdots+\frac{1}{ar^9}=100$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉡의 양변에 a^2r^9을 곱하면

$ar^9+ar^8+\cdots+ar+a=10\times a^2r^9$

$\therefore\ a^2r^9=10$

$\sum_{k=1}^{10}\log a_k=\log(a\times ar\times ar^2\times\cdots ar^9)$

$=\log a^{10}r^{45}=\log(a^2r^9)^5$

$=\log10^5=5$

29. 정답 ③

$S_n = 2a_n - 2$ $\cdots$㉠

$S_{n-1} = 2a_{n-1} - 2$ $\cdots$㉡

㉠−㉡을 하면

$a_n = 2a_n - 2a_{n-1}\,(n \geq 2)$

$\therefore a_n = 2a_{n-1}$

$a_1 = 2$이므로 $a_n = 2^n$

$\therefore \log_2 a_{20} = \log_2 2^{20} = 20$

30. 정답 ③

3, 5의 최소공배수가 15이므로 수열 $\{a_n\}$은 1부터 15까지의 규칙이 반복된다. 즉,

$1, 2, 4, 7, 11, 13, 14, \cdots$

이므로 1부터 15까지의 자연수 중 8개가 나오는 규칙이 이후 15개의 자연수마다 반복된다.

따라서 $50 = 8 \cdot 6 + 2$에서

$a_{50} = 15 \cdot 6 + 2 = 92$

31. 정답 30

[출제의도] $\sum$의 뜻을 알고 이를 활용하기

이차방정식 $x^2 - 33x + n(n+1) = 0$의 두 근이 $\alpha_n,\ \beta_n$이므로 근과 계수와의 관계로부터 $\alpha_n + \beta_n = 33,\ \alpha_n\beta_n = n(n+1)$이다.

따라서, $\dfrac{1}{\alpha_n} + \dfrac{1}{\beta_n} = \dfrac{\alpha_n + \beta_n}{\alpha_n\beta_n} = \dfrac{33}{n(n+1)}$

$= 33\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right)$이므로

$\displaystyle\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{\alpha_n} + \frac{1}{\beta_n}\right) = 33\left\{\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{11}\right)\right\}$

$= 33\left(1 - \dfrac{1}{11}\right) = 30$ 이다.

32. 정답 ②

$a_n = 2\sqrt{(n+1)^2 - n^2} = 2\sqrt{2n+1}$ 이므로

$$\frac{1}{a_n + a_{n-1}} = \frac{1}{2\sqrt{2n+1} + 2\sqrt{2n-1}}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}}{2}$$

$$\therefore \sum_{n=2}^{37} \frac{1}{a_n + a_{n-1}} = \frac{1}{4}\sum_{n=2}^{37}(\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1})$$

$$= \frac{1}{4}(\sqrt{75} - \sqrt{3}) = \sqrt{3}$$

33. 정답 240

$P_k(\sqrt{k},\ k)$이고, 직선 AP_k의 기울기를 m이라 하면 이 직선의 방정식은

$y = mx + \dfrac{1}{4}$ $\cdots\cdots$ ㉠

㉠을 $y = x^2$에 대입하면

$x^2 = mx + \dfrac{1}{4}$ $\quad\therefore x^2 - mx - \dfrac{1}{4} = 0$ $\cdots\cdots$ ㉡

이차방정식 ㉡의 한 근은 $\sqrt{k}$이므로 다른 한 근을 α라 하면 근과 계수의 관계에서

$\alpha\sqrt{k} = -\dfrac{1}{4}$ $\quad\therefore \alpha = -\dfrac{1}{4\sqrt{k}}$

따라서 점 Q_k의 y좌표 a_k는

$a_k = \alpha^2 = \dfrac{1}{16k}$

$\displaystyle\therefore \sum_{k=1}^{5}\frac{1}{a_k} = \sum_{k=1}^{5}16k = 16 \times \frac{5 \times 6}{2} = 240$

34. 답 ④

$100 = 2^2 \cdot 5^2$이므로 100의 양의 약수는

1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100의 9개다.

$f(x)$는 $\log x$의 가수이므로

$f(1) = f(10) = f(100) = 0$

$f(2) = f(20) = \log 2,\ f(4) = \log 4$

$f(5) = f(50) = \log 5,\ f(25) = \log 2.5$

$\displaystyle\therefore \sum_{k=1}^{n} f(a_k) = \sum_{k=1}^{9} f(a_k)$

$= 3 \cdot 0 + 2 \cdot \log 2 + \log 4 + 2 \cdot \log 5 + \log 2.5$

$= \log 1000 = 3$

35. 정답 ⑤

첫째항과 공차가 모두 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n = dn\,(n = 1, 2, 3, \cdots)$

$\overline{P_nQ_n} = d,\ \overline{P_{n+1}Q_n} = \sqrt{d(n+1)} - \sqrt{dn}$ 이므로

$S_n = \dfrac{1}{2}d\{\sqrt{d(n+1)} - \sqrt{dn}\}$

$\displaystyle\therefore \sum_{n=1}^{99} S_n = \frac{d}{2}\sum_{n=1}^{99}\{\sqrt{d(n+1)} - \sqrt{dn}\}$

$= \dfrac{d}{2}\{(\sqrt{2d} - \sqrt{d}) + (\sqrt{3d} - \sqrt{2d}) + \cdots + (\sqrt{100d} - \sqrt{99d})\}$

$= \dfrac{d}{2}(\sqrt{100d} - \sqrt{d}) = \dfrac{d}{2}(10\sqrt{d} - \sqrt{d})$

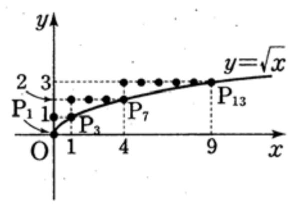
$= \dfrac{9}{2}d\sqrt{d}$

$a_9 = 9d$이므로 $\dfrac{9}{2}d\sqrt{d} = 9d\}$

$\therefore \sqrt{d} = 2$ $\qquad\therefore d = 4$

36. 정답 99

그림과 같이 곡선 $y = \sqrt{x}$를 이용하여 $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$일 때 점 P_n의 좌표를 나열하면 다음과 같다.



$(0,\ 0)$: 1개
$\rightarrow (0,\ 1) \rightarrow (1,\ 1)$: 2개
$\rightarrow (1,\ 2) \rightarrow (2,\ 2) \rightarrow (3,\ 2) \rightarrow (4,\ 2)$: 4개
$\rightarrow (4,\ 3) \rightarrow (5,\ 3) \rightarrow \cdots \rightarrow (9,\ 3)$: 6개
$\rightarrow (9,\ 4) \rightarrow (10,\ 4) \rightarrow \cdots \rightarrow (16,\ 4)$: 8개
$\rightarrow (16,\ 5) \rightarrow (17,\ 5) \rightarrow \cdots \rightarrow (25,\ 5)$: 10개
$\cdots$

$1+(2+4+6+8\cdot\ \cdots+18)=1+2\times 45=91$이므로 P_{91}의 좌표는 점 $(81, 9)$이다.
따라서 점 P_{100}의 좌표는 $(81+8, 10)$ 즉, $(89, 10)$이다.
$\therefore\ x_{100}+y_{100}=89+10=99$

37. 정답 512

$a_1=\dfrac{4}{3}$, $[a_1]=1$이므로 $a_2=a_1+1=\dfrac{7}{3}$

$[a_2]=2$이므로 $a_3=a_2+2=\dfrac{13}{3}$

$[a_3]=4$이므로 $a_4=a_3+4=\dfrac{25}{3}$

$\cdots$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 계차수열은 첫째항이 1, 공비가 2인 등비수열이다.

$$\therefore\ a_{10}=a_1+\sum_{k=1}^{9}2^{k-1}=\frac{4}{3}+2^9-1$$
$$=\frac{1}{3}+2^9=\frac{1}{3}+512$$
$$\therefore\ [a_{10}]=512$$

38. **정답** 14

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_7=\sum_{k=1}^{7}a_k=a_1+\sum_{k=1}^{3}(a_{2k}+a_{2k+1})$$
$$=-1+\sum_{k=1}^{3}(2k+1)$$
$$=-1+2\cdot\frac{3\cdot 4}{2}+3=14$$

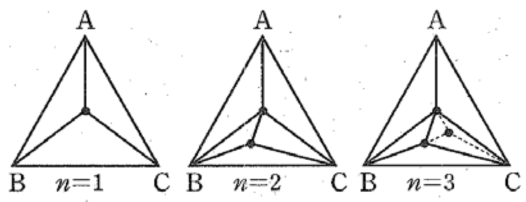
39. 정답 ⑤

수열 $\{a_n\}$을 차례로 나열하면
$1, 2, 3, 5, 8, 13, \cdots$
홀수, 홀수, 짝수가 반복하게 됨을 알 수 있다. 즉,

$$a_n=\begin{cases}\text{홀수} & (n=3m-1,\ 3m-2)\\ \text{짝수} & (m=3m)\end{cases}$$

그런데 a_n이 홀수이면 $b_n=-1$이고 a_n이 짝수이면 $b_n=1$이다.
$\therefore b_{2010}=1$

40. 정답 ⑤



ㄱ. (참) $a_1=3$, $a_2=5$, $a_3=7$
ㄴ. (참) 위의 그림에서 알 수 있듯이 n개의 점을 찍은 후, 한 개의 점을
 더 찍으면 늘어나는 삼각형은 2개다. $\therefore a_{n+1}=a_n+2$
ㄷ. (참) ㄱ과 ㄴ에서 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=3$이고, 공차가 2인 등차수열이
 므로

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{n\{2\cdot 3+(n-1)\cdot 2\}}{2}=n^2+2n$$

41. 답 ⑤ 계차수열

ㄱ. 등차수열 $\{a_n\}$의공차를 $d\ (d\neq 0)$라 하면
$a_{n+1}-a_n=d$(일정)
이때, $b_n=a_{n+1}-a_n=d$이므로
$c_n=b_{n+1}-b_n=d-d=0$이다. (참)
ㄴ. 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r\ (r\neq 1)$라 하면
$a_{n+2}-a_{n+1}=ra_{n+1}-ra_n=r(a_{n+1}-a_n)$
$\therefore\ b_{n+1}=rb_n$ (단, $r\neq 1$)
따라서 수열 $\{a_n\}$이 등비수열이면 $\{a_n\}$의 계차수열 $\{b_n\}$도 등비수열이다.
마찬가지로 수열$\{b_n\}$이 등비수열이면 $\{b_n\}$의 계차수열 $\{c_n\}$도 등비수열이다.
따라서 수열$\{a_n\}$이 공비가 1이 아닌 등비수열이면 수열 $\{c_n\}$도 공비가 1이 아닌 등비수열이다.(참)
ㄷ. $b_{n+1}-b_n=c_n$이므로 $b_{n+1}-c_n=b_n$이다.
ㄴ에서 수열 $\{a_n\}$이 공비가 1이 아닌 등비수열이면 수열$\{b_n\}$,즉 수열 $\{b_{n+1}-c_n\}$도 공비가 1이 아닌 등비수열이다. (참)
이상에서 ㄱ,ㄴ,ㄷ 모두 옳다.

참고

ㄴ을 다음과 같이 보일 수도 있다.
등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a,공비를 $r\ (r\neq 1)$라 하면 일반항 a_n은 $a_n=ar^{n-1}$으로 놓을 수 있다.
이때, $b_n=a_{n+1}-a_n=ar^n-ar^{n-1}=a(r-1)r^{n-1}$이므로 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 $a(r-1)$, 공비가 $r\ (r\neq 1)$인 등비수열이다.

42. 정답 197

수열 $\{a_n\}$에서 계차수열이 $\{b_n\}$이므로

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k$$

$$\sum_{k=1}^{10}b_k=a_{11}-a_1=\frac{1}{11\cdot 12}-\frac{1}{1\cdot 2}=-\frac{65}{132}$$

$\therefore a+b=197$

43. 정답 ②

수열 $\{a_n\}$의 각 항을 나열해 보면

$16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, \cdots$

즉, $a_1=16$, $a_2=8$이고, 자연수 k에 대하여 $a_{3k}=4$,

$a_{3k+1}=2$, $a_{3k+2}=1$이므로

$a_{100}=a_{3\cdot 33+1}=2$

44. 정답 ④

$\{a_n\}$: $1, 1, -1, -1, -1, 1, 1, 1, -1, -1, -1, 1, 1, 1, \cdots$

제1항부터 6개의 항이 규칙적으로 반복되므로

$2011=6\times 335+1$

$\sum_{k=1}^{2011}a_k=\sum_{k=1}^{2010}a_k+a_{2011}=1$이다. ($\because$ $a_{2011}=1$)

45. 정답 92

집합 A의 모든 원소의 합은 92로 일정하고 $n(A)=8$이므로 4개의 원소로 이루어진 부분집합 중에서 합이 가장 작은 집합을 선택하면 나머지로 이루어진 집합은 합이 가장 크므로

$a_1+b_1=92$

또한, 합이 두 번째로 작은 집합을 선택하면 나머지 원소로 이루어진 집합은 합이 두 번째로 큰 집합이 된다.

$a_2+b_2=92$

마찬가지로 합이 n번째로 작은 집합이 선택되면 나머지 원소로 이루어진 집합은 n번째로 큰 집합이 되므로

$a_n+b_n=92$

$$\therefore \sum_{k=1}^{7}(-1)^{k+1}(a_n+b_n)$$
$$=(a_1+b_1)-(a_2+b_2)+(a_3+b_3)-(a_4+b_4)+\cdots+(a_7+b_7)$$
$$=a_7+b_7=92$$

46. 정답 179

$a_{n+1}=2a_1+4a_2+6a_3+8a_4+\cdots+2na_n$ …… ㉠

$a_n=2a_1+4a_2+6a_3+8a_4+\cdots+2(n-1)a_{n-1}$ …… ㉡

㉠−㉡을 하면

$a_{n+1}-a_n=2na_n$

$\therefore a_{n+1}=(2n+1)a_n\,(n\ge 2)$

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=2n+1$

$\therefore \frac{a_{90}}{a_{89}}=2\cdot 89+1=179$

47. 답 931 발견적 추론 능력(추측) – 수열

$30<\sqrt{901}<31$이므로 1부터 901까지에서 30개의 제곱수가 빠졌다.

따라서 $a_{901}=901+30=931$이다.

48. 답 119

$a_1=S_1=1^2+1=2$

$a_{2n-1}=S_{2n-1}-S_{2n-2}$

$=(n^2+1)-\{(n-1)^2-1\}$

$=2n+1$ $(n=2, 3, 4, \cdots)$

$\therefore \sum_{n=1}^{10}a_{2n-1}=a_1+\sum_{n=2}^{10}a_{2n-1}=2+\sum_{n=2}^{10}(2n+1)$

$=2+117=119$

49. 정답 30

$a_1=10$

$a_2=a_1+(-1)^2\times a_1=2a_1=20$

$a_3=a_1-(a_1+a_2)=10-(10+20)=-20$

$a_4=a_1+(a_1+a_2+a_3)=10+(10+20-20)=20$

$a_5=a_1-(a_1+a_2+a_3+a_4)=10-(10+20-20+20)=-20$

$\cdots$

따라서 자연수 k에 대하여

$n=2k$이면 $a_n=20$

$n=2k+1$이면 $a_n=-20$

$\therefore \sum_{k=1}^{20}a_k=10+(20-20)+(20-20)+\cdots+(20-20)+20=30$

50. 정답 ①

$a_1=2$, $a_2=3$, $a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$에서 n에 $1, 2, 3, \cdots$을 차례로 대입하면

$a_1=2$, $a_2=3$, $a_3=1$, $a_4=-2$, $a_5=-3$, $a_6=-1$,

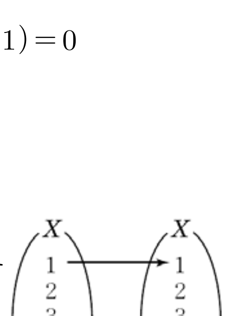
$a_7=2$, $a_8=3$, $\cdots$

따라서, $\{a_n\}$은 $2, 3, 1, -2, -3, -1$이 주기적으로 반복되는 수열이다. 즉, $a_{n+6}=a_n$이다.

$\therefore \sum_{k=1}^{2010}a_k=\sum_{k=1}^{6\times 335}a_k=335\times(2+3+1-2-3-1)=0$

51. 답 34

(i) $f(1)=1$인 경우



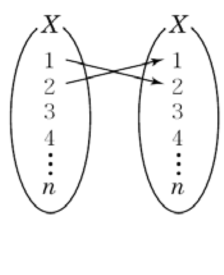
나머지 $n-1$개의 원소에 대하여 조건 ㈎, ㈏를 만족시키는 함수의 개수는 a_{n-1}이다.

(ii) $f(1)=2$인 경우

$x\ge 3$일 때 조건 ㈏에 의해 $f(x)\ne 1$이므로 $f(2)=1$이다. 나머지 $n-2$개의 원소에 대하여 조건 ㈎, ㈏를 만족시키는 함수의 개수는 a_{n-2}이다.

(i), (ii)에 의하여

$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ $(n\ge 3)$



한편, $a_1=1$, $a_2=2$이므로 수열 $\{a_n\}$은 다음과 같다.

$\{a_n\}$: $1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \cdots$

$\therefore a_8=34$

52. 정답 9

주어진 식에서

$a_1+2a_2+\cdots+(n-1)a_{n-1}+na_n$

$=\dfrac{1}{2}n(n+1)a_{n+1}+1$ …… ㉠

$a_1+2a_2+\cdots+(n-1)a_{n-1}$

$=\dfrac{1}{2}n(n-1)a_n+1$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$na_n=\dfrac{1}{2}\{n(n+1)a_{n+1}-n(n-1)a_n\}$ 이다.

$\therefore\ a_{n+1}=a_n\ (n\geq 2)$

한편, $a_1=a_2+1$ 이므로 $a_2=a_1-1$ 이다.

따라서 구하는 수열은

$a_1=10,\ a_n=9\ (n\geq 2)$

$\therefore\ a_{100}=9$

53. 답 24

$3<a<4$이므로

$a_2=a-1>0$, $a_3=a-2>0$, $a_4=a-3>0$,

$a_5=a-4<0$

$a_6=|a_5|-1=4-a-1=3-a$

$a_7=|a_6|-1=a-3-1=a-4$

$a_8=|a_7|-1=4-a-1=3-a$

⋮

n이 5 이상의 홀수일 때 : $a_n=a-4$

n이 5 이상의 짝수일 때 : $a_n=3-a$

5 이상의 홀수 n에 대하여

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}a_k&=a_1+a_2+a_3+a_4+(a_5+a_6)+(a_7+a_8)+\cdots\\&\quad+(a_{n-2}+a_{n-1})+a_n\\&=a+(a-1)+(a-2)+(a-3)-\frac{n-5}{2}+a-4\\&=5a-\frac{1}{2}(n+15)\end{aligned}$$

$\sum_{k=1}^{n}a_k=0$으로부터 $5a-\dfrac{1}{2}(n+15)=0$

$\therefore 10a=n+15$ …… ㉠

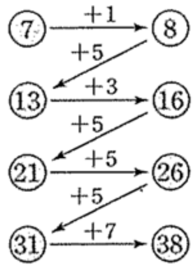
$3<a<4$이므로 $30<n+15$, $15<n<25$

따라서 홀수 n의 최댓값은 23이고, ㉠으로부터 a의 값은

$\dfrac{23+15}{10}=\dfrac{19}{5}$ 이다.

$\therefore p+q=5+19=24$

54. 답 302



⋮

이므로 수열 7, 13, 21, 31, …을 수열 $\{b_n\}$이라 하면

$b_{15}=7+\sum_{k=1}^{14}(2k+4)=7+2\cdot\dfrac{14\cdot 15}{2}+4\cdot 14=273$

이때 a_{30}은 b_{15}의 값에 수열 1, 3, 5, 7, …의 제15항의 값을 더하면 된다. $\therefore a_{30}=273+29=302$

[다른 풀이]

1행의 짝수 번째 수를 순서대로 나열한 수열을 $\{b_n\}$이라 하면

$a_{30}=b_{16}-2$

$\{b_n\}$: 4, 10, 18, 28, …이므로

$b_n=4+\sum_{k=1}^{n-1}(2k+4)=n^2+3n$

$\therefore a_{30}=b_{16}-2=304-2=302$

55. 정답 55

$n>1$ 일 때

$\log_2(n+1)-\log_2 n=\log_2\dfrac{n+1}{n}\neq$(정수)이고

$0<\log_2(n+1)-\log_2 n<1$ 이므로

$g(n+1)<g(n)$ 이 성립하기 위해서는

$\log_2(n+1)=$(정수)일 때이고, 이때 $g(n+1)=0$

즉, $n+1=2^l$ (l은 자연수) 꼴이어야 한다.

$\therefore\ n=2^2-1,\ 2^3-1,\ 2^4-1,\ \cdots$

즉, $n_k=2^{k+1}-1$

이때 $f(n_k)$는 $\log_2(2^{k+1}-1)$의 정수 부분이므로 $f(n_k)=k$

$\therefore\ \sum_{k=1}^{10}f(n_k)=\sum_{k=1}^{10}=55$

56. 정답 ⑤

ㄱ. $3<\sqrt{10}<4$이고, $3.5^2=12.25$이므로

$3<\sqrt{10}<3.5$ $\therefore\ a_{10}=3$ (참)

ㄴ. $a_n=15$이므로 $15-\dfrac{1}{2}<\sqrt{n}<15+\dfrac{1}{2}$에서

$15^2-15+\dfrac{1}{4}<n<15^2+15+\dfrac{1}{4}$

이 때, n은 자연수이므로

$15^2-15<n<15^2+15$

따라서 $a_n=15$를 만족시키는 자연수 n의 개수는

$15^2+15-(15^2-15)=30$이다. (참)

ㄷ. $a_n=k$(k는 자연수)라 하면

$k-\dfrac{1}{2}<n<k+\dfrac{1}{2}$

$k^2-k+\frac{1}{4}<n<k^2+k+\frac{1}{4}$

이 때, n은 자연수이므로

$k^2-k<n<k^2+k$

따라서 n은 $k^2-k+1,\ k^2-k+2,\ \cdots,\ k^2+k$의 $2k$가 존재한다.

$k=1$일 때, $a_1=a_2=1$

$k=2$일 때, $a_3=a_4=a_5=a_6=2$

$k=3$일 때, $a_7=a_8=a_9=\cdots=a_{12}=3$

$k=4$일 때, $a_{13}=a_{14}=a_{15}\cdots=a_{20}=4$

$k=5$일 때, $a_{21}=a_{22}=a_{23}=\cdots=a_{30}=5$

$$\therefore \sum_{n=1}^{30} a_n=(a_1+a_2)+(a_3+a_4+a_5+a_6)+(a_7+\cdots+a_{12})+(a_{13}+\cdots+a_{20})+(a_{21}+\cdots+a_{30})$$

$=1\times2+2\times4+3\times6+4\times8+5\times10=110$ (참)

57. 정답 ③

ㄱ. 주어진 그래프에서

$f(2)-f(1)>f(3)-f(2)$이므로

$S_2-S_1>S_3-S_2$이다.

$\therefore\ a_2>a_3$ (참)

ㄴ. 함수 $f(x)$의 그래프는 직선 $x=\frac{11}{2}$에 대하여 대칭이므로

$f(5)=f(6)$ 즉, $S_5=S_6$이다.

$\therefore\ a_6=S_6-S_5=0$ (거짓)

ㄷ. $\sum_{k=3}^{9} a_k=\sum_{k=1}^{9} a_k-\sum_{k=1}^{2} a_k=S_9-S_2=f(9)-f(2)$

$f(9)=f(2)$이므로 $\sum_{k=3}^{9} a_k=0$ (참)

58. 정답 375

10^n을 소인수분해하면 2^n5^n이고 홀수인 약수는 5^n의 약수이므로

$f(n)=n+1$

짝수인 약수의 개수는 10^n의 모든 양의 약수의 개수에서 홀수인 약수의 개수를 빼면 되므로

$g(n)=(n+1)^2-(n+1)$

$\therefore g(n)-f(n)=(n+1)^2-(n+1)-(n+1)=n^2-1$

$\therefore \sum_{n=1}^{10}(n^2-1)=\frac{10\cdot11\cdot21}{6}-10=375$

59. 정답 88 이해력 - 수열

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$라 하면 ㈎에서 $S_n=(2n+1)^2$이므로

$a_1=S_1=3^2=9$

$a_n=S_n-S_{n-1}=(2n+1)^2-(2n-1)^2=8n\ \ (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$

㈏에서 수열 $\{b_n\}$은 수열 $\{a_n\}$의 계차수열이므로

$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k$

따라서 $n\ge2$일 때,

$\sum_{k=1}^{n-1}b_k=a_n-a_1=8n-9$

$\therefore \sum_{k=10}^{20}b_k=\sum_{k=1}^{20}b_k-\sum_{k=1}^{9}b_k=(8\cdot21-9)-(8\cdot10-9)$

$=8\cdot11=88$

[다른 풀이]

$a_n=S_n-S_{n-1}=(2n+1)^2-(2n-1)^2=8n(n=2,3,4,\cdots)$

수열 $\{a_n\}$은 둘째항부터 공차가 8인 등차수열을 이룬다.

$\therefore \sum_{k=1}^{20}b_k=a_{21}-a_{10}=8\cdot(21-10)=88$

60. 답 21

$a_n=S_n-S_{n-1}$이고 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$이므로

$a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n-1}a_k=\log\frac{(n+1)(n+2)}{2}-\log\frac{n(n+1)}{2}$

$=\log\frac{n+2}{n}\ (n\ge2)$

이때 $n=1$이면 $a_1=\sum_{k=1}^{1}a_k=\log3$이므로 $a_n=\log\frac{n+2}{n}\ (n\ge1)$

$\therefore p=\sum_{k=1}^{20}a_{2k}=\sum_{k=1}^{20}\log\frac{2k+2}{2k}=\sum_{k=1}^{20}\log\frac{k+1}{k}$

$=\log\frac{2}{1}+\log\frac{3}{2}+\cdots+\log\frac{21}{20}$

$=\log\left(\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\cdots\times\frac{21}{20}\right)$

$=\log21$

$\therefore 10^p=10^{\log21}=21$

61. 정답 ③

$a_n=b_n$이므로 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$라 하면,

$a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=1+\sum_{k=1}^{n-1}a_k=1+S_{n-1}$

$a_n=1+S_{n-1}\ \ \cdots\ (1)$

(1)에 $n\leftarrow n+1$을 대입하면,

$a_{n+1}=1+S_n\ \ \cdots\ (2)$

(2)−(1)하면 $a_{n+1}-a_n=S_n-S_{n-1}=a_n$

$a_{n+1}=2a_n$이므로 수열 $\{a_n\}$은 공비가 2인 등비수열이다.

$a_n=2^{n-1}$

$\sum_{k=1}^{6}a_k=\sum_{k=1}^{6}2^{k-1}=\frac{2^6-1}{2-1}=63$

62. ②

수열 $\{a_n\}$은 5, 8, 13, 20, 29, ⋯에서 그 계차수열이 3, 5,

7, 9, ⋯인 등차수열을 이룬다.
따라서, 구하는 값은

$$a_{20}=5+(3+5+7+9+\cdots+39)$$
$$=5+\frac{(3+39)\cdot 19}{2}=404$$

63. 정답 39

$$a_{n+1}-a_n$$
$$=(-1)^n\frac{2n+1}{n(n+1)}$$
$$=(-1)^n\left(\frac{2n+1}{n}-\frac{2n+1}{n+1}\right)$$
$$=(-1)^n\left(2+\frac{1}{n}-2+\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=(-1)^n\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)$$

즉, $a_{n+1}-a_n=(-1)^n\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)$이므로

$$a_{20}=2+\sum_{k=1}^{19}(-1)^k\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=2+\left\{-\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\cdots-\left(\frac{1}{19}+\frac{1}{20}\right)\right\}$$
$$=2+\left(-1-\frac{1}{20}\right)=1-\frac{1}{20}=\frac{19}{20}$$

$\therefore\ p+q=39$

64. 정답 286
[출제의도] $\sum$ 의 성질을 이해하고 이를 활용하기
전개식에서 x^{10} 의 항들은
$1\times 11x^{10},\ 2x\times 10x^9,\ 3x^2\times 9x^8,\ \cdots,\ 11x^{10}\times 1$
이므로 x^{10} 의 계수는
$(1\times 11)+(2\times 10)+(3\times 9)+\cdots+(11\times 1)$
따라서 x^{10} 의 계수는

$$\sum_{k=1}^{11}k(12-k)=12\sum_{k=1}^{11}k-\sum_{k=1}^{11}k^2$$
$$=12\times\frac{11\times 12}{2}-\frac{11\times 12\times 23}{2}=286$$

65. 답 ⑤
[해설] $\log 3^{2011}=2011\times\log 3=2011\times 0.4771=959.4481$
이므로 3^{2011}은 960자리의 자연수이다.
즉, $1\le k\le 959$인 모든 자연수 k에 대하여 3^n이 k자리의 수이고, 3^{n+1}이 $k+1$자리의 수인 자연수 n이 반드시 하나씩 대응한다.
따라서 $a_{n+1}>a_n$을 만족하는 자연수 n의 개수는 959이므로 $b_n=2$를 만족하는 자연수 n의 개수는 959이고, 나머지는 1051개의 n에 대해서는 $b_n=-1$이다.

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{2010}b_k=2\times 959+(-1)\times 1051=867$$

66. 정답 415
$\left(n+\frac{1}{4}\right)^2=n^2+\frac{n}{2}+\frac{1}{16}$ 이므로 n이 짝수일 때와 홀수일 때로 나누어 생각한다.
(i) $n=2k-1$(k는 자연수)일 때

$$\left(2k-\frac{3}{4}\right)^2=4k^2-3k+\frac{9}{16}\text{ 이므로}$$
$$a_{2k-1}=4k^2-3k+1$$

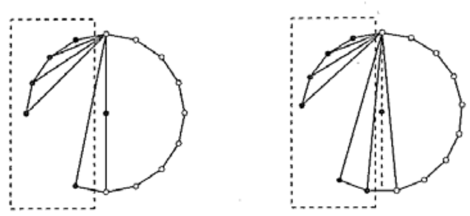
(ii) $n=2k$(k는 자연수)일 때

$$\left(2k+\frac{1}{4}\right)^2=4k^2+k+\frac{1}{16}\text{ 이므로}$$
$$a_{2k}=4k^2+k$$
$$\therefore\ \sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{5}(a_{2k-1}+a_{2k})=\sum_{k=1}^{5}(8k^2-2k+1)$$
$$=8\cdot\frac{5\cdot 6\cdot 11}{6}-2\cdot\frac{5\cdot 6}{2}+5$$
$$=415$$

67. 답 18
조건을 만족시키는 자연수를 순서대로 나열하면
12, 21, 1122, 1212, 2121, 2211,
11222, 112122, 121212, ⋯
에서 두 자리의 수는 2^1개, 네 자리의 수는 2^2개, 여섯 자리의 수는 2^3개이므로 a_7, a_{14}는 모두 여섯 자리의 수이고, a_7은 여섯 자리의 수 중에서 가장 작은 수, a_{14}는 여섯 자리의 수 중에서 가장 큰 수이다.
$\therefore a_7=111222,\ a_{14}=222111$
즉, $a_7+a_{14}=111222+222111=333333$이므로 각 자리의 숫자의 합은 $3\times 6=18$

68. 답 ⑤
4 이상의 자연수 n에 대하여
(i) n이 짝수일 때　　(ii) n이 홀수일 때

$a_n=\frac{n}{2}-1$　　　　　$a_n=\frac{n-1}{2}$



자연수 k에 대하여
$10k$는 짝수이므로 $a_{10k}=\frac{10k}{2}-1=5k-1$
$20k+1$은 홀수이므로 $a_{20k+1}=\frac{20k+1-1}{2}10k$
$\therefore a_{10k}+a_{20k+1}=5k-1+10k=15k-1$
$\therefore p+q=15+(-1)=14$

69. 정답 90 수학 내적 문제 해결 능력-수열

$720=2^4\times3^2\times5$이므로 720의 양의 약수의 개수는

$(4+1)(2+1)(1+1)=30$

이때, $a_1\times a_{30}=a_2\times a_{29}=a_3\times a_{28}=\cdots=a_{15}\times a_{16}=720$

$\sum_{k=1}^{n}\log a_k=\log(a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_{30})$

$=\log\{(a_1\times a_{30})\times(a_2\times a_{29})\times\cdots\times(a_{15}\times a_{16})\}$

$=\log720^{15}=15\log(4\log2+2\log3+\log5)$

$=15(4\log2+2\log3+1-\log2)$

$=15(3\log2+2\log3+1)$

$=45\log2+30\log3+15$

$\therefore\ p+q+r=45+30+15=90$

70. 정답 55 이해력–수열

$a_n=2^{n-1}$이므로

$a_1=1 \Leftrightarrow b_1=1$

$a_2=2 \Leftrightarrow b_2=2$

$a_3=4 \Leftrightarrow b_4=3$

$a_4=8 \Leftrightarrow b_8=4$

$\vdots$

$a_{10}=512 \Leftrightarrow b_{512}=10$

즉, $n=2^{k-1}$일 때, $b_n=k$이고, $n=2^{k-1}$을 만족하는 자연수 k가 존재하지 않을 때 $b_n=0$이다.

