지금부터 보실 행동강령과 해설은 아드레날린을 통해 다른 기출 문제에서도 보실 수 있습니다!

자세한 내용은

https://orbi.kr/00043463424

에서 확인해주세요! 판매 페이지 링크는

https://atom.ac/books/9395

입니다. 감사합니다!

아드레날린 ex
공통

1. $0 \le x \le 2\pi$일 때, 방정식 $2\sin^2 x - 3\cos x = k$의 서로 다른 실근의 개수가 3이다. 이 세 실근 중 가장 큰 실근을 α라 할 때, $k \times \alpha$의 값은? (단, k는 상수이다.) 〔2023년 4월 11〕

① $\frac{7}{2}\pi$　　② 4π　　③ $\frac{9}{2}\pi$　　④ 5π　　⑤ $\frac{11}{2}\pi$

1. 정답 ② 〔2023년 4월 11〕

1) 문제해석, 치환하기

$0 \le x \le 2\pi$일 때 $2\sin^2 x - 3\cos x = k$의 서로 다른 실근의 개수가 3이랍니다. 일단 방정식을 풀어야 하는데 우리한테 익숙한 모양이 아니죠? 치환해서 우리 익숙한 형태로 만들어봅시다.

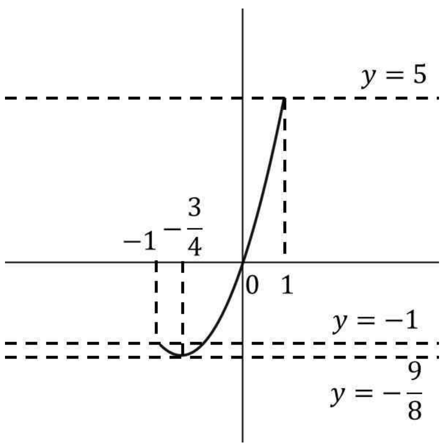
일단 변수가 다르니까 통일해줘야겠어요. $\sin x$와 $\cos x$간의 관계식이 뭐가 있을까요? $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$이 있네요. 그러면 $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$이죠? 따라서 $2 - 2\cos^2 x - 3\cos x = k$이고 정리하면 $2\cos^2 x + 3\cos x = 2 - k$가 됩니다.

이때 $\cos x = t$라고 치환하면 $0 \le x \le 2\pi$이므로 $\cos x$의 그래프는 -1와 1 사이의 값이 됩니다. 우리는 이 $\cos x$를 t라고 했으니까 t 역시 -1에서 1 사이의 값을 가지게 되겠죠? $-1 \le t \le 1$입니다. 그리고 $2t^2 + 3t = 2 - k$가 되네요.

정리해보면 $-1 \le t \le 1$의 범위에서 $y = 2t^2 + 3t$라는 이차함수와 $y = 2 - k$가 만나는 t점에 대하여, $y = t$와 $0 \le x \le 2\pi$에서의 $y = \cos x$가 만나는 점이 세 개라는 것이 됩니다. 사실상 문제를 두 번 푸는 것이 되는 거죠.

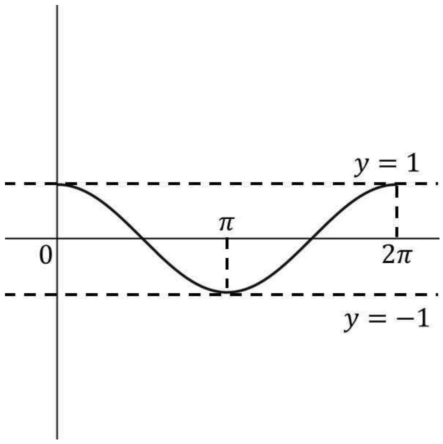
2) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

근데 여기서 생각해볼게요. 일단 $-1 \le t \le 1$의 범위에서 $y = 2t^2 + 3t$는



이런 함수입니다. 여기서 $y = 2 - k$와 만날 수 있는 경우의 수는 3가지입니다. 아예 안 만나거나, 한 점에서만 만나거나, 두 점에서 만나거나.

