P PL

M ATH

L AB

주간지

5주차

등차수열과 등비수열

PPL 수학연구소

About PPL 수학연구소
고등학교 수능 및 내신 수학을 연구하고 토론하는 수학 선생님들의 집단입니다.
모의고사 제작, 검토, 해설서 제작 등을 하고 있으며 대한민국 고등 교육의 발전을 위해 언제나 노력하고 있습니다.
모든 문의는 '팀장 오성원 dhtjddnjs0327@naver.com '으로 부탁드립니다.

제작 | PPL 수학연구소

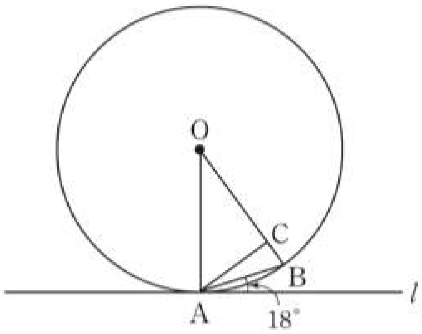
오성원	홍익대학교 수학교육과
김재식	한양대학교 미디어커뮤니케이션학과
김서영	국민대학교 경영정보학부
김대현	건국대학교 수학과
강현식	홍익대학교 수학교육과
박상우	건국대학교 교육공학과
박다빈	중앙대학교 건설환경플랜트공학과
신동하	성균관대학교 수학교육과
이경민	서울대학교 수학교육과
안정인	경희대학교 응용물리학과
박세영	홍익대학교 수학교육과

PML 주간지는 수많은 기출문제들 중 PPL 수학연구소에서 엄선한 교육청, 사관학교, 평가원의 기출문제들과 수능특강, 수능완성의 변형 문제들로 구성된 주간지입니다.
많은 학생들에게 도움이 되길 바랍니다.

각 주차별로 정해진 단원마다 두 가지의 난이도로 구성되어 있습니다.
STEP 1 : 어려운 3점 - 쉬운 4점 난이도의 문항
STEP 2 : 일반 4점 - 준킬러 4점 난이도의 문항

STEP 1

1. 원 O위에 두 점 A, B가 있다. 점 A에서 원 O에 접하는 접선 l과 선분 AB가 이루는 예각의 크기가 18°이다. 선분 OB위의 한 점 C에 대하여 삼각형 OAC의 세 내각의 크기가 등차수열을 이룰 때, 가장 큰 내각의 크기는? [4점]

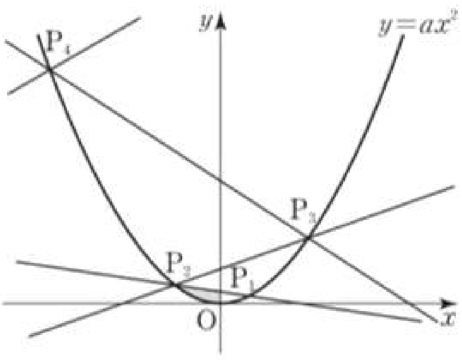


① 68°　　② 72°　　③ 76°
④ 80°　　⑤ 84°

[2007학년도 고3 4월 가형 13번]

2. 자연수 n에 대하여 곡선 $y=ax^2(a>0)$ 위의 점 P_n을 다음 규칙에 따라 정한다.

> (가) 점 P_1의 좌표는 $(x_1,\ a{x_1}^2)$이다.
> (나) 점 P_{n+1}은 점 $\mathrm{P}_n(x_n,\ a{x_n}^2)$을 지나는 직선 $y=-ax_nx+2a{x_n}^2$과 곡선 $y=ax^2$이 만나는 점 중에서 점 P_n이 아닌 점이다.



점 P_n의 x좌표로 이루어진 수열 $\{x_n\}$에서 $x_1=\dfrac{1}{2}$일 때, x_{10}의 값은? [4점]

① -1024　　② -512　　③ -256
④ 512　　⑤ 1024

[2015학년도 고3 10월 A형 15번]

3. 공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_2의 값은? [4점]

(가) $a_6 + a_8 = 0$
(나) $\lvert a_6 \rvert = \lvert a_7 \rvert + 3$

① -15 ② -13 ③ -11
④ -9 ⑤ -7

[2017학년도 대수능 나형 15번]

4. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_2a_4 - a_1a_3 = 8$, $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 4$일 때, $a_1a_2a_3a_4$의 값을 구하시오. [4점]

5. 세 실수 $3, a, b$가 이 순서대로 등비수열을 이루고, $\log_a 3b + \log_3 b = 5$를 만족시킨다. $a+b$의 값을 구하시오.
〔4점〕

[2020학년도 고3 4월 나형 27번]

6. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_3 = 4(a_2 - a_1), \quad \sum_{k=1}^{6} a_k = 15$$

일 때, $a_1 + a_3 + a_5$의 값은? [4점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

[2019학년도 6월 나형 15번]

7. 첫째항이 양수이고 공비가 -2인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{9}(|a_k|+a_k)=66$ 일 때, a_1의 값은? [4점]

① $\frac{3}{31}$ ② $\frac{5}{31}$ ③ $\frac{7}{31}$ ④ $\frac{9}{31}$ ⑤ $\frac{11}{31}$

[2020학년도 고3 3월 나형 16번]

8. 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_9=2a_3$일 때,

$\sum_{n=1}^{24}\frac{(a_{n+1}-a_n)^2}{a_n a_{n+1}}$의 값은? [4점]