$\therefore\ \sum_{k=1}^{1000}b_k=b_1+b_2+b_4+b_8+b_{16}+b_{32}+b_{64}+b_{128}+b_{256}+b_{512}$

$=1+2+3+\cdots+10=55$

71. 정답 100

양의 정수 p에 대하여

$k=4(p-1)+1$일 때

$\frac{k(k+1)}{2}=\frac{(4p-3)(4p-2)}{2}=(4p-3)(2p-1)$ (홀수)

$k=4(p-1)+2$일 때

$\frac{k(k+1)}{2}=\frac{(4p-2)(4p-1)}{2}=(2p-1)(4p-1)$ (홀수)

$k=4(p-1)+3$일 때

$\frac{k(k+1)}{2}=\frac{(4p-1)4p}{2}=2p(4p-1)$ (짝수)

$k=4p$일 때

$\frac{k(k+1)}{2}=\frac{4p(4p+1)}{2}=2p(4p+1)$ (짝수)

$S_{100}=\sum_{k=1}^{100}\left\{(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}\cdot k\right\}$

$=\sum_{m=1}^{25}\{-(4m-3)-(4m-2)+(4m-1)+4m\}$

$=\sum_{m=1}^{25}4=100$

72. 답 ④

$\frac{S_n}{2n-1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{S_k}{2k-1}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{S_k}{2k-1}$

$=(n^2+2n)-\{(n-1)^2+2(n-1)\}=2n+1\,(n\geq2)$

$\therefore\ S_n=(2n-1)(2n+1)=4n^2-1$

$\therefore\ a_{10}=S_{10}-S_9=(4\cdot10^2-1)-(4\cdot9^2-1)=76$

73. 정답 ④

ㄱ. $n=1$을 대입하면

$S_1=3a_1-2,\ a_1=3a_1-2$

$\therefore\ a_1=1$

$S_1=1$ $\therefore$ 참

ㄴ. $S_n-S_{n-1}=(3a_n-2)-(3a_{n-1}-2)$

$a_n=3a_n-3a_{n-1},\ a_n=\frac{3}{2}a_{n-1}\,(n\geq2)$

$a_{100}=\frac{3}{2}a_{99}$

$\therefore\frac{a_{100}}{a_{99}}=\frac{3}{2}$ $\therefore$ 거짓

ㄷ. $S_{100}=3a_{100}-2=\frac{2}{3}\times3a_{101}-2$

$=2a_{101}-2=2(a_{101}-1)$ $\therefore$ 참

[다른 풀이]

ㄷ. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$이고, 공비가 $\frac{3}{2}$인 등비수열이다.

$a_n=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1},\ a_{101}=\left(\frac{3}{2}\right)^{100}$

$S_{100}=\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{100}-1}{\frac{3}{2}-1}=2\left(\frac{3}{2}\right)^{100}-2=2a_{101}-2$

$=2(a_{101}-1)$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

74. 답 ②

$a_n=S_n-S_{n-1}\ (n\geq2)$이므로

$a_n=\frac{2S_n{}^2}{2S_n-1}$에서 $S_n-S_{n-1}=\frac{2S_n{}^2}{2S_n-1}$

$(S_n-S_{n-1})(2S_n-1)=2S_n{}^2$

$-S_n-2S_nS_{n-1}+S_n=0$

위 식의 양변을 S_nS_{n-1}로 나누어 정리하면

$\frac{1}{S_n}-\frac{1}{S_{n-1}}=2\quad(n\geq2)$

즉, 수열 $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$은 첫째항이 $\frac{1}{S_1}=\frac{1}{a_1}=1$, 공차가 2인 등차수열이므로 $\frac{1}{S_n}=1+(n-1)\cdot2=2n-1$

$\therefore\ S_n=\frac{1}{2n-1}$

$\therefore\ a_6 = S_6 - S_5 = \frac{1}{11} - \frac{1}{9} = -\frac{2}{99}$

75. 답 48

$\log a_n = n + \log n$ 에서

$\log a_n = \log 10^n + \log n = \log(n \cdot 10^n)$

$\therefore\ a_n = n \cdot 10^n$

$\sum_{n=1}^{9} a_n = 1 \cdot 10 + 2 \cdot 10^2 + \cdots + 9 \cdot 10^9 = 9876543210$

$\therefore\ \left[\log\left(\sum_{n=1}^{9} a_n\right)\right] = [\log 9876543210] = 9$

76. 답

$3^{f(x)+g(x)} = x$에서 $\log_3 x = f(x) + g(x)$

함숫값 $f(x)$는 밑이 3인 로그의 지표이고, 함숫값 $g(x)$는 밑이 3인 로그의 가수이므로

$\sum_{k=1}^{99} f(9k)$

$= \sum_{k=1}^{99} [\log_3 9k] = \sum_{k=1}^{99} [\log_3 9 + \log_3 k]$

$= 2 \cdot 99 + \sum_{k=1}^{99} [\log_3 k]$

$= 198 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 6 + 2 \cdot 18 + 3 \cdot 54 + 4 \cdot 19 = 478$

$(\because\ 0 < \log_3 2 < 1 < \log_3 4 < \cdots < \log_3 8 < 2 < \log_3 10 < \cdots < \log_3 26$
$< 3 < \log_3 28 < \cdots < \log_3 80 < 4 < \log_3 82 < \cdots < \log_3 99 < 5)$

77. 정답 11

$\sum_{k=1}^{15} f(k) + \sum_{k=1}^{15} g(k+1) = \sum_{k=1}^{15} f(k) + \sum_{k=2}^{16} g(k)$

$f(x) + g(x) = \log_2 x$ 이므로

$\sum_{k=1}^{15} f(k) + \sum_{k=2}^{16} g(k) = f(1) + \sum_{k=2}^{15} \{f(k) + g(k)\} + g(16)$

$= \log_2 A$

$\sum_{k=2}^{15} \{f(k) + g(k)\} = \log_2 2 + \log_2 3 + \cdots + \log_2 15$

$f(x) + g(x) = \log_2 x$ 에서 $f(x)$는 정수이고, $-1 < g(x) \le 0$이므로 $\log_2 x$가 정수인 경우는 $g(x) = 0$이다.

$\therefore\ f(1) = 0,\ g(16) = 0$

따라서, $A = 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \cdots \times 15$이므로

$A = 2^n \times$(홀수) $\quad \therefore\ m = 11$

78. 답 55

$a_1 = a_2 = a_3 = 1$

$a_4 = a_5 = a_6 = a_7 = a_8 = 2$

$a_9 = a_{10} = a_{11} = \cdots = a_{15} = 3$

$a_{16} = a_{17} = a_{18} = \cdots = a_{24} = 4$

$\vdots$

$a_{m^2} = a_{m^2+1} = a_{m^2+2} = \cdots = a_{(m+1)^2-1} = m$이므로

$m = 1$일 때,

$\frac{1}{3} \sum_{k=1}^{3} a_k = \frac{1}{3}(1+1+1) = 1$

$m = 2$일 때,

$\frac{1}{5} \sum_{k=4}^{8} a_k = \frac{1}{5}(2+2+2+2+2) = 2$

$m = 3$일 때,

$\frac{1}{7} \sum_{k=9}^{15} a_k = \frac{1}{7}(3+3+3+3+3+3+3) = 3$

$\vdots$

이므로 $m = 10$일 때, $\frac{1}{2 \cdot 10 + 1} \sum_{k=10^2}^{(10+1)^2-1} a_k = 10$

$\therefore\ \sum_{m=1}^{10} \left(\frac{1}{2m+1} \sum_{k=m^2}^{(m+1)^2-1} a_k \right) = 1 + 2 + 3 + \cdots + 10 = 55$

다른 풀이

$m^2 \le k \le m^2 + 2m < (m+1)^2$이면

$m \le \sqrt{k} < m+1 \qquad \therefore\ a_k = m$

$\therefore\ \frac{1}{2m+1} \sum_{k=m^2}^{m^2+2m} a_k = \frac{1}{2m+1} \left(\sum_{k=1}^{m^2+2m} m - \sum_{k=1}^{m^2-1} m \right)$

$= \frac{1}{2m+1} \cdot (2m+1) \cdot m = m$

$\therefore$ (주어진 식)$= \sum_{m=1}^{10} m = 55$

79. 정답 13

[출제의도] 여러 가지 수열에 관한 문제해결하기

n행에 나열된 모든 자연수의 합을 S_n 이라 하자.

$S_1 = 2 + 3 + 3 \times 2$

$S_2 = 2 + 2S_1 = 2 + 2^2 + 3 \times 2 + 3 \times 2^2$

$S_3 = 2 + 2S_2 = 2 + 2^2 + 2^3 + 3 \times 2^2 + 3 \times 2^3$

$\vdots$

$S_n = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n + 3 \times 2^{n-1} + 3 \times 2^n$ 이므로

$S_{10} = (2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{10}) + (3 \times 2^9 + 3 \times 2^{10})$

$= \frac{2(2^{10}-1)}{2-1} + 3 \times 2^9 + 3 \times 2^{10}$

$= 2^{11} - 2 + 3 \times 2^9 + 3 \times 2^{10}$

$= (4 + 3 + 6) \times 2^9 - 2 = 13 \times 2^9 - 2$

따라서 $S = 13 \times 2^9 - 2$ 이므로 $p = 13$ 이다.

80. 답 ②

ㄱ. $a_2 = (2 \cdot 1 - 1)a_1 = 1$

$a_3 = (2 \cdot 1 - 1)a_1 + (2 \cdot 2 - 1)a_2 = 1 + 3 \cdot 1 = 4$ (거짓)

ㄴ. $a_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} (2k-1)a_k$

$= a_1 + 3a_2 + 5a_3 + \cdots + (2n-3)a_{n-1} + (2n-1)a_n \quad \cdots$ ㉠

$a_n = \sum_{k=1}^{n-1}(2k-1)a_k \ \ (n \geq 2)$

$= a_1 + 3a_2 + 5a_3 + \cdots + (2n-3)a_{n-1}$ $\cdots$ ㉡

㉠−㉡을 하면 $a_{n+1} - a_n = (2n-1)a_n$

$\therefore a_{n+1} = 2na_n \quad (n \geq 2)$

$\therefore \ a_{10} = 18a_9$ (참)

ㄷ. $a_{n+1} = 2na_n \quad (n \geq 2)$이므로

$a_{15} = (2 \cdot 14)a_{14} = (2 \cdot 14)(2 \cdot 13)a_{13}$

$= (2 \cdot 14)(2 \cdot 13)(2 \cdot 12)a_{12}$

$= \cdots$

$= (2 \cdot 14)(2 \cdot 13)(2 \cdot 12) \cdots (2 \cdot 2)a_2$

$= 2^{13} \cdot 14! \quad (\because \ a_2 = 1)$ (거짓)

81. 정답 ⑤ 추론 능력(추측)-수열

3행 1열에 적힌 숫자는 $(2+2) = 4$

5행 1열에 적힌 숫자는 $(2+2)+(4+4) = 12$

7행 1열에 적힌 숫자는 $(2+2)+(4+4)+(6+6) = 24$

⋮

$(2n+1)$행 1열에 적힌 숫자는

$2\sum_{k=1}^{n} 2k = 2n(n+1)$

따라서 $39(=2 \cdot 19+1)$행 1열에 적힌 숫자는

$2 \cdot 19 \cdot 20 = 760$

따라서, 1행 40열에 적힌 숫자는 $760+1 = 761$이다.

82. 답 351

3과 4의 최소공배수인 12마다 7개의 항이 주기적으로 남게 되고, 제1행부터 6개의 행을 묶어 하나의 군으로 보면 각 군에는 35개의 항이 주기적으로 나타나게 된다.

이때, $2011 = 35 \cdot 57 = 16$

이므로 a_{2011}은 제58군의 16번째 수, 즉 제58군의 3행 6열의 수이다.

$\therefore \ m = 6 \cdot 57 + 3 = 345, \ n = 6$

$\therefore \ m+n = 351$

83. 정답 ①

제1행과 제2열이 만나는 수를 첫째항으로 하는 제1행의 수를 수열 $\{a_n\}$이라 하면

$a_1 = 1^2+1, \ a_2 = 2^2+1, \ a_3 = 3^2+1, \ \cdots$ 이므로 $a_n = n^2+1$

(i) n^2+1이 한 자리의 수일 때, $1^2+1, \ 2^2+1$ (2자리)

(ii) n^2+1이 두 자리의 수일 때,

$3^2+1, \ 4^2+1, \ \cdots, \ 9^2+1$ ($7 \times 2 = 14$자리)

(iii) n^2+1이 세 자리의 수일 때,

$10^2+1, \ 11^2+1, \ \cdots, \ 31^2+1$ ($22 \times 3 = 66$자리)

이때 70번째 수는 세 자리 수의 $70-(2+14) = 54$번째 자리의 수이다.

즉, 세 자리 중 18번째 항의 일의 자리 수이다.

따라서, 18번째 항은 27^2+1이고 일의 자리 수는 0이다.

84. 정답 ⑤

ㄱ. 제4행의 n번째 수는 $6n-5$이므로

$6n-5 < 100, \ n < \frac{105}{6} = 17.5$

따라서 제4행에 있는 두 자리 수의 최댓값은 $n=17$일 때, 97 이다.

$\therefore$ 참

ㄴ. 두 자리 자연수의 개수가 1개인 행은 다음과 같다.

…	…	…	…
1	49	97	…
1	51	101	…
1	53	105	…
…	…	…	…
1	99	197	…
1	101	201	…
…	…	…	…

이 때 $51 = 2 \times 26 - 1, \ 99 = 2 \times 50 - 1$이므로 행의 개수는 $50-26+1 = 25$이다. $\therefore$ 참

ㄷ. 제m행의 첫째항이 1, 공차가 $2(m-1)$인 등차수열 이므로 m행의 n번 째 수는 $1+(n-1)\{2(m-1)\}$이다.

$1+2(n-1)(m-1) = 61$에서

$(n-1)(m-1) = 30 = 2 \times 3 \times 5$

$n-1$	1	2	3	5	6	10	15	30
$m-1$	30	15	10	6	5	3	2	1

$\therefore \ (n,m) = (2,31), (3,16), (4,11), (6,7), (7,6), (11,4), (16,3), (31,2)$

따라서 61은 8번 나타난다. $\therefore$참

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

85. 답 ④

자릿수에 따라 군으로 나누어 생각하면 제n군에 있는 n자리의 자연수는 2^{n-1}개이다.

ㄱ. 10자리의 자연수는 $2^{10-1} = 2^9$개이다. (거짓)

ㄴ. $\sum_{k=8}^{15} a_k$는 제4군에 있는 자연수들의 합이므로 8444이다. (참)

ㄷ. 제 n군에 있는 자연수들의 합은 제1군에서 제$(n-1)$군까지의 모든 자연수들의 합과 자연수 $10^{n-1} \cdot 2^{n-1}$의 합이다.

따라서 $\sum_{k=2^{10}}^{2^{11}-1} a_k$는 제11군에 있는 자연수들의 합이므로 이것은 제1군에서 제10군까지의 모든 자연수들의 합과 자연수 $10^{10} \cdot 2^{10}$의 합이다.

$\therefore \sum_{k=2^{10}}^{2^{11}-1} a_k = 10^{10} \cdot 2^{10} + \sum_{k=1}^{2^{10}-1} a_k = 2^{10} + \sum_{k=1}^{2^{10}-1} a_k$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

86. 정답 421　　수학 내적문제 해결능력 - 수열

1부터 $4n+1$까지의 홀수를 차례로 나열하면

$1 < 3 < 5 < \cdots < 2n-1 < 2n+1 < 2n+3 < \cdots\ 4n+1$

따라서, 집합 A_n의 원소 중 가장 작은 원소와 가장 큰 원소를 각각 m, M이라 하면

$$m = 1+3+5+\cdots+(2n-1) = \frac{n\{1+(2n-1)\}}{2} = n^2$$

$$M = (2n+3)+(2n+5)+(2n+7)+\cdots+(4n+1)$$
$$= \frac{n\{(2n+3)+(4n+1)\}}{2} = 3n^2+2n$$

따라서, 집합 A_n의 원소의 개수는

$$\frac{1}{2}(M-m)+1 = \frac{1}{2}\{(3n^2+2n)-n^2\}+1 = n^2+n+1$$

따라서, 집합 A_{20}의 원소의 개수는 $20^2+20+1 = 421$

87. 답 ④

$A_k = \begin{pmatrix} a_{2k-1} & a_{2k} \\ a_{2k} & a_{2k+1} \end{pmatrix}$이므로

$s = a_3+a_5+a_7+\cdots+a_{21}$

$= (a_2+a_3+a_5+a_7+\cdots+a_{21})-a_2$

그런데

$a_2+a_3=a_4,\ a_4+a_5=a_6,\ a_6+a_7=a_8,\ \cdots,\ a_{20}+a_{21}=a_{22}$

이므로 위 식을 변변 더하여 정리하면

$a_2+a_3+a_5+a_7+\cdots+a_{21}=a_{22}$

$\therefore s = a_{22}-a_2 = a_{22}-1$

88. 정답 ④

집합 A_n의 원소 중 가장 작은 수를 a_n이라 하면

$a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+(n-1)+n=a_n+2n-1$

$\therefore\ a_{n+1}-a_n=2n-1$

$$\therefore\ a_{21}=a_1+\sum_{k=1}^{20}(2k-1)=1+20^2=401$$

89. 정답 10

n초 후의 점 P의 좌표는

$2^0-2^1+2^2-2^3+\cdots+(-2)^{n-1}$

$$=(-2)^0+(-2)^1+(-2)^2+(-2)^3+\cdots+(-2)^{n-1}=\frac{1-(-2)^n}{1-(-2)}$$

이때 $\frac{1-(-2)^n}{3} \geq 500$ 에서 $(-2)^n \leq 1-1500$

$\therefore n=11, 13, 15, 17, \cdots$

따라서 10초와 11초 사이에 처음으로 좌표가 500인 점을 지나므로 구하는 자연수 a의 값은 10이다.

90. 답 ⑤

$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n$을 주어진 규칙으로 나열하는 경우의 수를 $f(n)$(가지)이라 하자.

이웃한 두 항이 같으면 $=$, 같지 않으면 $\neq$를 사이에 둘 때, $=$가 연속하지 않도록 나열하는 방법을 생각하면 된다.

$a_1,\ a_2,\ a_3, \cdots,\ a_{n+2}$에 대하여

(i) $a_{n+1} \neq a_{n+2}$일 때,

$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_{n+1}$ 다음에 $a_{n+1} \neq a_{n+2}$가 되는 a_{n+2}를 배열하면 되므로 $\boxed{f(n+1)}$(가지)

(ii) $a_{n+1}=a_{n+2}$일 때,

$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n \neq a_{n+1}=a_{n+2}$이 되어 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n$ 다음에 $a_n \neq a_{n+1}=a_{n+2}$가 되는 $a_{n+1}=a_{n+2}$를 배열하면 되므로 $\boxed{f(n)}$(가지)

(i), (ii)에서

$f(n+2)=\boxed{f(n+1)}+\boxed{f(n)}$ $(n \geq 3)$

이고 $f(3)=6$, $f(4)=10$이므로

$f(5)=16$, $f(6)=26$, $f(7)=42$, $f(8)=\boxed{68}$

91. ②

$S_n=a_1-a_2+a_3-\cdots+(-1)^{n-1}a_n$이라 하면 자연수 n에 대하여

(i) $n=2m(m=1, 2, 3, \cdots)$일 때

$$S_n=a_1-a_2+a_3+\cdots-a_{2n}$$
$$=(a_1+a_3+\cdots+a_{2m-1})-(a_2+a_4+\cdots+a_{2m})$$
$$=\sum_{k=1}^{m}\{(2k-1)2k\}-\sum_{k=1}^{m}\{2k(2k+1)\}$$
$$=\sum_{k=1}^{m}(-4k)=-2m(m+1)$$
$$=\boxed{-\frac{n(n+2)}{2}}$$

(ii) $n=2m-1(m=1, 2, 3, \cdots)$일 때

$$S_n=S_{2m}-(-a_{2m})=S_{2m}+a_{2m}$$
$$=-2m(m+1)+2m(2m+1)$$
$$=2m^2=\boxed{\frac{(n+1)^2}{2}}$$

$$\therefore f(n)=-\frac{n(n+2)}{2},\ g(n)=\frac{(n+1)^2}{2}$$

$\therefore f(10)+g(19)=-60+200=140$

92. 정답 99

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\cdots+\frac{1}{R_n}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k}-\sqrt{k-1}}{(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$

$= \sqrt{n+1} - 1$

이므로 $R = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}-1}$

$R \leq \dfrac{1}{9}$ 이므로

$\dfrac{1}{\sqrt{n+1}-1} \leq \dfrac{1}{9}$, $\sqrt{n+1} - 1 \geq 9$

$\therefore n \geq 99$

따라서 최소의 자연수 n은 99이다.

93. 정답 ①

$a_n = n^2 + \sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)a_k$ 에서

$a_{n-1} = (n-1)^2 + \sum_{k=1}^{n-2}(2k+1)a_k$ 이므로

$\sum_{k=1}^{n-2}(2k+1)a_k = a_{n-1} - (n-1)^2$

따라서

$a_n = n^2 + \sum_{k=1}^{n-2}(2k+1)a_k + (2n-1)a_{n-1}$

$= n^2 + a_{n-1} - (n-1)^2 + (2n-1)a_{n-1}$

$\therefore\ f(n) = (n-1)^2$

또 $a_n + 1 = 2n(a_{n-1} + 1)$

$= 2n \cdot 2(n-1)(a_{n-2}+1)$

$\vdots$

$= n(n-1) \cdots 2 \cdot 1 \cdot 2^{n-2}(a_2 + 1)$

이므로 $g(n) = 2^{n-2}$ 이다.

$\therefore\ f(9) \times g(9) = 2^6 \times 2^7 = 2^{13}$

94. 답 ③

	1열	2열	3열	4열	5열	6열	7열	8열	…
제1행	1	2	3	4	5	6	7	8	…
제2행	2	3	4	5	6	7	8	9	…
제3행	3	3	5	5	7	7	9	9	…
제4행	4	4	5	5	7	7	10	10	…
제5행	5	5	5	5	7	7	10	10	…
제6행	6	6	6	6	7	7	11	11	…
제7행	7	7	7	7	7	7	11	11	…
제8행	8	8	8	8	8	8	11	11	…
제9행	9	9	9	9	9	9	11	11	…
제10행	10	10	10	10	10	10	11	11	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

ㄱ. 제6행을 규칙에 따라 써 보면 제7행의 수는 11이다. ∴참

ㄴ. 제7열에서 11은 제6행부터 나타나고 11은 소수이므로 제11행까지만 계속된다. 따라서 모두 6번 나타난다. ∴참

ㄷ. 제42열은 제2행부터 43이 나타나며 43은 소수이므로 제43행까지 계속되고 제44행에서 처음으로 44가 나타난다. ∴거짓

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

95. 정답 181

제19행에 나열된 모든 자연수의 평균을 구하시오.

수열 $\{a_n\}$의 제n항을 제$(2n-1)$행에 나열된 모든 자연수의 평균이라 하자. 수열 $\{a_n\}$의 각 항은 1, 5, 13, 41, 61, …이므로 $\{a_n\}$의 계차수열은 첫째 항이 4이고 공차가 4인 등차수열을 이룬다.

따라서 $a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 4k = 1 + 2n(n-1) = 2n^2 - 2n + 1$ 에서

$a_{10} = 181$ 이므로 제19행에 나열된 수들의 평균은 181이다.

96. 답 410

제20행의 가장 왼쪽과 오른쪽에 있는 수는 38과 39이다.

따라서 제20행은

38, 34, 30, 26, 22, 18, 14, 10, 6, 2, 3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35, 39

이다. 그러므로 구하는 합은

$\dfrac{10(38+2)}{2} + \dfrac{10(3+39)}{2} = 200 + 210 = 410$

97. 답 11

[해설] 주어진 수열의 제n행은 각각 첫째항이 2^n, 끝항이 2^{2n}인 등비수열을 이룬다.

따라서 2^{20}은 제10행의 끝항부터 제20행의 첫째항까지 각 행에서 1개씩 총 11개가 존재한다.

98. 답 420

단답형 제1행부터 제$(2n-1)$행까지 나열된 수 중에서 홀수의 개수는

$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$(개)

이므로 제1행부터 제$(2n-1)$행까지의 모든 홀수의 집합을 A_n이라 하면

$A_n = \{1, 3, 5, \cdots, 2n^2 - 1\}$

제1행부터 제$2n$행까지 나열된 수 중에서 짝수의 개수는

$2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n+1)$(개)

이므로 제 1행부터 제$2n$행까지의 모든 짝수의 집합을 B_n이라 하면

$B_n = \{2, 4, 6, \cdots, 2(n^2+n)\}$

$S_{2n} = A_n \cup B_n$

$S_{20} = A_{10} \cup B_{10}$

$= \{1,\ 3,\ 5,\ \cdots,\ 199\} \cup \{2,\ 4,\ 6,\ \cdots,\ 220\}$

$= \{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 199,\ 200,\ 202,\ 204,\ \cdots,\ 220\}$

$T_{20} = \{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 219,\ 220\}$

$\therefore T_{20} - S_{20} = \{201,\ 203,\ 205,\ \cdots,\ 219\}$

따라서 구하는 합은 $219 + 201 = 420$

99. **정답** 499

$a_1 = 1,\ a_2 = 4$ 이고 $a_{n+1} = a_n + (2n+1)$ 이다.

$\therefore a_{100} - a_{99} = 2 \times 99 + 1 = 199$

$b_1 = 3,\ b_2 = 9$ 이고, $b_{n+1} = b_n + 3(n+1)$ 이다.

$\therefore\ b_{100}-b_{99}=3\times(99+1)=300$

$\therefore\ a_{100}+b_{100}-a_{99}-b_{99}=(a_{100}-a_{99})+(b_{100}-b_{99})$

$=199+300=499$

100. 답 ②

ㄱ. 제9행에 적힌 각 F에 대하여 제10행에 M을 적으므로 제10행의 M의 개수는 제9행의 F의 개수와 같다.

$\therefore\ b_{10}=a_9$ (참)

ㄴ. 제n행에 적힌 각 F와 M에 대하여 제$(n+1)$행에 각각 F를 적으므로 제$(n+1)$행의 F의 개수는 제n행의 F와 M의 개수의 합과 같다.

$\therefore\ a_{n+1}=a_n+b_n$ (참)

ㄷ. $a_{n+1}=a_n+b_n=a_n+a_{n-1}$이므로 수열 $\{a_n\}$은 다음과 같다.

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ⋯

$\therefore\ a_9+b_9=a_9+a_8=a_{10}=55$ (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

101. 정답 ④

연속된 네 개의 항이 처음으로 2, 0, 1, 0 이 되는 때는 다음과 같이 자연수 1020 과 1021 의 각 자릿수를 나열할 때이다.

1, 2, 3, 4, ⋯ , 1, 0, 2, 0, 1, 0, 2, 1, ⋯

자연수 1020이 나타날 때까지 나열된 자릿수의 개수는

한 자리 수의 자릿수 : 9(개)

두 자리 수의 자릿수 : $90\times2=180$(개)

세 자리 수의 자릿수 : $900\times3=2700$(개)

네 자리 수의 자릿수 : $20\times4=80$(개)

이를 모두 더하면 $9+180+2700+80=2969$ 이다.

따라서 n 의 최솟값은 $2969+3=2972$이다.

102. 정답 192

원 $x^2+y^2-6nx-8ny=0$, 즉

$(x-3n)^2+(y-4n)^2=25n^2$은 중심이 $(3n,\ 4n)$이고, 반지름의 길이가 $5n$인 원이다.

점 P_n을 지나는 현 중에서 길이가 가장 긴 현은 지름이므로 그 길이는 $10n$이고, 개수는 1개다.

또, 점 P_n을 지나는 현 중에서 길이가 가장 짧은 현은 P_n과 원의 중심을 지나는 직선에 수직인 현이므로 그 길이는 $6n$이고, 개수는 1개다. 한편, 점 P_n을 지나면서 그 길이가 $6n+1,\ 6n+2,\ 6n+3,\ \cdots,\ 10n-1$인 현은 각각 2개씩 있으므로

$a_n=1+2(4n-1)+1=8n$

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}8k=8\cdot\frac{10\cdot11}{2}=440$$

103. 답 ②

첫 번째 시행 후 남은 수는

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, ⋯

즉, $2n+1$ $(n=0,\ 1,\ 2,3,\ \cdots)$의 꼴의 수가 남아 있다.

이 수는 $4n+1,\ 4n+3$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$의 꼴이므로 두 번째 시행 후 남은 수는 $4n+3$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$의 꼴이다.

이 수는 $8n+3,\ 8n+7$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$로 나타낼 수 있다.

세 번째 시행 후 남은 수는 $8n+3$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$의 꼴이므로 이 수는 $16n+3,\ 16n+11$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$로 나타낼 수 있다.

네 번째 시행 후 남은 수는 $16n+11$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$의 꼴이므로 이 수는 $32n+11,\ 32n+27$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$로 나타낼 수 있다.

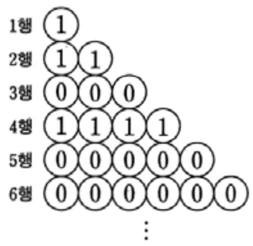
다섯 번째 시행 후 남은 수는 $32n+11$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$의 꼴이므로 이 수는 $64n+11,\ 64n+43$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 나타낼 수 있다.

따라서, 여섯 번째 시행 후 남은 수는

$64n+43$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$의 꼴이므로 10번째 수는

$64\times9+43=619$이다.

104. 정답 63



그림에서 주어진 이후에 숫자 1이 나열된 행은

$1+2+4=7$

$1+2+4+8=15$

$1+2+4+8+16=31$

$1+2+4+8+16+32=63$

⋯

에서 8행, 16행, 32행, 64행⋯이다.

따라서 32행까지 나열된 원 안에 써 넣은 모든 수의 합은

$1+2+4+8+16+32=63$

105. 정답 ④

[출제 의도] 수열의 규칙성을 파악할 수 있는가를 묻는 문제이다.

호의 길이를 수열로 나타내면

수열 $\{l_n\}$: $\dfrac{\pi}{2},\ \pi,\ \dfrac{3\pi}{2},\ 2\pi,\cdots$

수열 $\{l_n\}$은 공차가 $\dfrac{\pi}{2}$, 첫째항이 $\dfrac{\pi}{2}$인 등차수열을 이룬다.

$$\sum_{k=1}^{n}l_k=\frac{n\left\{\pi+(n-1)\dfrac{\pi}{2}\right\}}{2}=189\pi$$

$\therefore n=27$이므로 A_{27}의 좌표는 $(14,\ 0)$이다.