그런데 이때 $0 \le x \le 2\pi$에서의 $y = \cos x$는



이런 함수입니다. 우리는 $-1 \le t \le 1$의 범위에서 $y=2t^2+3t$라는 이차함수와 $y=2-k$가 만나는 t점에 대하여 $y=t$와 $0 \le x \le 2\pi$에서의 $y=\cos x$가 만나는 점이 세 개여야 한다는 걸 다시 한 번 떠올리고 다음으로 가볼게요.

이때 $y=2-k$와 $y=2t^2+3t$가 아예 만나는 건 말도 안 되죠.
한 점에서 만나는 것도 불가능합니다. 왜냐하면 바로 위에 그래프에 아무 곳에나 $y=t$를 그어보세요. 어느 곳에 그려도 세 점에서 만나는 건 불가능합니다.

따라서 $y=2-k$와 $y=2t^2+3t$는 두 점에서 만나야 합니다. 그래프를 보면 t는 -1부터 -1과 $-\frac{3}{4}$의 대칭 부분에 있는 $-\frac{1}{2}$까지네요.

이때 다시 한 번 생각해봅시다. $y=t$와 $0 \le x \le 2\pi$에서의 $y=\cos x$가 만나는 점이 세 개여야 하는데, $y=2-k$와 $y=2t^2+3t$는 두 점에서 만나므로 가능한 t가 두 개입니다. 이러면 수평선 두 개가 $y=t$로 그어지는 거죠.

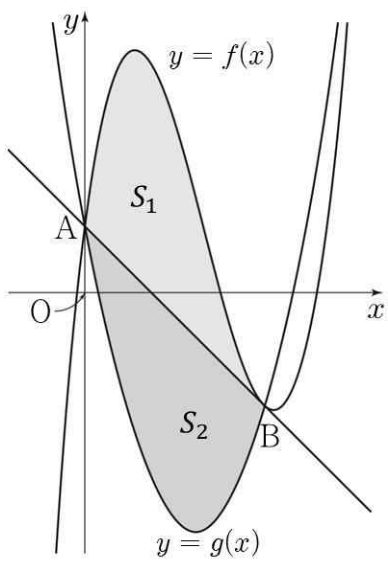
그냥 -1부터 $-\frac{1}{2}$까지 부분에서 수평선 두 개를 그으면 서로 다른 4개의 점에서 만나게 됩니다. 우리는 세 점에서 만나게 해야 하죠?

이때 딱 한 점에서 만나게 하는 지점이 있죠. 만약 그 수평선 중 하나가 $y=-1$이라면? 그러면 $y=-1$과 만나는 점 하나에 $y=a$(a는 상수)와 만나는 점 두 개 합쳐서 세 개가 되겠네요.

따라서 $y=2-k$와 $y=2t^2+3t$는 $t=-1$과 $t=-\frac{1}{2}$에서 만나야 하므로 $2-k=-1$이고 $k=3$입니다.

그리고 $0 \leq x \leq 2\pi$에서 $\cos x=-\frac{1}{2}$가 되는 가장 큰 실근은 $\frac{4}{3}\pi$이므로 $\alpha=\frac{4}{3}\pi$입니다. $k\times\alpha=4\pi$이고 답은 ②번이네요.

2. 그림과 같이 삼차함수 $f(x)=x^3-6x^2+8x+1$의 그래프와 최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $y=g(x)$의 그래프가 점 $\mathrm{A}(0,\ 1)$, 점 $\mathrm{B}(k,\ f(k))$에서 만나고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 B에서의 접선이 점 A를 지난다.
곡선 $y=f(x)$와 직선 AB로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1,
곡선 $y=g(x)$와 직선 AB로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_s라 하자.
$S_1=S_2$일 때, $\int_0^k g(x)dx$의 값은? (단, k는 양수이다.)
〔2023년 4월 12〕



① $-\frac{17}{2}$ ② $-\frac{33}{4}$ ③ -8 ④ $-\frac{31}{4}$ ⑤ $-\frac{15}{2}$

2. 정답 ② 〔2023년 4월 12〕

1) 함수 구하기 - 차함수

그림처럼 삼차함수 $f(x)=x^3-6x^2+8x+1$, 이차함수 $g(x)$, $\mathrm{B}(k,\ f(k))$에서의 접선이 모두 $\mathrm{A}(0,\ 1)$, $\mathrm{B}(k,\ f(k))$에서 만난다고 합니다. 일단 이것부터 해결하죠.