① $\frac{3}{14}$ ② $\frac{2}{7}$ ③ $\frac{5}{14}$ ④ $\frac{3}{7}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

[2020학년도 고3 7월 나형 14번]

9. x에 대한 다항식 x^3-ax+b를 $x-1$로 나눈 나머지가 57이다. 세 수 1, a, b가 이 순서대로 공비가 양수인 등비수열을 이룰 때, $\frac{b}{a}$의 값은? (단, a와 b는 상수이다.) [4점]

① 2 ② 4 ③ 8 ④ 16 ⑤ 32

[2019학년도 고2 9월 나형 14번]

10. $a_3=1$인 등차수열 $\{a_n\}$이 $\sum_{k=1}^{20} a_{2k}-\sum_{k=1}^{12} a_{2k+8}=48$을 만족시킬 때, a_{39}의 값은? [4점]

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

[2021학년도 고2 11월 17번]

STEP 2

11. 첫째항이 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n에 대하여 $S_9 = S_{18}$이다. 집합 T_n을

$$T_n = \{S_k \mid k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n\}$$

이라 하자. 집합 T_n의 원소의 개수가 13이 되도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

[2020학년도 고3 7월 나형 29번]

12. 공차가 d이고 모든 항이 자연수인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_1 \le d$
(나) 어떤 자연수 $k(k \ge 3)$에 대하여
세 항 $a_2,\ a_k,\ a_{3k-1}$이 이 순서대로 등비수열을 이룬다.

$90 \le a_{16} \le 100$일 때, a_{20}의 값을 구하시오. [4점]

[2022학년도 고3 7월 21번]

13. 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $S_k = -16$, $S_{k+2} = -12$를 만족시키는 자연수 k에 대하여 a_{2k}의 값은? [4점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

[2021학년도 6월 나형 18번]

14. 수열 $\{a_n\}$의 제 n항 a_n을 $\frac{n}{3^k}$이 자연수가 되게 하는 음이 아닌 정수 k의 최댓값이라 하자. 예를 들어 $a_1 = 0$이고 $a_6 = 1$이다. $a_m = 3$일 때, $a_m + a_{2m} + a_{3m} + \cdots + a_{9m}$의 값을 구하시오. [4점]

[2010학년도 9월 나형 22번]

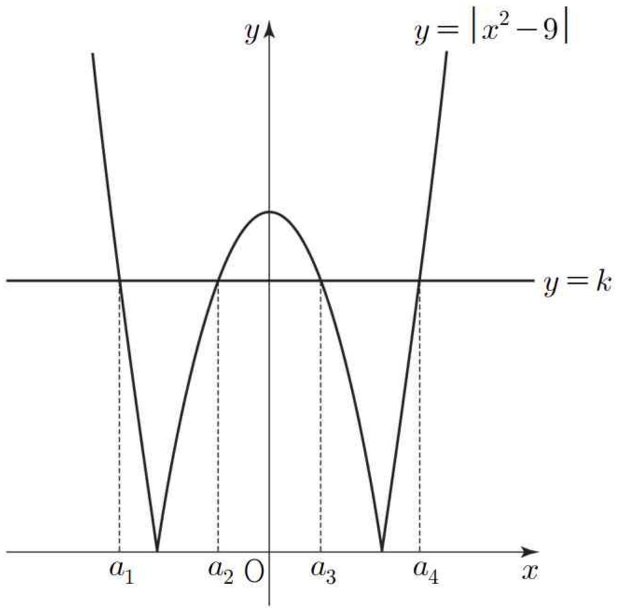
15. 공차가 6인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

세 항 $a_2,\ a_k,\ a_8$ 은 이 순서대로 등차수열을 이루고,
세 항 $a_1,\ a_2,\ a_k$ 는 이 순서대로 등비수열을 이룬다.
$k+a_1$의 값은? [4점]

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

[2016학년도 6월 A형 16번]

16. 그림과 같이 함수 $y=|x^2-9|$의 그래프가 직선 $y=k$ 와 서로 다른 네 점에서 만날 때, 네 점의 x좌표를 각각 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4$ 라 하자. 네 수 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4$가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, 상수 k의 값은?(단, $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$)



[4점]

① $\frac{34}{5}$ ② 7 ③ $\frac{36}{5}$
④ $\frac{37}{5}$ ⑤ $\frac{38}{5}$

[2015학년도 고3 4월 A형 20번]

17. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) S_n은 n에 대한 이차식이다. (나) $S_{10}=S_{50}=10$ (다) S_n은 $n=30$에서 최댓값 410을 갖는다.

