P PL

M ATH

L AB

주간지

6주차

수열의 합과 수학적 귀납법

PPL 수학연구소

About PPL 수학연구소
고등학교 수능 및 내신 수학을 연구하고 토론하는
수학 선생님들의 집단입니다.
모의고사 제작, 검토, 해설서 제작 등을 하고 있으며
대한민국 고등 교육의 발전을 위해 언제나 노력하고
있습니다.
모든 문의는 '팀장 오성원
dhtjddnjs0327@naver.com '으로 부탁드립니다.

제작 | PPL 수학연구소

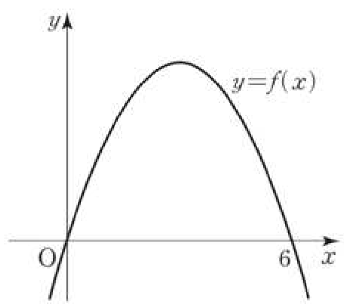
오성원	홍익대학교 수학교육과
김재식	한양대학교 미디어커뮤니케이션학과
김서영	국민대학교 경영정보학부
김대현	건국대학교 수학과
강현식	홍익대학교 수학교육과
박상우	건국대학교 교육공학과
박다빈	중앙대학교 건설환경플랜트공학과
신동하	성균관대학교 수학교육과
이경민	서울대학교 수학교육과
안정인	경희대학교 응용물리학과
박세영	홍익대학교 수학교육과

PML 주간지는 수많은 기출문제들 중 PPL 수학연구소에서 엄선한 교육청, 사관학교, 평가원의 기출문제들과 수능특강, 수능완성의 변형 문제들로 구성된 주간지입니다.
많은 학생들에게 도움이 되길 바랍니다.

각 주차별로 정해진 단원마다 두 가지의 난이도로 구성되어 있습니다.
STEP 1 : 어려운 3점 - 쉬운 4점 난이도의 문항
STEP 2 : 일반 4점 - 준킬러 4점 난이도의 문항

STEP 1

1. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 할 때, 이차함수 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+3x$에 대하여 $S_n=2f(n)$이다. a_6의 값은? [4점]



① -9 ② -7 ③ -5
④ -3 ⑤ -1

[2017학년도 고3 7월 나형 13번]

2. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1>0$이고, 모든 자연수 n, n'에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}4a_n & (n=2k-1)\\ \dfrac{1}{a_n} & (n=2k)\end{cases}$$ 를 만족시킨다.

$a_7+a_8=\frac{5}{2}$일 때, $\sum_{k=1}^{12}a_k$의 값을 구하시오.

3. 양의 실수 x에 대하여 $\log x$의 소수 부분을 $f(x)$라 할 때, $\sum_{k=1}^{10} f(2^k) = m\log 2 - n$이다. 두 자연수 m, n에 대하여 $m+n$의 값을 구하시오. [4점]

[2015학년도 고3 3월 B형 26번]

4. 수열 $\{a_n\}$의 각 항이

$a_1 = 1$
$a_2 = 1+3$
$a_3 = 1+3+5$
$\vdots$
$a_n = 1+3+5+\cdots+(2n-1)$
$\vdots$

일 때, $\log_4 \left(2^{a_1} \times 2^{a_2} \times 2^{a_3} \times \cdots \times 2^{a_{12}}\right)$의 값을 구하시오. [4점]

[2018학년도 고3 7월 나형 16번]

5. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$\sum_{k=1}^{10}(a_k+1)^2=28$, $\sum_{k=1}^{10}a_k(a_k+1)=16$일 때,

$\sum_{k=1}^{10}(a_k)^2$의 값을 구하시오. [4점]

[2018학년도 대수능 나형 27번]

6. 자연수 n에 대하여 $f(n)$이 다음과 같다.

$$f(n)=\begin{cases}\log_3 n & (n\text{이 홀수})\\ \log_2 n & (n\text{이 짝수})\end{cases}$$

수열 $\{a_n\}$이 $a_n=f(6^n)-f(3^n)$일 때, $\sum_{n=1}^{15}a_n$의 값은? [3점]

① $120(\log_2 3-1)$ ② $105\log_3 2$ ③ $105\log_2 3$
④ $120\log_2 3$ ⑤ $120(\log_3 2+1)$

[2014학년도 대수능 A형 13번]

7. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 15$이고,

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1} - a_k) = 2n+1 \quad (n \geq 1)$$

을 만족시킨다. a_{10}의 값을 구하시오. [4점]

[2015학년도 6월 A형 26번]

8. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 2$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{a_n}{2-3a_n} & (n\text{이 홀수인 경우}) \\ 1+a_n & (n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $\sum_{n=1}^{40} a_n$의 값은? [3점]

① 30 ② 35 ③ 40 ④ 45 ⑤ 50

[2019학년도 대수능 나형 13번]

9. n이 자연수일 때, x에 대한 이차방정식

$$x^2-(2n-1)x+n(n-1)=0$$

의 두 근을 α_n, β_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{81} \frac{1}{\sqrt{\alpha_n}+\sqrt{\beta_n}}$의 값을 구하시오. [4점]

[2020학년도 9월 나형 26번]

10. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10} a_k=3,\ \sum_{k=1}^{10}(a_k+b_k)=9$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10}(b_k+k)$의 값을 구하시오. [4점]

[2020년 고2 11월 26번]

STEP 2

11. 3 이상의 자연수 n에 대하여 집합

$A_n = \{(p, q) | p < q$이고 p, q는 n 이하의 자연수$\}$

이다. 집합 A_n의 모든 원소 (p, q)에 대하여 q의 값의 평균을 a_n이라 하자. 다음은 3 이상의 자연수 n에 대하여 $a_n = \frac{2n+2}{3}$ 임을 수학적 귀납법을 이용하여 증명한 것이다.