$\therefore a+50=64$

106. ③

$y=x^2$과 $y=nx$의 교점은 $(0,\ 0)$, $(n,\ n^2)$이므로

$a_n=(n+2n+3n+\cdots+n^2)-(1^2+2^2+\cdots+n^2)$

$$=\frac{n(n+1)}{2}n-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$=\frac{n(n+1)}{6}\{3n-(2n+1)\}=\frac{(n-1)n(n+1)}{6}$$

$$\therefore \sum_{k=2}^{10}\frac{1}{a_k}=\sum_{k=2}^{10}\frac{6}{(k-1)k(k+1)}$$

$$=\sum_{k=2}^{10}3\left\{\frac{1}{(k-1)k}-\frac{1}{k(k+1)}\right\}$$

$$=3\left\{\left(\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{2\cdot3}\right)+\left(\frac{1}{2\cdot3}-\frac{1}{3\cdot4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{9\cdot10}-\frac{1}{10\cdot11}\right)\right\}$$

$$=3\left(\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{10\cdot11}\right)=\frac{81}{55}$$

107. 답 ⑤

[출제의도] 계차수열을 이용하여 수열의 일반항을 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.

T_n의 면의 개수를 a_n, 꼭짓점의 개수를 b_n이라 하면,

$b_1=4,\ b_{n+1}=3b_n$에서 $b_n=4\cdot3^{n-1}$

$a_1=4,\ a_{n+1}=a_n+b_n=a_n+4\cdot3^{n-1}$

$\therefore\ a_6=4+\sum_{k=1}^{5}4\cdot3^{k-1}=488$

108. 정답 ⑤

[출제의도] 수열을 이용하여 점의 좌표를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

주어진 규칙에 따라 점 A_n을 정하면

$n=4k-2\,(k=2,\ 3,\ \cdots)$일 때, 점 A_n은 제1사분면에 있다.

$\mathrm{A}_6(3,\ 2),\ \mathrm{A}_{10}(5,\ 4),\ \mathrm{A}_{14}(7,\ 6),\ \cdots,\ \mathrm{A}_{4k-2}(2k-1,\ 2k-2)$

따라서 $\mathrm{A}_{50}(25,\ 24)$이므로 $p+q=49$이다.

109. 정답 ④

[출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 일반항 추론하기

$\{a_n\}$: 1, 2, 4, 6, 9, $\cdots$ 이므로

$a_{2k-1}=k^2,\ \ a_{2k}=k(k+1)$ 이다.

$a_{n+1}-a_n=b_n$ 이라 하면

$\{b_n\}$: 1, 2, 2, 3, 3, 4,$\cdots$ 이므로

$b_n=15$ 인 n 은 28, 29 이다.

$\therefore\ 28+29=57$

110. 답 ②

[출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이해하고 식의 값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$a_{n+2}=3a_{n+1}-3\ \cdots$㉠, $a_{n+1}=3a_n-3\ \cdots$㉡

㉠$-$㉡ : $a_{n+2}-a_{n+1}=3(a_{n+1}-a_n)$

$a_2-a_1=1$ 에서 $a_{n+1}-a_n=3^{n-1}$

$\therefore a_6-a_5=81$

111. 정답 ⑤

말을 6칸 움직이면 제자리로 다시 돌아오므로 $6\times k$칸 움직이면 제자리로 돌아온다. (k는 자연수)

1회에 말이 움직인 칸 수 :1→위치를 변화시킨 칸 수 :1

2회에 말이 움직인 칸 수 :$2\times2=4$→위치를 변화시킨 칸 수 :4

3회에 말이 움직인 칸 수 :$3\times3=9=6+3$→위치를 변화시킨 칸 수 :3

4회에 말이 움직인 칸 수 :$4\times4=16=2\times6+4$→위치를 변화시킨 칸 수 :1

5회에 말이 움직인 칸 수 :$5\times5=25=4\times6+1$→위치를 변화시킨 칸 수 :1

6회에 말이 움직인 칸 수 :$6\times6=36=6\times6$→위치를 변화시킨 칸 수 :0

…

$6n-5,\ 6n-4,\ 6n-3,\ 6n-2, 6n-1,\ 6n$($n$은 자연수)회에 위치를 변화시킨 칸 수는 각각 1, 4, 3, 4, 1, 0이다.

따라서 $100=6\times16+4$

$16\times(1+4+3+4+1+0)+(1+4+3+4)+1$

$=221=6\times36+5$

이므로 말이 멈춘 위치는 5이다.

112. 답 ⑤

말이 n번째까지는 $2\cdot\frac{n(n+1)}{2}=n^2+n$ 칸 움직였으므로 말의 위치는 다음과 같다.

횟수	n의 일의 자리의 수	n^2의 일의 자리의 수	n^2+n의 일의 자리의 수	말의 위치
1	1	1	2	2
2	2	4	6	6
3	3	9	2	2
4	4	6	0	10
5	5	5	0	10
6	6	6	2	2
7	7	9	6	6
8	8	4	2	2
9	9	1	0	10
10	0	0	0	10

따라서, 5개씩 반복되므로 2010번째 시행 후 말이 놓인 위치에 적힌 숫자는 10이다.

113. 정답 ②

[출제의도] 수열의 성질을 이용하여 부등식을 증명할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)(1\cdot2a_1)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)(3\cdot4a_2)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)(5\cdot6a_3)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)\{(2n-1)\cdot2na_n\}$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)(1\cdot2a_1)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)(1\cdot2a_1+3\cdot4a_2)$$

$$+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)(1\cdot 2a_1+3\cdot 4a_2+5\cdot 6a_3)+\cdots$$
$$+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)\{1\cdot 2a_1+3\cdot 4a_2+\cdots+(2n-1)\cdot 2na_n\}$$
$$\geq\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)$$
$$+3\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots+n\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)$$
$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}$$
$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}$$
$$-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$$

(가) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$ (나) $n\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n}\right)$

(다) $2\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{6}+\cdots+\dfrac{1}{2n}\right)$

114. 정답 ①

$[\alpha]=j(\alpha>0)$라고 하면 $j\leq\alpha<j+1$이고

$f(x)=x^2-2x-k$에서 $f(\alpha)=0$이므로

$f(j)\leq 0,\ f(j+1)>0$

즉, $j^2-2j-k\leq 0,\ (j+1)^2-2(j+1)-k>0$

$\therefore\ \boxed{j^2-2j}\leq k<j^2-1$

이제 $a_k=j$를 만족하는 자연수 $k(1\leq k\leq n^2)$의 개수를 구해 보자.

(ⅰ) $j=1$일 때 $a_k=1$이므로 $[\alpha]=1$을 만족하는 자연수 k는 존재하지 않는다.

(ⅱ) $j=2$일 때 $a_k=2$이므로 $[\alpha]=2$인 양의 정수 k는 1, 2로 k의 개수는 2이다.

(ⅲ) $3\leq j<n+1$일 때 $a_k=j$이므로 $[\alpha]=j$인 양의 정수 k의 개수는 $j^2-1-(\boxed{j^2-2j})=2j-1$이다.

(ⅳ) $j=n+1$일 때 $a_k=n+1$이므로 $[\alpha]=n+1$인 양의 정수 k는 $n^2-1,\ n^2$으로 k의 개수는 2이다.

그러므로 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n^2항까지의 합은

$$2\times 2+\sum_{j=3}^{n}\boxed{j(2j-1)}+\boxed{(n+1)\times 2}$$
$$=4+2\times\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-10-\frac{1}{2}n(n+1)+3+2n+2$$
$$=\frac{1}{6}(4n^3+3n^2+11n-6)$$

115. 답 ③

산술평균과 기하평균의 관계에서

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^2\geq n\cdot 1=\boxed{n}$$
$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^2=\left(\frac{n-1+2}{2}\right)^2\geq(n-1)\cdot 2$$
$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^2=\left(\frac{n-2+3}{2}\right)^2\geq(n-2)\cdot 3$$
$$\vdots$$
$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^2=\left(\frac{1+n}{2}\right)^2\geq 1\cdot n$$

위의 식을 각 변끼리 모두 곱하면

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^{2n}\geq\boxed{(n!)^2}$$

따라서

$$(n+1)^n(2n+1)^n=(n+1)^n\left(\frac{4n+2}{2}\right)^n\geq(n+1)^n\left(\boxed{\frac{3n+3}{2}}\right)^n$$
$$=2^n\left(\frac{n+1}{2}\right)^n\cdot 3^n\left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$
$$=6^n\left(\frac{n+1}{2}\right)^{2n}\geq 6^n(n!)^2$$

1. 정답 ①

$\dfrac{1}{a_n}=b_n$이라 하면, $\{b_n\}$은 공차가 $\dfrac{1}{2}$인 등차수열이다.

$b_1=1$이므로 $b_n=1+\dfrac{1}{2}(n-1)=\dfrac{n+1}{2}$이다.

따라서 $a_n=\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{2}{n+1}$이므로 $a_{20}=\dfrac{2}{21}$

2. 정답 ②

조건 (나)에서 $\log_3(a_{n+2}\cdot a_n)=2\log_3 a_{n+1}$이므로

$a_{n+2}\cdot a_n={a_{n+1}}^2$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이다.

이때, 수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하면 조건 (가)에 의해

$a_1>0,\ r>0$이고, $a_n=a_1r^{n-1}$이다.

조건 (다)에서 $\log_3 a_{n+2}-\log_3 a_n=\log_3(a_1r)$이므로

$r^2=a_1r \quad \therefore r=a_1$

$\therefore a_n=r^n$

그런데 $a_1a_2=r^{1+2}=r^3=2$이므로 $r=2^{\frac{1}{3}}$

$\therefore a_{15}=r^{15}=\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^{15}=2^5=32$

3. 답 ①

수열 $\{a_n\}$은 등차수열이므로 공차를 d라 하면

$d=a_3-a_2=3$

$a_1=a_2-d=-4$

따라서 첫째항부터 제 10항까지의 합을 S_{10}이라고 하면

$$S_{10}=\frac{10(-8+9\times 3)}{2}=95$$

4. 정답 7

[출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이해하여 문제해결하기

$a_{n+1}=a_n^{\ 5}$ 의 양변에 5 를 밑으로 하는 로그를 취하면

$\log_5 a_{n+1}=5\log_5 a_n$ 이다. 이 때, $\log_5 a_n = b_n$ 이라 하면

$b_{n+1}=5b_n$ 이므로 $b_n = b_1 \cdot 5^{n-1}=5^{n-1}$ 이다.

그러므로 $\log_5 a_{10}=b_{10}=5^9$ 이므로

$\log 5^9 = 9(1-\log 2) = 9\times 0.6990 = 6.2910$ 이다.

따라서 $\log 5^9$ 의 지표가 6 이므로 $m=7$ 이다.

5. 답 331

$a_1=1,\ a_2=a_1+6,\ a_3=a_2+2\cdot 6,\ \cdots,\ a_{n+1}=a_n+6n$이므로

$$a_{11}=a_1+\sum_{k=1}^{10}6k=1+6\cdot\frac{10\cdot 11}{2}=331$$

6. 정답 ②

$a_1=2$이고, $a_{n+1}=a_n+(a_n-1)=2a_n-1$이므로

$a_{n+1}-1=2(a_n-1)$

즉, 수열 $\{a_n-1\}$은 첫째항이 $a_1-1=1$이고 공비가 2인 등비수열이므로

$a_n-1=2^{n-1}$ $\qquad \therefore a_n=2^{n-1}+1$

$b_1=2$이고, $b_{n+1}=b_n+(2b_n-2)=3b_n-2$이므로

$b_{n+1}-1=3(b_n-1)$

즉, 수열 $\{b_n-1\}$은 첫째항이 $b_1-1=1$이고 공비가 3인 등비수열이므로

$b_n-1=3^{n-1}$ $\qquad \therefore b_n=3^{n-1}+1$

$\therefore b_9-a_9=3^8-2^8=(3^4-2^4)(3^4+2^4)$

$=65\cdot 97=6305$

7. 정답 ④

n번째 코스의 길이를 a_n(㎞)이라 하면

$a_1=a,\ a_{n+1}-a_n=n+1\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 9)$

$$\therefore\ a_n=a+\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)=a+\frac{(n-1)n}{2}+n-1$$

$$\sum_{n=1}^{10}a_n=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{10}(n^2+n+2a-2)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{10\cdot 11\cdot 12}{6}+\frac{10\cdot 11}{2}\right)+10(a-1)$$

$$=10a+210=270$$

$\therefore\ a=6$

$$\therefore\ a_{10}=6+\frac{9\cdot 10}{2}+9=60(\text{㎞})$$

8. 답 ④

$A_{n+1}-B=2\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}(A_n-B)$로 놓으면

$$A_{n+1}=2\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}A_n-\left\{2\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}-E\right\}B$$

$$=2\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}A_n-\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}B$$

에서

$$\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}B=-\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$$

$$B=-\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\-1&-1\end{pmatrix}$$

$$A_{n+1}+\begin{pmatrix}-1&-2\\1&1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\left\{A_n+\begin{pmatrix}-1&-2\\1&1\end{pmatrix}\right\}$$

이므로

$$A_n+\begin{pmatrix}-1&-2\\1&1\end{pmatrix}=2^{n-1}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^{n-1}\left\{A_1+\begin{pmatrix}-1&-2\\1&1\end{pmatrix}\right\}$$

$$=2^{n-1}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^{n-1}\begin{pmatrix}0&-2\\1&2\end{pmatrix}$$

$$=2^{n-1}\begin{pmatrix}1&n-1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-2\\1&2\end{pmatrix}=2^{n-1}\begin{pmatrix}n-1&2n-4\\1&2\end{pmatrix}$$

$$\therefore A_n=2^{n-1}\begin{pmatrix}n-1&2n-4\\1&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1&-2\\1&1\end{pmatrix}$$

$$\therefore A_{10}=2^9\begin{pmatrix}9&16\\1&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1&-2\\1&1\end{pmatrix}$$

따라서 행렬 A_{10}의 모든 성분의 합은

$2^9(9+16+1+2)-\{(-1)+(-2)+1+1\}$

$=2^9\cdot 28+1=14\cdot 2^{10}+1$

9. 답 22

$a_n=2^{\frac{2n-1}{3}}$ 이므로

$$a_1a_2a_3\cdots a_n=2^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{3}{3}}\cdot 2^{\frac{5}{3}}\cdot\ \cdots\ \cdot 2^{\frac{2n-1}{3}}$$

$$=2^{\frac{1}{3}\{1+3+5+\cdots+(2n-1)\}}=2^{\frac{n^2}{3}}$$

$\geq 8^{50}=2^{150}$

$2^{\frac{n^2}{3}}\geq 2^{150},\quad \dfrac{n^2}{3}\geq 150 \qquad\qquad \therefore\ n^2\geq 450$

$21^2=441,\quad 22^2=484$이므로 구하는 자연수 n의 최솟값은 22이다.

10. 답 ⑤

[해설]ㄱ. (참) $f(1)=1,\ f(1)+f(2)=2^2f(2)$

$\therefore\ f(2)=\dfrac{1}{3}$

$f(1)+f(2)+f(3)=3^2f(3)$

$8f(3)=f(1)+f(2)=1+\dfrac{1}{3}$

$\therefore\ f(3)=\dfrac{1}{6}$

ㄴ. (참) $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(n-1)=(n^2-1)f(n)$

$$f(n)=\frac{f(1)+f(2)+\cdots+f(n-1)}{n^2-1}$$

$$=\frac{(n-1)^2f(n-1)}{(n+1)(n-1)}=\frac{n-1}{n+1}f(n-1)\ \ (n\geq 2)$$

ㄷ. (참) ㄴ에서 $f(n)=\frac{n-1}{n+1}f(n-1)$이므로

$$f(n)=f(1)\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{4}\times\cdots\times\frac{n-2}{n}\times\frac{n-1}{n+1}$$

$$=\frac{2}{n(n+1)}f(1)=\frac{2}{n(n+1)}$$

11. 답 301

$n^2a_n=(n^2-1)a_{n-1}=(n-1)(n+1)a_{n-1}$이므로

$a_n=\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}a_{n-1}\quad(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$

$n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$ 를 차례대로 대입하면

$a_2=\frac{1\cdot3}{2^2}a_1$

$a_3=\frac{2\cdot4}{3^2}a_2$

$a_4=\frac{3\cdot5}{4^2}a_3$

$\vdots$

$a_n=\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}a_{n-1}\quad(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$

각 식의 좌변은 좌변끼리, 우변은 우변끼리 곱하면

$$a_n=\frac{(1\cdot3)(2\cdot4)(3\cdot5)\cdots(n-2)n(n-1)(n+1)}{(2\cdot2)(3\cdot3)(4\cdot4)\cdots(n\cdot n)}a_1$$

여기서 $a_1=1$이므로 $a_n=\frac{n+1}{2n}$

$\therefore\ a_{100}=\frac{101}{200}$

$\therefore\ p+q=200+101=301$

12. 답 ②

$3(a_1+a_2+a_3+\ \cdots\ +a_n)=(n+2)a_n$ ……㉠

이므로

$3(a_1+a_2+a_3+\ \cdots\ +a_{n+1})=\boxed{(n+3)}\,a_{n+1}$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $na_{n+1}=(n+2)\,a_n$

$$\frac{a_{n+1}}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n(n+1)}\,a_n$$

즉, $\frac{a_n}{n(n+1)}$이 일정한 값을 가지므로

$\frac{a_n}{n(n+1)}=\frac{a_1}{2}=\frac{1}{2}\qquad\therefore\ a_n=\frac{1}{2}n(n+1)$

13. 답 40

수족관의 물을 n번째 교체한 수의 수족관의 물의 양을 $a_n$cm³라 하면

$a_{n+1}=\frac{19}{20}a_n+3000\,(n=1,2,3,\cdots)$

$\therefore\ a_{n+1}-60000=\frac{19}{20}(a_n-60000)$

수열 $\{a_n-60000\}$은 첫째항이 $a_1-60000$, 공비가 $\frac{19}{20}$인 등비수열이다.

따라서, 수열 $\{a_n-60000\}$이 9에 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}a_n=60000$

한편, 수족관의 가로, 세로의 길이가 각각 50㎝, 30㎝이므로

$1500\times h\geq60000$에서 $h\geq40$

따라서 h의 최솟값은 40이다.

14. 답 15

n번째 참가하여 적립되는 점수를 a_n이라 하면 다음이 성립한다.

$a_1=10,\ a_{n+1}=a_n+2n\ (n=1,\ 2,\ 3,\cdots)$

$a_{n+1}-a_n=2n$ 이므로 수열 $\{a_n\}$의 계차수열을 $\{b_n\}$이라 하면 $b_n=2n$이다.

$$\therefore a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=10+2\frac{n(n-1)}{2}=n(n-1)+10$$

$a_n>200$ 에서 $n(n-1)>190$

따라서 $n=14$일 때 $14\times13=182$이고, $n=15$ 일 때 $15\times14=210$ 이므로 자연수 n의 최솟값은 15이다.

15. 답 10

$a_{n+1}=3a_n+1$에서

$a_{n+1}+\frac{1}{2}=3\left(a_n+\frac{1}{2}\right)$

즉, 수열 $\left\{a_n+\frac{1}{2}\right\}$은 첫째항이 $a_1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$, 공비가 3인 등비수열이므로

$a_n+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\cdot3^{n-1}$

$\therefore\ a_n=\frac{3}{2}\cdot3^{n-1}-\frac{1}{2}=\frac{3^n-1}{2}$

위 식에 n대신 차례로 1, 2, 3, …을 대입하면

$a_1=1,\ a_2=4,\ a_3=13,\ a_4=40,\ a_5=121,\ \cdots$이므로 5로 나눈 나머지는

1, 4, 3, 0, 1, 4, 3, 0, …으로 1, 4, 3, 0이 반복된다.

즉, 5의 배수가 되는 항은 $a_4,\ a_8,\ a_{12},\ \cdots$이므로 $b_n=a_{4n}$

$\therefore\ b_5=a_{20}=\frac{3^{20}-1}{2}$

따라서 $\log\frac{3^{20}}{2}=20\log3-\log2=20\times0.48-0.3=9.3$

이므로 b_5는 10자릿수이다.

16. 정답 49

영희가 다이어트를 시작 후 n주째 금요일 저녁에 측정한 몸무게를 a_n kg이라 하자. n번째 주말에 1 kg이 증가하고 다시 다이어트를 시작하여 $n+1$주째의 금요일 저녁에 특정된 몸무게는 $0.98(a_n+1)$ kg이 되므로 점화식

$a_{n+1}=0.98(a_n+1)$을 만족한다.

$a_{n+1}-49=0.98(a_n-49)$

$a_n - 49 = (a_1 - 49)(0.98)^{n-1}$

$a_n = (a_1 - 49)(0.98)^{n-1} + 49$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 49$ $\qquad\qquad \therefore x = 49$

17. 답 ③

3월부터 보유하게 되는 화분의 개수를 차례로 나열하면 다음과 같다.

3월 1일 분갈이 후 : 8

4월 1일 분갈이 후 : $8\times 2 = 16$

5월 1일 분갈이 후 : $(16-10)\times 2 = 12$

6월 1일 분갈이 후 : $12\times 2 = 24 = a_1$

7월 1일 분갈이 후 : $(24-10)\times 2 = 28 = a_2$

8월 1일 분갈이 후 : $(28-10)\times 2 = 36 = a_3$

$\vdots$

5월 1일부터 n개월 후에 분갈이하여 보유하게 되는 화분의 개수를 a_n이라 하면

$a_1 = 24,\ a_{n+1} = 2(a_n - 10)$

이때, $a_{n+1} - 20 = 2(a_n - 20)$에서

$a_n - 20 = (a_1 - 20)\cdot 2^{n-1} = 4\cdot 2^{n-1}$

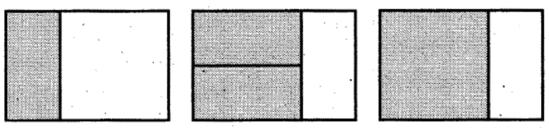
$\therefore\ a_n = 2^{n+1} + 20$

$a_6 = 2^7 + 20 = 148,\ a_7 = 2^8 + 20 = 276$이므로 $n=7$이고 3월 1일부터 $7+2=9$개월 후에 처음으로 150개 이상의 화분을 보유하게 된다.

18. 정답 43

크기가 $2\times n$인 직사각형 모양의 도로를 빈틈없이 채우는 방법의 수를 a_n으로 놓으면 $a_1 = 1, a_2 = 3$이다.

직사각형모양의 도로를 두 종류의 블록 중 하나로 채우면 다음과 같이 세 가지 모양이 나타난다.



따라서 크기가 $2\times(n+2)$인 직사각형 모양의 도로를 두 종류의 블록으로 모두 채웠다면 그 방법의 수 a_{n+2}는 a_{n+1}과 a_n으로 나타낼 수 있다.

즉, $a_{n+2} = a_{n+1} + 2\times a_n$이 성립한다.

점화관계를 이용하여 $a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6$를 구하면

$a_3 = a_2 + 2a_1 = 5,\ a_4 = 11,\ a_5 = 21,\ a_6 = 43$

19. 정답 ①

주어진 규칙에 따라 각 항의 값을 구하면

$a_1 = 6,\ a_2 = 15 = 3a_1 - 3$

$a_3 = 3a_2 - 3$

$\cdots$

이므로 $a_{n+1} = 3a_n - 3$이 성립함을 알 수 있다.

$a_{n+1} - \dfrac{3}{2} = 3\left(a_n - \dfrac{3}{2}\right)$에서

$a_n - \dfrac{3}{2} = \left(a_1 - \dfrac{3}{2}\right)\cdot 3^{n-1}$

$\therefore a_n = \dfrac{3}{2}(3^n + 1)$

따라서 $a_5 = \dfrac{3}{2}(3^5 + 1) = 366$이다.

20. 정답 ④ 수학 내적 문제 해결능력 – 수열

$x_1 = 0$이고 $x_2 + x_3 = x_4 + x_5 = \cdots = x_{14} + x_{15} = 0$이므로

$\sum\limits_{k=1}^{15} x_k = 0$

k가 짝수일 때, $\mathrm{P}_k(x_k,\ 2{x_k}^2)$과 P_{k+1}은 y축에 대하여 대칭이므로 $(-x_k,\ 2{x_k}^2)$이다. 그러므로 k가 짝수일 때, $y_k = y_{k+1}$이다.

직선 $y - 2{x_k}^2 = 2(x + x_k)$와 $y = 2x^2$의 교점은

$2x^2 - 2{x_k}^2 = 2(x + x_k)$와 $y = 2x^2$의 교점은

$2x^2 - 2{x_k}^2 = 2(x + x_k)$에서 $(x + x_k)(x - x_k - 1) = 0$이므로

P_{k+2}의 x좌표 x_{k+2}는 $x_k + 1$이다. 점 $\mathrm{P}_1(0,\ 0)$을 지나고 기울기가 2인 직선은 $y = 2x$이므로 $2x^2 = 2x$에서 $x=0$ 또는 $x=1$이다.

$\therefore \mathrm{P}_2(1,\ 2)$

$x_2 = 1$이므로 $x_4 = 2,\ x_6 = 3,\ \cdots$

그러므로 k가 짝수이면 $x_k = \dfrac{k}{2}$

$\sum\limits_{k=1}^{15} y_k = \sum\limits_{k=1}^{15} 2{x_k}^2 = 4\sum\limits_{k=1}^{7} {x_{2k}}^2 = 4\sum\limits_{k=1}^{7} k^2 = \dfrac{4\times 7\times 8\times 15}{6} = 560$

$\therefore \sum\limits_{k=1}^{15} (x_k + y_k) = 560$

21. 답 ③

n번째 만들어진 정사각형이 $x+y=1$과 만나는 점의 좌표를 $(x_n,\ y_n)$이라고 하면 $x_n + y_n = 1$이고,

$x_n = na_n,\ y_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$이므로

$x_n + y_n = na_n + (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) = 1\ \cdots$ ㉠

$x_{n+1} + y_{n+1} = (n+1)a_{n+1} + (a_1 + \cdots + a_{n+1}) = 1\ \cdots$ ㉡

㉡−㉠에서 $(n+2)a_{n+1} - na_n = 0$

$\therefore a_{n+1} = \dfrac{n}{n+2}a_n\ \cdots$ ㉢

㉢에서 $a_2 = \dfrac{1}{3}a_1,\ a_3 = \dfrac{2}{4}a_2,\ a_4 = \dfrac{3}{5}a_3,\ \cdots,$

$a_n = \dfrac{n-1}{n+1}a_{n-1}$

$\therefore a_n = \dfrac{2}{n(n+1)}a_1$

$\therefore a_n = \dfrac{1}{n(n+1)}\ \left(\because a_1 = \dfrac{1}{2}\right)$

$\therefore \sum\limits_{k=1}^{20} a_k = \sum\limits_{k=1}^{20} \dfrac{1}{k(k+1)} = \sum\limits_{k=1}^{20}\left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}\right)$

$=1-\dfrac{1}{21}=\dfrac{20}{21}$

22. 정답 101

$\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}=a_n$ 이라 하면 규칙 (다)에서

$a_n=\dfrac{n-1}{n+1}a_{n-1}$ ⋯ ㉠

㉠의 n대신 $2, 3, 4, \cdots, n$을 차례로 대입하면

$a_2=\dfrac{1}{3}a_1,\ a_3=\dfrac{2}{4}a_2,\ a_4=\dfrac{3}{5}a_3,\ \cdots,\ a_n=\dfrac{n-1}{n+1}a_{n-1}$

위의 식을 각 변끼리 곱하여 약분하면

$a_n=a_1\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{4}\times\dfrac{3}{5}\times\cdots\times\dfrac{n-2}{n}\times\dfrac{n-1}{n+1}=\dfrac{2}{n(n+1)}$

따라서 $S_n=\dfrac{1}{2}a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$ 이므로

$\displaystyle\sum_{k=1}^{50}S_k=\sum_{k=1}^{50}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{50}{51}$

$\therefore\ p+q=101$

23. 답 ③

[출제의도] 수학적귀납법으로 부등식의 증명을 할 수 있는가를 묻는 문제이다.

(가) : 2, (나) : $4(k+1)^2$, (다) : $2k+1$

24. 답 ⑤

$\dfrac{4!}{(2!)^2}=6$

$m\ge2$에 대하여 $(m+2)(2m+1)-2(m+1)^2=m>0$이므로

$\dfrac{(m+2)(2m+1)}{2(m+1)^2}>1$이다.

따라서

$\dfrac{4(m+1)}{m+2}<\dfrac{4(m+1)}{m+2}\cdot\dfrac{(m+2)(2m+1)}{2(m+1)^2}$

$=\boxed{\dfrac{(2m+1)(2m+2)}{(m+1)^2}}$

$\dfrac{4^m}{m+1}<\dfrac{(2m)!}{(m!)^2},\ \dfrac{4(m+1)}{m+2}<\dfrac{(2m+1)(2m+2)}{(m+1)^2}$

의 좌변, 우변을 각각 곱하면

(좌변)$=\dfrac{4^m}{m+1}\cdot\dfrac{4(m+1)}{m+2}=\dfrac{4^{m+1}}{m+2}$

(우변)$=\dfrac{(2m)!}{(m!)^2}\cdot\dfrac{(2m+1)(2m+2)}{(m+1)^2}=\dfrac{(2m+2)!}{\{(m+1)!\}^2}$

$\therefore\ \dfrac{4^{m+1}}{m+2}<\boxed{\dfrac{(2m+2)!}{\{(m+1)!\}^2}}$

25. 정답 55

$n=2$이면 $3\times3=9$이므로 $f(2)=1$

$n=2^2$이면 $3\times3=9,\ 9\times9=81$이므로 $f(2^2)=2$이다.

$n=2^k$일 때, $f(2^k)=k$라 하자.

$3^{2^k}\times3^{2^k}=3^{2^{k+1}}$이므로 $f(2^{k+1})=k+1$이다.

따라서, 수학적 귀납법에 의해서 $f(2^n)=n$이다.

$\displaystyle\therefore\ \sum_{k=1}^{10}f(2^k)=\sum_{k=1}^{10}k=55$

26. 답 ⑤

$b_{n+1}=\dfrac{a_1a_2\cdots a_{n+1}}{(n+1)!}$

$=\dfrac{a_1a_2\cdots a_n\times(n+1)+(n-1)!}{(n+1)!}$

$=\dfrac{a_1a_2\cdots a_n}{n!}+\dfrac{1}{n(n+1)}$

$\therefore$(가)$=f(n)=\dfrac{1}{n(n+1)}$

b_n을 구하면

$\displaystyle b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(k+1)}$

$\displaystyle=\frac{a_1}{1!}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{n}\right)=\frac{2n-1}{n}$

$\therefore$(나)$=g(n)=\dfrac{2n-1}{n}$

따라서

$f(13)\times g(7)=\dfrac{1}{13\cdot14}\times\dfrac{13}{7}=\dfrac{1}{98}$

27. 정답 ④

[출제의도] 수학적 귀납법을 이용하여 주어진 식 증명하기

(i) $n=2$일 때,

(좌변)=(우변)=$\boxed{a_1+2a_2}$

(ii) $n=i\ (i\ge2)$일 때, 주어진 등식이 성립함을 가정하면,

즉, $\displaystyle iS_i-\sum_{k=1}^{i-1}S_k=\sum_{k=1}^{i}ka_k$ 임을 가정할 때,

$\displaystyle(i+1)S_{i+1}-\sum_{k=1}^{i}S_k$

$\displaystyle=(i+1)S_{i+1}-\left(\sum_{k=1}^{i-1}S_k+S_i\right)$

$\displaystyle=(i+1)S_{i+1}-\left(\boxed{(i+1)S_i-\sum_{k=1}^{i}ka_k}\right)$

$\displaystyle=\sum_{k=1}^{i}ka_k+\boxed{(i+1)(S_{i+1}-S_i)}$

$\displaystyle=\sum_{k=1}^{i+1}ka_k$

28. 답 ④

자연수 $n\ (n\ge3)$에 대하여 $\displaystyle S_n=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{n}{(n-i)2^{i-1}}$이라 하자.

(1) $n=3$일 때, $S_3=3<4$이므로 성립한다.

(2) $n=k\ (k\ge3)$일 때, $S_k<4$가 성립한다고 가정하자.