일단 $\mathrm{B}(k,\ f(k))$에서의 접선이 $\mathrm{A}(0,\ 1)$을 지나므로 편의상 $y=f'(k)x+1$이라고 할게요. 이때 $y=f'(k)x+1$과 이차함수 $g(x)$가 $\mathrm{A}(0,\ 1)$, $\mathrm{B}(k,\ f(k))$에서 만나죠? 따라서 $g(x)$의 최고차항의 계수를 b라고 하면 차함수에 의하여 $g(x)-f'(k)x-1=bx(x-k)$이고 $g(x)=bx(x-k)+f'(k)x+1$입니다.

또한 삼차삼수 $f(x)$와 $\mathrm{B}(k,\ f(k))$에서의 접선은 A에서 만나고 B에서 접하므로 $f(x)-f'(k)-1=x(x-k)^2$이고 $f(x)=x(x-k)^2+f'(k)x+1$입니다.

이때 $f(x)=x^3-6x^2+8x+1$이므로 $f'(k)=3k^2-12k+8$이고, $f(x)=x(x-k)^2+(3k^2-12k+8)x+1$입니다.

$f(x)=x^3-6x^2+8x+1$이니까 두 식은 같아야 하죠? 항등식의 계수비교를 이용해봅시다. 일차항은 복잡해보이니까 이차항을 비교해보죠. 전개하면 $f(x)=x^3-2kx^2+(4k^2-12k+8)x+1$입니다. 따라서 $-6=-2k$이어야 하고 $k=3$이네요. $f'(k)=f'(3)=-1$이고 $g(x)=bx(x-3)-x+1$입니다.

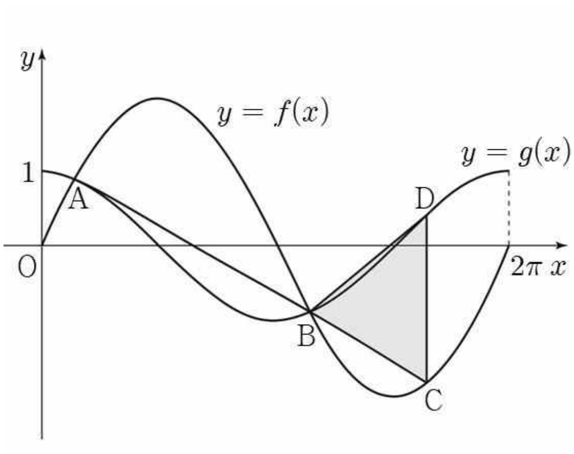
2) 정적분 나누기

그리고 곡선 $y=f(x)$와 직선 AB로 둘러싸인 부분의 넓이가 S_1, 곡선 $y=g(x)$와 직선 AB로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_s인데 $S_1=S_2$이라고 합니다. 그리고 $\int_0^k g(x)dx$를 구하라네요.

일단 S_1은 $\int_0^3 f(x)-(-x+1)dx$이고 S_2는 $\int_0^3 -x+1-g(x)dx$이죠? 이 둘이 같다는 건 $\int_0^3 g(x)dx=-\int_0^3 f(x)+2x-2dx$이라는 거네요? 그럼 이대로 계산하죠.

$-\int_0^3 x^3-6x^2+10x-1dx=-\left[\frac{x^4}{4}-2x^3+5x^2-x\right]_0^3=-\frac{33}{4}$입니다. 답은 ②번이네요.

3. 그림과 같이 닫힌구간 $[0,\ 2\pi]$에서 정의된 두 함수 $f(x)=k\sin x$, $g(x)=\cos x$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=g(x)$가 만나는 서로 다른 두 점을 A, B라 하자. 선분 AB를 3 : 1로 외분하는 점을 C라 할 때, 점 C는 곡선 $y=f(x)$ 위에 있다. 점 C를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=g(x)$와 만나는 점을 D라 할 때, 삼각형 BCD의 넓이는? (단, k는 양수이고, 점 B의 x좌표는 점 A의 x좌표보다 크다.)
〔2023년 4월 13〕



① $\dfrac{\sqrt{15}}{8}\pi$　　② $\dfrac{9\sqrt{15}}{40}\pi$　　③ $\dfrac{\sqrt{5}}{4}\pi$

④ $\dfrac{3\sqrt{10}}{16}\pi$　　⑤ $\dfrac{3\sqrt{5}}{10}\pi$

3. 정답 ③ 〔2023년 4월 13〕

1) 그림 있으면 그림 보면서, 문제해석

$0 \le x \le 2\pi$에서 $f(x)=k\sin x$, $g(x)=\cos x$가 있는데 만나는 점을 A, B라고 한답니다.