> (ⅰ) $n=3$일 때, $A_3 = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$이므로
>
> $a_3 = \frac{2+3+3}{3} = \frac{8}{3}$ 이고 $\frac{2\times3+2}{3} = \frac{8}{3}$ 이다.
>
> 그러므로 $a_n = \frac{2n+2}{3}$ 가 성립한다.
>
> (ⅱ) $n=k\ (k \geq 3)$일 때, $a_k = \frac{2k+2}{3}$ 가 성립한다고 가정하자. $n=k+1$일 때,
>
> $A_{k+1} = A_k \cup \{(1, k+1), (2, k+1), \cdots, (k, k+1)\}$
>
> 이고 집합 A_k의 원소의 개수는 $\boxed{(가)}$ 이므로
>
> $$a_{k+1} = \frac{\boxed{(가)} \times \frac{2k+2}{3} + \boxed{(나)}}{{}_{k+1}\mathrm{C}_2}$$
>
> $$= \frac{2k+4}{3} = \frac{2(k+1)+2}{3}$$
>
> 이다.
>
> 따라서 $n=k+1$일 때도 $a_n = \frac{2n+2}{3}$ 가 성립한다.
>
> (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 3 이상의 자연수 n에 대하여
>
> $a_n = \frac{2n+2}{3}$ 이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 할 때, $f(10)+g(9)$의 값은? [4점]

① 131 ② 133 ③ 135 ④ 137 ⑤ 139

[2020년 고3 10월 나형 18번]

12. 다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수를 구하시오. [4점]

> (가) $a < b < c \leq 20$
>
> (나) 세 변의 길이가 a, b, c인 삼각형이 존재한다.

[2020년 고3 10월 가형 29번]

13. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라고 할 때, 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $S_{2n-1}=1$
> (나) 수열 $\{a_n a_{n+1}\}$은 등비수열이다.

$S_{10}=33$일 때, S_{18}의 값을 구하시오.〔4점〕

[2021년 고2 9월 28번]

14. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$\begin{cases} a_{3n-1}=2a_n+1 \\ a_{3n}=-a_n+2 \\ a_{3n+1}=a_n+1 \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_{11}+a_{12}+a_{13}$의 값은? [4점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

[2021학년도 6월 나형 14번]

15.

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 구간 $(0,1]$에서

$f(x)=\begin{cases} 3 & (0<x<1) \\ 1 & (x=1) \end{cases}$

이고, 모든 실수 x에 대하여 $f(x+1)=f(x)$를 만족시킨다.

$\sum_{k=1}^{20} \frac{k \times f(\sqrt{k})}{3}$의 값은? 〔4점〕

[2022학년도 고3 6월 13번]

16. 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2}=\begin{cases} 2a_n+a_{n+1} & (a_n \le a_{n+1}) \\ a_n+a_{n+1} & (a_n > a_{n+1}) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_3=2$, $a_6=19$가 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? 〔4점〕

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

[2021학년도 9월 나형 21번]

17. 첫째항이 짝수인 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+3 & (a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ \dfrac{a_n}{2} & (a_n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_5=5$일 때, 수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 될 수 있는 모든 수의 합을 구하시오. [4점]

[2020학년도 고3 10월 나형 29번]

18. 첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n-2 & (a_n\ge 0) \\ a_n+5 & (a_n<0) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_{15}<0$이 되도록 하는 a_1의 최솟값을 구하시오. [4점]

[2022학년도 고3 4월 21번]

19. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} \dfrac{1}{a_n} & (n\text{이 홀수인 경우}) \\ 8a_n & (n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

이고 $a_{12}=\dfrac{1}{2}$일 때, a_1+a_4의 값은? [4점]

① $\dfrac{3}{4}$ ② $\dfrac{9}{4}$ ③ $\dfrac{5}{2}$ ④ $\dfrac{17}{4}$ ⑤ $\dfrac{9}{2}$

[2022학년도 6월 9번]

20. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 자연수 k에 대하여 $a_{4k}=r^k$이다.
(단, r는 $0<|r|<1$인 상수이다.)
(나) $a_1<0$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2}=\begin{cases} a_n+3 & (|a_n|<5) \\ -\dfrac{1}{2}a_{n+1} & (|a_n|\geq 5) \end{cases}$$

이다.

$|a_m|\geq 5$를 만족시키는 100이하의 자연수 m의 개수를 p라 할 때, $p+a_1$의 값은? [4점]

[2023학년도 9월 15번]

21. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lvert a_n \rvert + a_{n+1} = n+6 \ (n \geq 1)$
(나) $\sum_{k=1}^{40} a_n = 520$

$\sum_{k=1}^{30} a_n$의 값을 구하시오.[4점]

[2015학년도 고3 10월 A형 30번]

22. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k,\ T_n = \sum_{k=1}^{n} \lvert a_k \rvert$라 할 때, $S_n,\ T_n$은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $S_7 = T_7$
(나) 6 이상의 모든 자연수 n에 대하여 $S_n + T_n = 84$이다.