$n=k+1$일 때,

$$S_{k+1}=\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{k+1}{k+1-i}\times\frac{1}{2^{i-1}}\right)$$

$$=\frac{k+1}{k}+\frac{k+1}{k-1}\times\frac{1}{2}+\frac{k+1}{k-2}\times\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{k+1}{2^{k-1}}$$

$$=\frac{k+1}{k}+\frac{1}{2}\left(\frac{k}{k-1}+\frac{k}{k-2}\times\frac{1}{2}+\cdots+\frac{k}{2^{k-2}}\right)$$

$$+\boxed{\frac{1}{2}}\times\left(\frac{k}{k-1}+\frac{k}{k-2}\times\frac{1}{2}+\cdots+\frac{k}{2^{k-2}}\right)$$

$$=1+\frac{1}{k}+\frac{1}{2}S_k+\frac{1}{2k}S_k$$

$$=1+\frac{1}{k}+\boxed{\frac{k+1}{2k}}\times S_k$$

그런데, $k\geq 3,\quad S_k<4$이므로

$S_{k+1}=1+\frac{1}{k}+\boxed{\frac{k+1}{2k}}\times S_k<4$이다.

그러므로 (1), (2)에 의하여 3 이상의 자연수 n에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

따라서, $f(x)=\frac{1}{2k}+\frac{k+1}{2k}=\frac{k+2}{2k}$이므로 $f(3)=\frac{5}{6}$이다.

29. 정답 ⑤

$n=k$일 때 성립한다고 가정하였기 때문에

$$(k-1)a_n+\sum_{m=1}^{k-1}ma_m=0$$

따라서 $0=ka_{k+1}+\sum_{m=1}^{k}ma_m$

$$=ka_{k+1}+\sum_{m=1}^{k-1}ma_m+ka_k$$

$$=ka_{k+1}+(\boxed{1-k})\times a_k+ka_k$$

이므로 $0=ka_{k+1}+a_k$

$$\therefore\ a_{k+1}=\boxed{-\frac{1}{k}}\times a_k=\frac{(-1)^k}{k!}\alpha$$

따라서 (가), (나)에 알맞은 식을 곱한

$$f(k)=(1-k)\times\left(-\frac{1}{k}\right)=\frac{k-1}{k}$$

$$\therefore\ f(10)=\frac{9}{10}$$

30. 정답 ②

$n=m+1$일 때,

$$\sum_{k=1}^{m+2}\frac{1}{k^2}=\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{k^2}+\boxed{\frac{1}{(m+2)^2}}<\frac{2m+1}{m+1}+\frac{1}{(m+2)^2}$$

한편,

$$\frac{2m+1}{m+1}+\frac{1}{(m+2)^2}-\boxed{\frac{2m+3}{m+2}}=\frac{\boxed{-1}}{(m+1)(m+2)^2}<0$$

31. 정답 ①

또한, $\frac{1}{a_{k+1}}-\frac{1}{a_k}=d,\ a_ka_{k+1}=\left(\frac{a_k-a_{k+1}}{d}\right)$

$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_1}+(n-1)d$이므로, $\frac{1}{d}(a_1-a_n)=\left[(n-1)a_1a_n\right]$

$$\sum_{i=1}^{k}a_ia_{i+1}=\sum_{i=1}^{k-1}a_ia_{i+1}+a_ka_{k+1}$$

$$=(k-1)a_1a_k+a_ka_{k+1}$$

$$=\frac{a_1-a_k}{d}+\frac{a_k-a_{k+1}}{d}$$

따라서, $n=k+1$일 때에도

$$=(\frac{a_1-a_{k+1}}{d})$$

$$=ka_1a_{k+1}$$

주어진 등식은 성립한다.

그러므로 주어진 등식은 2이상인 모든 자연수 n에 대하여 성립한다

32. 정답 ②

(Ⅱ) $n=k$일 때 성립한다고 가정하면 $(k+1)$개의 양수 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_k,\ a_{k+1}$에 대하여

(i) $(k+1)$개의 수가 모두 1인 경우 그 합은 $(k+1)$이다.

(ii) $(k+1)$개의 수 중 적어도 하나가 1이 아닌 경우 1보다 큰 수 중 하나를 a_i, 작은 수 중 하나를 a_j라 하고, 그 외의 수를

$b_m\ (m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ k-1)$이라 하면

$(a_i-1)(a_j-1)$ $\boxed{(가)<}$ 0

$(a_i+a_j)+b_1+b_2+\cdots b_{k-1}$ $\boxed{(나)>}$

$(a_ia_j+1)+b_1+b_2+\cdots+b_{k-1}$

한편 $(a_ia_j),\ b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_{k-1}$은 그 곱이 $\boxed{(다)1}$ 인 $\boxed{(라)k}$ 개의

양수이므로

$a_ia_j+b_1+b_2+\cdots+b_{k-1}\geq$ $\boxed{(마)k}$

따라서 (i), (ii)에 의하여 $a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}\geq k+1$이므로 $n=k+1$일 때도 성립한다.

33. 정답 ③

(i) $n=2$일 때,

(좌변)$=2+S_1=2+a_1=2+1=3$

(우변)$=2S_2=2(a_1+a_2)=2\left(1+\frac{1}{2}\right)=3$

(좌변)=(우변)=$\boxed{3}$ 이므로 주어진 등식은 성립한다.

(ii) $n=k(k\geq 2)$일 때 등식이 성립한다고 가정하면

$k+S_1+S_2+S_3+\cdots+S_{k-1}=kS_k$

이다. $n=k+1$일 때 성립함을 보이자.

$$\boxed{k+1}+S_k+S_1+S_2+S_3+\cdots+S_{k-1}$$

$$=1+S_k+k+S_1+S_2+S_3+\cdots+S_{k-1}$$

$$=1+S_k+kS_k$$

$$=(k+1)S_k+1$$

$$=(k+1)\left(S_k+\boxed{\frac{1}{k+1}}\right)$$

$= (k+1)\left(S_k + a_{k+1}\right)$

$= (k+1)S_{k+1}$

그러므로 $n=k+1$일 때도 성립한다.

따라서 2이상의 자연수 n에 대하여 주어진 등식은 성립한다.

34. 정답 ⑤

(i) $n=1$ 일 때, $f(1)=\boxed{27}$ 이므로 성립한다.

(ii) k가 자연수일 때, $f(k)$가 9의 배수라고 가정하면

$f(k+1)=\{3(k+1)+1\}7^{k+1}-1$

$=\{\boxed{21}\times(k+1)+7\}7^k-1$

$=\{(3k+1)+(18k+27)\}7^k-1$

$=\{(3k+1)7^k-1\}+\boxed{9(2k+3)}\times 7^k$

$=f(k)+9(2k+3)\times 7^k$

이므로 $f(k+1)$도 9의 배수이다.

따라서, 자연수 n에 대하여 $f(n)$은 9의 배수이다.

35. 정답 ④

(i) $n=1$일 때 $f(1)=4+3=\boxed{7}$이므로 $f(1)$은 7의 배수이다.

(ii) $n=k$일 때, $f(k)=2^{k+1}+3^{2k-1}$이 7의 배수라 가정하면 $n=k+1$일 때,

$f(k+1)=2^{k+2}+3^{2k+1}=2\cdot 2^{k+1}+3^2\cdot 3^{2k-1}$

$=2\cdot 2^{k+1}+(2+7)\cdot 3^{2k-1}$

$=2(2^{k+1}+3^{2k-1})+7\cdot 3^{2k-1}$

$=\boxed{2}f(k)+\boxed{7}\cdot 3^{2k-1}$

이므로 $f(k+1)$도 7의 배수이다.

따라서, 모든 자연수 n에 대하여 $2^{n+1}+3^{2n-1}$은 7의 배수이다.

따라서 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 모두 더하면 $7+2+7=16$

36. 정답 ②

$$\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{(2k-1)\cdot 2k}$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{(2k-1)\cdot 2k}+\frac{1}{\{2(m+1)-1\}\cdot 2(m+1)}$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{(2k-1)\cdot 2k}+\boxed{\frac{1}{(2m+1)\cdot 2(m+1)}}$$

$$=\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\frac{1}{m+3}+\cdots+\frac{1}{m+m}+\frac{1}{(2m+1)\cdot 2(m+1)}$$

$$=\frac{1}{m+2}+\frac{1}{m+3}+\cdots+\frac{1}{m+m}+\frac{1}{(2m+1)\cdot 2(m+1)}+\frac{1}{m+1}$$

$$=\frac{1}{m+2}+\frac{1}{m+3}+\cdots+\frac{1}{m+m}$$

$$+\frac{1}{2m+1}-\frac{1}{2(m+1)}+\frac{1}{m+1}$$

$$=\frac{1}{m+2}+\frac{1}{m+3}+\cdots+\frac{1}{m+m}=\frac{1}{2m+1}+\boxed{\frac{1}{2m+2}}$$

$$=\frac{1}{(m+1)+1}+\cdots+\frac{1}{(m+1)+(m-1)}$$

$$+\frac{1}{(m+1)+m}+\frac{1}{(m+1)+(m+1)}$$

$$=\sum_{k=1}^{m+1}\boxed{\frac{1}{(m+1)+k}}$$

그러므로 $n=m+1$일 때도 성립한다.

37. ③ 연역적 추론 능력(증명) - 수열

(i) $n=2$일 때 (좌변)$=\boxed{1}$,

(우변)$=2(\sqrt{2}-1)$이므로 부등식 (*)는 성립한다.

(ii) $n=k(k=2,3,4,\ldots)$일 때, 부등식 (*)가 성립한다고 가정하면

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k-1}}>2(\sqrt{k}-1)$$

양변에 $\dfrac{1}{\sqrt{k}}$을 더하면

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k-1}}+\frac{1}{\sqrt{k}}>2(\sqrt{k}-1)+\frac{1}{\sqrt{k}}$$

한편, $\dfrac{1}{\sqrt{k}}=\dfrac{2}{2\sqrt{k}}>\dfrac{2}{\sqrt{k}+\boxed{\sqrt{k+1}}}$ 이므로

$$2(\sqrt{k}-1)+\frac{1}{\sqrt{k}}>2(\sqrt{k}-1)+\frac{2}{\sqrt{k}+\boxed{\sqrt{k+1}}}$$

$$=2\left(\boxed{\sqrt{k+1}-1}\right)$$

그러므로 $n=k+1$일 때에도 부등식 (*)는 성립한다.

따라서 주어진 부등식은 2이상의 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

38. 정답 ④ 추론 능력(증명) - 수열

$(a-1)^2\{a^k+2a^{k-1}+3a^{k-2}+\cdots+(k-1)a^2+ka+k+1\}$

$=a(a-1)^2\{a^{k-1}+2a^{k-2}+3a^{k-3}+\cdots+(k-1)a+k\}$

$+\boxed{(k+1)}(a-1)^2$

$=a\{a^{k+1}-(k+1)a+\boxed{k}\}+(k+1)(a-1)^2$

$=a^{k+2}-(k+2)a+(k+1)$

따라서, (가), (나)에 알맞은 것은 각각 $k+1$, k이므로 두 식의 합은 $2k+1$이다.

39. 답 ②

(i) $n=1$일 때, (좌변)$=\displaystyle\sum_{m=1}^{1}\frac{1}{\sqrt{m}}=1$

(우변)$=2\sqrt{1}=2$ ∴성립

(ii) $n=k$일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{m=1}^{k+1}\frac{1}{\sqrt{m}}=\sum_{m=1}^{k}\frac{1}{\sqrt{m}}+\boxed{\frac{1}{\sqrt{k+1}}}$$

$$<2\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}=\frac{2\sqrt{\boxed{k^2+k}}+1}{\sqrt{k+1}}$$

$$<\frac{2\sqrt{\left(k+\boxed{\frac{1}{2}}\right)^2}+1}{\sqrt{k+1}}$$

$=\dfrac{2(k+1)}{\sqrt{k+1}}=2\sqrt{k+1}$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식이 성립한다.
따라서 (ⅰ), (ⅱ)에서 모든 자연수 n에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

40. 답 ⑤

(ⅱ) $n=k+1$ 일 때,

$\sum_{i=1}^{k+1} 6i^2\{(k+1)-i\}$

$=\boxed{\sum_{i=1}^{k} 6i^2\{(k+1)-i\}}+6(k+1)^2\{(k+1)-(k+1)\}$

$=6\sum_{i=1}^{k} i^2\{(k-i)+1\}$

$=6\sum_{i=1}^{k} i^2(k-i)+6\sum_{i=1}^{k} i^2$

$=\dfrac{1}{2}k^2(k^2-1)+\boxed{k(k+1)(2k+1)}$

$=\dfrac{1}{2}k(k+1)\{k(k-1)+2(2k+1)\}$

$=\dfrac{1}{2}k(k+1)(\boxed{k^2+3k+2})$

$=\dfrac{1}{2}k(k+1)(k+2)(k+1)$

$=\dfrac{1}{2}(k+1)^2(k^2+2k)$

$=\dfrac{1}{2}(k+1)^2\{(k+1)^2-1\}$

41. 답 ④

$n=\boxed{3}$일 때

$2^{2\cdot 3+1}-9\cdot 3^2+3\cdot 3-2=54$이므로 (*)은 54의 배수이다.

$2^{2(m+1)+1}-\{9(m+1)^2-3(m+1)+2\}$

$=\boxed{4}\cdot 2^{2m+1}-(\boxed{9m^2+15m+8})$

$=4(9m^2-3m+2+54k)-(9m^2+15m+8)$

$=27(m^2-m+8k)=27m(m-1)+216k$

42. 정답 ②

(i) $n=1$일 때 $H_2=1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$이므로 (*)이 성립한다.

(ii) $n=k$(k는 자연수)일 때 (*)이 성립한다고 가정하면

$H_{2^n}\geq 1+\dfrac{n}{2}$ 이므로

$H_{2^{k+1}}=H_{2^k}+\dfrac{1}{2^k+1}+\dfrac{1}{2^k+2}+\dfrac{1}{2^k+3}+\cdots+\dfrac{1}{2^k+\boxed{2^k}}$

$\geq 1+\dfrac{k}{2}+\dfrac{1}{2^k+1}+\dfrac{1}{2^k+2}+\dfrac{1}{2^k+3}+\cdots+\dfrac{1}{2^k+2^k}$

$\geq 1+\dfrac{k}{2}+\dfrac{1}{2^k+1}+\dfrac{1}{2^k+2}+\dfrac{1}{2^k+3}+\cdots+\dfrac{1}{2^{k+1}}$

$=1+\dfrac{k}{2}+2^k\times\dfrac{1}{2^{k+1}}=1+\dfrac{k}{2}+\dfrac{1}{2}$

$=1+\boxed{\dfrac{k+1}{2}}$

따라서, $n=k+1$일 때도 (*)이 성립한다.
따라서, (가), (나)에 알맞은 식의 합은

$f(k)=2^k+\dfrac{k+1}{2}\qquad \therefore f(3)=2^3+\dfrac{3+1}{2}=10$

43. 정답 ③

(ⅰ) $a_1=1\leq\dfrac{3}{1}$, $a_2=\dfrac{1}{2}\cdot 1+\dfrac{1}{2}=\boxed{1}\leq\dfrac{3}{2}$,

$a_3=\dfrac{1}{2}\cdot 1+\dfrac{1}{3}=\boxed{\dfrac{5}{6}}\leq\dfrac{3}{3}$ 이다.

(ⅱ) $n=k\,(k\geq 3)$일 때, $a_k\leq\dfrac{3}{k}$이 성립한다고 가정하면

$n=k+1$일 때

$\dfrac{3}{k+1}-a_{k+1}=\dfrac{3}{k+1}-\dfrac{1}{2}a_k-\dfrac{1}{k+1}$

$\geq\boxed{\dfrac{2}{k+1}}-\dfrac{3}{2k}$

$=\dfrac{k-3}{2k(k+1)}$

≥ 0

이므로 $n=k+1$일 때도 성립한다.

따라서 모든 자연수 n에 대하여 $a_n\leq\dfrac{3}{n}$이 성립한다.

위의 증명으로부터 $f(k)=1+\dfrac{5}{6}+\dfrac{2}{k+1}$ 이므로

$f(5)=1+\dfrac{5}{6}+\dfrac{2}{6}=\dfrac{13}{6}$

44. 답 ② 추론 능력(증명) - 수열

$n=1$일 때 (*)의 좌변은 $\boxed{1}$이고, 우변은 1이므로 (*)이 성립한다.

$(a_1+a_2+\cdots+a_{k+1})\left(\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_{k+1}}\right)$

$=\left(\sum_{i=1}^{k}a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{k}\dfrac{1}{a_i}\right)+\boxed{1}+a_{k+1}\sum_{i=1}^{k}\dfrac{1}{a_i}+\dfrac{1}{a_{k+1}}\sum_{i=1}^{k}a_i$

$=\left(\sum_{i=1}^{k}a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{k}\dfrac{1}{a_i}\right)+1+\sum_{i=1}^{k}\dfrac{a_{k+1}}{a_i}+\sum_{i=1}^{k}\dfrac{a_i}{a_{k+1}}$

$=\left(\sum_{i=1}^{k}a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{k}\dfrac{1}{a_i}\right)+1+\sum_{i=1}^{k}\left(\dfrac{a_{k+1}}{a_i}+\dfrac{a_i}{a_{k+1}}\right)$

$\geq\left(\sum_{i=1}^{k}a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{k}\dfrac{1}{a_i}\right)+1+\sum_{i=1}^{k}2\geq k^2+1+\boxed{2k}$

$=(k+1)^2$

$\therefore f(k)=2k+2\qquad \therefore f(3)=8$

45. 정답 ⑤

(ⅰ) $n=1$일 때, $S_1=2\times 1=\boxed{2}$, $T_1=1+1=2$이므로 등식 (*)이 성립한다.

(ii) $n=k(k\geq 1)$일 때, 주어진 등식 (*)이 성립한다고 가정하고, $n=k+1$일 때, 등식 (*)이 성립함을 보이자.

$$S_{k+1}=2^{k+1}\cdot 1\cdot 3\cdots(2k+1)$$
$$=2^k\cdot 1\cdot 3\cdots(2k-1)(4k+2)$$
$$=S_k\times(\boxed{4k+2})$$
$$T_{k+1}=(k+2)(k+3)(k+4)\cdots(2k+1)(2k+2)$$
$$=(k+1)(k+2)(k+3)\cdots(2k)\times(\boxed{4k+2})$$
$$\therefore\ \frac{S_{k+1}}{T_{k+1}}=\boxed{1}$$

46. **정답** ③

(1) $n=1$일 때, (좌변) $=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}=\boxed{\frac{1}{2}}=$(우변)

이므로 등식 (＊)이 성립한다.

(2) $n=m$일 때, (＊)이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m+1}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)+\left\{\boxed{\frac{1}{2m+1}-\frac{1}{2(m+1)}}\right\}$$
$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{m+k}+\left\{\frac{1}{2m+1}-\frac{1}{2(m+1)}\right\}$$
$$=\frac{1}{m+1}+\sum_{k=1}^{m-1}\boxed{\frac{1}{m+k+1}}+\frac{1}{m+(m+1)}-\frac{1}{2(m+1)}$$

47. **답** ①

$n=k+1$일 때, (＊)가 성립함을 보이자.

$$\frac{k-1}{2(k+1)}+\frac{1}{(k+1)^2}<S_k+\frac{1}{(k+1)^2}<\frac{k-1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}$$

여기서

$$\frac{k-1}{2(k+1)}+\frac{1}{(k+1)^2}-\boxed{\frac{k}{2(k+2)}}=\frac{1}{(k+1)^2(k+2)}>0$$

이므로

$$\frac{k}{2(k+2)}<S_k+\frac{1}{(k+1)^2}=S_{k+1}\qquad\cdots\cdots㉠$$

또한,

$$\frac{k-1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}=\frac{\boxed{k^3+k^2-1}}{k(k+1)^2}<\frac{k^3+k^2}{k(k+1)^2}=\frac{k}{k+1}$$

이므로

$$S_{k+1}=S_k+\frac{1}{(k+1)^2}<\frac{k}{k+1}\qquad\cdots\cdots㉡$$

㉠, ㉡에서 $n=k+1$일 때도 (*)가 성립한다.

따라서 $f(k)=\frac{k}{2(k+2)}$, $g(k)=k^3+k^2-1$이므로

$f(3)=\frac{3}{2\cdot 5}=\frac{3}{10}$, $g(3)=27+9-1=35$

$\therefore\ 2f(3)g(3)=2\times\frac{3}{10}\times 35=21$

48. 답 ④

(가) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$

(나) $\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}$

(다) $\frac{1}{4k}-\frac{1}{4(k+1)}$

$$f(k)=\frac{7}{12}+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}+\frac{1}{4k}-\frac{1}{4(k+1)}$$
$$\therefore f(2)=\frac{7}{12}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{8}-\frac{1}{12}=\frac{79}{120}$$

49. 정답 29

[출제의도] 순서도의 뜻을 알고 문제해결하기

$n=1$일 때, $S=20+17>0$

$n=2$일 때, $S=20+17+14>0$

$n=3$일 때, $S=20+17+14+11>0$

⋮

$n=13$일 때, $S=20+17+\cdots+(-19)=7>0$

$n=14$일 때, $S=20+17+\cdots+(-22)=-15<0$

이므로 $|S|+n=15+14=29$이다.

따라서, 인쇄되는 S의 값은 29이다.

50. **정답** 765

$$S=3\times 2^7+3\times 2^6+\cdots+3\times 2^1+3\times 1$$
$$=\frac{3(2^8-1)}{2-1}=765$$

51. 정답 ①

[출제의도] 순서도를 이용하여 약수의 곱 추론하기

인쇄되는 S는 72의 양의 약수의 곱이다.

$72=2^3\times 3^2$

72의 양의 약수는 다음과 같다.

$\times$	1	2	2^2	2^3
1	1	2	2^2	2^3
3	3	2×3	$2^2\times 3$	$2^3\times 3$
3^2	3^2	2×3^2	$2^2\times 3^2$	$2^3\times 3^2$

$\therefore\ S=2^{18}\times 3^{12}$

52. 답 7

3의 배수는 3으로 나누고, 3의 배수가 아닌 수는 1을 빼는 순서도이므로 N, k의 값을 차례대로 적으면 다음과 같다.

k	1	2	3	4	5	6	7
N	246	82	81	27	9	3	1

따라서 k의 값은 7이다.

53. **정답** 25

n, a의 값을 표로 나타내면 다음과 같다.

n	1	2	3	4	$\cdots$
a	-1	$-1+2$	$-1+2-3$	$-1+2-3+4$	$\cdots$

따라서 $n=50$일 때, 인쇄되는 a의 값은

$-1+2-3+4-5+\cdots-49+50$

$=(-1+2)+(-3+4)+\cdots+(-49+50)$

$=1\times 25=25$

54. 정답 220

m	n	S
1	1	0
1	1	1
2	1	$1+1$
2	2	$1+(1+2)$
3	1	$1+(1+2)+1$
3	2	$1+(1+2)+1+2$
3	3	$1+(1+2)+(1+2+3)$
4	1	$1+(1+2)+(1+2+3)+1$
4	2	$1+(1+2)+(1+2+3)+1+2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$$\therefore S=\sum_{m=1}^{10}\left(\sum_{n=1}^{m}n\right)=\sum_{m=1}^{10}\frac{m(m+1)}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{10\times 11\times 21}{6}+\frac{10\times 11}{2}\right)=220$$

정답 및 풀이

1. 정답 ④

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+4n}-n)=\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{\sqrt{n^2+4n}+n}=2$$

2. 정답 ①

[출제 의도] 수열의 극한을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{\sqrt{n^2+1}+n}=\frac{2+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1}=1$$

3. 정답 ①

[출제의도] 극한값 계산하기

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1}\right)}{2n}=1$$

4. 정답 ②

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+4n+11}-n)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+4n+11}-n)(\sqrt{n^2+4n+11}+n)}{\sqrt{n^2+4n+11}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4n+11}{\sqrt{n^2+4n+11}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{11}{n}}{\sqrt{1+\frac{4}{n}+\frac{11}{n^2}}+1}=2$$

5. 정답 ③

[출제의도] 수열의 극한을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}+n}=\frac{1}{2}$$

6. 정답 ⑤

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2-3n})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+3n)-(n^2-3n)}{\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2-3n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{6n}{\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2-3n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{6}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+\sqrt{1-\frac{3}{n}}}=\frac{6}{2}=3$$

7. 정답 ③

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{1}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1}}=1$$

8. 정답 ③

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}=1$$

9. ③

$$\lim_{n\to\infty}n(\sqrt{n^2+3}-\sqrt{n^2-2})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(\sqrt{n^2+3}-\sqrt{n^2-2})(\sqrt{n^2+3}+\sqrt{n^2-2})}{\sqrt{n^2+3}-\sqrt{n^2-2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5n}{\sqrt{n^2+3}+\sqrt{n^2-2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{\sqrt{1+\frac{3}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{2}{n^2}}}=\frac{5}{2}$$

10. 정답 ②

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+\frac{2}{n}}-\sqrt{n-\frac{3}{n}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5}{n}}{\sqrt{n+\frac{2}{n}}-\sqrt{n-\frac{3}{n}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{\sqrt{n^3+2n}+\sqrt{n^3-3n}}=0$$

11. 정답 ③ 계산능력 - 수열의 극한

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2n+3}-n)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+2n+3}-n)(\sqrt{n^2+2n+3}+n)}{(\sqrt{n^2+2n+3}+n)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{\sqrt{n^2+2n+3}+n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}+1}=\frac{2}{1+1}=1$$

12. 정답 ④

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+5}-\sqrt{n+1})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}(\sqrt{n+5}-\sqrt{n+1})(\sqrt{n+5}+\sqrt{n+1})}{\sqrt{n+5}+\sqrt{n+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+5}+\sqrt{n+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{5}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=2$$

13. 정답 ②

분모와 분자에 각각 $\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+2n}$ 을 곱하면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+2n}}{(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+2n})(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+2n})}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+2n}}{-n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}}{-1}$$

$$=\frac{1+1}{-1}=-2$$

14. 정답 ③

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=\frac{1}{2}$$

15. 정답 ③

$$\lim_{n\to\infty}n(\sqrt{n^2-n+2}-\sqrt{n^2-n-2})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n\{(n^2-n+2)-(n^2-n-2)\}}{\sqrt{n^2-n+2}+\sqrt{n^2-n-2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{\sqrt{n^2-n+2}+\sqrt{n^2-n-2}}=2$$

16. 정답 ①

$$\lim_{n\to\infty}(2n-\sqrt{4n^2+3n+2})=\lim_{n\to\infty}\frac{-3n-2}{2n+\sqrt{4n^2+3n+2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-3-\frac{2}{n}}{2+\sqrt{4+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}}=-\frac{3}{4}$$

17. 정답 ⑤ 수열의 극한

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+2\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3\sqrt{n}}{\sqrt{n+2\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{n}}}+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}}$$

$$=\frac{3}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}=\frac{3}{2}$$

18. 정답 ③

(주어진 식)

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+3}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n+3}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}=1$$

19. 정답 ④

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+1}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-1})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n+3}+\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}$$

$$=\frac{4}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}=2$$

20. 정답 ①

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(\sqrt{n+3}-\sqrt{n+2})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+3}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+3-n-2)}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+3})(\sqrt{n+3}+\sqrt{n+2})}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{3}{n}}\right)\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}\right)}$$

$$=\frac{1}{(1+1)(1+1)}=\frac{1}{4}$$

21. 정답 ⑤

주어진 식의 분모, 분자를 3^{n-1}으로 나누어 정리하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}+4^{-n+1}}{3^{n-1}+4^{-n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{9+\left(\frac{1}{12}\right)^{n-1}}{1+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{12}\right)^{n-1}}=9$$

22. 정답 ③

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a\times 6^{n+1}-5^n}{6^n+5^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a\times 6-\left(\frac{5}{6}\right)^n}{1+\left(\frac{5}{6}\right)^n}=6a=4$$

$$\therefore\ a=\frac{2}{3}$$

23. 정답 ⑤

(주어진 식)$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{-3-\left(-\frac{2}{3}\right)^n+\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{1+2\left(-\frac{2}{3}\right)^n}=-3$

24. 정답 ⑤

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+4^{n+1}}{2^{2n}-3^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n+4\cdot 1}{1-3\left(\frac{3}{4}\right)^n}=4$$

25. 정답 ①

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2-3^{n+1}}{3^n+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{3^n}-3}{1+\frac{4}{3^n}}=-3$$

26. 정답 ③

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot 4^n-3^n}{4^n+3^n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1+\left(\frac{3}{4}\right)^n+\frac{2}{4^n}}=3$$

27. 정답 ②

$\lim_{x\to\infty}\dfrac{(5n^2+n)a_n}{3n+1}$

$=\lim_{n\to\infty}(2n+1)a_n\cdot\dfrac{5n^2+n}{(2n+1)(3n+1)}$

$=\left\{\lim_{n\to\infty}(2n+1)a_n\right\}\cdot\left\{\lim_{n\to\infty}\dfrac{5n^2+n}{(2n+1)(3n+1)}\right\}$

$=4\cdot\dfrac{5}{6}=\dfrac{10}{3}$

28. 정답 ②

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{4^n+2^{n+2}}-2^n)=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+2}}{\sqrt{4^n+2^{n+2}}+2^n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2^2}{\sqrt{1+\frac{2^2}{2^n}}+1}=2$$

29. 정답 ⑤

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{(4^{n+1}-1)(3^{n+1}-1)}{12^n}$

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{12^{n+1}-4^{n+1}-3^{n+1}+1}{12^n}=12$

30. 정답 ③

등차수열의 합을 이용하면

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=\frac{n\{1+(2n-1)\}}{2}=n^2$$

$$\therefore\ (\text{주어진 식})=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2n^2-3n+1}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2}$$

31. 정답 ④

$1+3+3^2+\cdots+3^n=\dfrac{3^{n+1}-1}{3-1}=\dfrac{3^{n+1}-1}{2}$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\dfrac{1+3+3^2+\cdots+3^n}{3^n}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{3^{n+1}-1}{2\cdot 3^n}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{3-\frac{1}{3^n}}{2}=\dfrac{3}{2}$

32. 정답 ④

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-3n+1}{1+2+3+\cdots+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-3n+1}{\frac{n(n+1)}{2}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-6n+2}{n^2+n}$$
$$=4$$

33. 정답 ⑤

(주어진식)$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{5-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}=\dfrac{5}{2}$

34. 정답 ②

(주어진 식) $=\lim_{n\to\infty}\dfrac{2n^2-5n-3}{3n^2+5}=\dfrac{2}{3}$

35. 정답 ②

$\dfrac{a_n+5}{2a_n+1}=b_n$ 으로 놓으면 $\lim_{n\to\infty}b_n=3$이고

$a_n+5=2a_nb_n+b_n$ $\qquad\therefore\ a_n=\dfrac{-b_n+5}{2b_n-1}$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n+5}{2a_n+1}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{-b_n+5}{2b_m-1}=\dfrac{-3+5}{2\cdot 3-1}=\dfrac{2}{5}$

36. 정답 ④

[출제의도] 극한값의 성질을 이해하여 미정계수를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\lim_{n\to\infty}\left(a+\dfrac{b}{n}\right)=a=2,\ \sum_{n=1}^{5}(2n+b)=30+5b=60$

$\therefore a+b=2+6=8$

37. 정답 ①

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2n-1}=2$이므로 $a_n=4n+a$ (a는 상수)

$a_1=2$이므로 $4+a=2$에서 $a=-2$

$\therefore a_n=4n-2$

$\therefore a_5=18$

38. 정답 ④

[출제의도] 무한수열의 극한에 관한 성질을 이해하기

$3n-1<na_n<3n+2$의 양변을 n으로 나누면

$\frac{3n-1}{n}<a_n<\frac{3n+2}{n}$

이다.

따라서, $\lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{n}=3$, $\lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{n}=3$이므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=3$이다.