이때 A, B의 3 : 1 외분점이 C인데 이것도 $f(x)$ 위의 점이라고 하네요. C랑 같은 x좌표이고 $g(x)$ 위의 점을 D라고 할 때 BCD의 넓이를 구하랍니다. 일단 그림에 다 표시되어 있네요.

일단 C가 A, B의 3 : 1 외분점이니까 B의 x좌표를 b라 잡으면 A는 $b-2a$, C는 $b+a$로 잡을 수 있죠? 그러면 $k\sin b=\cos b$이고 $k\sin(b-2a)=\cos(b-2a)$입니다.

이때 $k\sin b=\cos b$이므로 $\dfrac{\sin b}{\cos b}=\tan b=\dfrac{1}{k}$이고, $k\sin(b-2a)=\cos(b-2a)$이므로 $\dfrac{\sin(b-2a)}{\cos(b-2a)}=\tan(b-2a)=\dfrac{1}{k}$이죠? 값이 같네요? 탄젠트 함수는 주기가 π잖아요? 그 말은 $2a$는 π, 2π, $\cdots$ 중 하나라는 거죠. 그런데 $k\sin x$ 함수와 $\cos x$ 함수는 만나면 무조건 $\tan x=\dfrac{1}{k}$ 형태가 되므로 $2a$는 값 중에서 가장 작은 π가 됩니다. 따라서 $a=\dfrac{\pi}{2}$이네요.

y좌표도 가야겠죠? A는 지금 $(b-\pi,\ \cos(b-\pi))$이고 B는 $(b,\ \cos b)$인데 $\cos(b-\pi)$는 각 변환에 의하여 $-\cos b$로 바꿀 수 있으므로 C의 y좌표는 $2\cos b$입니다. 그런데 C의 y좌표는 $k\sin\left(b+\dfrac{\pi}{2}\right)$이고 각 변환을 하면 $k\cos b$이므로 $k=2$이네요.

또한 $\dfrac{\sin b}{\cos b}=\tan b=\dfrac{1}{2}$이고 $\sin^2 b+\cos^2 b=1$인데 그림에서 $\sin x$와 $\cos x$ 모두 x축 아래에 있으므로 $\sin b=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos b=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$입니다.

다음으로 우리가 구해야 하는 건 BCD의 넓이입니다. 그런데 아주 정직하게도 삼각형을 편하게 준 덕에

$$\frac{1}{2}\times(\text{C의 } x\text{좌표}-\text{B의 } x\text{좌표})\times(\text{D의 } y\text{좌표}-\text{C의 } y\text{좌표})$$

로 계산할 수 있죠. 이미 C의 x좌표$-$B의 x좌표는 알고 있습니다. $a=\dfrac{\pi}{2}$입니다. 따라서 우리는 D의 y좌표$-$C의 y좌표만 계산하면 되겠네요.

먼저 D는 $\left(b+\frac{\pi}{2},\ \cos\left(b+\frac{\pi}{2}\right)\right)$이고, C는 $\left(b+\frac{\pi}{2},\ 2\sin\left(b+\frac{\pi}{2}\right)\right)$입니다. 이때 각 변환에 의하여 D의 y좌표$-$C의 y좌표$=-\sin b-2\cos b=\sqrt{5}$이고 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}\times\sqrt{5}=\frac{\sqrt{5}}{4}\pi$입니다. 답은 ③번입니다.

4. 양의 실수 t에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=x^3-3t^2x$$

라 할 때, 닫힌구간 $[-2,\ 1]$에서 두 함수 $f(x)$, $|f(x)|$의 최댓값을 각각 $M_1(t)$, $M_2(t)$라 하자. 함수

$$g(t)=M_1(t)+M_2(t)$$

에 대하여 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?
〔2023년 4월 14〕

<보 기>

ㄱ. $g(2)=32$

ㄴ. $g(t)=2f(-t)$를 만족시키는 t의 최댓값과 최솟값의 합은 3이다.