T_{15}의 값은? [4점]

① 96 ② 102 ③ 108 ④ 114 ⑤ 120

[2021학년도 고3 7월 가형 17번]

23. 첫째항이 2이고 공비가 정수인 등비수열 $\{a_n\}$과 자연수 m이 다음 조건을 만족시킬 때, a_m의 값을 구하시오. [4점]

(가) $4 < a_2 + a_3 \le 12$
(나) $\sum_{k=1}^{m} a_k = 122$

[2020학년도 6월 나형 28번]

24. 자연수 n에 대하여 $\left|(n+\frac{1}{2})^2 - m\right| < \frac{1}{2}$ 을 만족시키는 자연수 m을 a_n이라 하자. $\sum_{k=1}^{5} a_k$ 의 값은? [4점]

① 65 ② 70 ③ 75 ④ 80 ⑤ 85

[2017학년도 고3 3월 나형 20번]

25. 수열 $\{a_n\}$은 $0 < a_1 < 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{2n} = a_2 \times a_n + 1$
(나) $a_{2n+1} = a_2 \times a_n - 2$

$a_8 - a_{15} = 63$일 때, $\dfrac{a_8}{a_1}$의 값은? [4점]

① 91 ② 92 ③ 93 ④ 94 ⑤ 95

[2021학년도 대수능 가형 21번]

26. $a > 1$인 실수 a에 대하여 $a^{\log_5 16}$이 $2^n\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$이 되도록 하는 a를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, k번째 수를 a_k라 하자. $\sum_{k=1}^{40} \log_5 a_k$의 값은? [4점]

① 185 ② 190 ③ 195 ④ 200 ⑤ 205

[2014학년도 고3 7월 나형 17번]

27. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)a_k = n(n+1)(4n-1)$$

일 때, a_{20}의 값을 구하시오. [4점]

[2017학년도 고3 4월 나형 27번]

28. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{a_n+2}{2} & (a_n\text{은 짝수}) \\ \dfrac{a_n-1}{2} & (a_n\text{은 홀수}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_1 = 20$일 때, $\sum_{k=1}^{10} a_k$의 값은? [4점]

① 38 ② 42 ③ 46 ④ 50 ⑤ 54

[2019학년도 사관학교 나형 7번]

29. 수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$$a_n = (2^{2n}-1)\times 2^{n(n-1)} + (n-1)\times 2^{-n}$$

이다. 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = 2^{n(n+1)} - (n+1)\times 2^{-n} \ \cdots\cdots \ (*)$$

임을 수학적 귀납법을 이용하여 증명한 것이다.

(ⅰ) $n=1$일 때, (좌변)$=3$, (우변)$=3$이므로 (*)이 성립한다.

(ⅱ) $n=m$일 때, (*)이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m} a_k = 2^{m(m+1)} - (m+1)\times 2^{-m}$$

이다. $n=m+1$일 때,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m+1} a_k &= 2^{m(m+1)} - (m+1)\times 2^{-m} \\ &\quad + (2^{2m+2}-1)\times \boxed{(가)} + m\times 2^{-m-1} \\ &= \boxed{(가)} \times \boxed{(나)} - \frac{m+2}{2}\times 2^{-m} \\ &= 2^{(m+1)(m+2)} - (m+2)\times 2^{-(m+1)}\end{aligned}$$

이다. 따라서 $n=m+1$일 때도 (*)이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = 2^{n(n+1)} - (n+1)\times 2^{-n}$$

이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$이라 할 때, $\dfrac{g(7)}{f(3)}$의 값은? [4점]

① 2 ② 4 ③ 8 ④ 16 ⑤ 32

[2020학년도 6월 가형 15번]

30. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은 $a_1 = a_2 = 1$, $b_1 = k$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2} = (a_{n+1})^2 - (a_n)^2, \qquad b_{n+1} = a_n - b_n + n$$

을 만족시킨다. $b_{20} = 14$일 때, k의 값은? [4점]

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

[2017학년도 9월 나형 19번]

빠른 정답

문항	답	문항	답	문항	답
1번	②	11번	③	21번	315
2번	20	12번	525	22번	④
3번	67	13번	513	23번	162
4번	325	14번	③	24번	②
5번	14	15번	190	25번	②
6번	④	16번	②	26번	⑤
7번	34	17번	142	27번	120
8번	①	18번	5	28번	50
9번	9	19번	⑤	29번	④
10번	61	20번	③	30번	④

정답 및 해설

1. ②

$f(x)=-\frac{1}{2}x^2+3x$에서, $S_n=2f(n)=-n^2+6n=-n(n-6)$

$a_n=S_{n+1}-S_n=-(n+1)(n-5)+n(n-6)$

$\therefore a_6=-7+0=-7$

2. 20

$a_{n+1}=\begin{cases}4a_n & (n=2k-1)\\ \dfrac{1}{a_n} & (n=2k)\end{cases}$ 에서

$a_2=4a_1$이고, $a_3=\frac{1}{a_2}=\frac{1}{4a_1}$, $a_4=4a_3=\frac{1}{a_1}$, $a_5=a_1$이므로,

$n=4k-3$일 때, $a_n=a_1$

$n=4k-2$일 때, $a_n=4a_1$

$n=4k-1$일 때, $a_n=\frac{1}{4a_1}$

$n=4k$일 때, $a_n=\frac{1}{a_1}$

인 규칙성을 갖는다.