50보다 작은 자연수 m에 대하여 $S_m > S_{50}$을 만족시키는 m의 최솟값을 p, 최댓값을 q라 할 때, $\sum_{k=p}^{q} a_k$의 값은? [4점]

① 39 ② 40 ③ 41 ④ 42 ⑤ 43

[2020학년도 고3 10월 나형 17번]

18. 서로 다른 세 자연수 a, b, c가 다음 세 조건을 모두 만족시킬 때, $a+b+c$의 값은? [4점]

(가) a, b, c는 이 순서대로 등비수열을 이룬다. (나) $b-a=n^2$ (단, n은 자연수이다.) (다) $\log_6 a+\log_6 b+\log_6 c=3$

[2011학년도 고3 4월 나형 29]

19. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_3의 값은? [4점]

(가) $\sum_{k=1}^{4} a_k = 45$

(나) $\sum_{k=1}^{6} \frac{a_2 \times a_5}{a_k} = 189$

① 12 ② 15 ③ 18 ④ 21 ⑤ 24

[2021학년도 고3 4월 가형 17번]

20. 첫째항이 자연수이고 공차가 음의 정수인 등차수열 $\{a_n\}$과 첫째항이 자연수이고 공비가 음의 정수인 등비수열 $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, $a_7 + b_7$의 값을 구하시오. [4점]

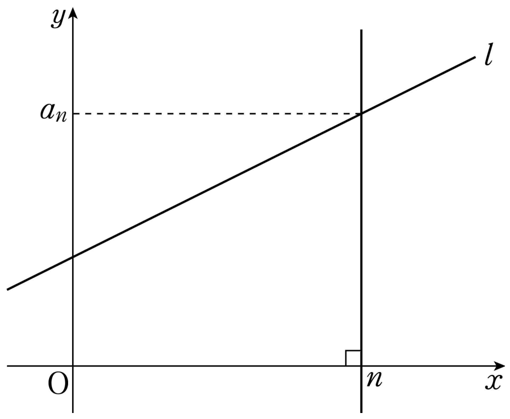
(가) $\sum_{k=1}^{5} (a_n + b_n) = 27$

(나) $\sum_{k=1}^{5} (a_n + |b_n|) = 67$

(다) $\sum_{k=1}^{5} (|a_n| + |b_n|) = 81$

[2019학년도 대수능 나형 29번]

21. 좌표평면에 그림과 같이 직선 l이 있다. 자연수 n에 대하여 점 $(n, 0)$을 지나고 x축에 수직인 직선이 직선 l과 만나는 점의 y좌표를 a_n이라 하자. $a_4 = \frac{7}{2}$, $a_7 = 5$일 때, $\sum_{k=1}^{25} a_k$의 값을 구하시오. [4점]



[2018학년도 고3 3월 나형 28번]

22. 첫째항이 양수이고 공비가 -2인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{9} (|a_k| + a_k) = 66$$

일 때, a_1의 값은? [4점]

① $\frac{3}{31}$ ② $\frac{5}{31}$ ③ $\frac{7}{31}$ ④ $\frac{9}{31}$ ⑤ $\frac{11}{31}$

[2019학년도 고3 3월 나형 16번]

23. 공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $S_9 = |S_3| = 27$일 때, a_{10}의 값은? [4점]

① 23 ② 24 ③ 25 ④ 26 ⑤ 27

[2019학년도 고3 4월 나형 14번]

24. 등비수열 $\{a_n\}$이

$$a_3 + a_5 = 18, \quad \frac{a_3}{a_2} = \frac{1}{6}a_4$$

를 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{5} a_{2n-1}$의 값은? [4점]

① 89 ② 90 ③ 91 ④ 92 ⑤ 93

[2018학년도 고3 경남 10월 나형 14번]

25. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad T_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$$

라 할 때, S_n, T_n은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $S_7 = T_7$
(나) 6 이상의 모든 자연수 n에 대하여 $S_n + T_n = 84$이다.

T_{15}의 값은? [4점]

① 96　② 102　③ 108　④ 114　⑤ 120

[2020학년도 고3 7월 가나형 17번]

26. 세 실수 a, b, c가 이 순서대로 등차수열을 이루고 다음 조건을 만족시킬 때, abc의 값을 구하시오. [4점

(가) $\dfrac{2^a \times 2^c}{2^b} = 32$
(나) $a + c + ca = 26$

[2016학년도 고3 4월 나형 26번]

27. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1=3$이고,

$$a_{n+1}=\begin{cases} \dfrac{a_n}{2} & (a_n \text{은 짝수}) \\ \dfrac{a_n+93}{2} & (a_n \text{은 홀수}) \end{cases}$$

가 성립한다. $a_k=3$을 만족시키는 50 이하의 모든 자연수 k의 값의 합을 구하시오. [4점]

[2015년 고3 4월 나형 26번]

28. 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_1+a_2+a_3=159$
(나) $a_{m-2}+a_{m-1}+a_m=96$인 자연수 m에 대하여 $\sum_{k=1}^{m} a_k=425$ (단, $m>3$)

a_{11}의 값을 구하시오. [4점]

[2018년 고3 4월 나형 28번]

29. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_3 = 4(a_2 - a_1),\ \ \sum_{k=1}^{6} a_k = 15$$

일 때, $a_1 + a_3 + a_5$의 값은? [4점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

[2018학년도 6월 나형 15번]

30. 공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_{10}의 값은? [4점]

(가) $|a_4| + |a_6| = 8$

(나) $\sum_{k=1}^{9} a_k = 27$

① 21 ② 23 ③ 25 ④ 27 ⑤ 29

[2023학년도 고3 3월 10번]

빠른 정답

문항	답	문항	답	문항	답
1번	⑤	11번	273	21번	200
2번	③	12번	117	22번	①
3번	①	13번	②	23번	①
4번	945	14번	31	24번	⑤
5번	36	15번	②	25번	④
6번	③	16번	③	26번	80
7번	①	17번	①	27번	235
8번	①	18번	26	28번	26
9번	③	19번	①	29번	③
10번	①	20번	117	30번	②