ㄷ. $\displaystyle\lim_{h\to0+}\frac{g\left(\frac{1}{2}+h\right)-g\left(\frac{1}{2}\right)}{h}-\lim_{h\to0-}\frac{g\left(\frac{1}{2}+h\right)-g\left(\frac{1}{2}\right)}{h}=5$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

4. 정답 ③ 〔2023년 4월 14〕

1) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

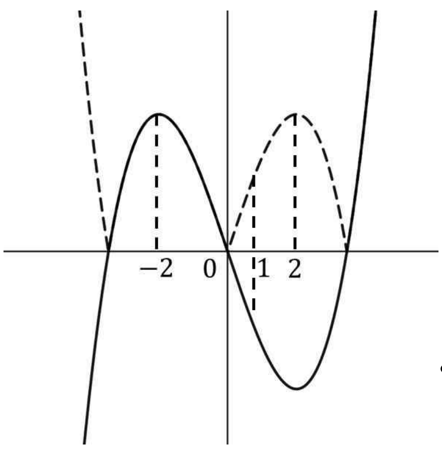
$f(x)=x^3-3t^2x$이 있는데 $-2\le x\le 1$에서 $f(x)$의 최댓값을 $M_1(t)$이라고 하고, $|f(x)|$의 최댓값을 $M_2(t)$이라고 한답니다. 그리고 $g(t)=M_1(t)+M_2(t)$이라고 하네요.

일단 $f(x)$부터 관찰해보죠. $f(x)=x^3-3t^2x=x(x^2-3t^2)=x(x-t\sqrt{3})(x+t\sqrt{3})$이므로 기함수이고 원점대칭입니다. 0, $t\sqrt{3}$, $-t\sqrt{3}$에서 x축과 만나구요. 미분하면

$f'(x)=3x^2-3t^2=3(x^2-t^2)=3(x-t)(x+t)$이므로 $x=-t$에서 극대, $x=t$에서 극소인 삼차함수입니다.

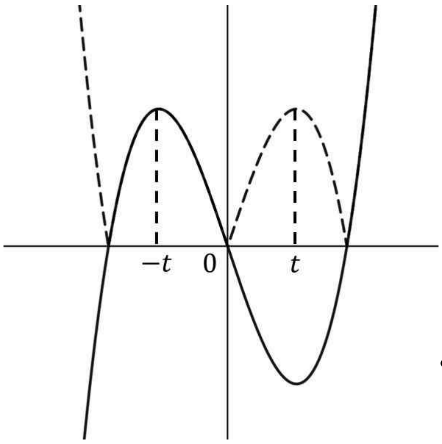
이때 문제는 $-2\le x\le 1$에서 $f(x)$와 $|f(x)|$의 최댓값을 구해야 한다는 거예요. 우리는 t와 $t\sqrt{3}$라는 값을 모르니까 함부로 $x=1$이 t보다 작은지 큰지, $t\sqrt{3}$보다 작은지 큰지를 결정할 수 없어요. 일단 ㄱㄴㄷ를 천천히 내려가면서 확인헤볼게요.

ㄱ에서 $g(2)=32$이냐고 물어보네요. $t=2$를 넣으면 $f(x)=x^3-12x=x(x-2\sqrt{3})(x+2\sqrt{3})$로 $x=2$에서 극소, $x=-2$에서 극대인 함수입니다. 그래프를 그려보면



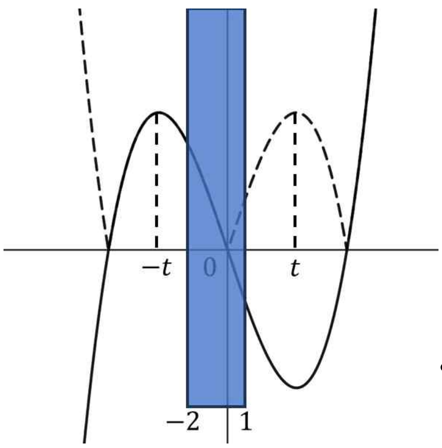
이렇게 되겠네요. $-2\le x\le 1$에서 $f(x)$와 $|f(x)|$의 최댓값은 모두 $f(-2)=16$으로 같습니다. 따라서 $g(2)=32$이네요. ㄱ은 맞습니다.