39. 정답 ③

$a_n{}^2-2a_n+\frac{n^2-1}{n^2}<0$

$a_n{}^2-2a_n+\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}<0$

$(a_n-\frac{n-1}{n})(a_n-\frac{n+1}{n})<0$

$\frac{n-1}{n}<a_n<\frac{n+1}{n}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}<\lim_{n\to\infty}a_n<\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$

$\lim_{n\to\infty}a_n=1$

40. 정답 ①

모든 자연수 k에 대하여 $a_{n+1}<\frac{1}{3}a_n$이므로

$k=1$일 때, $a_2<\frac{1}{3}a_1$

$k=2$일 때, $a_3<\frac{1}{3}a_2<\left(\frac{1}{3}\right)^2a_1$

$k=3$일 때, $a_4<\frac{1}{3}a_3<\left(\frac{1}{3}\right)^2a_2<\left(\frac{1}{3}\right)^3a_1$

$\vdots$

$k=n-1$일 때, $a_n<\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}a_1$

$\therefore 0<a_n<\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}a_1$

$\lim_{n\to\infty}0\le\lim_{n\to\infty}a_n\le\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}a_1=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=0$

$\lim_{n\to\infty}(3a_n-2)=-2$

41. 정답 11 무한등비수열의 극한

$a_{11}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{1}\right)^n+1}{\left(\frac{1}{1}\right)^{n-1}+1}=\frac{2}{2}=1$

$a_{12}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{1}\right)^n+2}{\left(\frac{2}{1}\right)^{n-1}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{2}{2^{n-1}}}{1+\frac{1}{2^{n-1}}}$

$=\frac{2+0}{1+0}=2$

$a_{21}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n+1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+2}=\frac{0+1}{0+2}=\frac{1}{2}$

$a_{22}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{2}\right)^n+2}{\left(\frac{2}{2}\right)^{n-1}+2}=\frac{3}{3}=1$

$\therefore A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}$

따라서 구하는 행렬 A의 모든 성분의 합은

$1+2+\frac{1}{2}+1=\frac{9}{2}$

$\therefore p+q=2+9=11$

42. 정답 25 이해 능력 - 수열의 극한

$a_{2n}=\frac{1}{4n^2+4n}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$이므로

$\sum_{k=1}^{n}a_{2k}=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$

$\therefore\ 100\times\lim_{n\to\infty}(a^2+a_4+\cdots+a_{2n})=100\times\frac{1}{4}=25$

43. 정답 ④

$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$라 하면 $\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\alpha$이다.

$a_1=1$, $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+4$에서 $\alpha=\frac{1}{2}\alpha+4$이므로 $\alpha=8$

$a_{n+1}=\frac{p}{a_n+1}-1$에서 $\alpha=\frac{p}{\alpha-1}-1$이므로

$\alpha+1=\frac{p}{\alpha+1}$

$(\alpha+1)^2=p\qquad\therefore p=81$

44. 정답 ①

주어진 규칙에 따라 $x_{k+1}=\frac{2x_k+1}{3}=\frac{2}{x_k}+\frac{1}{3}$

$x_{k+1}-1=\frac{2}{3}(x_k-1)$

따라서 $x_{k+1}=\left(\frac{2}{3}\right)^k(x_1-1)+1$이므로 $\lim_{n\to\infty}x_k=1$

45. 정답 ①

$a_n=3+4(n-1)=4n-1$ 이므로

$a_{2n}=8n-1$

$a_1+a_2+\cdots+a_n=\frac{n\{2\cdot3+4(n-1)\}}{2}$

$=2n^2+n$

∴ (주어진 식)$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n}{(4n-1)(8n-1)}=\frac{2}{32}=\frac{1}{16}$

46. 정답 ①

$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ 라 하면 $\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\alpha$ 이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n-3}{a_{n+1}}=\frac{2\lim_{n\to\infty}a_n-3}{\lim_{n\to\infty}a_{n+1}}=\frac{2\alpha-3}{\alpha}=4$

$\therefore\ \alpha=-\frac{3}{2}$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}(4a_n+3)=4\lim_{n\to\infty}a_n+3=4\left(-\frac{3}{2}\right)+3=-3$

47. 정답 12

[출제의도] 수열의 극한을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$f(x)=2x^2-2nx+\frac{1}{2}n^2+6n+1=2\left(x-\frac{n}{2}\right)^2+6n+1$

$\therefore \mathrm{P}_n\left(\frac{n}{2},\ 6n+1\right)$

따라서 $x_n=\frac{n}{2},\ y_n=6n+1$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{6n+1}{\frac{n}{2}}=12$

48. 정답 ⑤

$B^2=\begin{pmatrix}3&0\\0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0\\0&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3^2&0\\0&4^2\end{pmatrix}$

$B^3=\begin{pmatrix}3^2&0\\0&4^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0\\0&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3^3&0\\0&4^3\end{pmatrix}$

$\cdots$

이므로 $B^n=\begin{pmatrix}3^n&0\\0&4^n\end{pmatrix}$임을 알 수 있다.

$\therefore\ A^{-1}B^nA=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3^n&0\\0&4^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3^n&-2\cdot3^n+2\cdot4^n\\0&4^n\end{pmatrix}$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{b_n+c_n}{a_n+d_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{-2\cdot3^n+2\cdot4^n}{3^n+4^n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{-2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n+2}{\left(\frac{3}{4}\right)^n+1}=2$

49. 정답 ②

${a_n}^2+{b_n}^2+2a_nb_n=9^n$

${a_n}^2+{b_n}^2-2a_nb_n=4^n$

$2({a_n}^2+{b_n}^2)=9^n+4^n,\ 4a_nb_n=9^n-4^n$

$\therefore {a_n}^2+{b_n}^2=\frac{1}{2}(9^n+4^n),\ a_nb_n=\frac{1}{4}(9^n-4^n)$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2+b_n^2}{a_nb_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2(9^n+4^n)}{9^n-4^n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\left\{1+\left(\frac{4}{9}\right)^n\right\}}{1-\left(\frac{4}{9}\right)^n}=2$

50. 정답 7

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=0$이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}(2a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{b_n}{a_n}\right)=0$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=2$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\left(2\cdot\frac{a_n}{b_n}+3\cdot\frac{b_n}{a_n}\right)=2\times\frac{1}{2}+3\times2=7$

51. 정답 36

[출제의도] 수열의 극한의 성질 이해하기

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2n+3}=2,\ \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{3n+1}=3$ 이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2n+3}\times\frac{b_n}{3n+1}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2n+3}\times\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{3n+1}=2\times3=6$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_nb_n}{n^2+4}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{a_nb_n}{(2n+3)(3n+1)}\times\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+3)(3n+1)}{n^2+4}$

$=6\times6=36$

52. 정답 90

이해력 - 수열의 극한

$\lim_{n\to\infty}\frac{15a_n}{3^{n-1}+1}=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{a_n}{3^n+2^n}\times\frac{15(3^n+2^n)}{3^{n-1}+1}\right\}$

이때

$\lim_{n\to\infty}\frac{15(3^n+2^n)}{3^{n-1}+1}=15\lim_{n\to\infty}\frac{3+2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}{1+\frac{1}{3^{n-1}}}=45$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{15a_n}{3^{n-1}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{3^n+2^n}\times\lim_{n\to\infty}\frac{15(3^n+2^n)}{3^{n-1}+1}=2\times45=90$$

53. 정답 ③

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{3n}-5^{n+1}}{3^{2n}+5^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{8^n-5\cdot5^n}{9^n+5^n} \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 분모, 분자를 9^n으로 나누면

$$(\text{주어진 식})=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{8}{9}\right)^n-5\cdot\left(\frac{5}{9}\right)^n}{1+\left(\frac{5}{9}\right)^n}=\frac{0-0}{1+0}=0$$

54. 정답 5

$a_{n+1}=\frac{2}{5}a_n$, $b_{n+1}=\frac{1}{2}b_n$ 이므로

$a_n=\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$, $b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

따라서, $a_n(a_n+b_n)=(a_n)^2+a_nb_n=\left(\frac{4}{25}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$ 이므로

$$5^na_n(a_n+b_n)=5\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}+5$$

$$\therefore\lim_{n\to\infty}\{5^na_n(a_n+b_n)\}=\lim_{n\to\infty}\left\{5\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}+5\right\}=0+5=5$$

55. 정답 ④

이차방정식의 근과 계수의 관계에서

$\alpha_n+\beta_n=-(3n+1)$, $\alpha_n\beta_n=-\sqrt{n^2+3}-\sqrt{n^2+1}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\alpha_n+\beta_n}{\alpha_n\beta_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{\sqrt{n^2+3}+\sqrt{n^2+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{3}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=\frac{3}{2}$$

56. 정답 ③

$$|a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n-1|<\frac{1}{2^n}$$

$$\Leftrightarrow 1-\frac{1}{2^n}<a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n<1+\frac{1}{2^n}$$

$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2^n}\right)=1$이므로

$\lim_{n\to\infty}(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)\sum_{n=1}^{\infty}a_n=1$ (수렴)

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=0$

57. 정답 ④

주어진 부등식을 정리하면

$\log_2 2n<\log_2 a_n<\log_2 2(n+1)$

$2n<a_n<2n+2$

$$\frac{2n}{n}<\frac{a_n}{n}<\frac{2n+2}{n}$$

한편, $\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+2}{n}=2$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=2$$

58. 정답 ③

[출제의도] 여러 가지 수열의 문제해결하기

ㄱ. $a_2=9$, $b_2=8$ 이므로 $a_2+b_2=17$ 이다. (참)

ㄴ. $\begin{pmatrix}a_{n+1}&b_{n+1}\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2\\0&1\end{pmatrix}^{n+1}=\begin{pmatrix}a_n&b_n\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&2\\0&1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}3a_n&2a_n+b_n\\0&1\end{pmatrix}$에서 $a_{n+1}=3a_n$ 이고

$a_1=3$ 이므로 $a_n=3^n$ 이다.

이 때, $b_{n+1}=b_n+2\cdot3^n$ 이므로

$b_n=b_1+2\sum_{k=1}^{n-1}3^k=2+3(3^{n-1}-1)=3^n-1$ (참)

ㄷ. $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-1}{3^n}=1$ (거짓)

59. 정답 ⑤

수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a(a\neq0)$라 하면

$a_n=a\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}+\frac{1}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{a\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^n}\lim_{n\to\infty}\frac{2a}{a+\left(\frac{2}{3}\right)^n}=\frac{2a}{2}=2$$

60. 정답 ②

$$a_n=\frac{1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}}{2^{n-1}}$$

$$=\frac{\frac{2^n-1}{2-1}}{2^{n-1}}=\frac{2^n-1}{2^{n-1}}=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\lim_{n\to\infty}\left\{2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}=2$$

61. 정답 ④

$$a_n=S_n-S_{n-1}=\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}-\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}$$

$=2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n$ $(n\geq2)$

$a_1=S_1=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ 이므로

$\therefore a_n=2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n$ $(n\geq1)$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} 2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} 2\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{n}$$

$$=\frac{\frac{2}{9}}{1-\frac{1}{9}}=\frac{1}{4}$$

62. 정답 ①

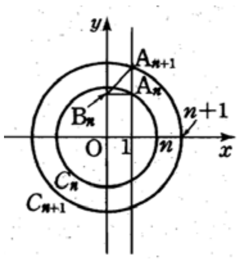
$(n+1)a_{n+1}=na_n$ 에서

$(n+1)a_{n+1}=na_n=(n-1)a_{n-1}=\cdots=2a_2=a_1=2$

따라서 $a_n=\dfrac{2}{n}$ 이므로 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n}=0$

63. 정답

그림에서



$A_n(1,\ \sqrt{n^2-1})$

$A_{n+1}(1,\ \sqrt{n^2+2n})$

$B_n(0,\ \sqrt{n^2-1})$

이므로

$$a_n=\frac{\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-1}}{1-0}=\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-1}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-1}}=\frac{2}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}=1$$

64. 정답 4

$$S(n)=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot(2n^2+n)=\frac{2n^2+n}{2}$$

$$T(n)=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot n=\frac{n}{2}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{S(n)}{\{T(n)\}^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n^2+n}{2}}{\left(\frac{n}{2}\right)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+2n}{n^2}=4$$

65. 정답 ③

$$a_1=1+\frac{1}{3}$$

$$a_2=1+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3$$

$$a_3=1+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^7$$

$$a_4=1+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^{15}$$

$$\vdots$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n=1+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3+\cdots=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}$$

66. 정답 2

[출제의도] 무한수열의 수렴 이해하기

무한수열 $\{(x+2)(x^2-4x+3)^{n-1}\}$이 수렴하기 위해서는

(i) 첫째항이 $x+2=0$일 때, $x=-2$

(ii) 공비가 $r=x^2-4x+3$이므로

$-1<x^2-4x+3\le 1$에서 정수 x는 1, 3이다.

따라서, (i), (ii)에 의하여 정수 x는 -2, 1, 3이므로 모든 정수 x의 합은 2이다.

67. 정답 ④

[출제의도] 극한값의 성질을 이용하여 수학내적 문제 해결하기

$y=x^2$ 과 $y=-x+n$ 의 교점의 x 좌표를 α_n, β_n (단, $\alpha_n<\beta_n$) 라 하면 교점의 좌표는

$(\alpha_n,\ -\alpha_n+n)$, $(\beta_n,\ -\beta_n+n)$ 이다. … ①

또한 α_n, β_n 는 $x^2+x-n=0$ 의 두 근이므로 $\alpha_n+\beta_n=-1$, $\alpha_n\beta_n=-n$ 이다. … ②

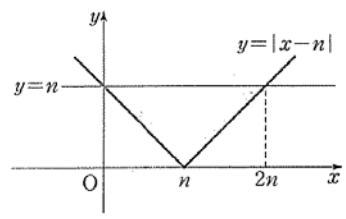
①, ②에 의하여

$$l_n^{\,2}=2(\alpha_n-\beta_n)^2=2\{(\alpha_n+\beta_n)^2-4\alpha_n\beta_n\}=8n+2$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{l_n^{\,2}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{8n+2}{n}=8$$

68. 정답 3

좌표평면에서 $y=|x-n|$과 $y=n$의 그래프는 그림과 같으므로



$$S_n=\frac{1}{2}\cdot 2n\cdot n=n^2$$

따라서

$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-(n-1)^2$

$=2n-1\ (n\ge 2)$ 이고 $S_1=a_1=1$ 이므로

$a_n=2n-1\ (n\ge 1)$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}$$

$\therefore\ p+q=3$

69. 정답 ③

$$a_n=S_n-S_{n-1}=\left(\frac{1}{3}a_n+1\right)-\left(\frac{1}{3}a_{n-1}+1\right)$$

$$=\frac{1}{3}a_n-\frac{1}{3}a_{n-1}$$

$$\therefore\ a_n=-\frac{1}{2}a_{n-1}\ (n\ge 2)$$

$n=1$일 때, $S_1=a_1=\dfrac{1}{3}a_1+1$ $\qquad\therefore\ a_1=\dfrac{3}{2}$

따라서, 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\frac{3}{2}$, 공비가 $-\frac{1}{2}$인 등비수열이다.

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{3}{2}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = 1$$

70. 정답 ③

[출제의도] 무한수열의 극한에 관한 기본성질을 이해하고 추론하기

ㄱ. $-|b_n| \le b_n \le |b_n|$에서 $\lim_{n\to\infty}(-|b_n|) = \lim_{n\to\infty}|b_n| = 0$이므로 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$이다. (참)

ㄴ. $(3n+1)a_n = c_n$라 하면 $\lim_{n\to\infty} c_n = 6$이고 $a_n = \frac{c_n}{3n+1}$이므로

$\lim_{n\to\infty} na_n = \lim_{n\to\infty}\frac{nc_n}{3n+1}$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n+1}c_n$

$= \frac{1}{3}\times 6 = 2$이다. (참)

ㄷ. (반례) $a_n = (-1)^n$, $b_n = 2(-1)^n$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} a_nb_n = 2$(수렴)이지만, 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은 각각 발산한다. (거짓)

71. 정답 ③

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1, 공차가 2인 등차수열이므로

$a_n = 1+(n-1)\cdot 2 = 2n-1$

$\therefore\ a_{2n-2} = 2(3n-2)-1 = 6n-5$

$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$

$b_n = \sum_{k=1}^{n} a_{3k-2} = \sum_{k=1}^{n}(6k-5) = 6\cdot\frac{n(n+1)}{2} - 5n$

$= 3n^2 - 2n$

ㄱ. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{3n^2-2n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}{3-\frac{2}{n}} = 0$

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{b_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-2n}{3(n+1)^2-2(n+1)} = 1$

ㄷ. $\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}a_k}{\sqrt{b_n+2n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\sqrt{3n^2-2n+2n}}$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\sqrt{3n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{3}} = \infty$

따라서, 수렴하는 것은 ㄱ, ㄴ이다.

72. 정답 ③

ㄱ. [반례] $a_n = n$, $b_n = \frac{1}{n}$ $\quad\therefore$ 거짓

ㄴ. [반례] $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{2}{n}$ $\quad\therefore$ 거짓

ㄷ. 두 수열 $\{a_n - b_n{}^2\}$, $\{b_n\}$이 모두 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n{}^2) = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$로 놓으면

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\{(a_n - b_n{}^2) + b_n{}^2\}$

$= \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n{}^2) + \lim_{n\to\infty} b_n{}^2$

$= \alpha + \lim_{n\to\infty} b_n \times \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha + \beta^2$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 수렴한다.

따라서 옳은 것은 ㄷ 뿐이다.

73. 정답 ①

ㄱ. 수열 $\{S_n\}$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$이다. $\quad\therefore$ 참

ㄴ. $\frac{1}{2^k+1}$ 부터 $\frac{1}{a^{k+1}}$ 까지 2^k개씩 묶으면

$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$

$\ge 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{8}\right)+\cdots$

$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{8}\right)+\cdots$은 발산한다.

$\therefore$ 거짓

ㄷ. $a_n = r^{n-1}$에서 $r=1$이면 $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$이다. $\quad\therefore$ 거짓

따라서, 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

74. 정답 ③

ㄱ. $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \frac{b_n}{a_n} = 0$ (참)

ㄴ. (반례) $a_n = n+1$, $b_n = n$이면 $\alpha = 1$이지만 $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 1$이다. (거짓)

ㄷ. $\frac{b_n}{a_n} = c_n$으로 놓으면 $b_n = a_n c_n$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_n c_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{c_n} = \frac{1}{\alpha}$ (참)

75. 정답 ②

$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \alpha$, $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n) = \beta$ (α, β는 실수)로 놓으면

ㄱ. (참) $\lim_{n\to\infty} 2a_n = \alpha+\beta$, $\lim_{n\to\infty} 2b_n = \alpha-\beta$에서

$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\alpha+\beta}{2}$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{\alpha-\beta}{2}$

그러므로 수열 a_nb_n은 수렴한다.

ㄴ. (참) $0 \le a_n{}^2 \le a_n{}^2 + b_n{}^2$, $0 \le b_n{}^2 \le a_n{}^2 + b_n{}^2$이므로

$\lim_{n\to\infty} 0 \le \lim_{n\to\infty} a_n{}^2 \le \lim_{n\to\infty}(a_n{}^2 + b_n{}^2)$,

$\lim_{n\to\infty} 0 \le \lim_{n\to\infty} b_n{}^2 \le \lim_{n\to\infty}(a_n{}^2 + b_n{}^2)$

이 성립한다.

그러므로 $\lim_{n\to\infty}(a_n{}^2+b_n{}^2)=0$이면 $\lim_{n\to\infty}a_n{}^2=\lim_{n\to\infty}b_n{}^2=0$이므로

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=0$

ㄷ. (거짓) 【반례】 $a_n=n$, $b_n=-n+1$이라 하면

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=-1$이지만 $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}(2n-1)=\infty$이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

76. 정답 ⑤

$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\beta$ (α, β는 상수)라 하자.

ㄱ. (거짓) [반례] $a_n=-1$

$\lim_{n\to\infty}\sqrt{a_n{}^2}=\sqrt{(-1)^2}=1$이지만 $\lim_{n\to\infty}a_n=-1$이다.

ㄴ. (참) $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)^2=(\alpha+\beta)^2=0$에서 $\alpha+\beta=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n=0$

ㄷ. (참) $a_n<b_n$ 에서 $a_n-b_n<0$ 이므로 $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)\le 0$이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)^2=1$에서 $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=-1$이므로

$\lim_{n\to\infty}b_n=1+\lim_{n\to\infty}a_n$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

77. 정답 3 수열의 극한

[해설] (ⅰ) $|x|<1$일 때,

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{3x^{2n+2}+x^n+8}{x^{2n}+2}=\frac{0+0+8}{0+2}=4$$

(ⅱ) $|x|>1$일 때,

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{3x^{2n+2}+x^n+8}{x^{2n}+2}$$

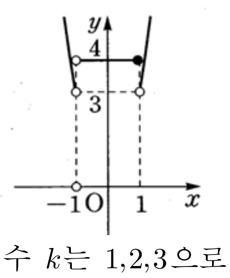
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3x^2+\frac{1}{x^n}+\frac{8}{x^{2n}}}{1+\frac{2}{x^{2n}}}=3x^2$$

(ⅲ) $x=1$일 때,

$$f(1)=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot1^{2n+2}+1^n+8}{1^{2n}+2}$$

$$=\frac{3+1+8}{1+2}=4$$

(ⅰ)~(ⅲ)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 함수

$f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{3x^{2n+2}+x^n+8}{x^{2n}+2}$ $(x\ne-1)$의 그래프와 직선 $y=k$가 만나지 않도록 하는 자연수 k는 1,2,3으로 3개다.

78. 정답 ③

이해력–수열의 극한

주어진 식의 분모, 분자를 n^2으로 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{an+b+\frac{c}{n}+\frac{d}{n^2}}{2+\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^4}}}=10 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때, (분모) $\to 2$이므로 $a\ne0$이면 발산한다.

$\therefore\ a=0$

㉠에서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b+\frac{c}{n}+\frac{d}{n^2}}{2+\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^4}}}=\frac{b}{2}=10$$

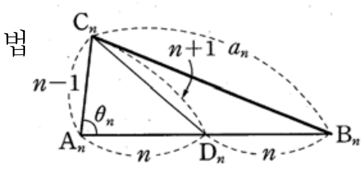
$\therefore\ b=20$

$\therefore\ a+b=20$

79. 정답 ③ 수열의 극한

삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{D}_n\mathrm{C}_n$에서

$\angle\mathrm{D}_n\mathrm{A}_n\mathrm{C}_n=\theta_n$이라 하면 코사인법칙에 의하여



$$\cos\theta_n=\frac{n^2+(n-1)^2-(n+1)^2}{2n(n-1)}$$

$$=\frac{n^2-4n}{2n(n-1)}=\frac{n-4}{2(n-1)}$$

이때, 삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$에서 코사인법칙에 의하여

$a_n{}^2=(2n)^2+(n-1)^2-4n(n-1)\cos\theta_n$

$=4n^2+n^2-2n+1-4n(n-1)\cdot\dfrac{n-4}{2(n-1)}$

$=5n^2-2n+1-2n(n-4)$

$=3n^2+6n+1$

$\therefore\ a_n=\sqrt{3n^2+6n+1}$ ($\because\ a_n>0$)

$$\because\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3n^2+6n+1}}{n}$$

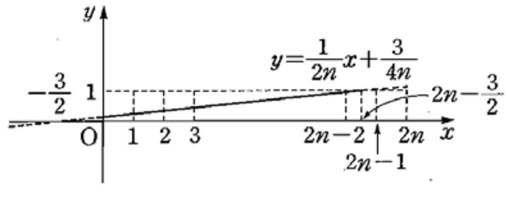
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3+\frac{6}{n}+\frac{1}{n^2}}}{1}=\sqrt{3}$$

80. 정답 ①

직선 $y=\dfrac{1}{2n}x+\dfrac{3}{4n}$의 x절편은 $x=-\dfrac{3}{2}$이고, $y=1$일 때

$x=2n-\dfrac{3}{2}$을 지나므로 집합 $A_n\cap B_n$을 좌표평면 위에 나타내면

다음 그림과 같다.



$\therefore a_n=(2n-2)+1=2n-1$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{{a_n}^2-4n^2}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)^2-4n^2}{n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{-4n+1}{n}=-4$

81. 정답 4 수열의 극한값에 대한 성질

(가)에서 $a_n-\frac{1}{3}>0,\ a_{n+1}-\frac{1}{3}>0$

(나)에서 $a_{n+1}-\frac{1}{3}<\frac{1}{2}\left(a_n-\frac{1}{3}\right)$이므로

$a_{n+1}-\frac{1}{3}<\frac{1}{2}\left(a_n-\frac{1}{3}\right)<\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(a_{n-1}-\frac{1}{3}\right)<\cdots<\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(a_1-\frac{1}{3}\right)$

따라서 $0<a_n-\frac{1}{3}<\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(a_1-\frac{1}{3}\right)$이고,

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(a_1-\frac{1}{3}\right)=0$이므로

$\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{1}{3}\right)=0,\qquad \therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{3}$

$\therefore p+q=3+1=4$

82. 정답 9

${a_n}^2-3{b_n}^2=(a_n+\sqrt{3}b_n)(a_n-\sqrt{3}b_n)$이므로

$a_n+\sqrt{3}b_n=\frac{(-2)^{n+1}}{(1+\sqrt{3})^{n+1}}=(1-\sqrt{3})^{n+1}$

$a_n=\frac{(1+\sqrt{3})^{n+1}+(1-\sqrt{3})^{n+1}}{2}$

$b_n=\frac{(1+\sqrt{3})^{n+1}-(1-\sqrt{3})^{n+1}}{2\sqrt{3}}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3\sqrt{3}a_n}{b_n}=3\sqrt{3}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(1+\sqrt{3})^{n+1}+(1-\sqrt{3})^{n+1}}{2}}{\frac{(1+\sqrt{3})^{n+1}-(1-\sqrt{3})^{n+1}}{2\sqrt{3}}}$$

$$=9\lim_{n\to\infty}\frac{1+\left(\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)^{n+1}}=9\lim_{n\to\infty}\frac{1+(2-\sqrt{3})^{n+1}}{1-(2-\sqrt{3})^{n+1}}=9$$

83. 정답 9

첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$a+ar+ar^2+\cdots=\frac{a}{1-r}=4$ $\cdots㉠$

$a^2+a^2r^2+a^2r^4+\cdots=\frac{a^2}{1-r^2}=\frac{a}{1-r}\cdot\frac{a}{1+r}=\frac{48}{5}$

$\therefore\ \frac{a}{1+r}=\frac{12}{5}$ $\cdots㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $r=\frac{1}{4},\ a=3$

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_{2k}=a_2+a_4+a_6+\cdots$

$=ar+ar^3+ar^5+\cdots$

$=\frac{ar}{1-r^2}=\frac{3\times\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{16}}=\frac{4}{5}$

$\therefore\ p+q=5+4=9$

84. 정답 ①

$a_{n+1}=3a_n+b_n,\ b_{n+1}=a_n+3b_n$

$a_{n+1}+b_{n+1}=4(a_n+b_n)$

$a_1+b_1=3+1=4$

$\therefore a_n+b_n=4\cdot4^{n-1}=4^n$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n+b_n}{4^2+2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4^n}{4^n+2^n}=1$

85. 정답 ③

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1이고 공차가 4인 등차수열이므로

$a_n=4n-3$

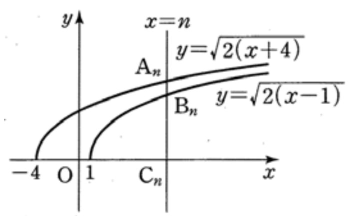
수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 3이고 공차가 4인 등차수열이므로

$b_n=4n-1$

(주어진 식)$=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{4n-3}-\sqrt{4n-1})$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{-2}{\sqrt{4n-3}+\sqrt{4n-1}}=0$

86. ④



$a_n=\overline{A_nB_n}\cdot\overline{B_nC_n}$

$=\{\sqrt{2(n+4)}-\sqrt{2(n-1)}\}\sqrt{2(n-1)}$

$\lim_{n\to\infty}a_n$

$=\lim_{n\to\infty}\{\sqrt{2(n+4)}-\sqrt{2(n-1)}\}\sqrt{2(n-1)}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{10\sqrt{2(n-1)}}{\sqrt{2(n+4)}+\sqrt{2(n-1)}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{10\sqrt{2\left(1-\frac{1}{n}\right)}}{\sqrt{2\left(1+\frac{4}{n}\right)}+\sqrt{2\left(1-\frac{1}{n}\right)}}$

$=\frac{10\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=5$

87. 정답 8

이차함수 $y=x^2-4n^2+1$의 그래프 위의 점 $(2n,\ 1)$에서 접하는 직선을 $y=m(x-2n)+1$이라 하면

$x^2-4n^2+1=mx-2mn+1$에서

위 이차방정식이 중근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$D=m^2-4(-4n^2+2mn)=0$

$m^2-8mn+26n^2=0$

$(m-4n)^2=0$

$\therefore m=4n$

따라서 접선의 방정식은 $y=4nx-8n^2+1$

이 때, x절편은 $\dfrac{8n^2-1}{4n}$, y절편은 $-8n^2+1$이므로

직선 $y=4nx-8n^2+1$과 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$S_n=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{8n^2-1}{4n}\cdot(8n^2-1)=\dfrac{(8n^2-1)^2}{8n}$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(8n^2-1)^2}{8n^4}=8$

88. 정답 ②

직선의 기울기가 1이므로 $x_{n+1}-x_n=\sqrt{x_{n+1}}$ 의 양변을 제곱하면

${x_{n+1}}^2-2x_nx_{n+1}+{x_n}^2=x_{n+1}$

${x_{n+1}}^2-(2x_n+1)x_{n+1}+{x_n}^2=0$

$\therefore x_{n+1}=\dfrac{(2x_n+1)+\sqrt{(2x_n+1)^2-4{x_n}^2}}{2}\quad(\because x_{n+1}>0)$

$=\dfrac{(2x_n+1)+\sqrt{4x_n+1}}{2}$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2x_n+1+\sqrt{4x_n+1}}{2x_n}$

$n\to\infty$이면 $x_n\to\infty$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2x_n+1+\sqrt{4x_n+1}}{2x_n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+\dfrac{1}{x_n}+\sqrt{\dfrac{4}{x_n}+\dfrac{1}{{x_n}^2}}}{2}=1$

89. 정답 ③

$a_n-15=(a_1-15)\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\qquad\therefore a_n=24\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}+15$

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha=15$

$b_{n+1}-\beta=\dfrac{2}{3}(b_n-\beta)$

$b_{n+1}=\dfrac{2}{3}b_n+\dfrac{1}{3}\beta\qquad\therefore k=\dfrac{1}{3}\beta$

$b_n-\beta=(b_1-\beta)\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$

$b_n=(18-\beta)\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}+\beta$

$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\alpha=15$

$\therefore k=\dfrac{1}{3}\beta=5\qquad\therefore\alpha+k=15+5=20$

90. 정답 ④

$a_n=a+2(0.8a+0.8^2a+\cdots+08^{n-1}a)$

$=a+2\cdot\dfrac{0.8a(1-0.8^{n-1})}{1-0.8}$

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a+2\cdot\dfrac{0.8a}{1-0.8}=9a$

$b_n=b+2(0.6b+0.6^2b+\cdots+0.6^{n-1}b)$

$=b+2\cdot\dfrac{0.6b(1-0.6^{n-1})}{1-0.6}$

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b+2\cdot\dfrac{0.6b}{1-0.6}=4b$

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$이므로 $9a=4b$

$\therefore\dfrac{a}{b}=\dfrac{4}{9}$

91. 정답 25

$(x^2+x+1)^n=(x-1)(x-3)Q(x)+ax+b\ \cdots$ ㉠

로 놓으면

$R(x)=ax+b$

㉠에 $x=1$을 대입하면

$3^n=a+b$ ……… ㉡

㉠에 $x=3$을 대입하면

$13^n=3a+b$ ……… ㉢

㉡, ㉢에서

$a=\dfrac{13^n-3^n}{2},\ b=\dfrac{-13^n+3^{n+1}}{2}$

$R(0)=b$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{50R(0)}{2^{3n}-13^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{50\times\dfrac{-13^n+3^{n+1}}{2}}{8^n-13^n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{25\left\{-1+3\left(\dfrac{3}{13}\right)^n\right\}}{\left(\dfrac{8}{13}\right)^n-1}=25$

92. 정답 ④

ㄱ. 한 변의 길이가 n인 정사각형에서

한 변의 길이가 1인 정사각형의 개수는 n^2개,

한 변의 길이가 2인 정사각형의 개수는 $(n-1)^2$개,

한 변의 길이가 3인 정사각형의 개수는 $(n-2)^2$개,

⋮

한 변의 길이가 n인 정사각형의 개수는 1^2개이므로

$f(n,n)=\sum\limits_{k=1}^{n}k^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$\therefore f(3,3)=\dfrac{3\cdot4\cdot7}{6}=14$ (참)

ㄴ. [반례] $m=1,\ n=2$일 때

$f(2m,n)=f(2,2)=5$

$f(m,n)=f(1,2)=2$

$\therefore\ f(2m,\ n)\neq 2f(m,\ n)$ (거짓)

ㄷ. $\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{f(n,\ n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{6n^3}{n(n+1)(2n+1)}=3$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

93. 정답 3

(가)의 $\frac{a_k}{a_l}=a_{k-l}$에 $l=1$을 대입하면 $\frac{a_k}{a_1}=a_{k-1}$

따라서 $a_k=a_1\cdot a_{k-1}=3\cdot a_{k-1}$이므로 수열 $\{a_n\}$은 공비가 3인 등비수열이다.