$a_7+a_8=\frac{1}{4a_1}+\frac{1}{a_1}=\frac{5}{2}$에서, $a_1=\frac{1}{2}$

$\therefore \sum_{k=1}^{12}a_k=4\left(a_1+4a_1+\frac{1}{4a_1}+\frac{1}{a_1}\right)=4\left(\frac{1}{2}+2+\frac{5}{2}\right)=20$

3. 67

$\log x$의 정수 부분을 $g(x)$라 할 때,

$f(2^k)=\log 2^k-g(2^k)$

$\sum_{k=1}^{10}f(2^k)=\sum_{k=1}^{10}k\times\log 2-\sum_{k=1}^{10}g(2^k)=m\log 2-n$

$m=\frac{10\times 11}{2}=55$

$n=0\times 3+1\times 3+2\times 3+3\times 1=12$

$\therefore 55+12=67$

4. 325

수열 a_n에 대하여,

$a_n=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=2\frac{n(n+1)}{2}-n=n^2$

$\log_4\left(2^{a_1}\times 2^{a_2}\times 2^{a_3}\times\cdots\times 2^{a_{12}}\right)=\frac{1}{2}log_2\left(2^{a_1}\times 2^{a_2}\times 2^{a_3}\times\cdots\times 2^{a_{12}}\right)$,

로그의 성질을 이용하여 정리하면, 주어진 식은

$\frac{1}{2}(a_1+a_2+\cdots+a_{12})=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{12}n^2=\frac{1}{2}\frac{12\times 13\times 25}{6}=325$

$\therefore 325$

5. 14

$\sum_{k=1}^{10}a_k=S$, $\sum_{k=1}^{10}(a_k)^2=T$라 하면,

$$\sum_{k=1}^{10}(a_k+1)^2=\sum_{k=1}^{10}\{(a_k)^2+2a_k+1\}=T+2S+10=28$$

$$\sum_{k=1}^{10}a_k(a_k+1)=\sum_{k=1}^{10}\{(a_k)^2+a_k\}=T+S=16$$

위 두 식을 S, T에 대하여 연립하면,

$S=2$, $T=14$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10}(a_k)^2=T=14$$

6. ④

6^n은 짝수이고 3^n은 홀수이므로

$$\begin{aligned}a_n&=f(6^n)-f(3^n)\\&=\log_2 6^n-\log_3 3^n\\&=n(1+\log_2 3)-n\\&=(\log_2 3)n\end{aligned}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{15}a_n=\sum_{n=1}^{15}(\log_2 3)n=(\log_2 3)\sum_{n=1}^{15}n=(\log_2 3)\times\frac{15\times16}{2}=120\log_2 3$$

7. 34

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)=2n+1$에서

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)$$

$=(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_{n+1}-a_n)$

$=a_{n+1}-a_1$

$=2n+1$

$\therefore\ a_{n+1}=a_1+2n+1$

$n=9$를 대입하면 $a_1=15$이므로

$a_{10}=15+2\times9+1$

$\quad=34$

8. ①

$a_1=2$이므로

$$a_2=\frac{a_1}{2-3a_1}=\frac{2}{2-6}=-\frac{1}{2}$$

$$a_3=1+a_2=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$a_4=\frac{a_3}{2-3a_3}=\frac{\frac{1}{2}}{2-\frac{3}{2}}=1$$

$a_5=1+a_4=1+1=2$

$\vdots$

이때,

$a_n=a_{n+4}$ (n은 자연수)

이므로

$a_1+a_2+a_3+a_4$

$=a_5+a_6+a_7+a_8$

$\vdots$

$=a_{37}+a_{38}+a_{39}+a_{40}$

$=3$

따라서

$$\sum_{n=1}^{40}=10\times3=30$$

9. 9

$x^2-(2n-1)x+n(n-1)=0$에서

$(x-n)(x-n+1)=0$

$x=n$ 또는 $x=n-1$

이때, $\alpha_n=n$, $\beta_n=n-1$ 또는

$\alpha_n=n-1$, $\beta_n=n$

따라서

$$\sum_{n=1}^{81}\frac{1}{\sqrt{\alpha_n}+\sqrt{\beta_n}}$$

$$=\sum_{n=1}^{81}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$$

$$=\sum_{n=1}^{81}(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$$

$=(1-0)+(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{81}-\sqrt{80})$

$=\sqrt{81}$

$=9$

10. 61

$\displaystyle\sum_{k=1}^{10}a_k=3$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}b_k=9$에서

$$\sum_{k=1}^{10}b_k=6$$

따라서 $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(b_k+k)=\sum_{k=1}^{10}b_k+\sum_{k=1}^{10}k=6+\frac{10\times11}{2}=61$

11. ③

집합 A_k의 원소의 개수는 k 이하의 자연수 중에서 2개를 선택하는 조합의 수와 같으므로

$\boxed{\text{(가)}}={}_k\mathrm{C}_2=\dfrac{k(k-1)}{2}$

집합 $\{(1,\ k+1),\ (2,\ k+1),\ \cdots,\ (k,\ k+1)\}$에서

$k+1$이 k개이므로 그 합은 $k(k+1)$

즉, $\boxed{\text{(나)}}=k(k+1)$

그러므로 $f(k)=\dfrac{k(k-1)}{2}$, $g(k)=k(k+1)$

따라서 $f(10)+g(9)=45+90=135$

12. 525

자연수 a, b, c에 대하여 $a<b$이고 조건 (나)에서 $a+b>c$이므로 $c\geq4$이다.

(ⅰ) $c=2k$ ($k=2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ 10$)인 경우

$b=2k-1$일 때 $2\leq a\leq 2k-2$

$b=2k-2$일 때 $3\leq a\leq 2k-3$

$\vdots$

$b=k+1$일 때 $a=k$

이므로 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$(2k-3)+(2k-5)+(2k-7)+\cdots+3+1$

$=\dfrac{(k-1)\{(2k-3)+1\}}{2}=(k-1)^2$

(ⅱ) $c=2k+1$ ($k=2, 3, 4, \cdots, 9$)인 경우

$b=2k$일 때 $2 \le a \le 2k-1$

$b=2k-1$일 때 $3 \le a \le 2k-2$

$\vdots$

$b=k+2$일 때 $k \le a \le k+1$

이므로 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$(2k-2)+(2k-4)+(2k-6)+\cdots+4+2$

$=\dfrac{(k-1)\{(2k-2)+2\}}{2}=k(k-1)$

(ⅰ), (ⅱ)에서 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$\displaystyle\sum_{k=2}^{10}(k-1)^2+\sum_{k=2}^{9}k(k-1)$

$=\displaystyle\sum_{k=1}^{9}k^2+\sum_{k=1}^{9}(k^2-k)=\sum_{k=1}^{9}(2k^2-k)$

$=2\times\dfrac{9\times10\times19}{6}-\dfrac{9\times10}{2}=525$

13. 513

조건 (가)에서 $S_1=a_1=1$

수열 $\{b_n\}$을 $b_n=a_na_{n+1}$이라 하자.