ㄴ에서 $g(t)=2f(-t)$를 만족시키는 t의 최댓값과 최솟값의 합은 3이냐고 묻네요. 이걸 확인하려면 각 변수간의 대소관계부터 파악해야 합니다. 이때 방법은 두 가지입니다. $x=-2$와 $x=1$을 고정시키고 t를 변화시키는 방법과 t를 고정시키고 $x=-2$와 $x=1$를 변화시키는 방법이죠. 어느 것으로 해도 상관은 없지만 지금은 t를 고정시키고 $x=-2$와 $x=1$를 변화시켜볼게요.



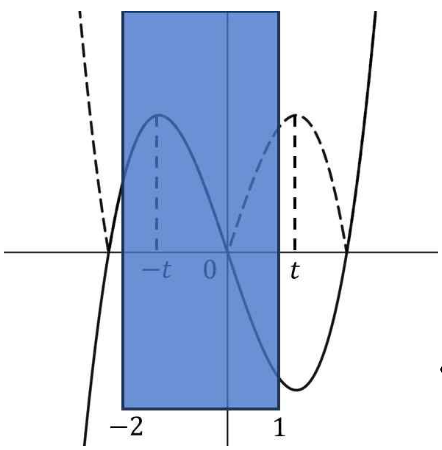
이건 $f(x)$의 그래프입니다. 우리는 이제 $x=-2$와 $x=1$을 설정해야 해요. t가 엄청나게 큰 부분부터 시작해봅시다.

t가 엄청나게 크다면



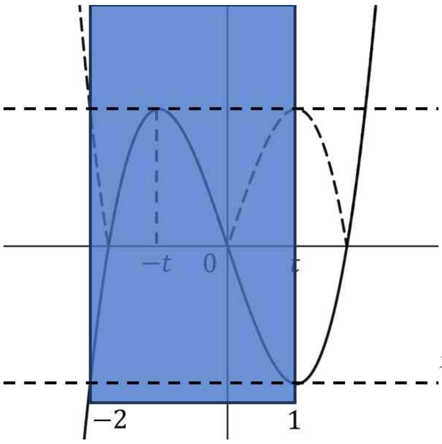
이렇게 될 거예요. 가장 큰 부분은 $f(-2)$입니다. $g(t)=2f(-2)$이죠.

언제까지일까요? 우리가 방금 ㄱ에서 봤던 $t=2$가 되는 시점까지겠죠. 왜냐하면 그 시점을 넘어가면



이 파란색의 범위 안에서 최댓값은 모두 $f(-t)$가 되겠네요.

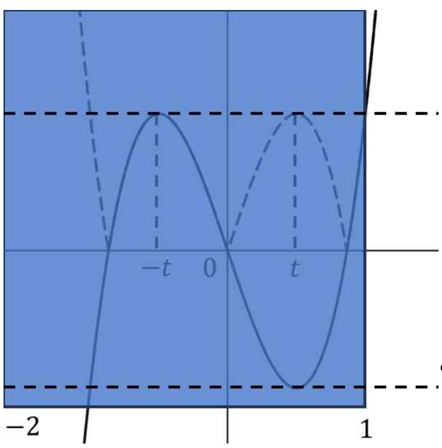
$g(t)=2f(-t)$입니다. 이건 언제까지일까요?



정확히 $f(-2)=f(1)$이 되는 시점까지입니다. 이걸 넘어가면 $f(x)$의 최댓값은 $f(-t)$이고 $|f(x)|$의 최댓값은 $-f(-2)$가 되거든요. $g(t)=f(-t)-f(-2)$입니다.

이때 t는 삼차함수의 비율관계를 안다면 바로 $t=1$이라는 걸 알 수 있지만 $f(x)=x^3-3t^2x$이므로 그냥 계산해봅시다. $-8+6t^2=1-3t^2$이고 $t^2=1$인데 t는 양수이므로 $t=1$입니다. 최댓값과 최솟값을 더하면 3이네요.

당분간은 이런 상태가 유지되다가



이렇게 $f(-t)=f(1)$이 될 때 또다시 변화합니다. $f(x)$의 최댓값은 $f(1)$이지만 $|f(x)|$의 최댓값은 $-f(-2)$이네요. $g(t)=f(1)-f(-2)$입니다.