$\therefore\ a_n=3\cdot 3^{n-1}=3^n$

(나)의 $b_k b_l=b_{k+l}$에 $l=1$을 대입하면 $b_k\cdot b_1=b_{k+1}$

따라서 $b_{k+1}=2b_k$이므로 수열 $\{b_n\}$은 공비가 2인 등비수열이다.

$\therefore\ b_n=2\cdot 2^{n-1}=2^n$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-b_n}{a_n+b_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}+2n^n}{3^n+2^{n+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1+2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n}=\frac{3+0}{1+2\cdot 0}=3$$

94. 정답 ④

$a_{n+2}=\frac{a_n+a_{n+1}}{2}$ 을 변형하면

$a_{n+2}-a_{n+1}=-\frac{1}{2}(a_{n+1}-a_n)$이므로 수열 $\{a_{n+1}-a_n\}$은 첫째항이 $a_2-a_1=1$이고, 공비가 $-\frac{1}{2}$인 등비수열이다.

$$a_{n+1}-a_n=1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}=0+\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$=\frac{2}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$$

$$\therefore\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}=\frac{2}{3}$$

95. 정답 ①

$\log 3^n$의 지표가 a_n-1이므로 $a_n-1\leq\log 3^n<a_n$

$a_n-1\leq n\log 3<a_n$

$n\log 3<a_n\leq n\log 3+1$

$\log 3<\frac{a_n}{n}\leq\log 3+\frac{1}{n}$

각 변에 극한을 취하면 $\log 3\leq\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}\leq\log 3$

따라서 구하는 값은 $\log 3$이다.

96. 정답 ③

가로로 놓여진 성냥개비의 수는 폭이 n이므로

$n\times(2+3+4+\cdots+n+1+n+1)$

세로로 놓여진 성냥개비의 수는 폭이 n이므로

$(n+1)\times(1+2+3+4+\cdots+n+n)$

세워진 성냥개비의 수는 꼭짓점의 수와 같으므로

$(n+1)\times(2+3+4+\cdots+n+n+1)$

$$\therefore\ S_n=\frac{n^3+5n^2+2n}{2}+\frac{n(n+1)^2}{2}+n(n+1)+\frac{n(n+1)^2}{2}+n(n+1)$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{2n^3}=\frac{3}{4}$$

97. 정답 ②

$a_1=1000(1-0.2)+100=900$

$a_2=900(1-0.2)+100=820$

$a_{n+1}=(1-0.2)a_n+100=\frac{4}{5}a_n+100$

$a_{n+1}-500=\frac{4}{5}(a_n-500)$

$a_n-500=b_n$ 이라 하면 $b_1=900-500=400$,

$b_{n+1}=\frac{4}{5}b_n$ 이므로

$b_n=400\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$

$\therefore a_n=500+400\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$

$$\therefore\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{500+400\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}\right\}=500$$

98. ③

집합 $F_n\,(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$의 원소는 0 또는 1 로 이루어진 n 자리의 자연수이므로 원소는 2^{n-1} 개다.

$$\therefore\ S_n=2^{n-1}\times\frac{1}{2}(1+10+10^2+\cdots+10^{n-2})+2^{n-1}\times 10^{n-1}$$

$$=2^{n-1}\times\frac{1}{2}\times\frac{10^{n-1}-1}{10-1}+2^{n-1}\times 10^{n-1}$$

$$=2^{n-1}\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{10^{n-1}-1}{9}+10^{n-1}\right)$$

$$=2^{n-1}\times 10^{n-1}\left\{\frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}}{18}+1\right\}$$

$$=20^{n-1}\times\left\{\frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}}{18}+1\right\}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{20^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}}{18}+1\right\}$$

$$=\frac{1}{18}+1=\frac{19}{18}$$

99. 정답 6

$\{a_n\}$: 4, 13, 26, 43, $\cdots$

$\{b_n\}$: 4, 10, 18, 28, $\cdots$이므로

$a_n = 2n^2+3n-1$, $b_n = n^2+3n$ 이다.

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}+b_{2n}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{12n^2+12n-1}{2n^2+3n-1} = 6$$

100. 정답 19

2^{n+1}열 짜리 블록의 개수는

$1, 2, 3, 4, \cdots, 2^n, \cdots, 2^{n+1}$ …… ㉠

㉠에서 1회 시행 후 홀수는 그대로 두고 짝수는 2로 나누어 나타내면

$1, 3, 5, 7, \cdots, (2^{n+1}-1)$ …… ㉡

과

$1, 2, 3, 4, \cdots, 2^n$ …… ㉢

으로 표시된다.

시행을 모두 마쳤을 때, 남은 블록의 합은

i) ㉠은 $f(2^{n+1})$

ii) ㉡은

$1+3+5+7+\cdots+(2^{n+1}-1)$

$$=\frac{2^n(2^{n+1}-1+1)}{2} = 2^{2n} = 4^n$$

iii) ㉢은 $f(2^n)$

$\therefore f(2^{n+1}) = 4^n + f(2^n) \leftarrow$ 계차수열을 이용하자.

$$f(2^n) = f(2^1) + \sum_{k=1}^{n-1} 4^k$$

$$= 2+\frac{4(4^{n-1}-1)}{4-1}$$

$$= \frac{4^n+2}{3}$$

$$\therefore \frac{q}{p} = \lim_{n\to\infty}\frac{4^n}{\frac{4^{n+1}+2}{3}} = \frac{3}{16}$$

$\therefore p+q = 16+3 = 19$

101. 정답 ③

$y=nx+n$과 $y=x^2$을 연립하면 $x^2-nx-n=0$

$x=\dfrac{n\pm\sqrt{n^2+4n}}{2}$ 이므로 두 점 A, B의 x좌표를 각각 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면 $\beta-\alpha=\sqrt{n^2+4n}$

$\therefore \sqrt{n^2-4n}-1 < a_n < \sqrt{n^2-4n}+1$

$$\frac{\sqrt{n^2-4n}-1}{n} < \frac{a_n}{n} < \frac{\sqrt{n^2-4n}+1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2-4n}-1}{n} \le \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} \le \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2-4n}+1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2-4n}-1}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2-4n}+1}{n} = 1$$

이므로 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} = 1$

102. 정답 ④

n번째 그린 가장 큰 정사각형을 A_n, 정사각형 A_n의 외접원을 O_n, 원 O_n의 반지름의 길이를 R_n, 원 O_n의 내부와 정사각형 A_n의 외부에 모두 접하는 가장 큰 원의 반지름의 길이를 r_n이라 하면

$$R_1 = 1,\ R_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}R_n$$

$$\therefore R_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$$

$$\therefore r_n = \frac{R_n - \frac{1}{\sqrt{2}}R_n}{2} = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}R_n$$

$$= \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$$

그런데 반지름의 길이가 r인 원에 내접하는 정사각형의 넓이는 $2r^2$이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left[2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 4\left\{2\cdot\frac{3-2\sqrt{2}}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}\right]$$

$$= \frac{2}{1-\frac{1}{2}} + \frac{3-2\sqrt{2}}{1-\frac{1}{2}} = 10-4\sqrt{2}$$

103. 정답 ③

삼각형 OP_nQ_n에서 사인정리를 이용하면

$$\frac{\overline{P_nQ_n}}{\sin\alpha} = \frac{\overline{OQ_n}}{\sin\beta} = \frac{\overline{OP_n}}{\sin\gamma}$$

이때 $\overline{P_nQ_n} = 1$ 이므로

$\sin\beta - \sin\gamma = (\overline{OQ_n} - \overline{OP_n})\sin\alpha$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\alpha}{\sin\beta-\sin\gamma} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\overline{OQ_n}-\overline{OP_n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{4+(n+1)^2}-\sqrt{4+n^2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4+(n+1)^2}+\sqrt{4+n^2}}{2n+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{4}{n^2}+\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}+\sqrt{\frac{4}{n^2}+1}}{2+\frac{1}{n}}$$

$$= \frac{2}{2} = 1$$

104. 정답 ③ 수학 내적 문제 해결 능력 – 수열의 극한

$x_i - x_{i-1} = ix_1\,(i=2,3,4,\cdots,n)$에서

$x_2 = 2x_1 + x_1$

$x_3 = 3x_1 + x_2 = 3x_1 + 2x_1 + x_1$

$$x_k = kx_1 + x_{k-1} = kx_1 + (k-1)x_1 + \cdots + x_1 = \frac{k(k+1)}{2}x_1$$

$$\frac{n(n+1)}{2}x_1 = 1\ (\because x_n = 1)$$

$\therefore x_1 = \dfrac{2}{n(n+1)}$

$\therefore x_k = \dfrac{k(k+1)}{2}x_1 = \dfrac{k(k+1)}{n(n+1)}$

따라서, B_k의 y좌표는 $2\times\dfrac{k(k+1)}{n(n+1)}$이므로

$S_k = \dfrac{2k(k+1)}{n(n+1)}\times\dfrac{2k}{n(n+1)} = \dfrac{4(k^3+k^2)}{n^2(n+1)^2}$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} S_k = \sum_{k=1}^{n}\dfrac{4(k^3+k^2)}{n^2(n+1)^2} = \dfrac{4}{n^2(n+1)^2}\sum_{k=1}^{n}(k^3+k^2)$

$= \dfrac{4}{n^2(n+1)^2}\left[\left\{\dfrac{n(n+1)}{2}\right\}^2 + \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$

$= 1 + \dfrac{2(2n+1)}{3(n^2+n)}$

$\therefore \displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} S_k = \lim_{n\to\infty}\left\{1+\dfrac{2(2n+1)}{3(n^2+n)}\right\} = 1$

105. 정답 ③

삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{OB}_n$에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r_n이라 하면

C_n의 좌표는 $\mathrm{C}_n(n-r_n,\ r_n)$

점 C_n에서 직선 $x-ny=0$까지의 거리가 r_n이므로

$\dfrac{|n-r_n-nr_n|}{\sqrt{1^2+(-n)^2}} = r_n$

$|n-(n+1)r_n| = \sqrt{n^2+1}\times r_n$

그런데 $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}=1$에서 $r_n < \dfrac{1}{2}$이므로

$n-(n+1)r_n > 0\left(\because r_n < \dfrac{n}{n+1}\right)$

따라서 $n-(n+1)r_n = \sqrt{n^2+1}\times r_n$이므로

$r_n = \dfrac{n}{n+1\sqrt{n^2+1}}$

$\therefore S_n = \dfrac{1}{2}\times\overline{OA}_n\times r_n$

$= \dfrac{1}{2}\times\sqrt{n^2+1}\times\dfrac{n}{n+1+\sqrt{n^2+1}}$

$= \dfrac{n\sqrt{n^2+1}}{2(n+1+\sqrt{n^2+1})}$

$\therefore \displaystyle\lim_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{n} = \lim_{n\to\infty}\dfrac{n\sqrt{n^2+1}}{2n(n+1+\sqrt{n^2+1})}$

$= \displaystyle\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}}{2\left(1+\dfrac{1}{n}+\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}\right)}$

$= \dfrac{1}{4}$

106. 정답 ⑤

P_n의 좌표를 $P_n(a_n,\ 0)$이라 하면, $A_n(a_n,\ 2-a_n)$,

$B_n\left(-\dfrac{a_n+2}{4},\ 2-a_n\right)$이므로 $P_{n+1}\left(\dfrac{a_n+2}{4},\ 0\right)$

$a_{n+1} = \dfrac{a_n+2}{4}$ 이므로 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ 은 수렴한다.

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n = k$라 하면 $k = \dfrac{k+2}{4}$

$\therefore\ k = \dfrac{2}{3}$

107. 정답 ⑤

[출제의도] 무한수열의 수렴과 발산을 추론하기

ㄱ. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$ (참)

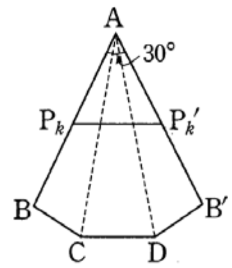
ㄴ. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\dfrac{5^{n+1}-3^n}{5^n+4^n} = \lim_{n\to\infty}\dfrac{5-\left(\dfrac{3}{5}\right)^n}{1+\left(\dfrac{4}{5}\right)^n} = 5$ (참)

ㄷ. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+n}-n}{n} = \lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}+n} = 0$ (참)

108. 정답 ②

수학 내적 문제 해결 능력 - 수열의 극한

모서리 AB를 자르는 선으로 하여 삼각뿔의 옆면을 펼치면 오른쪽 그림과 같다. 삼각형 ABB′에서 제이코사인법칙을 이용하면



$\overline{\mathrm{BB'}}^2 = 2^2+2^2-2\cdot2\cdot2\cdot\cos 30°$

$= 8-4\sqrt{3}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{BB'}} = \sqrt{8-4\sqrt{3}} = \sqrt{6}-\sqrt{2}$

이때, l_k는 선분 $\mathrm{P}_k\mathrm{P}_k'$의 길이와 같고, 삼각형 ABB′과 삼각형 $\mathrm{AP}_k\mathrm{P}_k'$은 닮음이므로

$l_k = \overline{\mathrm{P}_k\mathrm{P}_k'} = \dfrac{k}{n}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$

$l_1+l_2+\cdots+l_n = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k$

$= \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{n}\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}$

$= \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}(n+1)$

$\therefore\ \displaystyle\lim_{n\to\infty}\dfrac{l_1+l_2+\cdots+l_n}{n} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\lim_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}$

$= \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

109. 정답 7

[출제의도] $\sum$의 성질을 이해하고 수열의 극한값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

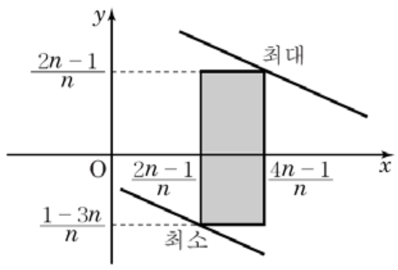
$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^2+k) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

$T_n=\sum_{k=1}^{n}\{k^2+(2n+1)k+n^2+n\}=\dfrac{n(n+1)(7n+2)}{3}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\dfrac{T_n}{S_n}=7$

110. 정답 16

영역 S_n을 좌표평면 위에 나타내면 아래 그림의 어두운 부분과 같다. (경계 포함)



이때, $x+2y=k$로 놓으면 직선 $y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{k}{2}$가 점 $\left(\dfrac{2n-1}{n},\ \dfrac{1-3n}{n}\right)$을 지날 때 k의 값이 최소이므로

$a_n=\dfrac{2n-1}{n}+2\cdot\dfrac{1-3n}{n}$

$=\dfrac{2n-1+2-6n}{n}=\dfrac{-4n+1}{n}$

$\therefore \alpha=\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\dfrac{-4n+1}{n}=-4$

$\therefore \alpha^2=(-4)^2=16$

111. 정답 ④

처음에 왼쪽에서 비춘 빛의 양을 1이라 하면

(i) A에서 통과 ⇨ B에서 통과 $\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{12}$

(ii) A에서 통과 ⇨ B에서 반사 ⇨ A에서 반사 ⇨ B에서 통과

$\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{2}{3}\right)$

(iii) A에서 통과 ⇨ B에서 반사 ⇨ A에서 반사 ⇨ B에서 반사 ⇨ A에서 반사 ⇨ B에서 통과

$\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{2}{3}\right)^2$

이와 같이 계속하면 통과한 빛의 양의 합은 첫째항이 $\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{4}$, 공비가 $\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{2}{3}$인 무한등비급수임을 알 수 있다.

$\therefore \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{2}{3}}=\dfrac{1}{6}$

112. 정답 36

n층을 쌓은 후 위와 아래에서 바라보았을 때 상기는 한 변의 길이가 3인 정사각형의 개수는 각각 n^2이다.

또한 옆에서 바라보았을 때 생기는 한 변의 길이가 3인 정사각형의 개수는 각각

$1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ 이다.

$\therefore a_n=9\times\left\{n^2\times2+\dfrac{n(n+1)}{2}\times4\right\}=36n^2+18n$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{36n^2+18n}{n^2}=36$

113. 정답 ②

[출제의도] 수열의 극한값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

주어진 조건에서 $a_n=\sqrt{n^2+1}$ 이다.

$n<\sqrt{n^2+1}<\sqrt{n^2+2n+1}=n+1$이므로 $[a_n]=n$이다.

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{[a_1]+[a_2]+[a_3]+\cdots+[a_n]}{n^2}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{n(n+1)}{2}}{n^2}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)}{2n^2}=\dfrac{1}{2}$

114. 정답 ④

원 $x^2+y^2=n^2$에 접하고 기울기가 n이고 y절편이 양수인 직선의 방정식은

$y=nx+n\sqrt{n^2+1}$

따라서

$P_n(-\sqrt{n^2+1},0)$, $Q_n(0,n\sqrt{n^2+1})$

이므로

$l_n=\overline{P_nQ_n}$

$=\sqrt{(n^2+1)+n^2(n^2+1)}$

$=\sqrt{n^4+2n^2+1}$

$=\sqrt{(n^2+1)^2}=n^2+1$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\dfrac{l_n}{2n^2}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{n^2+1}{2n^2}=\dfrac{1}{2}$

115. 정답 7

정사각형의 넓이를 a^2이라 하면 반원의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(\dfrac{a}{2}\right)^2$이므로 반원의 내부와 정사각형의 내부의 공통부분의 넓이는 $\left(1-\dfrac{\pi}{8}\right)a^2$이다.

$S_1+S_2+S_3+\ldots+S_n$

$=(1-\dfrac{\pi}{8})(1+4+4^2+\ldots+4^{n-1})$

$=(1-\dfrac{\pi}{8})\cdot\dfrac{4^n-1}{4-1}=\dfrac{8-\pi}{24}(4^n-1)$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\dfrac{24(S_1+S_2+S_3+\ldots+S_n)}{4^n}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{(8-\pi)(4^n-1)}{4^n}=8-\pi$

$\therefore p=8,\ q=-1,\qquad \therefore\ p+q=7$

116. 정답 ①

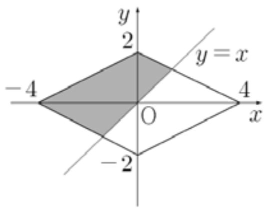
[출제 의도] 무한수열의 극한을 이해하고 이를 이용하여 극한값 구하기

$2^n(y-x)+y=1$ 을 y 에 관하여 정리하면,

$y=\dfrac{2^n}{2^n+1}x+\dfrac{1}{2^n+1}$ 이고 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{2^n+1}=1$,

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n+1}=0$ 이므로 아래 그림과 같이 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 은 연립부등식

$\begin{cases}|x|+2|y|\le 4\\ y\ge x\end{cases}$ 의 영역과 같다.



따라서, $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=16\times\dfrac{1}{2}=8$ 이다.

117. 정답 ④

[출제의도] 역행렬과 수열의 극한값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{2^n+3^n}=0$ (참)

ㄴ. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}=\dfrac{1}{3}$ (거짓)

ㄷ. $\dfrac{2}{3^n+3^n}<a_n<\dfrac{2}{2^n+2^n}$ (참)

118. 정답 ①

도형 T_n 에서 가장 작은 한 개의 삼각형을 A_n 이라 하고, A_n 의 넓이를 a_n 이라 하자. 도형 A_{n+1} 의 개수는 A_n 의 개수의 2 배이고 A_n 과 A_{n+1} 은 닮음비가 $1:\dfrac{2}{3}$ 인 닮은 도형이므로

넓이의 비는 $1:\dfrac{4}{9}$ 이다.

$a_1=S_1=\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot\dfrac{\sqrt{15}}{2}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

$S_n=a_1+2\cdot\dfrac{4}{9}a_1+2^2\left(\dfrac{4}{9}\right)^2+\cdots+2^{n-1}\left(\dfrac{4}{9}\right)^{n-1}a_1$

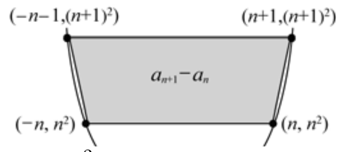
$\quad=a_1+\dfrac{8}{9}a_1+\left(\dfrac{8}{9}\right)^2a_1+\cdots+\left(\dfrac{8}{9}\right)^{n-1}a_1$

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{a_1}{1-\dfrac{8}{9}}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{15}}{4}}{1-\dfrac{8}{9}}=\dfrac{9\sqrt{15}}{4}$

119. 정답 ③

[출제의도] 규칙성을 찾아 수열의 극한값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$a_{n+1}-a_n=(2n+1)^2$

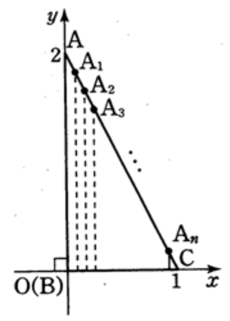


$a_n=1+\sum\limits_{k=1}^{n-1}(2k+1)^2=\dfrac{4n^3-n}{3}$

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n^3}=\dfrac{4}{3}$

120. 정답 ②

그림과 같이 좌표축을 생각하면 직선 AC의 방정식은 $y=-2x+2$ 이고



$A_k(k=1,2,3,\cdots,n)$ 의 x 좌표는 $\dfrac{k}{n+1}$ 이므로

$A_k\left(\dfrac{k}{n+1},\dfrac{-2k}{n+1}+2\right)$

$a_k{}^2=\left(\dfrac{k}{n+1}\right)^2+4\left(-\dfrac{k}{n+1}+1\right)^2$

$=\dfrac{5k^2}{(n+1)^2}-\dfrac{8k}{n+1}+4$

$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k{}^2=\sum\limits_{k=1}^{n}\left\{\dfrac{5k^2}{(n+1)^2}-\dfrac{8k}{n+1}+4\right\}$

$=\dfrac{5}{(n+1)^2}\sum\limits_{k=1}^{n}k^2-\dfrac{8}{n+1}\sum\limits_{k=1}^{n}k+\sum\limits_{k=1}^{n}4$

$=\dfrac{5}{(n+1)^2}\cdot\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\dfrac{8}{n+1}\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}+4n$

$=\dfrac{5n(2n+1)}{6(n+1)}$

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10n^2+5n}{6n^2+6n}=\dfrac{5}{3}$

121. 정답 ③

$x^2=k$에서 $x=-\sqrt{k}$ ($\because\ x<0$)

$x^2-1=k$에서 $x=\sqrt{k+1}$ ($\because\ x>0$)

$\therefore\ S_k=(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})\times 1=\sqrt{k+1}+\sqrt{k}$

ㄱ. $S_3=\sqrt{3+1}+\sqrt{3}=2+\sqrt{3}$ $\therefore$ 참

ㄴ. $\sum\limits_{k=1}^{100}\dfrac{1}{S_k}=\sum\limits_{k=1}^{100}\dfrac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}=\sum\limits_{k=1}^{100}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$

$=\{(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{101}-\sqrt{100})\}$

$=\sqrt{101}-1<10$ $\therefore$ 거짓

ㄷ. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{n}\cdot S_k}$

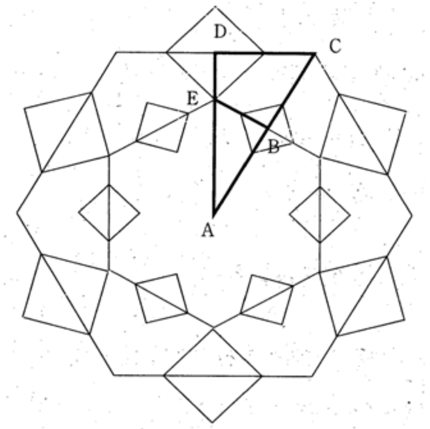
$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\{(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}-1}{\sqrt{n}}=1$ $\therefore$ 참

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

122. 정답 ①

[출제의도] 무한등비급수의 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.



그림과 같이 $\triangle ACD \backsim \triangle AEB$ 이다.

$\overline{CD}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\angle ACD=60°$, $\overline{AD}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$, $\overline{DE}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

$\therefore\ \overline{AE}=\dfrac{2\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

주어진 정육각형과 첫 번째 만들어진 정육각형의 닮음비는 $1:\dfrac{2\sqrt{3}-1}{4}$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty} l_n=6\times\frac{2}{1-\dfrac{2\sqrt{3}-1}{4}}=\frac{48(5+2\sqrt{3})}{13}$$

123. 정답 12

[출제의도] 수열의 점화식을 이용하여 수열의 극한을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

점 Q_1 의 좌표는 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4},\ 0\right)$ 이므로 $x_1=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

점 Q_n 의 좌표는 $(x_n,\ 0)$ 이므로 점 Q_n 을 지나고 $\overline{AB}$ 에 평행한 직선의 방정식은

$$y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}x_n$$

따라서 점 R_n 의 좌표는 $\left(0,\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}x_n\right)$ 이므로 점 R_n 을 지나고 $\overline{AB}$ 에 수직인 직선의 방정식은 $y=\sqrt{3}x+\dfrac{1}{\sqrt{3}}x_n$ 이고, 이 직선과 $\overline{AB}$ 의 교점 P_{n+1} 의 x 좌표가 x_{n+1} 이므로

$x_{n+1}=-\dfrac{1}{4}x_n+\dfrac{\sqrt{3}}{4}$, $x_n=\dfrac{\sqrt{3}}{5}+\dfrac{\sqrt{3}}{20}\left(-\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$ 이다.

$\therefore\ \displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{\sqrt{3}}{5}$ 이므로 $100a^2=100\times\dfrac{3}{25}=12$

124. 정답 ④

a_2 는 $\overline{AH_2}$ 의 길이이므로 $\triangle AH_1H_2$ 에서

$a_2=\overline{AH_1}\cos 60°=\dfrac{1}{2}(1-a_1)$

마찬가지로 a_3 은 $\overline{CH_3}$ 의 길이이므로 $a_3=\dfrac{1}{2}(1-a_2)$

a_4 는 $\overline{BH_4}$ 의 길이이므로 $a_4=\dfrac{1}{2}(1-a_3)$

$\vdots$

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}(1-a_n)$$

$a_{n+1}-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{2}\left(a_n-\dfrac{1}{3}\right)$ 이므로

$$a_n=\left(a_1-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{1}{3}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{3}$$

125. 정답 ④ 추론능력(추측) - 수열의 극한

$S_1=1^2$, $S_2=1^2-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\times 2$

$S_3=1^2-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\times 2+\left(\dfrac{1}{9}\right)^2\times 4$

$S_4=1^2-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\times 2+\left(\dfrac{1}{9}\right)^2\times 4-\left(\dfrac{1}{27}\right)^2\times 8,\cdots$

따라서 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 1, 공비가 $-\dfrac{2}{9}$ 인 등비수열의 합이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{1+\dfrac{2}{9}}=\frac{9}{11}$$

126. 정답 ③

$S_1=a_1=5$ 이고, $S_nS_{n+1}=3^n$ 에서 $S_{n+1}=\dfrac{3^n}{S_n}$

$S_2=\dfrac{3}{5}$, $S_3=3^2\cdot\dfrac{5}{3}=3\cdot 5$, $S_4=\dfrac{3^3}{3\cdot 5}=\dfrac{3^2}{5}$

$S_5=3^4\cdot\dfrac{5}{3^2}=3^2\cdot 5$, $S_6=\dfrac{3^5}{3^2\cdot 5}=\dfrac{3^3}{5}$, $\cdots$

$\therefore\ S_{2n+1}=5\cdot 3^{n-1}$, $S_{2n}=\dfrac{3}{5}\cdot 3^{n-1}=\dfrac{1}{5}\cdot 3^n$

$\therefore\ a_{2n}=S_{2n}-S_{2n-1}=\dfrac{3}{5}\cdot 3^{n-1}-5\cdot 3^{n-1}=-\dfrac{22}{5}\cdot 3^{n-1}$

$\therefore\ a_{2n+1}=S_{2n+1}-S_{2n}=5\cdot 3^n-\dfrac{1}{5}\cdot 3^n=\dfrac{24}{5}\cdot 3^n$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}}{a_{2n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-\dfrac{22}{5}\cdot 3^{n-1}}{\dfrac{24}{5}\cdot 3^n}=-\frac{11}{36}$$

1. 정답 ③

$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n$ 이므로 이 수열은 등비수열이다. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라고 하면, 이 수열의 공비가 $\dfrac{1}{2}$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{a}{1-\dfrac{1}{2}}=2 \qquad \therefore a=1$$

2. 정답 ④

[출제의도] 무한등비급수의 합을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이

다.

$$\sum_{n=1}^{\infty}5\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}=\frac{5}{1-\frac{3}{4}}=20$$

3. 정답 9

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{54}{9n^2+3n-2}$$
$$=54\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(3k-1)(3k+2)}$$
$$=18\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3k-1}-\frac{1}{3k+2}\right)$$
$$=18\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right)\right\}$$
$$=18\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3n+2}\right)=9$$

4. 정답 ①

$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x=2^n\cdots\cdots$ ㉠

$a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x=2^n\qquad\cdots\cdots$ ㉡

㉠−㉡에서

$a_nx^n=2^n-2^{n-1}=2^{n-1}$

$\therefore a_n=\frac{1}{x}\left(\frac{2}{x}\right)^{n-1}\ (n\geq 2),\ a_1=\frac{2}{x}$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하기 위해서는

$\left|\frac{2}{x}\right|<1\quad\therefore\ x<-2$ 또는 $x>2$

5. 정답 ④

[해설]n명의 학생 중에서 2명의 대표를 뽑는 방법의 수는

${}_nC_2=\frac{n(n-1)}{2}$ 이므로

$a_n=\frac{n(n-1)}{2}$

$$\therefore\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n(n-1)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}2\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}2\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}2\left(1-\frac{1}{n}\right)=2$$

6. 정답 ②

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)$$
$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}$$
$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

$\frac{n}{3a_n}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}$ 이므로

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{3a_k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}$$
$$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}$$

7. 정답 ②

주어진 무한급수가 수렴하기 위해서는

$-1<1-x<1$

$-2<-x<0$

$\therefore 0<x<2$

이고, 그 합 $f(x)$는

$$f(x)=\frac{1}{1-(1-x)}=\frac{1}{x}$$

$\therefore f(x)=\frac{1}{x}\quad(0<x<2)$

8. 정답 14

무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{n}{2n+1}\right)$이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{n}{2n+1}\right)=0$

$\therefore\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{2}$

$\therefore\lim_{n\to\infty}(10a_n+9)=10\lim_{n\to\infty}a_n+9=10\cdot\frac{1}{2}+9=14$

9. 정답 ⑤

점 P(2, 0)을 지나고 기울기가 m인 직선은 $y=m(x-2)$

원점과 직선 $mx-y-2m=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 $\frac{1}{n}$ 이어야 하므로 $\frac{1}{n}=\frac{|-2m|}{\sqrt{m^2+1}}$

양변을 제곱하여 정리하면 $m^2+1=4n^2m^2$

$(4n^2-1)m^2-1=0$

두 접선의 기울기의 곱은 근과 계수의 관계에 의하여

$a_n=-\frac{1}{4n^2-1}$ 이다.

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}a_n=-\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$$
$$=-\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$
$$=-\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=-\frac{1}{2}$$

10. 정답 36

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{5^n}=5$ 이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{5^n}=0$ 이다. 주어진 식의 분모, 분자를 6^{n-1} 으로 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+6^{n+1}-5^{n+1}}{a_n+6^{n-1}+5^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_n}{6^{n-1}}+36-\frac{5^{n+1}}{6^{n-1}}}{\frac{a_n}{6^{n-1}}+1+\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_n}{5^n}\cdot\frac{5^n}{6^{n-1}}+36-\frac{5^{n+1}}{6^{n-1}}}{\frac{a_n}{5^n}\cdot\frac{5^n}{6^{n-1}}+1+\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}}$$

$$=36$$

11. 정답 **12**

$\sum_{n=1}^{\infty}(3^n-2^n)a_n=8$이므로 $\lim_{n\to\infty}(3^n-2^n)a_n=0$이다.