정답 및 해설

1.⑤
원의 접선과 현이 이루는 각은 그 현의 양 끝점을 이은 호의 원주각과 같고, 중심각의 크기는 원주각의 2배이므로,
$\angle\mathrm{AOB}=36^\circ$,
$\triangle\mathrm{AOB}$는 $\overline{\mathrm{AO}}=\overline{\mathrm{BO}}$인 이등변삼각형이므로,
$\angle\mathrm{OBA}=\angle\mathrm{OAB}=72^\circ$
$\angle\mathrm{CAB}=\theta$라 하면, $\angle\mathrm{OCA}=72^\circ+\theta$, $\angle\mathrm{OAC}=72^\circ-\theta$
$36, 72-\theta, 72+\theta$가 순서대로 등차수열을 이루므로,
등차중항의 성질에 의하여, $2(72-\theta)=36+72+\theta$
$\therefore\theta=12^\circ, 72^\circ+\theta=84^\circ$

2. ③
직선과 곡선의 교점의 x좌표를 구하면,
$a(x^2+x_nx-2x_n^2)=0$, $a(x+2x_n)(x-x_n)=0$에서,
$x=x_n$또는$x=-2x_n$
교점 중 점 $\mathrm{P}_n(x_n, ax_n{}^2)$이 아닌 점을 P_{n+1}이라 했으므로,
P_{n+1}의 x좌표는 $x_{n+1}=-2x_n$
수열 $\{x_n\}$은 $x_1=\frac{1}{2}$이고, 공비가 -2인 등비수열 이므로,
$x_n=\frac{1}{2}\times(-2)^{n-1}$
$\therefore x_{10}=\frac{1}{2}\times(-2)^9=-256$

3. ①
(가) 조건에서 등차중항의 성질에 의하여, $a_6+a_8=2a_7=0$
$a_7=0$
(나) 조건에서 $|a_6|=3$이고, 공차가 양수이므로, $a_6<a_7$
$a_6=-3$, $a_7=0$, $d=3$이다.
$a_2=a_7-5d=0-15=-15$

4. 945
등차수열 $a_n=a+(n-1)d$에서,
$a_2a_4-a_1a_3=(a+d)(a+3d)+a(a+2d)=d(2a+3d)=48$
$a_1+a_2+a_3+a_4=4a+6d=2(2a+3d)=12$에서, $2a+3d=6$
위 식에 대입하면, $d(2a+3d)=6d=48$, $d=8$, $a=-9$
$\therefore a_1a_2a_3a_4=(-9)\times(-1)\times7\times15=945$

5. 36
세 실수 $3, a, b$가 순서대로 등비수열을 이루므로, 등비중항의 성질에 의하여, $a^2=3b$이고, 이를 아래의 식에 대입하면,
$\log_a 3b+\log_3 b=\log_{\sqrt{3b}}3b+\log_3 b=2+\log_3 b=5$
$\log_3 b=3, b=27$
$a=\sqrt{3b}=9$
$\therefore a+b=27+9=36$

6. ③
등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면
$a_3=4(a_2-a_1)$에서
$a_1r^2=4(a_1r-a_1)$

$a_1(r-2)^2=0$

$a_1=0$ 또는 $r=2$

$a_1=0$이면

$\sum_{k=1}^{6} a_k=0 \neq 15$

이므로

$a_1 \neq 0$

따라서 $r=2$이다.

이때,

$\sum_{k=1}^{6} a_k=\frac{a_1(2^6-1)}{2-1}=15$에서

$a_1 \times 63=15$

$a_1=\frac{5}{21}$

따라서

$a_1+a_3+a_5=\frac{5}{21}\times(1+2^2+2^4)=\frac{5}{21}\times 21=5$

7. ①

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 양수, 공비가 음수이므로

$a_{2n-1}>0$에서 $|a_{2n-1}|+a_{2n-1}=2a_{2n-1}$이고

$a_{2n}<0$에서 $|a_{2n}|+a_{2n}=0$이다.

수열 $\{a_{2n-1}\}$은 첫째항이 a_1, 공비가 $(-2)^2=4$인 등비수열이므로

$$\sum_{k=1}^{9}(|a_k|+a_k)=2(a_1+a_3+a_5+a_7+a_9)$$

$$=2\times\frac{a_1(4^5-1)}{4-1}=\frac{2\times 1023\times a_1}{3}=682a_1$$

따라서 $682a_1=66$이므로 $a_1=\frac{3}{31}$

8. ①

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a+8d=2(a+2d)$, $a=4d$

$\sum_{n=1}^{24}\frac{(a_{n+1}-a_n)^2}{a_n a_{n+1}}$

$=\sum_{k=1}^{24}\frac{d^2}{a_n a_{n+1}}=d^2\sum_{n=1}^{24}\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$

$=d\left\{\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_{24}}-\frac{1}{a_{25}}\right)\right\}$

$=d\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{25}}\right)=d\left(\frac{a_{25}-a_1}{a_1\times a_{25}}\right)$