이것도 계산해볼게요. $-2t^3=1-3t^2$이고 $2t^3-3t^2+1=0$이고 $2t^3-3t^2+1=(t-1)^2(2t+1)=0$인데 $t=1$은 아까 확인했으니까 $t=-\frac{1}{2}$일 때네요.

그러면 $g(t)=2f(-t)$가 되는 t의 최댓값은 $t=2$일 때고, 최솟값은 $t=1$까지겠네요. ㄴ도 맞습니다.

ㄷ에서 $\lim_{h \to 0+} \frac{g\left(\frac{1}{2}+h\right)-g\left(\frac{1}{2}\right)}{h} - \lim_{h \to 0-} \frac{g\left(\frac{1}{2}+h\right)-g\left(\frac{1}{2}\right)}{h} = 5$이냐고 묻네요. 일단 식이 의미하는 바는 $g(t)$의 $t=\frac{1}{2}$에서의 우미분계수와 좌미분계수입니다. 그런데 일단 확인해보긴 해야겠어요.

$t=\frac{1}{2}$이라는 건 우리가 마지막으로 확인했던 $f(-t)=f(1)$이 된 상황입니다. $t<\frac{1}{2}$일 때 $g(t)=f(1)-f(-2)=9-9t^2$이고 $t>\frac{1}{2}$일 때 $g(t)=f(-t)-f(-2)=2t^3-6t^2+8$이죠. 모두 $t=\frac{1}{2}$일 때 $\frac{27}{4}$로 값이 동일하니까 연속이구요. 그러면 $t=\frac{1}{2}$에서의 우미분계수는 $-\frac{9}{2}$이고 좌미분계수는 -9이네요.

따라서 $\lim_{h \to 0+} \frac{g\left(\frac{1}{2}+h\right)-g\left(\frac{1}{2}\right)}{h} - \lim_{h \to 0-} \frac{g\left(\frac{1}{2}+h\right)-g\left(\frac{1}{2}\right)}{h} = -\frac{9}{2}+9=\frac{9}{2}$입니다. ㄷ은 아니네요.

따라서 옳은 건 ㄱ, ㄴ이고 답은 ③번입니다.

5. 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_1의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $\log_2 \dfrac{M}{m}$의 값은?
〔2023년 4월 15〕

(가) 모든 자연수 n에 대하여 $$a_{n+1} = \begin{cases} 2^{n-2} & (a_n < 1) \\ \log_2 a_n & (a_n \geq 1) \end{cases}$$ 이다.
(나) $a_5 + a_6 = 1$

① 12 ② 13 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16

5. 정답 ④ 〔2023년 4월 15〕

1) 조건해석

(가)와 (나)조건을 만족시키는 a_1의 최댓값이 M이고 최솟값이 m일 때 $\log_2 \dfrac{M}{m}$을 구하랍니다.

(가)조건에서 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1} = \begin{cases} 2^{n-2} & (a_n < 1) \\ \log_2 a_n & (a_n \geq 1) \end{cases}$ 이라고 하네요. a_n이 1보다 작으면 그거 다음 항은 2^{n-2}이고, 1보다 크거나 같으면 $\log_2 a_n$이라는 거죠?

(나)조건에서 $a_5 + a_6 = 1$이라고 합니다. 여기서 생각해볼게요. a_5가 가질 수 있는 경우는 두 가지입니다.

$a_5 = 4$이거나, $a_5 = \log_2 a_4$이거나. 그런데 $a_5 = 4$라면 $a_6 = \log_2 4 = 2$입니다. 그러면 더해서 1을 넘죠?

따라서 $a_5 = \log_2 a_4$입니다. 그리고 $a_4 \geq 1$이죠.

이때 $a_5 < 1$이라면 $a_6 = 8$이 되는데, 그러면 $a_5 + a_6 = 1$에 의하여 $a_5 = -7$이 됩니다. 이러면 $a_5 = \log_2 a_4 = -7$이므로 $a_4 = 2^{-7}$인데, 이러면 $a_4 \geq 1$을 만족시키지 못하게 되죠? 따라서 $a_5 \geq 1$이고 $a_6 = \log_2 a_5$입니다.

그러면 $a_5 + \log_2 a_5 = 1$이네요. 여기서 다시 생각해보세요. $a_5 \geq 1$인데 만약에 $a_5 > 1$이라면 $\log_2 a_5$는 음수가 나와야 합니다. 그런데 그러면 $a_5 = 2^a$(a는 음수)인데 $a_5 \geq 1$과 모순이죠? 따라서 $a_5 = 1$이어야 합니다.