조건 (나)에서 등비수열 $\{b_n\}$의 공비를 r이라 하면 $\dfrac{b_{n+1}}{b_n}$

$=\dfrac{a_{n+1}a_{n+2}}{a_na_{n+1}}=r$, $a_{n+2}=ra_n$

$S_{10}=S_{11}-a_{11}=1-r^5=33$

$r^5=-32$, $r=-2$

$S_{18}=S_{19}-a_{19}=1-r^9=513$

14. ③

$a_1=1$이므로

$a_4=a_1+1=2$

$a_4=2$이므로

$a_{11}=2a_4+1=2\times2+1=5$

$a_{12}=-a_4+2=-2+2=0$

$a_{13}=a_4+1=2+1=3$

따라서

$a_{11}+a_{12}+a_{13}=5+0+3=8$

15. 190

(i) $k=1, 4, 9, 16$일 때

$f(1)=1$이고 $f(x+1)=f(x)$이므로

$f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=1$에서

$f(\sqrt{k})=1$

(ii) $k\neq1, 4, 9, 16$일 때

$f(\sqrt{k})=3$

따라서

$\displaystyle\sum_{k=1}^{20}\frac{k\times f(\sqrt{k})}{3}$

$=\displaystyle\sum_{k=1}^{20}k\times\frac{f(\sqrt{k})}{3}$

$=30\times\dfrac{1}{3}+(210-30)\times\dfrac{3}{3}$

$=10+180=190$

16. ②

(ⅰ) $a_1 \leqq a_2$일 때,

$a_3=2a_1+a_2=2$ ⋯ ㉠

이므로 $a_2>0$

① $a_1 \geqq 0$일 때

$a_2 \leqq a_3$이므로 $a_4=2a_2+a_3=2a_2+2$

$a_3 \leqq a_4$이므로 $a_5=2a_3+a_4=2a_2+6$

$a_4 \leqq a_5$이므로 $a_6=2a_4+a_5=6a_2+10$

이때, $a_6=19$이므로 $6a_2+10=19$

$a_2=\dfrac{3}{2}$

$a_2=\dfrac{3}{2}$을 ㉠에 대입하면 $2a_1+\dfrac{3}{2}=2$

$a_1=\dfrac{1}{4}$

② $a_1<0$일 때

$a_2>a_3$이므로 $a_4=a_2+a_3=a_2+2$

$a_3 \leqq a_4$이므로 $a_5=2a_3+a_4=a_2+6$

$a_4 \leqq a_5$이므로 $a_6=2a_4+a_5=3a_2+10$

이때, $a_6=19$이므로 $3a_2+10=19$

$a_2=3$

$a_2=3$을 ㉠에 대입하면 $2a_1+3=2$

$a_1=-\dfrac{1}{2}$

(ⅱ) $a_1>a_2$일 때

$a_3=a_1+a_2=2$ ⋯ ㉡

이므로 $a_1>0$

$a_2 \leqq a_3$이므로 $a_4=2a_2+a_3=2a_2+2$

① $a_2 \geqq 0$일 때

$a_3 \leqq a_4$이므로 $a_5=2a_3+a_4=2a_2+6$

$a_4 \leqq a_5$이므로 $a_6=2a_4+a_5=6a_2+10$

이때, $a_6=19$이므로 $6a_2+10=19$

$a_2=\dfrac{3}{2}$

$a_2=\dfrac{3}{2}$을 ㉡에 대입하면 $a_1+\dfrac{3}{2}=2$

$a_1=\dfrac{1}{2}$

이때, $a_1<a_2$이므로 주어진 조건을 만족시키는 a_1의 값은 존재하지 않는다.

② $a_2<0$일 때

$a_3 > a_4$이므로 $a_5 = a_3 + a_4 = 2a_2 + 4$

$a_4 \leqq a_5$이므로 $a_6 = 2a_4 + a_5 = 6a_2 + 8$

이때, $a_6 = 19$이므로 $6a_2 + 8 = 19$

$a_2 = \dfrac{11}{6}$

이때, $a_2 > 0$이므로 주어진 조건을 만족시키는 a_2와 a_1의 값은 존재하지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a_1 = \dfrac{1}{4}$ 또는 $a_1 = -\dfrac{1}{2}$

따라서 모든 a_1의 값의 합은 $\dfrac{1}{4} + \left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{4}$

〔다른 풀이〕

$a_3 = 2$, $a_6 = 19$

(ⅰ) $a_3 \leqq a_4$인 경우

$a_5 = 4 + a_4$, $a_6 = 3a_4 + 4$

$\therefore\ a_4 = 5$

① $a_2 \leqq a_3$인 경우 : $a_2 = \dfrac{3}{2}$, $a_3 = 2$, $a_4 = 5$

- $a_1 \leqq a_2$일 때 $a_1 = \dfrac{1}{4}$

- $a_1 > a_2$일 때 $a_1 = \dfrac{1}{2}$(조건을 만족하지 않는다.)

② $a_2 > a_3$인 경우 : $a_2 = 3$, $a_3 = 2$, $a_4 = 5$

- $a_1 \leqq a_2$일 때 $a_1 = -\dfrac{1}{2}$

- $a_1 > a_2$일 때 $a_1 = -1$(조건을 만족하지 않는다.)