$=d\times\frac{24d}{a\times(a+24d)}=\frac{24d^2}{4d\times 28d}=\frac{3}{14}$

9. ③

x에 대한 다항식 x^3-ax+b를 $x-1$로 나눈 나머지가 57이므로

나머지 정리에 의하여

$1-a+b=57$

$b=a+56\cdots$㉠

1, a, b가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$a^2=b\cdots$㉡

㉠, ㉡에 의하여

$a^2=a+56$

$a^2-a-56=(a+7)(a-8)=0$

$a=-7$ 또는 8

공비는 a이고 양수이므로 $a=8$, $b=a^2=64$

따라서 $\frac{b}{a}=\frac{64}{8}=8$

10. ①

$\sum_{k=1}^{20}a_{2k}-\sum_{k=1}^{12}a_{2k+8}$

$=(a_2+a_4+\cdots+a_{40})-(a_{10}+a_{12}+\cdots+a_{32})$

$=a_2+a_4+a_6+a_8+a_{34}+a_{36}+a_{38}+a_{40}$

등차중항의 성질에 의해

등차수열 $\{a_n\}$은 $m+l=42$인 두 자연수 m, l에 대하여 $a_m+a_l=2a_{21}$을 만족시키므로

$\sum_{k=1}^{20}a_{2k}-\sum_{k=1}^{12}a_{2k+8}$

$=(a_2+a_{40})+(a_4+a_{38})+(a_6+a_{36})+(a_8+a_{34})$

$=2a_{21}+2a_{21}+2a_{21}+2a_{21}=48$

그러므로 $a_{21}=6$이고 $a_3+a_{39}=2a_{21}=12$

따라서 $a_{39}=12-a_3=11$

11. 273

수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a\,(a\neq 0)$, 공차를 d라 하면

$S_9=S_{18}$이므로

$\frac{9(2a+8d)}{2}=\frac{18(2a+17d)}{2}$

$a=-13d$

$S_n=\frac{n\{-26d+(n-1)d\}}{2}=\frac{d}{2}n(n-27)$

$S_1=S_{26}=-13d$,

$S_2=S_{25}=-25d$,

$S_3=S_{24}=-36d$,

$\vdots$

$S_{13}=S_{14}=-91d$,

$S_{27}=0$, $S_{28}=14d$, $S_{29}=29d$, $\cdots$

집합 T_n의 원소의 개수가 13이 되도록 하는 자연수 n의 값은

13, 14, $\cdots$, 26

따라서 모두 자연수 n의 값의 합은

$13+14+15+\cdots+26=273$

12. 117

$a_1=a$라 하면
조건 (나)에 의하여
$\{a+(k-1)d\}^2=(a+d)\{a+(3k-2)d\}$
$d\{k^2-5k+3\}=a(k+1)$ $\cdots\cdots$ ㉠
모든 항이 자연수이므로
조건 (가)에서 $0<a\le d$
$a(k+1)\le d(k+1)$
$k^2-5k+3\le k+1$
$k^2-6k+2\le 0$
$3-\sqrt{7}\le k\le 3+\sqrt{7}$
$k\ge 3$이므로 자연수 $k=3,\ 4,\ 5$
㉠에서 $k^2-5k+3>0$이므로 $k=5$, $d=2a$
$90\le a_{16}\le 10$, $a_{16}=a+15d=31a$
이므로 $a=3$, $d=6$
따라서 $a_{20}=a+19d=117$

13. ②
$S_k=-16$, $S_{k+2}=-12$ 에서
$S_{k+2}-S_k=a_{k+1}+a_{k+2}=4$
이고, 등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 2이므로
$a_1+2k+a_1+2(k+1)=4$
$a_1+2k+1=2$
$a_1=1-2k\cdots\cdots$㉠
이때 $S_k=-16$에서
$\dfrac{k\{2a_1+2(k-1)\}}{2}=-16$
$k(a_1+k-1)=-16$
여기에 ㉠을 대입하면 $-k^2=-16$
k는 자연수이므로 $k=4$ 이고,
$a_1=1-2k=-7$
따라서
$\therefore\ a_{2k}=a_8=-7+7\times 2=7$

14. 31
$a_m=3$이므로 $\dfrac{m}{3^3}=a$, $\therefore m=3^3\cdot a$
(단, $\dfrac{m}{3^k}=a$를 만족하는 최대 정수 $k=3$이므로 a는 3 배수가 아닌 자연수)
따라서 $a_m=a_{2m}=a_{4m}=a_{5m}=a_{7m}=a_{8m}=3$이고
$a_{3m}=a_{6m}=4$, $a_{9m}=5$이다.
$\therefore\ a_m+a_{2m}+\cdots+a_{9m}=(3\times 6)+(4\times 2)+5=31$

15. ②
$a_2,\ a_k,\ a_8$이 순서대로 등차수열을 이루므로 $k=5$
또한 $a_1,\ a_2,\ a_5$ 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로
$a_2=a_1+6$, $a_5=a_1+24$라 놓으면
$(a_2)^2=a_1\times a_5$로부터
$(a_1+6)^2=a_1\times(a_1+24)\Leftrightarrow 12a_1=36$
$\therefore a_1=3$

16. ③
함수 $y=|x^2-9|$의 그래프는 y축 대칭이므로 $a_2=-a_3$
이 등차수열의 공차는 $a_3-a_2=2a_3$이므로
$a_4=a_3+2a_3=3a_3$
점 $(a_3,\ k)$는 곡선 $y=x^2+9$위의 점이므로 $-a_3^2+9=k\cdots\cdots$㉠
점 $(a_4,\ k)$는 곡선 $y=x^2-9$ 위의 점이므로
$a_4^2-9=9a_3-9=k\cdots\cdots$㉡
㉠, ㉡에서 $10k=72$
따라서 $k=\dfrac{36}{5}$