$b_n=(3^n-2^n)a_n$이라 하면 $\lim_{n\to\infty}b_n=0$이고,

$a_n=\frac{b_n}{3^n-2^n}$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3a_n+4\cdot 3^{-n}}{2a_n+3\cdot 3^{-n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{3^n-2^n}b_n+4\cdot 3^{-n}}{\frac{2}{3^n-2^n}b_n+3\cdot 3^{-n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3b_n+4-4\left(\frac{2}{3}\right)^n}{2b_n+3-3\left(\frac{2}{3}\right)^n}=\frac{4}{3}$$

$\therefore\ p=3,\ q=4$ $\qquad\therefore\ pq=12$

12. 정답 ②

ㄱ. $a_n=\frac{n}{n+1}$ 에서 $\lim_{n\to\infty}a_n\neq 0$이므로 가정에 의해 되어 반례가 될 수 없다.

ㄴ. $a_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ 에서 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$이지만

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-1)$$

$$=\infty$$

따라서, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$으느 발산하므로 반례가 될 수 있다.

ㄷ. $a_n=\frac{1}{n(n+1)}$ 에서 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$이다.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$은 수렴하므로 반례가 될 수 없다.

따라서, ㄴ만이 반례가 될 수 있다.

13. 정답 ①

[출제의도] 수열의 극한의 성질을 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. 두 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 모두 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=0$이다. (거짓)

ㄴ. 두 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)$ 이 모두 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$이다.

$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\{(a_n+b_n)+(a_n-b_n)\}=0$

$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\{(a_n+b_n)-a_n\}=0$

따라서 두 수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$은 모두 수렴한다. (참)

ㄷ. (반례) $a_n=(-1)^n$, $b_n=(-1)^{n+1}$이면

$|a_n+b_n|=0$, $|a_n-b_n|=2$이므로 두 수열

$\{|a_n+b_n|\}$, $\{|a_n-b_n|\}$이 모두 수렴하지만 수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$은 수렴하지 않는다. (거짓)

14. 정답 ⑤ 무한급수

ㄱ. $a_n=1+\sum_{k=1}^{n}b_k$이므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\sum_{k=1}^{n}b_k\right)$

$\therefore\sum_{k=1}^{n}a_n=1+\sum_{n=1}^{\infty}b_n$

따라서 $\sum_{k=1}^{\infty}b_n=2011$이면 $\lim_{n\to\infty}a_n=1+2011=2012$이다. (참)

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}a_n=2011$이면 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=2010$ (수렴)이므로

$\lim_{n\to\infty}b_n=0$이다. (참)

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=2011$ (수렴)이면 $\lim_{n-\infty}a_n=0$이므로

$\lim_{n\to\infty}a_n=1+\sum_{n=1}^{\infty}b_n=0$

$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}b_n=-1$ (참)

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

15. 정답 ⑤

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\alpha$라 하자.

ㄱ. (참) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\beta$라 하면

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}(b_n + a_n - a_n)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha - \beta$$

ㄴ. (참) ㄱ의 대우에 의하여 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 발산하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$도 발산하므로

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 발산하면 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$도 발산한다.

ㄷ. (참) ㄱ에 의하여 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$도 수렴하므로

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n)$도 수렴한다.

16. 정답 ③

ㄱ. (참) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 모두 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ 이고

$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$이므로 $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = 0$이다.

ㄴ. (거짓) [반례] $a_n = 1, 0, 1, 0, \cdots$, $b_n = 0, 1, 0, 1, \cdots$

이면 $a_n b_n = 0$이므로, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$이 수렴한다.

ㄷ. (참) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$과 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n)$이 모두 수렴하면

$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = 0$, $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$

$\lim_{n\to\infty}\{(a_n + b_n) + (a_n - b_n)\} = \lim_{n\to\infty} 2a_n = 0$

$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$\lim_{n\to\infty}\{(a_n + b_n) - (a_n - b_n)\} = \lim_{n\to\infty} 2b_n = 0$

$\therefore \lim_{n\to\infty} b_n = 0$

따라서, 옳은 것은 ㄱ, ㄷ 이다.

17. 정답 ②

무한등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하자.

ㄱ. (거짓) [반례] $r = 1$이면 수열 $\{a_n\}$은 수렴하지만 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 은 발산한다.

ㄴ. (참) 수열 $\{a_{2n}\}$은 공비가 r^2인 등비수열이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 이 수렴하면 $|r^2| < 1$에서 $-1 < r < 1$이다.

따라서, 수열 $\{a_n\}$도 수렴한다.

ㄷ. (거짓) [반례] $a_n = (-\frac{1}{2})^{n-1}$이면

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3},\ \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$$

18. 정답 ①

조건 ㈎에서 무한급수가 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}(2 - a_n) = 0$ $\therefore$ $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$

조건 ㈏에서

$\frac{3a_n - 4b_n}{2a_n + b_n} = c_n$으로 놓으면 $\lim_{n\to\infty} c_n = \frac{1}{2}$

$3a_n - 4b_n = 2a_n c_n + b_n c_n$에서

$b_n = \frac{(3 - 2c_n)a_n}{c_n + 4}$이므로 $\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{4}{\frac{1}{2} + 4} = \frac{8}{9}$

[다른 풀이]

$\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ (α는 상수)로 놓으면 조건 ㈏에서

$\frac{6 - 4\alpha}{4 + \alpha} = \frac{1}{2}$에서 $12 - 8\alpha = 4 + \alpha$ $\quad\therefore\ \alpha = \frac{8}{9}$

19. 정답 4

급수가 수렴하므로 일반항은 0으로 수렴한다.

$\lim_{n\to\infty} 3^n a_n - 2 = 0$이르로 $\lim_{n\to\infty} 3^n a_n = 2$이다.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{6a_n + 5\cdot 4^{-n}}{a_n + 3^{-n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{6\cdot 3^n a_n + 5\left(\frac{3}{4}\right)^n}{3^n a_n + 1}$$ 이므로

주어진 식의 극한값은 $\frac{12}{3} = 4$이다.

20. 정답 ①

[출제의도] 무한급수의 수렴의 성질을 이용하여 극한값 구하기

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n - \frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3}{n^4}\right)$이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}\left(a_n - \frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3}{n^4}\right) = 0$이다.

따라서, $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3}{n^4}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2}{n^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(n+1)^2}{4n^4} = \frac{1}{4}$$

21. 정답 30

$a_n = 4\cdot 2^{n-1} = 2^{n+1}$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{60}{\log_2 a_n \cdot \log_2 a_{n+1}}$$

$$= 60 \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= 60 \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right)$$

$$=60\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$

$$=60\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)=60\cdot\frac{1}{2}=30$$

22. 정답 ③

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면 $a_n=r^{n-1}$

ㄱ. $a_3=r^2=\frac{4}{9}$이면 $r=\frac{2}{3}$ $(\because r>0)$

$b_{n+1}-b_n=a_n$이므로

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}a_k=1+\frac{1-r^{n-1}}{1-r}$$

$$b_3=1+\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}{1-\frac{2}{3}}=\frac{8}{3}$$ (참)

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}r^{n-1}=0$에서 $-1<r<1$이고

$r>0$이므로 $0<r<1$이다.

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1-r^{n-1}}{1-r}\right)$$

$$=1+\frac{1}{1-r}$$ (수렴) (참)

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\alpha$(수렴)이면 $0<r<1$이고

$\alpha=\frac{1}{1-r}$이므로 $\alpha>1$

ㄴ에서 $\lim_{n\to\infty}b_n=1+\alpha\neq0$이므로 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$은 발산한다. (거짓)

23. 정답 35

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{5^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+1}}{5^n}$$

$$=\frac{\frac{4}{5}}{1-\frac{2}{5}}+\frac{\frac{9}{5}}{1-\frac{3}{5}}$$

$$=\frac{4}{3}+\frac{9}{2}=\frac{35}{6}$$

$\therefore$ $6K=35$

24. 정답 ⑤

$(\log x)^2-5n\log x+6n^2<0$ 에서

$(\log x-2n)(\log x-3n)<0$

$\therefore$ $2n<\log x<3n$

$\log x=[\log x]$ 에서 $\log x$ 가 정수이므로

$a_n=3n-2n-1=n-1$

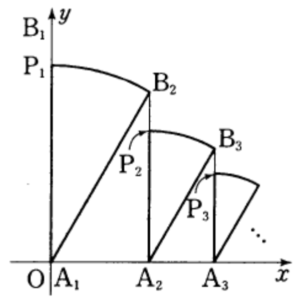
$$\therefore\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{a_na_{n+1}}$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)n}=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=1$$

25. 정답 ⑤



$\overline{A_1B_1}=a$이므로 $\overline{A_1P_1}=\frac{2}{3}a$

$\triangledown A_1P_1B_2$의 넓이 S_1은

$$S_1=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}a\right)^2\frac{\pi}{6}=\frac{a^2}{27}\pi$$

$$\overline{A_{n+1}P_{n+1}}=\frac{2}{3}\overline{A_{n+1}B_{n+1}}$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{A_nB_{n+1}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\overline{A_nP_n}$$

$$\therefore S_{n+1}=\frac{1}{3}S_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{a^2}{27}\pi}{1-\frac{1}{3}}=\frac{a^2}{18}\pi=\pi$$ 이므로

$\therefore a^2=18$ $\qquad\therefore a=3\sqrt{2}$

26. 정답 ⑤

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{2}{1-r}=10,\ |r|<1$$

$$\therefore\ r=\frac{4}{5}$$

수열 $\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$은 첫째항이 $\frac{a_1}{2^1}=1$, 공비가 $\frac{r}{2}=\frac{2}{5}$ 인 등비수열이다.

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}=\frac{1}{1-\frac{2}{5}}=\frac{5}{3}$$

27. 정답 ③

이해력–수열의 극한

$\sum_{n=1}^{3}a_n=\sum_{n=4}^{\infty}a_n$에서 $\frac{a_1(1-r^3)}{1-r}=\frac{a_1r^3}{1-r}$

$1-r^3=r^3,\ r^3=\frac{1}{2}$

$$\therefore\ r=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

28. 정답 ②

[출제의도] 수열의 극한을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

$S_n=\pi r_n^2$, $S_{n+1}=2S_n$ 이므로

$\pi {r_{n+1}}^2=2\pi r_n^2,\ r_{n+1}=\sqrt{2}\,r_n$

$r_1=1$ 이므로 $r_n=(\sqrt{2})^{n-1}$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{r_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}=\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$=2+\sqrt{2}$$

29. 정답 15

[출제의도] 여러 가지 수열을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

$p=q=1$, $r=n$ 이면 $2a_1+a_n=a_{n+2}$ 이므로

$a_{n+2}=a_n+20$

$a_1=10$ 이므로 $a_3=30,\ a_5=50$

$a_5=a_3+2a_1$ 이므로 $a_2=20$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 공차가 10 인 등차수열이다.

$a_n=10n$ ···①

수열 $\{b_n\}$에서 $p=1$ 을 대입하여 정리하면

$$b_n=\frac{3}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}=\left(\frac{3}{5}\right)^{n}\cdots②$$

①, ②에 의하여

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_nb_n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10n\times(\frac{3}{5})^n}{n}=10\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n=15$$

30. 정답 ② 무한급수

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{3n}{n+1}\right),\ \sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$$

이 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{3n}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}(a_n-3)=0$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}a_n=3$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=3+\lim_{n\to\infty}b_n=0$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}b_n=-3$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{3-b_n}{a_n}=\frac{3-(-3)}{3}=2$$

31. 정답 3

$\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}=\left(\frac{2}{3}\right)^n+\left(\frac{4}{5}\right)^n-\left(\frac{3}{4}\right)^n$ 이므로

무한등비급수의 성질에 의하여

$$\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}+\frac{\frac{4}{5}}{1-\frac{4}{5}}-\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}}$$

$=2+4-3=3$

32. 정답 ①

[출제의도] 무한급수의 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$a_n=2n+1\ \ (n\geq 1)$이므로 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{1}{3}$

33. 정답 ②

$\angle A_nA_{n-1}B_n=\frac{\pi}{4}$ 이므로

$\overline{A_nA_{n+1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\overline{A_{n-1}A_n}$

따라서 부채꼴 $A_{n-1}A_nB_n$의 중심각의 크기를 θ_n, 반지름의 길이를 r_n이라고 하면

$\theta_n=\frac{\pi}{4}$, $r_n=4(\frac{\sqrt{2}}{2})^{n-1}$

$\therefore\ l_n=r_n\theta_n=\frac{\pi}{4}\times 4(\frac{\sqrt{2}}{2})^{n-1}$

$=\pi(\frac{\sqrt{2}}{2})^{n-1}$

$$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}l_n=\frac{\pi}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{2\pi}{2-\sqrt{2}}=\pi(2+\sqrt{2})$$

34. 정답 ②

[해설] ㄱ. $y=1+x+x^2+x^3+\cdots$이 수렴하므로

$-1<x<1$ ········· ㉠

$z=x+\frac{x}{y}+\frac{x}{y^2}+\frac{x}{y^3}+\cdots$이 수렴하므로

$-1<\frac{1}{y}<1$

이때, $y=1+x+x^2+x^3+\cdots=\frac{1}{1-x}$ 이므로

$\frac{1}{y}=1-x$

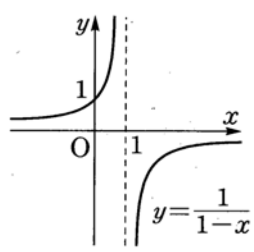
따라서 $-1<1-x<1$이므로

$0<x<2$ ········· ㉡

㉠, ㉡에서 $0<x<1$ (참)

ㄴ. $y=\frac{1}{1-x}$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

ㄱ에서 $0<x<1$이므로 $y>1$ (참)



ㄷ. $z=x+\frac{x}{y}+\frac{x}{y^2}+\frac{x}{y^3}+\cdots$

$=\frac{x}{1-\frac{1}{y}}=\frac{x}{1-(1-x)}=1$ (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

35. 정답 ⑤

[해설] ㄱ. (참) A_n의 좌표를 x_n이라 하면

점 A_{n+1}은 $\overline{A_{n-1}A_n}$을 2 : 1로 외분하므로

$x_{n+1}=2x_n-x_{n-1}$, $x_{n+1}-x_n=x_n-x_{n-1}$

$\therefore a_{n+1}=a_n$

ㄴ. (참) 점 A_{n+1}은 $\overline{A_{n-1}A_n}$을 3 : 1로 외분하므로

$\dfrac{3x_n - x_{n-1}}{2} = x_{n+1}$

$3x_n - x_{n-1} = 2x_{n+1}$

$2(x_{n+1} - x_n) = x_n - x_{n-1}$ $\qquad \therefore a_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n$

따라서, 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $a_1 = \overline{A_0A_1}$이고 공비가 $\dfrac{1}{2}$인 등비수열을 이룬다.

ㄷ. (참) $\dfrac{l}{m} = k$ $(k>2)$라 하면 $l = mk$이므로

$l : m = mk : m = k : 1$

$x_{n+1} = \dfrac{kx_n - x_{n-1}}{k-1}$

$(k-1)x_{n+1} = kx_n - x_{n-1}$

$(k-1(x_{n+1} - x_n) = x_n - x_{n-1}$

$(k-1)a_{n+1} = a_n$

$\therefore a_{n+1} = \dfrac{1}{k-1}a_n$

$k>2$이므로 $0 < \dfrac{1}{k-1} < 1$이다. 따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 a_1이고 공비가 $\dfrac{1}{k-1}$인 등비수열이므로 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 수렴한다.

36. 정답 ①

$g(f(n)) = 2^{1-n}\sin\dfrac{\{2(1-n)-1)\}\pi}{2}$

$= 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \sin\dfrac{(1-2n)\pi}{2}$

$=-2\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \sin\dfrac{(2n-1)\pi}{2}$

이므로

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(g(f(n)) =-2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n \sin\frac{(2n-1)\pi}{2}$

$=-2\times\left\{\left(\dfrac{1}{2}\right)-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^3-\cdots\right\}$

$=-2\times\dfrac{\frac{1}{2}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} =-\dfrac{2}{3}$

37. 정답 1

곡선 $y = \log_{\frac{1}{3}} x$를 y축의 방향으로 b_k만큼 평행이동시킨 곡선 $y = \log_{\frac{1}{3}} x + b_k$가 점 $(2, -k)$를 지난다.

따라서 $-k = \log_{\frac{1}{3}} x - k - \log_{\frac{1}{3}} 2$

$\therefore\ y = \log_{\frac{1}{3}} x - k - \log_{\frac{1}{3}} 2$

이다. x절편을 구하면 $0 = \log_{\frac{1}{3}} x - k - \log_{\frac{1}{2}} 2$에서

$x = 2\left(\dfrac{1}{3}\right)^k$

$\therefore\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k = 2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{3}} = 1$

38. 정답: ②

$a_2a_1 = \dfrac{1}{4}$에서 $a_2 = \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{a_1} = \dfrac{1}{4}$

$a_3a_2 = \left(\dfrac{1}{4}\right)^2$에서 $a_3 = \left(\dfrac{1}{4}\right)^2\cdot\dfrac{1}{a_2} = \dfrac{1}{4}$

$a_4a_3 = \left(\dfrac{1}{4}\right)^3$에서 $a_4 = \left(\dfrac{1}{4}\right)^3\cdot\dfrac{1}{a_3} = \left(\dfrac{1}{4}\right)^2$

$a_5a_4 = \left(\dfrac{1}{4}\right)^4$에서 $a_5 = \left(\dfrac{1}{4}\right)^4\cdot\dfrac{1}{a_4} = \left(\dfrac{1}{4}\right)^2$

$a_6a_5 = \left(\dfrac{1}{4}\right)^5$에서 $a_6 = \left(\dfrac{1}{4}\right)^5\cdot\dfrac{1}{a_5} = \left(\dfrac{1}{4}\right)^3$

$a_7a_6 = \left(\dfrac{1}{4}\right)^6$에서 $a_7 = \left(\dfrac{1}{4}\right)^6\cdot\dfrac{1}{a_6} = \left(\dfrac{1}{4}\right)^3$

$\therefore\ a_{2n-1} = \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}, a_{2n} = \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$

$\therefore\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} + \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}$

$= \dfrac{4}{3} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{5}{3}$

39. 정답 ①

$7a_1 + 7^2a_2 + \cdots + 7^n a_n = 3^n - 1$ $\cdots$ (1)에 $n \leftarrow n-1$을 대입하면,

$7a_1 + 7^2a_2 + \cdots + 7^{n-1}a_{n-1} = 3^{n-1} - 1$ $\cdots$ (2)

(1)−(2)하면 $7^n a_n = 2\times 3^{n-1} \Leftrightarrow a_n = \dfrac{2}{7}\times\left(\dfrac{3}{7}\right)^{n-1}$

$\therefore \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^{n-1}} = \frac{2}{7}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{7^{n-1}} = \frac{2}{7}\times\frac{1}{1-\frac{1}{7}} = \frac{1}{3}$

40. 정답 ④

[출제의도] 무한등비급수를 활용하여 여러 가지 문제 해결하기

대각선의 길이가 a인 정사각형의 한 변의 길이는 $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$이고 정사각형의 넓이는 $\dfrac{1}{2}a^2$이다.

이때, $a_1 = 1,\ a_2 = \dfrac{1}{3},\ a_3 = \left(\dfrac{1}{3}\right)^2, \cdots$ 이므로

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{1}{2}\left\{1^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^4 + \cdots\right\}$

$= \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{1}{9}} = \dfrac{9}{16} = \dfrac{q}{p}$ 이다.

따라서, $p = 16,\ q = 9$이므로 $p + q = 25$이다.

41. 정답 ③

추론 능력(추측)−수열의 극한

ㄱ. (참) 두 수열 $\{a_n+1\}$, $\{b_n\}$의 무한급수가 모두 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+1)=\lim_{n\to\infty}b_n=0$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=-1<\lim_{n\to\infty}b_n=0$$

ㄴ. (참) $\lim_{n\to\infty}a_n=-1\neq 0$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$은 발산한다.

ㄷ. (거짓) [반례] $a_n+1=b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$이라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+1)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n=2$이다.

그런데 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+1)b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2}=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}$$

42. 정답 ⑤

ㄱ. $\sum_{k=1}^{100}N(5,\ k)=5(1+3+5+\cdots+39)$

$$=5\sum_{k=1}^{20}(2k-1)=5\times 20^2=2000 \qquad \therefore \text{ 참}$$

ㄴ. $n\geq 100$이면 $N(n,\ 100)=1$로 일정하다.

$$\therefore \lim_{n\to\infty}N(n,\ 100)=1 \qquad \therefore \text{ 참}$$

ㄷ. $N(3,\ 3n)=2n-1,\ N(3,\ 3n+2)=2n+1$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{N(3,\ 3n)\times N(3,\ 3N+2)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2} \qquad \therefore \text{ 참}$$

따라서, ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

43. 정답 15

[출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 무한급수를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

수열 $\{a_n\}$은 2, 1, 2, 1, 2, 1, $\cdots$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n}=\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3^3}+\frac{2}{3^5}+\ \cdots\ \right)+\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{3^6}+\ \cdots\ \right)$$

$$=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{9}}+\frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{9}}=\frac{3}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

$\therefore p+q=8+7=15$

44. 정답 11

[출제의도] 이항정리를 이용하여 무한등비급수를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$(a+b)^n=\sum_{r=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_r\,a^r b^{n-r}$ 에서

$a_n=\sum_{r=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_r\,3^r 2^{n-r}=(3+2)^n=5^n$ 이다.

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n-2^n}{a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n-2^n}{5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n$$

$$=\frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}}-\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{5}}=\frac{3}{2}-\frac{2}{3}=\frac{5}{6}=\frac{q}{p}$$

$\therefore\ p+q=11$

45. 정답 7

$\mathrm{P}_n\left(n,\ \frac{1}{n+2}\right)$, $\mathrm{Q}_n\left(n+1,\ \frac{1}{n+2}\right)$, $\mathrm{P}_{n+1}\left(n+1,\ \frac{1}{n+3}\right)$이므로

$$S_n=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}\cdot\overline{\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}S_k$$

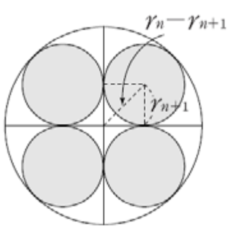
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+3}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{n+3}\right)=\frac{1}{6}$$

$\therefore\ p+q=6+1=7$

46. ③



n번째 그림에서 그려진 원의 반지름의 길이를 r_n이라 하고, 이 원을 사분원으로 나누어 각각의 사분원에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r_{n+1}이라 하면,

$r_n-r_{n+1}=\sqrt{2}\,r_{n+1}$이므로

$$r_{n+1}=\frac{1}{1+\sqrt{2}}r_n=(\sqrt{2}-1)r_n$$

$$S_1=4\pi(\sqrt{2}-1)^2=4\pi(3-2\sqrt{2})$$

따라서 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $4\pi(3-2\sqrt{2})$이고, 공비가 $4(\sqrt{2}-1)^2=4(3-2\sqrt{2})$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{4\pi(3-2\sqrt{2})}{1-4(3-2\sqrt{2})}=\frac{4(1+2\sqrt{2})\pi}{7}$$

47. 정답 25

최초에 x의 종이를 생산했다면 폐휴지로 수합되는 종이의 양은

$x\times 0.5=0.5x$

이 가운데 재생산되는 종이의 양은

$0.5x\times 0.4=0.2x$

이러한 재생산 과정을 한없이 계속할 때, 재생산되는 종이의 양은

$0.2xx+(0.2)^2x+(0.2)^3x+\cdots=\dfrac{0.2x}{1-0.2}=\dfrac{0.2x}{0.8}=0.25x$

따라서 재생산되는 종이의 양은 최초 생산된 종이의 양의 25%이므로 $a=25$

48. 정답 ②

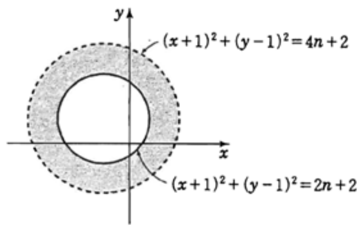
$A_n=\{(x,\ y)\,|\,x^2+2x+y^2-2y-2n<0\}$

$\quad=\{(x,\ y)\,|\,(x+1)^2+(y-1)^2<2n+2\}$

$A_{2n}=\{(x,\ y)\,|\,(x+1)^2+(y-1)^2<4n+2\}$

A_n과 A_{2n}은 중심이 $(-1,\ 1)$이고 반지름의 길이가 각각 $\sqrt{2n+2}$, $\sqrt{4n+2}$인 원의 내부이다.

따라서 ${A_n}^C\cap A_{2n}=A_{2n}-A_n$이 나타내는 영역은 다음 그림의 어두운 부분과 같다.



$\therefore\ S_n=(4n+2)\pi-(2n+2)\pi=2n\pi$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi^2}{S_nS_{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n(2n+2)}=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{4}$$

49. 정답 ①

부채꼴 $\mathrm{O}_n\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$의 반지름의 길이를 r_n이라 하면

$r_n=\sqrt{2}\,r_{n+1}$이므로 $r_{n+1}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}r_n$

$\therefore\ S_{n+1}={r_{n+2}}^2-\dfrac{\pi}{4}\cdot{r_{n+2}}^2$

$=\dfrac{1}{2}{r_{n+1}}^2-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{4}\cdot{r_{n+1}}^2$

$=\dfrac{1}{2}\left({r_{n+1}}^2-\cdot\dfrac{\pi}{4}\cdot{r_{n+1}}^2\right)=\dfrac{1}{2}S_n$

이때, $r_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$이므로

$S_1={r_2}^2-\dfrac{\pi}{4}\cdot{r_2}^2=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\pi}{4}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{4-\pi}{8}$

따라서 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $\dfrac{4-\pi}{8}$, 공비가 $\dfrac{1}{2}$인 등비수열이다.

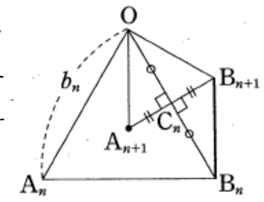
$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{4-\pi}{8}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{4-\pi}{4}=1-\frac{\pi}{4}$$

50. 정답 ① 무한등비급수의 도형에의 활용

정삼각형 OA_nB_n의 한 변의 길이를 b_n이라 하면

$b_1=1,\ b_{n+1}=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times b_n=\dfrac{\sqrt{3}}{3}b_n\ \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

두 선분 OB_n, $A_{n+1}B_{n+1}$이 만나는 점을 C_n이라 하면 점 C_n은 선분 OB_n의 중점이므로 삼각형 $OA_{n+1}C_n$과 삼각형 $B_nB_{n+1}C_n$은 합동이다.



$\therefore\ \overline{OA_{n+1}}=\overline{B_nB_{n+1}}$

이때, $a_1=b_2=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$이므로

$a_n=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^n$이다.

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}(3+\sqrt{3})}{9-3}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

51. 정답 19

[단계1]에서 어두운 부분의 넓이를 S_1이라 하면 $S_1=8$

[단계2]에서 어두운 부분의 넓이는 $S_1-\dfrac{1}{2}S_1$

[단계3]에서 어두운 부분의 넓이는 $S_1-\dfrac{1}{2}S_1+\dfrac{1}{4}S_1$

[단계4]에서 어두운 부분의 넓이는 $S_1-\dfrac{1}{2}S_1+\dfrac{1}{4}S_1-\dfrac{1}{8}S_1$

따라서, 구하고자 하는 값은 첫째항이 8이고, 공비가 $-\dfrac{1}{2}$인 무한등비급수이므로

$\dfrac{S_1}{1+\frac{1}{2}}=8\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{16}{3}\qquad\therefore\ 16+3=19$

52. 정답 30

A_1, A_2, $A_3\cdots$은 닮은 도형이고, 길이의 비가 $\dfrac{2}{3}$이므로 넓이의 비는 $\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{4}{9}$이다.

또한, $S_1=\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{4}{9}}=\frac{3}{9}$$

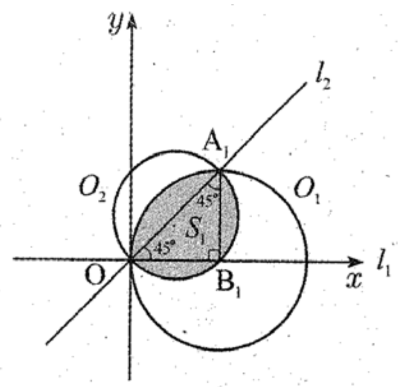
$$\therefore 100\sum_{n=1}^{\infty}S_n=30$$

53. 정답 ④

[출제의도] 도형의 넓이에 관한 무한급수의 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

원 O_1과 직선 l_2의 한 교점을 A_1, 원 O_1의 중점을 $\mathrm{B}_1(3,\ 0)$이라 하면 삼각형 $\mathrm{A}_1\mathrm{OB}_1$은 직각이등변삼각형이므로 $\overline{\mathrm{OA}_1}=3\sqrt{2}$

$S_1=\dfrac{1}{2}\pi\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2+\dfrac{9}{4}\pi-\dfrac{9}{2}=\dfrac{9}{2}(\pi-1)$



같은 방법으로 원 O_2와 직선 l_3의 한 교점을 A_2, 원 O_2의 중심을 B_2라 하면 삼각형 A_2OB_2는 직각이등변삼각형이므로 $\overline{OA_2}=3$

$$S_2=\frac{1}{2}\pi\left(\frac{3}{2}\right)^2+\frac{\pi}{4}\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{9}{4}(\pi-1)$$

$\cdots$

$$S_n=\frac{9}{2^n}(\pi-1)$$

수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $\frac{9}{2}(\pi-1)$, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{9}{2}(\pi-1)}{1-\frac{1}{2}}=9(\pi-1)$$

54. 정답 ③

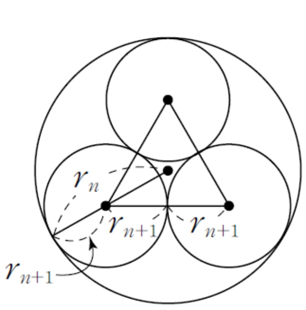
[단계 n]에서 그린 원의 반지름의 길이를 r_n이라 하면 $r_1=1$이고, $r_n=r_{n-1}+\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2r_{n-1}$

$$r_n=\frac{3+2\sqrt{3}}{3}r_{n-1}$$

$$\therefore r_{n-1}=\frac{3}{3+2\sqrt{3}}r_n=(2\sqrt{3}-3)r_n$$

따라서 수열 $\{r_n\}$은 첫째항이 1이고, 공비가 $2\sqrt{3}-3$인 등비수열이므로

$$r_n=(2\sqrt{3}-3)^{n-1}$$



[단계 n]에서는 3^{n-1}개의 원을 그리므로 [단계 n]에서 그린 모든 원의 넓이의 합 S_n은

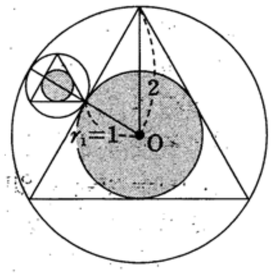
$$S_n=3^{n-1}\pi {r_n}^2$$
$$=\pi\{3(2\sqrt{3}-3)^2\}^{n-1}$$
$$=\pi(63-36\sqrt{3})^{n-1}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\pi}{1-(63-36\sqrt{3})}$$
$$=\frac{\pi}{-62+36\sqrt{3}}$$

$\therefore b-a=36-(-62)=98$

55. 정답 ④

n단계에 생기는 정삼각형의 내접원의 반지름의 길이를 r_n이라 하면 그림의 직각삼각형에서



$$r_1=2\times\frac{1}{2}=1$$

[2단계]의 정삼각형의 외접원의 지름의 길이는 $2-r_1=2-1=1$

이므로 반지름의 길이는 $\frac{1}{2}$이고 r_1을 구할 때와 마찬가지로 $r_2=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

같은 방법으로 $r_3=\left(\frac{1}{4}\right)^2,\cdots$이므로 $r_n=\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

한편, n단계의 내접원의 개수를 t_n이라 하면 $t_1=1$이고, 각 단계의 내접원의 개수는 전단계의 3배만큼 새로 생기므로 $t_n=3^{n-1}$이 된다.