(ⅱ) $a_3 > a_4$인 경우

$a_5 = a_4 + 2$, $a_6 = 3a_4 + 2$

$\therefore\ a_4 = \dfrac{13}{3}$(조건을 만족하지 않는다.)

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a_1 = \dfrac{1}{4}$ 또는 $a_1 = -\dfrac{1}{2}$

따라서 모든 a_1의 값의 합은 $\dfrac{1}{4} + \left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{4}$

17. 142

a_1이 짝수이므로 $a_1 = 4k$인 경우와 $a_1 = 4k+2$인 경우로 나누어 $a_5 = 5$가 되는 정수 k의 값을 구하면 다음 표와 같다.

<table>
<tr><td>a_1</td><td colspan="3">$4k$</td><td colspan="2">$4k+2$</td></tr>
<tr><td>a_2</td><td colspan="3">$2k$</td><td colspan="2">$2k+1$</td></tr>
<tr><td>a_3</td><td colspan="3">k</td><td colspan="2">$2k+4$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">a_4</td><td>a_3이 홀수</td><td colspan="2">a_3이 짝수</td><td colspan="2" rowspan="2">$k+2$</td></tr>
<tr><td>$k+3$</td><td colspan="2">$\dfrac{k}{2}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">a_5</td><td rowspan="2">$\dfrac{k+3}{2}$</td><td>a_4가 홀수</td><td>a_4가 짝수</td><td>a_4가 홀수</td><td>a_4가 짝수</td></tr>
<tr><td>$\dfrac{k}{2}+3$</td><td>$\dfrac{k}{4}$</td><td>$k+5$</td><td>$\dfrac{k+2}{2}$</td></tr>
<tr><td>k</td><td>7</td><td>4</td><td>20</td><td>0</td><td>8</td></tr>
</table>

$k = 4$인 경우 $a_4 = \dfrac{k}{2}$가 짝수이므로 $a_5 \neq \dfrac{k}{2} + 3$

$k = 0$인 경우 $a_4 = k+2$가 짝수이므로 $a_5 \neq k+5$

그러므로 $k = 7$ 또는 $k = 20$ 또는 $k = 8$

a_1이 될 수 있는 수는 28, 80, 34

따라서 구하는 값은 $28 + 34 + 80 = 142$

18. 5

(ⅰ) $a_1 = 1$일 때

$a_1 \geq 0$이므로 $a_2 = a_1 - 2 = -1$

$a_2 < 0$이므로 $a_3 = a_2 + 5 = 4$

$a_3 \geq 0$이므로 $a_4 = a_3 - 2 = 2$

$a_4 \geq 0$이므로 $a_5 = a_4 - 2 = 0$

$a_5 \geq 0$이므로 $a_6 = a_5 - 2 = -2$

$a_6 < 0$이므로 $a_7 = a_6 + 5 = 3$

$a_7 \geq 0$이므로 $a_8 = a_7 - 2 = 1 = a_1$

$a_8 \geq 0$이므로 $a_9 = a_8 - 2 = -1 = a_2$

⋮

그러므로 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+7} = a_n$을 만족시키고 $a_{15} = a_8 = a_1 = 1$

(ⅱ) $a_1 = 2$일 때

(ⅰ)과 같은 방법으로 구하면 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+7} = a_n$을 만족시키고

$a_{15} = a_8 = a_1 = 2$

(ⅲ) $a_1 = 3$일 때

(ⅰ)과 같은 방법으로 구하면 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+7} = a_n$을 만족시키고

$a_{15} = a_8 = a_1 = 3$

(ⅳ) $a_1 = 4$일 때

(ⅰ)과 같은 방법으로 구하면 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+7} = a_n$을 만족시키고

$a_{15} = a_8 = a_1 = 4$

(ⅴ) $a_1 = 5$일 때

$a_1 \geq 0$이므로 $a_2 = a_1 - 2 = 3$

$a_2 \geq 0$이므로 $a_3 = a_2 - 2 = 1$

$a_3 \geq 0$이므로 $a_4 = a_3 - 2 = -1$

$a_4 < 0$이므로 $a_5 = a_4 + 5 = 4$

$a_5 \geq 0$이므로 $a_6 = a_5 - 2 = 2$

$a_6 \geq 0$이므로 $a_7 = a_6 - 2 = -2$

$a_7 \geq 0$이므로 $a_8 = a_7 - 2 = -2$

$a_8 < 0$이므로 $a_9 = a_8 + 5 = 3 = a_2$

$a_9 \geq 0$이므로 $a_{10} = a_9 - 2 = 1 = a_3$

⋮

그러므로 수열 $\{a_n\}$이 2이상의 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+7} = a_n$을 만족시키고

$a_{15} = a_8 = -2 < 0$

따라서 $a_{15} < 0$이 되도록 하는 a_1의 최솟값은 5이다.