17. ①
S_n의 이차항의 계수를 a라 하자. 조건에서 $S_{10}=S_{50}$이고 S_n은 $n=30$일 때 최댓값 410을 가지므로 $S_n=a(n-30)^2+410$
$S_{10}=10$이므로 $10=a(10-30)^2+410$
$S_m>S_{50}=S_{10}$을 만족시키는 자연수 m의 범위는
$10<m<50$이므로 $p=11,\ q=49$
따라서 $\displaystyle\sum_{k=p}^{q}a_k=\sum_{k=11}^{49}a_k=S_{49}-S_{10}$
$=\{-(49-30)^2+410\}-10=39$

18. 26
(다)에서 $\log_6 abc=3$이므로 $abc=6^3\cdots\cdots$ ㉠이다.
(가)에서 $a,\ b,\ c$가 등비수열을 이루므로
$b^2=ac\cdots\cdots$ ㉡이다.
그러므로 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면, $b=6\cdots\cdots$ ㉢이다.
이 때, ㉢을 ㉡에 대입하여 풀면, $ac=6^2$이다.
그러므로 (나)로부터 $6-a=1,\ 4$이므로 $a=5,\ 2$이다.
한편, $ac=6^2$에서 a는 6^2의 약수이므로 $a=2$뿐이다.
그러므로 $a=2$를 $ac=6^2$에 대입하면 $b=6,\ c=18$이다.
따라서, $a+b+c=26$이다.

19. ①
등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하자.
$r=1$이면 조건 (가)에서 $a=\dfrac{45}{4}$이고
조건 (나)에서는 $a=\dfrac{63}{2}$이므로 $r\neq 1$
$\displaystyle\sum_{k=1}^{4}a_k=\frac{a(r^4-1)}{r-1}=45$
$\displaystyle\sum_{k=1}^{6}\frac{a_2\times a_5}{a_k}=(a_2\times a_5)\times\sum_{k=1}^{6}\frac{1}{a_k}$

$$= ar \times ar^4 \times \frac{\frac{1}{a}\left\{1-\left(\frac{1}{r}\right)^6\right\}}{1-\frac{1}{r}}$$

$$= a^2r^5 \times \frac{r^6-1}{a(r^6-r^5)} = \frac{a(r^6-1)}{r-1} = 189$$

$$\frac{\frac{a(r^6-1)}{r-1}}{\frac{a(r^4-1)}{r-1}} = \frac{r^6-1}{r^4-1} = \frac{(r^2-1)(r^4+r^2+1)}{(r^2-1)(r^2+1)}$$

$= \dfrac{r^4+r^2+1}{r^2+1} = \dfrac{189}{45}$ 이므로

$5r^4+5r^2+5 = 21r^2+21$

$5r^4-16r^2-16=0,\ (5r^2+4)(r^2-4)=0$

$r>0$이므로 $r=2$

$\dfrac{a(2^4-1)}{2-1} = 15a = 45$이므로 $a=3$

따라서 $a_3 = 3\times 2^2 = 12$

20. 117

조건 (가)와 조건 (나)에서

$\sum_{k=1}^{5}(a_n+|b_n|) - \sum_{k=1}^{5}(a_n+b_n) = 67-27$이므로

$\sum_{n=1}^{5}(|b_n|-b_n) = 40 \cdots\cdots$ ㉠

한편, 등비수열 $\{b_n\}$의 공비를 r(r는 음의 정수)라 하면

$b_1>0,\ b_2>0,\ b_3>0,\ b_4<0,\ b_5>0$

이므로 ㉠에서 $-2(b^2+b^4)=40$

즉, $b_1r+b_1r^3=-20$ ……㉡

$b_1r(1+r^2)=-20$이다. 이때 b_1r는 음의 정수이고, $1+r^2$은 자연수이므로 $1+r^2$은 20의 양의 약수이어야 하다.

20의 양의 약수는 1, 2, 4, 5, 10, 20이고, r가 음의 정수이므로 $r=-1$또는 $r=-2$ 또는 $r=-3$이다.

㉡에서 $r=-1$일 때, $b_1=10$

$r=-2$일 때, $b_1=2$

$r=-3$일 때, $b_1=\dfrac{2}{3}$ 이 때, b_1은 자연수이므로

$b_1=10,\ r=-1$ 또는 $b_1=2,\ r=-2$

(i) $b_1=10,\ r=-1$일 때

$\sum_{1}^{5}b_n = 10$이므로 조건 (가)에서 $\sum_{k=1}^{5}(a_n+b_n)=27$이므로

$\sum_{n=1}^{5}a_n + \sum_{n=1}^{5}b_n = 27$

$\sum_{n=1}^{5}a_n + 10 = 27$

$\sum_{n=1}^{5}a_n = 17$

이때, $\sum_{n=1}^{5}a_n = 5a_3 = 17$에서 $a_3 = \dfrac{17}{5}$ 한편, 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 자연수이고 공차가 음의 정수이므로 등차수열 $\{a_n\}$의 모든 항은 정수이다.

따라서 $b_1=10,\ r=-1$은 주어진 조건을 만족시키지 못한다.