따라서 n단계의 모든 내접원들의 넓이의 합을 S_n이라 하면

$$S_n=\pi r_n^2\times t_n=\pi\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right\}^2\times 3^{n-1}=\pi\left(\frac{3}{16}\right)^{n-1}$$

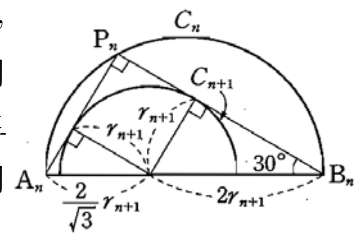
따라서 구하는 넓이의 합은

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\pi}{1-\frac{3}{16}}=\frac{16}{13}\pi$$

$\therefore p+q=13+16=29$

56. 정답 ①

삼각형 $A_nB_nP_n$은 $\angle A_nP_nB_n=90^\circ$, $\angle A_nB_nP_n=30^\circ$인 직각삼각형이다. 원 C_n의 반지름의 길이를 r_n으로 놓으면 그림과 같이



$$\frac{2}{\sqrt{3}}r_{n+1}+2r_{n+1}=2r_n \text{이므로}$$

$$\frac{r_{n+1}}{r_n}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}=\frac{3-\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \frac{S_{n+1}}{S_n}=\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

따라서 수열 $\{S_n\}$은 $S_1=\frac{\pi}{2}{r_1}^2-\frac{1}{2}\cdot r_1\cdot\sqrt{3}r_1=\frac{{r_1}^2}{2}(\pi-\sqrt{3})$

이고, 공비는 $\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)^2$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{3\sqrt{3}-4}{2}\cdot(\pi-\sqrt{3})\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{3\sqrt{3}-4}{2}\cdot(\pi-\sqrt{3})\cdot\frac{2}{3\sqrt{3}-4}$$

$$=\pi-\sqrt{3}$$

57. 정답 ①

직각삼각형 ABC에서 $\angle A=60^\circ$, $\overline{AB}=2$이므로 $\overline{BC}=2\sqrt{3}$

직각삼각형 BCP_1에서 $\angle C=30^\circ$, $\overline{BC}=2\sqrt{3}$이므로

$\overline{BP_1}=2\sqrt{3}\sin 30^\circ=\sqrt{3}$

$\therefore S_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{3})^2 \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4}$

$\overline{BP_1} = \overline{BB_1}$ 이므로 $\overline{B_1C} = \overline{BC} - \overline{BB_1} = \sqrt{3} = \frac{1}{2}\overline{BC}$

모든 자연수 n에 대하여

$\overline{B_{n_1}P_n} = \overline{B_{n-1}C}\sin 30^\circ$ 이고, $\overline{B_{n-1}P_n} = \overline{B_{n-1}B_n}$ 이므로

$\overline{B_nC} = \overline{B_{n-1}C} - \overline{B_{n-1}B_n} = \overline{B_{n-1}C} - \overline{B_{n-1}C}\sin 30^\circ$

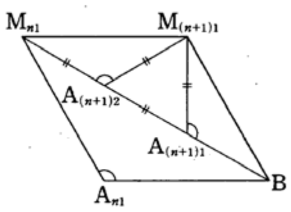
$= \frac{1}{2}\overline{B_{n-1}C}$

따라서 $\triangle B_{n-1}CP_n$과 $\triangle B_nCP_{n+1}$은 닮음비가 2 : 1이다.

$\therefore \overline{B_nP_{n+1}} = \frac{1}{2}\overline{B_{n-1}P_n} \quad \therefore S_{n+1} = \frac{1}{4}S_n$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\frac{\pi}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\pi}{3}$$

58. 정답 ①



$\angle M_{n1}A_{(n+1)2}M_{(n+1)1} = \angle M_{(n+1)1}A_{(n+1)1}B = 120°$ 이므로

$\angle M_{(n+1)1}A_{(n+1)2}A_{(n+1)1} = \angle M_{(n+1)1}A_{(n+1)1}A_{(n+1)1} = 60°$

따라서 삼각형 $\triangle M_{(n+1)1}A_{(n+1)2}A_{(n+1)1}$ 은 정삼각형이다.

따라서 $\overline{M_{(n+1)1}A_{(n+1)2}} = \overline{A_{(n+1)2}A_{(n+1)1}} = \overline{A_{(n+1)1}B}$이다.

삼각형 $A_{n1}BM_{n1}$과 삼각형 $A_{(n+1)2}M_{(n+1)1}M_{n1}$은 닮음이고

$\overline{A_{n1}M_{n1}} : \overline{M_{n1}B} = 1 : \sqrt{3}$ 이므로

$\overline{A_{n1}M_{n1}} : \overline{A_{(n+1)2}M_{n1}} = 1 : \frac{\sqrt{3}}{3}$ 이다. 따라서 넓이의 비는 $1 : \frac{1}{3}$ 이다. 그런데 개수가 2배씩 증가하므로

$S_n : S_{n+1} = 1 : \frac{2}{3}$

$S_1 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \frac{2}{3}\pi - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 120° = \frac{1}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{4}$

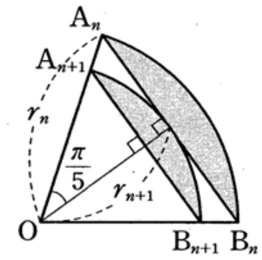
$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\frac{1}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{4}}{1-\frac{2}{3}} = \pi - \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

59. 정답 ②

부채꼴 A_nOB_n의 반지름의 길이를 r_n 이라 하면

$\frac{r_{n+1}}{r_n} = \cos\frac{\pi}{5}$ 이므로 $r_{n+1} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}r_n$

따라서 두 호 A_nB_n, $A_{n+1}B_{n+1}$의 길이의 비는 $1 : \frac{1+\sqrt{5}}{4}$



이므로 인접한 두 활꼴의 넓이의 비는

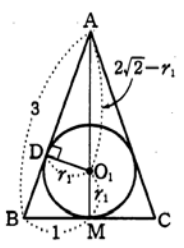
$1 : \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2$, 즉 $1 : \frac{3+\sqrt{5}}{8}$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n = S_1 \cdot \frac{1}{1-\frac{3+\sqrt{5}}{8}} = S_1 \cdot \frac{8}{5-\sqrt{5}}$$

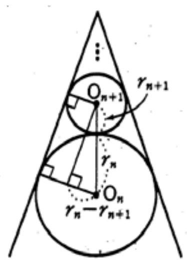
$$= S_1 \cdot \frac{8(5+\sqrt{5})}{20} = S_1 \cdot \frac{10+2\sqrt{5}}{5}$$

$\therefore k = 5$

60. 정답 ②



[그림 1]



[그림 2]

[그림 1]에서 $\triangle AO_1D \backsim \triangle ABM$ 이므로

$(2\sqrt{2} - r_1) : r_1 = 3 : 1 \qquad \therefore r_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

[그림 2]에서 $(r_{n+1} + r_n) : (r_n - r_{n+1}) = 3 : 1$ 이므로

$r_{n+1} = \frac{1}{2}r_n \qquad \therefore r_n = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$L_n = 2\pi r_n = \sqrt{2}\pi\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 이므로

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} L_n = \frac{\sqrt{2}\pi}{1-\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}\pi$$

61. 정답 36

반원 T_n 의 넓이를 S_n이라 하고, 반원 T_1의 반지름의 길이를 r_1이라 하면

$r_1(\sqrt{2}+1) = 6$ 에서 $r_1 = 6(\sqrt{2}-1)$

$\therefore S_1 = 18(\sqrt{2}-1)^2\pi$

$\angle P_1OA_2 = \frac{\pi}{4}$, $\overline{OP_1} = 6$ 이므로

$\overline{OA_2} = 6 \times \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{3}$ 즉, $r_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}r_1$

$\therefore S_2 = \frac{1}{2}S_1$

같은 방법으로 $S_{n+1} = \frac{1}{2}S_n$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

따라서 구하는 넓이의 총합은

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{18(\sqrt{2}-1)^2}{1-\frac{1}{2}}\pi = 36(3-2\sqrt{2})\pi$$

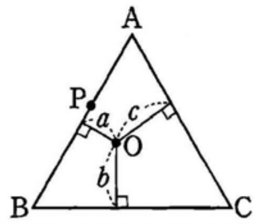
$\therefore p+q = 108-72 = 36$

[다른 풀이]

$\overline{\mathrm{OP}_{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{\mathrm{OP}_n}$에서 $r_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}r_n$

$\therefore\ S_{n+1} = \frac{1}{2}S_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

62. ⑤ 발견적 추론능력(추측) - 수열의 극한



그림과 같이 점 A_1에서 선분 OB_1에 내린 수선의 발을 C라 하고, 점 B_2를 지나고 선분 OB_1에 수직인 직선이 선분OA와 만나는 점을 D라 하자.

삼각형 AB_1A_1이 이등변 삼각형이고, $A_1B_1A_2$가 정삼각형 이므로 $\overline{A_1B_1} = 4$,

$\overline{\mathrm{B_1C}} = \overline{\mathrm{CB_2}} = 2$, $\overline{A_1C} = \overline{A_1B_1}\sin 60^\circ = 2\sqrt{3}$ 이다.

이때, $\overline{DB_2} = \overline{A_2B_2} = x$라 두면, 사다리꼴 AB_1B_2D에서 중점 연결 정리에 의해 $\overline{\mathrm{A_1C}} = \frac{\overline{\mathrm{AB_1}}+\overline{\mathrm{DB_2}}}{2}$ 즉, $x = 4(\sqrt{3}-1)$이다.

따라서 삼각형 $A_1B_1B_2$와 삼각형 $A_2B_2B_3$의 닮음비가 $1 : \sqrt{3}-1$이므로 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $S_1 = 4\sqrt{3}$ 이고, 공비가 $(\sqrt{3}-1)^2$인 등비수열 이다.

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{4\sqrt{3}}{1-(\sqrt{3}-1)^2} = 8+4\sqrt{3}$$

63. 정답 ②

[해설] 직선 A_0C의 방정식은 $y = \frac{4}{3}x$이고, 직선 B_0C의 방정식은 $y = 4x-8$이다.

$\overline{A_0B_0} = 2$이고, 삼각형 $A_1A_0B_0$은 이등변삼각형이므로 점 A_1의 x좌표는 1이다.

따라서 점 A_1의 y좌표는 $\frac{4}{3}$이므로, 점 B_1의 x좌표는

$\frac{4}{3} = 4x-8,\ x = \frac{7}{3}$

$\therefore \overline{A_1B_1} = \frac{7}{3}-1 = \frac{4}{3}$

$\therefore \overline{A_1B_1} = \frac{2}{3}\overline{A_0B_0}$

따라서 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $\frac{1}{2}\times 2\times\frac{4}{3} = \frac{4}{3}$이고, 공비가 $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\frac{4}{3}}{1-\frac{4}{9}} = \frac{12}{5}$$

64. 정답 ⑤

그림 R_2에서 삼각형 $\mathrm{A_2B_1B_2}$는 직각이등변삼각형이고 $\overline{\mathrm{A_2B_1}} = 4$이므로 $\overline{\mathrm{A_2B_2}} = 2\sqrt{2}$이다. 따라서 반지름의 길이의 비가 $\sqrt{2} : 1$이므로 부채꼴 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$과 부채꼴 $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}$의 넓이의 비는 $2:1$이다.

부채꼴 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$의 넓이의 합을 P_n이라 하면 수열 $\{P_n\}$은 첫째항이 4π이고, 공비가 $\frac{1}{2}$인 무한등비수열이므로

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \frac{4\pi}{1-\frac{1}{2}} = 8\pi$$

한편, 도형 $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{C}_n$의 넓이는 부채꼴 $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$의 넓이와 삼각형 $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1}$의 넓이의 차와 같고,

(도형 $\mathrm{A_2B_2C_1}$의 넓이)

$=$(부채꼴 $\mathrm{A_2B_1C_1}$의 넓이)$-$(삼각형 $\mathrm{A_2B_1B_2}$의 넓이)

$= 2\pi - \frac{(2\sqrt{2})^2}{2} = 2\pi-4$

이므로 도형 $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{C}_n$의 넓이의 합을 Q_n이라 하면

$$\lim_{n\to\infty} Q_n = \frac{2\pi-4}{1-\frac{1}{2}} = 4\pi-8$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} P_n - \lim_{n\to\infty} Q_n = 8\pi-(4\pi-8) = 4\pi+8$$

65. 정답 3

$A_n\left(a_n,\ \frac{1}{a_n}\right)$이라 하면 $B_n\left(-\frac{a_n}{2},\ \frac{1}{a_n}\right)$, $C_n\left(\frac{a_n}{2}, -\frac{1}{a_n}\right)$

$A_{n+1}\left(\frac{a_n}{2},\ \frac{2}{a_n}\right)$, $B_n\left(-\frac{a_n}{4},\ \frac{2}{a_n}\right)$이므로

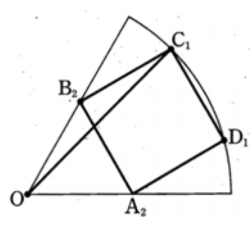
$l_n = a_n - \left(-\frac{a_n}{2}\right) = \frac{3a_n}{2}$

$l_{n+1} = \frac{a_n}{2} - \left(-\frac{a_n}{4}\right) = \frac{3a_n}{4}$

따라서, $l_{n+1} = \frac{1}{2}l_n$이므로 l_n은 등비수열이다.

$l_1 = \frac{3}{2}$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} l_n = \frac{\frac{3}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 3$

66. 정답 ①



삼각형 $\mathrm{OB_2C_1}$에서

$\overline{\mathrm{B_2C_1}} = x_1$으로 놓으면

$\overline{\mathrm{OB_2}} = \overline{\mathrm{OA_2}} = \overline{\mathrm{A_2B_2}} = \overline{\mathrm{B_2C_1}}$이므로

$\overline{\mathrm{OB_2}} = x_1$, $\overline{\mathrm{OC_1}} = 1$, $\angle\mathrm{OB_2C_1} = 150^\circ$

이므로 제2코사인법칙에 의해

$1^2 = {x_1}^2 + {x_1}^2 - 2x_1\cdot x_1\cos 150^\circ$

$\therefore\ x_1^{\,2}=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$

마찬가지 방법으로 n번 째 정사각형 의 한 변의 길이를 x_n으로 놓으면

$x_{n-1}^{\,2}=x_n^{\,2}+x_n^{\,2}-2x_n\cdot x_n\cos150°$

$x_n^{\,2}=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}x_{n-1}^{\,2}=(2-\sqrt{3})x_{n-1}^{\,2}$

수열 $\left\{x_n^2\right\}$은 첫째항이 $2-\sqrt{3}$ 이고, 공비가 $2-\sqrt{3}$ 인 등비수열을 이루므로 만들어지는 모든 정사각형들의 넓이의 합은

$x_1^{\,2}+x_2^{\,2}+\cdots=\dfrac{2-\sqrt{3}}{1-(2-\sqrt{3})}=\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

67. 정답 ⑤

[출제의도] 무한등비수열의 극한을 이해하고 이를 활용하여 극한값 구하기

$\triangle C_1OQ_1$ 에서 $\angle C_1OQ_1=30^\circ$ 이고 $\overline{OC_1}=2$ 이므로 $\overline{C_1Q_1}=1$ 이다. 이 때, 원 C_n 의 반지름의 길이를 r_n, 원 C_{n+1} 의 반지름의 길이를 r_{n+1} 이라 하면, $r_1=1$ 이고 $\sin 30^\circ=\dfrac{r_{n+1}-r_n}{r_{n+1}}=\dfrac{1}{2}$ 에서 $r_{n+1}=2r_n$ 이므로 $S_{n+1}=4S_n$ 이 된다.

$S_1=2\times\triangle C_2C_1B_1=\dfrac{\sqrt{15}}{2}$ 이므로 $S_n=\dfrac{\sqrt{15}}{2}4^{n-1}$ 이다.

따라서 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{4^n+3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{15}}{8}4^n}{4^n+3^n}=\frac{\sqrt{15}}{8}$ 이다.

68. 정답 ②

문제의 그림에서 $\overline{M_1M_2}=1$, $\overline{B_2M_2}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore\ \overline{A_1B_2}=1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$S_1=2\times\left(\dfrac{1}{2}\times\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\times1\right)=1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

또, 그림에서 나타나는 직사각형들은 모두 닮음이고 닮음비를 구하면

$\overline{B_nC_n}:\overline{B_{n+1}C_{n+1}}=1:\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore$ 넓이비 $S_n:S_{n+1}=1:\dfrac{1}{3}$

따라서, S_n은 첫항이 $1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, 공비가 $\dfrac{1}{3}$인 등비수열이다.

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3-\sqrt{3}}{2}$$

69. 정답 ①

$\triangle OA_1B_1$은 정삼각형이므로 $\overline{OO_1}=4\sqrt{3}$

$\triangle OO_1A_2$가 직각삼각형이므로 원 C_1의 반지름의 길이 $\overline{O_1A_2}$는

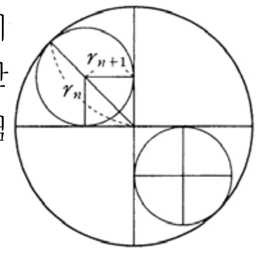
$\overline{O_1A_2}=\overline{OO_1}\sin30°=2\sqrt{3}$

$\therefore\ S_1=(2\sqrt{3})^2\pi=12\pi$

$\overline{OA_2}=\overline{OO_1}\cos30°=6$에서 $\triangle OA_2B_2$는 한 변의 길이가 6인 정삼각형이므로 원C_1 과 원C_2의 넓이의 비는 16:9이다.

$\therefore\ S_{n+1}=\dfrac{9}{16}S_n\qquad\therefore\ \displaystyle\sum_{1}^{\infty}S_n=\frac{12\pi}{1-\frac{9}{16}}=\frac{192}{7}\pi$

70. $a+b=14$



그림과 같이 n번째 만든 원의 반지름의 길이를 r_n이라고 하면 그림과 같이 $n+1$번째 만든 원의 반지름의 길이r_{n+1}과의 관계는 그림과 같이 나타낼 수 있다.

$r_{n+1}^{\,2}+r_{n+1}^{\,2}=(r_n-r_{n+1})^2$,

$\sqrt{2}r_{n+1}=r_n-r_{n+1}$

$(\sqrt{2}+1)r_{n+1}=r_n$

$\therefore r_{n+1}=\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}r_n=(\sqrt{2}-1)r_n$

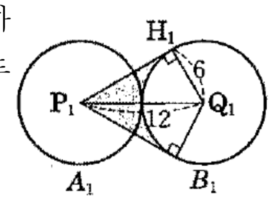
따라서 색칠된 모든 부채꼴의 호의 길이의 합은

$$\left(2\times\pi\times2\sqrt{2}\times\frac{1}{2}\right)+\left\{2\times\pi\times2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)\times\frac{1}{2}\times2\right\}+\left\{2\times\pi\times2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)^2\times\frac{1}{2}\times2^2\right\}+\cdots$$

$$=\frac{2\sqrt{2}\pi}{1-2(\sqrt{2}-1)}=\frac{2\sqrt{2}\pi}{3-2\sqrt{2}}=\pi(8+6\sqrt{2})$$

$\therefore a+b=14$

71. 정답 ②



두 원 A_1, B_1의 중심을 각각 P_1, Q_1이라 하면 두 원 A_1, B_1의 반지름의 길이는 모두 6이므로 오른쪽 그림에서 $\overline{P_1Q_1}=12$,

$\angle P_1Q_1H_1=\dfrac{\pi}{3}$이다.

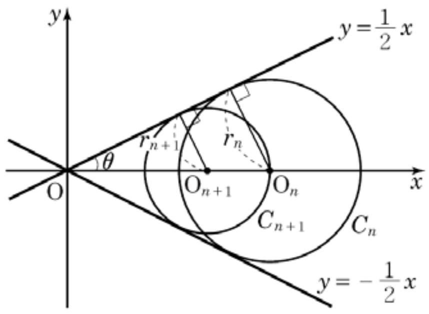
$\therefore\ S_1=2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot6\cdot12\cdot\sin\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{1}{2}\cdot6^2\cdot\dfrac{2\pi}{3}=36\sqrt{3}-12\pi$

원 B_{n+1}의 반지름의 길이는 원 B_n의 반지름의 길이의 $\dfrac{1}{2}$이므로

$S_{n+1}=\dfrac{1}{4}S_n$이다.

$\therefore\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{36\sqrt{3}-12\pi}{1-\frac{1}{4}}=48\sqrt{3}-16\pi$

72. 정답 ④



위의 그림에서 원 C_n의 중심을 O_n, 반지름의 길이를 r_n, 직선 $y=\frac{1}{2}x$와 x축이 이루는 각의 크기를 θ라 하면 $\tan\theta=\frac{1}{2}$이므로 $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$이다.

$\overline{\mathrm{OO}_n}=\sqrt{5}\,r_n$, $\overline{\mathrm{OO}_{n+1}}=\sqrt{5}\,r_{n+1}$

이때, $\overline{\mathrm{OO}_{n+1}}+\overline{\mathrm{O}_n\mathrm{O}_{n+1}}=\overline{\mathrm{OO}_n}$이므로

$(\sqrt{5}+1)r_{n+1}=\sqrt{5}\,r_n$

$r_{n+1}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1}r_n=\frac{5-\sqrt{5}}{4}r_n$

$\therefore r_n=\frac{2\sqrt{5}}{5}\left(\frac{5-\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1}$ $\left(\because r_1=\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$

즉,

$S_n=\pi\left\{\frac{2\sqrt{5}}{5}\left(\frac{5-\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1}\right\}^2$

$=\frac{32\pi}{75-25\sqrt{5}}\left(\frac{15-5\sqrt{5}}{8}\right)^n$

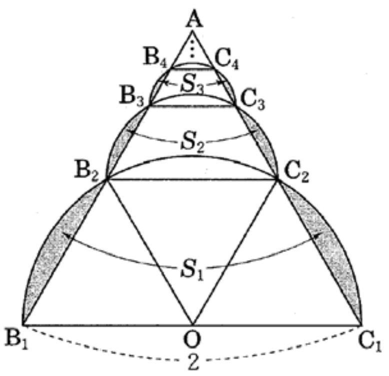
이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{32\pi}{75-25\sqrt{5}}\cdot\frac{\frac{15-5\sqrt{5}}{8}}{1-\frac{15-5\sqrt{5}}{8}}$$

$$=\frac{8(7+5\sqrt{5})}{95}\pi$$

73. 정답 ⑤

그림에서 $\overline{B_1C_1}$의 중점을 O라 하면 $\triangle B_1OB_2$, $\triangle B_2OC_2$, $\triangle C_1C_2O$는 한 변의 길이가 1인 정삼각형이다.



$S_1=2\left(\frac{1}{2}\times1^2\times\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\times1^2\right)=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\overline{B_{n+1}C_{n+1}}=\frac{1}{2}\overline{B_nC_n}$

이므로

$S_{n+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^2S_n=\frac{1}{4}S_n$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{4}{9}\pi-\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

74. 정답 ②

색칠된 직사각형을 모두 모으면 닮은 직사각형이 된다.

$\mathrm{S}_1=\left(5\times\frac{3}{4}\right)\left(4\times\frac{4}{5}\right)=20\times\frac{3}{5}=12$

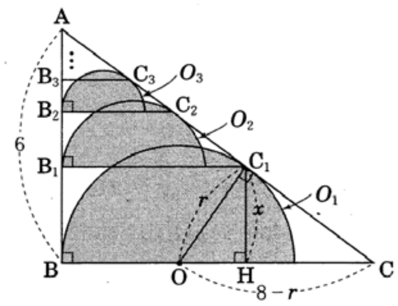
$\mathrm{S}_2=\left(5\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\right)\left(4\times\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}\right)=20\times\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{16}{5}$

⋮

$\mathrm{S}_n=20\times\left(\frac{3}{5}\right)^n$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{12}{1-\frac{3}{5}}=30$$

75. 정답 ③



위의 그림에서 반원 O_1의 중심을 O라 하고 반지름의 길이를 r라 하면 삼각형 OC_1C와 삼각형 ABC는 닮은 도형이므로

$8-r:r=10:6$, $10r=6(8-r)$

$5r=24-3r$ $\therefore r=3$

$\therefore S_1=\frac{9}{2}\pi$

점 C_1에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H라 하고 $\overline{C_1H}=x$라 하면 삼각형 OHC_1과 삼각형 ABC는 닮은 도형이므로

$3:x=10:8$, $10x=24$

$\therefore x=\frac{12}{5}$

$\therefore \overline{AB_1}=6-\frac{12}{5}=\frac{18}{5}$

이 때, 삼각형 ABC와 삼각형 AB_1C_1은 닮은 도형이고, 그 닮음비는 $6:\frac{18}{5}$이므로 넓이의 비는 $1:\frac{9}{25}$이다.

따라서 구하는 값은 첫째항이 $\frac{9}{2}\pi$, 공비가 $\frac{9}{25}$인 무한등비급수이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{9}{2}\pi}{1-\frac{9}{25}}=\frac{225}{32}\pi$$

76. 정답 ④ 수학 내적 문제 해결 능력 - 수열의 극한
원 C_k의 지름을 m : n으로 내분하여 나누어진 두 선분을 지름으로 하는 두 원 C_p, C_q의 넓이의 합과 원 C_k의 넓이의 비를 구하여 각 도형의 넓이의 비를 구한다. 원 C_k의 반지름의 길이를 R라 하면 원 C_k의 넓이는 πR^2이고 두 원 C_p, C_q의 넓이는 각각 $\dfrac{\pi m^2R^2}{(m+n)^2}$, $\dfrac{\pi n^2R^2}{(m+n)^2}$이므로 두 원 C_p, C_q의 넓이의 합은

$\dfrac{\pi m^2R^2}{(m+n)^2}+\dfrac{\pi n^2R^2}{(m+n)^2}=\dfrac{m^2+n^2}{(m+n)^2}\times\pi R^2$이다.

다음 단계로 두 원 C_p, C_q의 지름을 각각 m : n으로 내분하여 나누어진 네 선분을 지름으로 하는 네 개의 원으로 구성된 도형의 넓이를 구해보자.
원 C_k의 넓이에서 두 원 C_p, C_q의 널비의 합을 구하는 과정에서 두 원 C_p, C_q의 넓이의 합은 원 C_k의 넓이의 $\dfrac{m^2+n^2}{(m+n)^2}$배임을 일았다.
그러므로 원 C_p의 지름을 m : n으로 내분하여 나누어진 두 선분을 지름으로 하는 두 원의 넓이의 합은 $\dfrac{\pi m^2R^2}{(m+n)^2}\times\dfrac{m^2+n^2}{(m+n)^2}$이고 원 C_q의 지름을 m : n으로 내분하여 나누어진 두 선분을 지름으로 하는 두 원의 넓이의 합은 $\dfrac{\pi n^2R^2}{(m+n)^2}\times\dfrac{m^2+n^2}{(m+n)^2}$이다.
즉, 네 개의 원의 넓이의 합은

$\dfrac{\pi n^2R^2}{(m+n)^2}\times\dfrac{m^2+n^2}{(m+n)^2}+\dfrac{\pi m^2R^2}{(m+n)^2}\times\dfrac{m^2+n^2}{(m+n)^2}$

$=\left\{\dfrac{m^2+n^2}{(m+n)^2}\right\}^2\times\pi R^2$이다.

수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 π이고 공비가 $\dfrac{m^2+n^2}{(m+n)^2}$인 무한비수열이므로

$$S_1-S_2+S_3-S_4+\cdots=\frac{\pi}{1+\dfrac{m^2+n^2}{(m+n)^2}}=\frac{\pi(m+n)^2}{2(m^2+nm+n^2)}$$

그런데 $S_1-S_2+S_3-S_4+\cdots=\dfrac{18}{31}$이므로

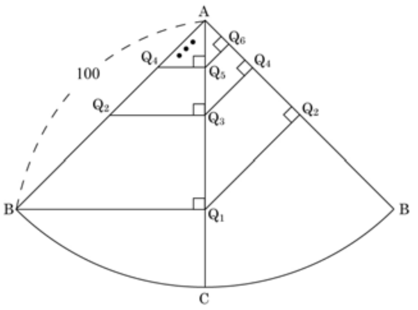
$$\frac{\pi(m+n)^2}{2(m^2+nm+n^2)}=\frac{18}{31}$$

$5m^2-26mn+5n^2=0$

$(5m-n)(m-5n)=0$

따라서 $5m=n$이거나 $m=5n$이므로 서로소인 두 자연수 m, n에 대하여 $m+n=6$이다.

77. 정답 200
[출제의도] 무한등비급수의 합을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기



$\angle BAC=45^\circ$이므로

$l_1=50\sqrt{2}$, $l_2=50$, $l_3=25\sqrt{2}$, $\cdots$

따라서, $l_n=50\sqrt{2}\times\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$ 이다.

$$\sum_{n=1}^{\infty}l_n=\frac{50\sqrt{2}}{1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}}=100+100\sqrt{2}$$

$\therefore\ a+b=200$

78. 정답 9
주어진 그림에서

$x_1=3,\ x_{n+1}=\dfrac{1}{2}x_n+3\ (n\geq 1)$

$x_{n+1}-6=\dfrac{1}{2}(x_n-6)$

$x_n-6=(-3)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\therefore\ x_n=6-3\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\therefore\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(12-x_{n+1}-x_n)$

$=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left\{3\left(\frac{1}{2}\right)^n+3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$

$=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}9\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{\dfrac{9}{2}}{1-\dfrac{1}{2}}=9$

79. 정답 25
[출제의도] 도형의 성질과 극한을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n^2M}{(6n+3)^2}+\frac{(2n+1)^2M}{(6n+3)^2}+\frac{(3n+2)^2M}{(6n+3)^2}\right\}$$

$=\dfrac{7}{18}M$

$\therefore\ p+q=25$

80. 정답 13

$\overline{A_1A_2}=2,\ \overline{A_nA_{n+1}}=\dfrac{2}{3}\overline{A_{n-1}A_n}$이므로 $\overline{A_nA_{n+1}}=2\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$

$x_{2n}=x_{2n-1}-\overline{A_{2n-1}A_{2n}}\cdot\cos30^\circ$

$\quad=x_{2n-1}-2\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2n-2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=x_{2n-1}-\sqrt{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2n-2}$

$x_{2n+1} = x_{2n} - \sqrt{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{2n-2} + 2\left(\frac{2}{3}\right)^{2n-1}$

$x_{2n+1} = x_1 + \sum_{k=1}^{n-1}\left\{-\sqrt{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{2k-2} + 2\left(\frac{2}{3}\right)^{2k-1}\right\}$

수열 $\{x_n\}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{2n+1}$이다.

따라서

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} x_n &= \lim_{n\to\infty} x_{2n+1} \\ &= x_1 + \sum_{k=1}^{\infty}\left\{-\sqrt{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{2k-2} + 2\left(\frac{2}{3}\right)^{2k-1}\right\} \\ &= 2 - \frac{\sqrt{3}}{1-\frac{4}{9}} + \frac{\frac{4}{9}}{1-\frac{4}{9}} = 2 - \frac{9\sqrt{3}}{5} + \frac{12}{5} = \frac{22-9\sqrt{3}}{5}\end{aligned}$$

$\therefore\ 5(a+b) = 13$

81. 정답 ①

$\overline{AB}=2$이고 삼각형 ABP_0은 직각이등변삼각형이므로

$\overline{AP_0} = \overline{BP_0} = \sqrt{2}$ 이다.

두 반원은 크기가 같으므로 두 반원의 넓이의 합은 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{2}}{2}$인 원의 넓이와 같다.

$\therefore\ S_1 = \pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{2}$

$\overline{AP_0} : \overline{AP_1} = 1 : \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\overline{AP_{2n-1}} : \overline{AP_{2n+1}} = 1 : \frac{\sqrt{2}}{2}$

이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$은 첫째항이 $\frac{\pi}{2}$, 공비가 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$

인 무한등비급수의 합이다.

$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\frac{\pi}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \pi$