19. ⑤

$a_{12}=\frac{1}{2}$이고 $a_{12}=\frac{1}{a_{11}}$이므로 $a_{11}=2$

또, $a_{11}=8a_{10}$이므로 $a_{10}=\frac{1}{4}$

또, $a_{10}=\frac{1}{a_9}$이므로 $a_9=4$

또, $a_9=8a_8$이므로 $a_8=\frac{1}{2}$

또, $a_8=\frac{1}{a_7}$이므로 $a_7=2$

또, $a_7=8a_6$이므로 $a_6=\frac{1}{4}$

또, $a_6=\frac{1}{a_5}$이므로 $a_5=4$

또, $a_5=8a_4$이므로 $a_4=\frac{1}{2}$

또, $a_4=\frac{1}{a_3}$이므로 $a_3=2$

또, $a_3=8a_2$이므로 $a_2=\frac{1}{4}$

또, $a_2=\frac{1}{a_1}$이므로 $a_1=4$

따라서

$a_1+a_4=4+\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$

20. ③

$a_4=r$에서 $0<r<1$ 또는 $-1<r<0$이므로

$a_5=a_4+3=r+3$

$a_6=a_5+3=r+6$

$a_7=-\frac{1}{2}a_6=-\frac{r+6}{2}$

$a_8=a_7+3=3-\frac{r+6}{2}=-\frac{r}{2}$

a_{4k-2}에서 $|a_m|\geq 5$이 만족한다.

$a_8=r^2$이므로 $r^2=-\frac{r}{2}$에서 $r=0$ 또는 $-\frac{1}{2}$

$0<|r|<1$이므로 $r=-\frac{1}{2}$

$a_4=a_3+3$이라 할 때, $-\frac{1}{2}=a_3+3$에서 $a_3=-\frac{7}{2}$

얻어진 a_3의 절댓값이 5보다 작으므로 만족하므로 $a_3=-\frac{7}{2}$

$a_3=a_2+3$, $-\frac{7}{2}=a_2+3$에서 $a_2=-\frac{13}{2}>5$이므로

$a_3=-\frac{1}{2}a_2$, $-\frac{7}{2}=-\frac{1}{2}a_2$이므로 $a_2=7$

$a_2=a_1+3$에서 $a_1=4$이므로 $a_1<0$을 만족하지 않는다.

$a_2=-\frac{1}{2}a_1$, $7=-\frac{1}{2}a_1$에서 $a_1=-14$

$\therefore$ $4k-2$는 100이하에서 25개, $a_1=-14$의 절댓값도

5보다 크므로 $p=26$

$\therefore$ $p+a_1=26+(-14)=12$

21. 315

(가)에서 $a_n+a_{n+1}\leq |a_n|+a_{n+1}=n+6$

$n=2k-1$일 때 $a_{2k-1}+a_{2k}\leq 2k+5$

그런데 $\sum_{k=1}^{40}a_n=\sum_{k=1}^{20}(a_{2k-1}+a_{2k})\leq \sum_{k=1}^{20}(2k+5)=520$

(나)에서 $\sum_{k=1}^{40}a_n=520$이므로

$a_{2k-1}=|a_{2k-1}|$ $(k=1,2,\cdots,20)$

$a_{2k-1}\geq 0$이므로 $a_{2k-1}+a_{2k}=2k+5$

따라서 $\sum_{k=1}^{30}a_n=\sum_{k=1}^{15}(a_{2k-1}+a_{2k})=315$

22. ④

조건 (가), (나)에 의하여 $S_7=T_7$이고 $S_7+T_7=84$이므로

$S_7=42$, $S_7=T_7$이므로 7이하의 모든 자연수 n에 대하여

$a_n\geq 0$ $\cdots$㉠

조건 (나)에 의하여 6이상의 모든 자연수 n에 대하여

$(S_{n+1}+T_{n+1})-(S_n+T_n)=0$

$a_{n+1}+|a_{n+1}|=0$

$a_{n+1}\leq 0$ $\cdots$㉡

㉠, ㉡에 의하여 $0\leq a_7\leq 0$이므로 $a_7=0$

수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하자.

$S_7=\frac{7(2a+6d)}{2}=42$, $a_7=a+6d=0$에서 $a=12$, $d=-2$

$a_n=14-2n$

$S_{15}=\frac{15\times(24-28)}{2}=-30$

$S_{15}+T_{15}=84$

따라서 $T_{15}=84-S_{15}=114$

23. 162

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r (r는 정수)라 하면, 첫째항이

2이므로 $a_n=2r^{n-1}$ $a_2=2r$, $a_3=2r^2$이므로 조건 (가)에서

$4<2r+2r^2\leq 12$ 즉, $2<r+r^2\leq 6$ $r^2+r>2$에서

$r^2+r-2=(r+2)(r-1)>0$이므로

$r<-2$ 또는 $r>1$ $\cdots$㉠

$r+r^2\leq 6$에서 $r^2+r-6=(r+3)(r-2)\leq 0$이므로

$-3\leq r\leq 2\cdots$㉡

㉠, ㉡에서 $-3\leq r<-2$ 또는 $1<r\leq 2$

r는 정수이므로 $r=-3$ 또는 $r=2$

(i) r=2인 경우

조건 (나)에서 $\sum_{k=1}^{m}a_k=\sum_{k=1}^{m}(2\times 2^{k-1})$

$=\frac{2(2^m-1)}{2-1}=2(2^m-1)$

$2(2^m-1)=122$에서 $2^m-1=61$, $2^m=62$

이때 $2^m=62$를 만족시키는 m의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $r=-3$인 경우

조건 (나)에서 $\sum_{k=1}^{m} a_k=\sum_{k=1}^{m}(2\times(-3)^{k-1})$

$=\frac{2(1-(-3)^m)}{1-(-3)}=\frac{1-(-3)^m}{2}$

$\frac{1-(-3)^m}{2}=122$에서

$1-(-3)^m=244$

$(-3)^m=-243$

즉, $(-3)^m=(-3)^5$이므로 $m=5$

(i), (ii)에 의하여 $r=-3$, $m=5$이므로

$a_m=a_5=2\times(-3)^4=162$

24. ②

$\left|(n+\frac{1}{2})^2-m\right|<\frac{1}{2}$

$-\frac{1}{2}<(n+\frac{1}{2})^2-m<\frac{1}{2}$

$(n+\frac{1}{2})^2=n^2+n+\frac{1}{4}$에서 $-\frac{3}{4}<n^2+n-m<\frac{1}{4}$

m, n은 정수이므로 $n^2+n-m=0$이다.

m은 n^2+n이다. 즉, $a_n=n^2+n$

따라서 $\sum_{k=1}^{5} a_k=\sum_{k=1}^{5}(k^2+k)=\frac{5\times6\times11}{6}+\frac{5\times6}{2}$

$=55+15=70$이다.