(ii) $b_1=2,\ r=-2$ 일 때

$\sum_{1}^{5}b_n = \dfrac{2\{1-(-2)^5\}}{1-(-2)} = 22$ 조건 (기)에서

$\sum_{k=1}^{5}(a_n+b_n)=27$이므로 $\sum_{n=1}^{5}a_n+22=27$

$\sum_{1}^{5}a_n = 5$ 이때, $\sum_{n=1}^{5}a_n = 5a_3 = 5$에서 $a_3=1$

또, $\sum_{1}^{5}|b_n| = \dfrac{2\{1-|-2|^5\}}{1-|-2|} = 62$

조건 (다)에서 $\sum_{k=1}^{5}(|a_n|+|b_n|) = 81$ 이므로

$\sum_{n=1}^{5}|a_n| + \sum_{n=1}^{5}|b_n| = 81$

$\sum_{n=1}^{5}|a_n| + 62 = 81$

$\sum_{n=1}^{5}|a_n| = 19 \cdots\cdots$ ㉢

한편, 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d(d는 음의 정수)라 하면

$a_3=1$이므로 $a_1 > a_2 > a_3 > 0 \geq a_4 > a_5$이다. 이때,

$a_1 = 1-2d$
$a_2 = 1-d$
$a_4 = 1+d$
$a_5 = 1+2d$

이므로 ㉢에서

$(1-2d)+(1-d)+1-(1+d)-(1+2d)=19$

$1-6d=18$

$d=-3$

따라서 $a_1=7,\ d=-3,\ b_1=2,\ r=-2$ 등차수열 $\{a_n\}$의

일반항 a_n은 $a_n = 7+(n-1)\times(-3) = -3n+10$

등비수열 $\{b_n\}$의 일반항 b_n은 $b_n = 2\times(-2)^{n-1}$

따라서 $a_7+b_7=117$

21. 200

점 $(n,0)$을 지나고 x축에 수직인 직선이 일차함수의 그래프와 만나는 점의 y좌표를 a_n이라 하면 a_n을 n에 관한 일차식으로 나타낼 수 있으므로 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.

$a_4 = \dfrac{7}{2}$이고 $a_7 = 5$이므로 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$3d = a_7 - a_4 = 5 - \dfrac{7}{2} = \dfrac{3}{2}$

$d = \dfrac{1}{2}$

$a_1 = a_4 - 3d = \dfrac{7}{2} - 3\times\dfrac{1}{2} = 2$

$\sum_{k=1}^{25}a_k$의 값은 첫째항이 2이고 공차가 $\dfrac{1}{2}$인 등차수열의 첫째항부터 제25항까지의 합과 같으므로

$\sum_{k=1}^{25} a_k = \dfrac{25\left\{2\times2+(25-1)\times\dfrac{1}{2}\right\}}{2} = \dfrac{25\times16}{2} = 200$

〔다른 풀이 1〕

점 $(n, 0)$을 지나고 x축에 수직인 직선이 일차함수의 그래프와 만나는 점의 y좌표를 a_n이라 하면 a_n을 n에 관한 일차식으로 나타낼 수 있으므로 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.

$a_4 = \dfrac{7}{2}$이고 $a_7 = 5$이므로 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$3d = a_7 - a_4 = 5 - \dfrac{7}{2} = \dfrac{3}{2}$

$d = \dfrac{1}{2}$

$a_{13} = a_7 + 6d = 5 + 3 = 8$이므로

$\sum_{k=1}^{25} a_k = (a_1 + a_{25}) + (a_2 + a_{24}) + \cdots + (a_{12} + a_{14}) + a_{13}$

$= 2a_{13} + 2a_{13} + \cdots + 2a_{13} + a_{13}$

$= 12\times 2a_{13} + a_{13} = 25a_{13} = 25\times8 = 200$

〔다른 풀이 2〕

$a_4 = \dfrac{7}{2}$이고 $a_7 = 5$이므로

직선 l은 두 점 $\left(4, \dfrac{7}{2}\right)$, $(7, 5)$를 지난다.

직선 l의 기울기는 $\dfrac{5-\dfrac{7}{2}}{7-4} = \dfrac{\dfrac{3}{2}}{3} = \dfrac{1}{2}$이므로

직선 l의 방정식은 $y = \dfrac{1}{2}(x-4) + \dfrac{7}{2} = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$

점 $(n, 0)$을 지나고 x축에 수직인 직선이 직선 l과 만나는 점의 y좌표가 a_n이므로 $a_n = \dfrac{1}{2}n + \dfrac{3}{2}$

$\sum_{k=1}^{25} a_k = \sum_{k=1}^{25}\left(\dfrac{1}{2}k + \dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{25\times26}{2} + \dfrac{3}{2}\times25$

$= \dfrac{25\times13 + 3\times25}{2} = \dfrac{25\times16}{2} = 25\times8 = 200$

22. ①

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 양수, 공비가 음수이므로

$a_{2n-1} > 0$에서 $|a_{2n-1}| + a_{2n-1} = 2a_{2n-1}$이고

$a_{2n} < 0$에서 $|a_{2n}| + a_{2n} = 0$이다.

수열 $\{a_{2n-1}\}$은 첫째항이 a_1, 공비가 $(-2)^2 = 4$인 등비수열이므로

$\sum_{k=1}^{9}(|a_k| + a_k) = 2(a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9)$

$= 2\times\dfrac{a_1(4^5-1)}{4-1}$

$= \dfrac{2\times1023\times a_1}{3}$

$= 682a_1$

따라서 $682a_1 = 66$이므로 $a_1 = \dfrac{3}{31}$

23. ①

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면 $S_9 = 27$이므로

$\dfrac{9(2a+8d)}{2} = 27 \quad \therefore\ a + 4d = 3$

$|S_3| = 27$이므로

$\left|\dfrac{3(2a+2d)}{2}\right| = 27$, $|a+d| = 9$

$\therefore\ a+d = 9$ 또는 $a+d = -9$

(i) $a+d=9$인 경우

$a+4d=3$과 $a+d=9$를 연립하여 풀면

$a=11$, $d=-2$가 되어 공차가 양수라는 조건에 맞지 않는다.

(ii) $a+d=-9$인 경우

$a+4d=3$과 $a+d=-9$를 연립하여 풀면

$a=-13$, $d=4$

따라서 $a_{10} = -13 + 9\times4 = 23$

24. ⑤

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_3 + a_5 = ar^2 + ar^4 = ar^2(1+r^2) = 18$ ⋯㉠

$\dfrac{ar^2}{ar} = \dfrac{1}{6}ar^3$, $ar^2 = 6$ ⋯㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $1 + r^2 = 3$

따라서 $a=3$, $r^2=2$

$\sum_{n=1}^{5} a_{2n-1} = \dfrac{3(2^5-1)}{2-1} = 93$

25. ④

조건 (가), (나)에 의하여

$S_7 = T_7$이고 $S_7 + T_7 = 84$이므로 $S_7 = 42$

$S_7 = T_7$이므로 7 이하의 모든 자연수 n에 대하여

$a_n \geq 0$ ⋯ ㉠

조건 (나)에 의하여 6 이상의 모든 자연수 n에 대하여

$(S_{n+1} + T_{n+1}) - (S_n + T_n) = 0$

$a_{n+1} + |a_{n+1}| = 0$

$a_{n+1} \leq 0$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $0 \leq a_7 \leq 0$이므로 $a_7 = 0$

수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하자.

$S_7 = \dfrac{7(2a+6d)}{2} = 42$, $a_7 = a + 6d = 0$에서

$a = 12$, $d = -2$

$a_n = 14 - 2n$

$S_{15} = \dfrac{15\times(24-28)}{2} = -30$

$S_{15} + T_{15} = 84$

따라서 $T_{15} = 84 - (-30) = 114$

26. 80

세 실수 a, b, c가 이 순서대로 등차수열을 이루므로 공차를 d라 하면, $a=b-d$, $c=b+d$

(가)에서 $\frac{2^a\times 2^c}{2^b}=2^{a+c-b}=2^{(b-d)+(b+d)-b}=2^b=32$

$\therefore\ b=5$

(나)에서 $a+c+ca\ =(5-d)+(5+d)+(5+d)(5-d)$

$=35-d^2=26$

$\therefore\ d=\pm3$

그러므로 $a=2$, $b=5$, $c=8$ 또는 $a=8$, $b=5$, $c=2$

따라서 $abc=80$

27. 235

$a_1=3$

$a_2=\frac{3+93}{2}=48$

$a_3=\frac{48}{2}=24$

$a_4=\frac{24}{2}=12$

$a_5=\frac{12}{2}=6$

$a_6=\frac{6}{2}=3$

$\vdots$

$a_k=3$을 만족시키는 50이하의 모든 자연수 k는

1, 6, 11, 16, $\cdots$, 46

따라서 모든 자연수 k의 값의 합은

$\sum_{m=1}^{10}(5m-4)=5\times\frac{10\times(10+1)}{2}-4\times10$

$=235$

28. 26

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

(가)에서

$a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)=159$이므로

$a_1+d=53$ $\cdots\cdots$ ㉠

(나)에서

$(a_m-2d)+(a_m-d)+a_m=96$이므로

$a_m-d=32$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a_1+a_m=85$이므로

$\sum_{k=1}^{m}a_k=\frac{m}{2}(a_1+a_m)=\frac{m}{2}\times85=425$이고

$m=10$이다.

또한 ㉠, ㉡에서 $a_1=56$, $d=-3$이므로

$a_n=-3n+59$

따라서 $a_{11}=-33+59=26$

29. ③

a_n이 등비수열이므로 $a_3=4(a_2-a_1)$에서

$ar^2=4(ar-a)$

$r^2=4r-4$

$(r-2)^2=0$

$\therefore r=2$

$\sum_{k=1}^{6}a_k=\frac{a(1-r^6)}{1-r}=15$ 에서 $a=\frac{15}{63}=\frac{5}{21}$

따라서

$a_1+a_3+a_5=a+ar^2+ar^4=a(1+r^2+r^4)$

$=\frac{5}{21}(1+2^2+2^4)=5$

30. ②

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

조건 (나)에서 $\sum_{k=1}^{9}a_k=\frac{9(2a+8d)}{2}=27$

$a+4d=3$ 즉, $a_5=3\cdots\cdots$ ㉠

$a_5>0$이고 $d>0$이므로 $a_6>0$

(i) $a_4\ge0$인 경우

$|a_4|+|a_6|=(a+3d)+(a+5d)=2a+8d=8$

$a+4d=4$이므로 ㉠에 모순이다.

(ii) $a_4<0$인 경우

$|a_4|+|a_6|=-(a+3d)+(a+5d)=2d=8$, $d=4$

(i), (ii)에서 $d=4$이므로

$a_{10}=a_5+5d=3+5\times4=23$