25. ②

조건 (가)에서 $a_4=(a_2)^2+1$

$a_8=a_2\times a_4+1=a_2\times\{(a_2)^2+1\}+1=(a_2)^3+a_2+1$

조건 (나)에서

$a_3=a_2\times a_1-2$ ……㉠

조건 (가)에서

$a_2=a_2\times a_1+1$이므로

$a_2\times a_1=a_2-1$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $a_3=a_2-3$ 또,

$a_7=a_2\times a_3-2=a_2\times(a_2-3)-2=(a_2)^2-3a_2-2$

$a_{15}=a_2\times a_7-2=a_2\times(a_2)^2-3a_2-2-2=(a_2)^2-3(a_2)^2-2a_2-2$

이때, $a_8-a_{15}=63$이므로

$(a_2)^3+a_2+1-(a_2)^3+3(a_2)^2-2a_2-2=63$

$(a_2)^2+a_2-20=0$

$(a_2+5)(a_2-4)=0$

$a_2=-5$ 또는 $a_2=4$

(i) $a_2=-5$일 때, ㉡에서 $a_1=\frac{6}{5}$이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a_2=4$일 때, ㉡에서 $a_1=\frac{3}{4}$이므로 주어진 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $a_1=\frac{3}{4}$, $a_2=4$

따라서 $a_8=69$

$\frac{a_8}{a_1}=\frac{69}{\frac{3}{4}}=92$

26. ⑤

$a^{\log_5 16}=16^{\log_5 a}=2^{4\log_5 a}$이므로

$2^{4\log_5 a}=2,\ 2^2,\ 2^3,\ \cdots$

$\log_5 a=\frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{4},\ \cdots$

$a_1=5^{\frac{1}{4}},\ a_2=5^{\frac{2}{4}},\ a_3=5^{\frac{3}{4}},\ \cdots$

따라서 $\sum_{k=1}^{40}\log_5 a_k=\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}+\cdots+\frac{40}{4}$

$=\frac{1}{4}\cdot\frac{40(40+1)}{2}=205$

27. 120

$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)a_k=n(n+1)(4n-1)=S_n$이라 하면

수열의 합과 일반항 사이의 관계에 의하여 $n\geq2$일 때

$(2n-1)a_n=S_n-S_{n-1}$

$=n(n+1)(4n-1)-(n-1)n(4n-5)$

$=n(12n-6)$

$=6n(2n-1)$

$a_n=6n(n\geq2)$, $a_1=S_1=6$

$\therefore\ a_n=6n(n\geq1)$

따라서 $a_{20}=120$

28. 50

주어진 관계식에 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$를 차례로 대입하면

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	20	11	5	2	2	2	2	2	2	2

$\sum_{k=1}^{10}a_k=20+11+5+2\times7=50$

29. ④

(ii) $n=m$일 때, (*)이 성립한다고 가정하면

$\sum_{k=1}^{m}a_k=2^{m(m+1)}-(m+1)\times2^{-m}$

이다. $n=m+1$일 때

$\sum_{k=1}^{m+1}a_k=\sum_{k=1}^{m}a_k+a_{m+1}$

$=2^{m(m+1)}-(m+1)\times2^{-m}$

$+\left\{2^{2(m+1)}-1\right\}\times\boxed{2^{(m+1)m}}+m\times 2^{-(m+1)}$

$=2^{m(m+1)}-(m+1)\times 2^{-m}$

$\quad+\left(2^{2m+2}-1\right)\times 2^{m(m+1)}+m\times 2^{-m-1}$

$=\boxed{2^{m(m+1)}}\times\boxed{2^{2m+2}}-\dfrac{m+2}{2}\times 2^{-m}$

$=2^{(m+1)(m+2)}-(m+2)\times 2^{-(m+1)}$

이다. 따라서 $n=m+1$일 때도(*)이 성립한다.

즉, $f(m)=2^{m(m+1)}$, $g(m)=2^{2m+2}$이므로

$\therefore \dfrac{g(7)}{f(3)}=\dfrac{2^{16}}{2^{12}}=2^4=16$

30. ④

주어진 식에 의해

$a_1=1$, $a_2=1$, $a_3=0$, $a_4=-1$, $a_5=1$, $a_6=0$, $a_7=-1$, $\cdots$

이므로 a_n은 $n\geq 2$에서 3주기 수열임을 알 수 있다.

$a_{3n}=0\ (n\geq 0)$, $a_{3n+1}=-1\ (n\geq 1)$, $a_{3n+2}=1\ (n\geq 0)$

그러므로

$a_{3n}+(3n)=3n\ (n\geq 0)$

$a_{3n+1}+(3n+1)=3n\ (n\geq 1)$

$a_{3n+2}+(3n+2)=3n+3\ (n\geq 0)$

따라서

$b_1=k$

$b_2=a_1+1-b_1=2-k$

$b_3=a_2+2-b_2=k+1$

$b_4=a_3+3-b_3=2-k$

$b_5=a_4+4-b_4=k+1$

$b_6=a_5+5-b_5=5-k$

$\vdots$

$b_{20}=a_{19}+19-b_{19}=11-k$

$11-k=14$

$\therefore\ k=-3$