$a_6 = 0$이네요.

이제 뒤로 가봅시다. $a_5 = 1$이므로 위와 아래 어느 곳으로 가도 $a_4 = 2$입니다.

2) 케이스 분류

이때 $a_3 \geq 1$이었다면 $a_4 = \log_2 a_3 = 2$이고 $a_3 = 4$이네요.

여기서 $a_1 < 1$이라면 $a_2 = \dfrac{1}{2}$입니다. 그러면 $a_2 < 1$이므로 $a_3 = 1$이 됩니다. 모순이죠?

$a_1 \geq 1$이라면 $a_2 = \log_2 a_1$입니다. 이때

$a_2 < 1$이라면 $a_3 = 1$인데 모순이네요.

$a_2 > 1$이라면 $a_3 = \log_2 a_2 = 4$이고 $a_2 = 16$입니다. $a_2 > 1$에 해당되구요. $a_2 = \log_2 a_1 = 16$이므로 $a_1 = 2^{16}$입니다. $a_1 \geq 1$에도 해당되네요. 일단 하나 찾았어요.

이번엔 $a_3 < 1$이라고 해볼게요. 이때

$a_2 < 1$이라면 $a_3 = 1$인데 모순이네요.

$a_2 \geq 1$이라면 $a_3 = \log_2 a_2$입니다. 이거네요.

이번엔

$a_1 < 1$이라면 $a_2 = \dfrac{1}{2}$인데 $a_2 \geq 1$에 모순이네요.

$a_1 \geq 1$이라면 $a_2 = \log_2 a_1$입니다. 이거네요.

결국 $a_3 < 1$이고 $a_3 = \log_2 \log_2 a_1$, $a_2 = \log_2 a_1$인데 $a_1 \geq 1$이고 $a_2 \geq 1$이어야 하므로

$2 \leq a_1 < 2^2$입니다. 따라서 가능한 a_1은 $a_1 = 2^{16}$이거나 $2 \leq a_1 < 2^2$이어야 하네요. 최댓값은 2^{16}이고

최솟값은 2이므로 $M = 2^{16}$, $m = 2$이고 $\log_2 2^{15} = 15$입니다.

6. 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. S_n이 다음 조건을 만족시킬 때, a_{13}의 값을 구하시오.
〔2023년 4월 20〕

(가) S_n은 $n=7$, $n=8$에서 최솟값을 갖는다.
(나) $\lvert S_m \rvert = \lvert S_{2m} \rvert = 162$인 자연수 $m(m>8)$이 존재한다.

6. 정답 30 〔2023년 4월 20〕

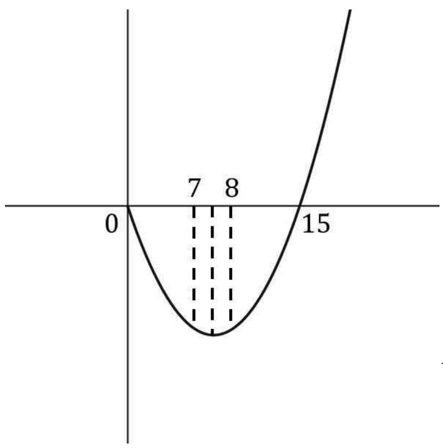
1) 조건해석, 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기, 등차수열 $a_n = a + (n-1)d$ (a는 첫항, d는 공차)로 놓기

등차수열 a_n이 있는데 n항까지 합이 S_n이고, a_{13}의 값을 구하랍니다. 가보죠.

(가)조건에서 S_n은 $n=7$, $n=8$에서 최솟값을 갖는다고 합니다. 먼저 $n=7$, $n=8$에서 최솟값이라는 건 일단 값이 같다는 거죠? $S_7 = S_8$인데 $S_7 = a_1 + \cdots + a_7$이고 $S_8 = a_1 + \cdots + a_7 + a_8$이므로 $a_8 = 0$입니다.

$a_n = a + (n-1)d$로 설정하면(a는 첫항, d는 공차) $a + 7d = 0$이고 $a = -7d$이네요. $a_n = (n-8)d$입니다.

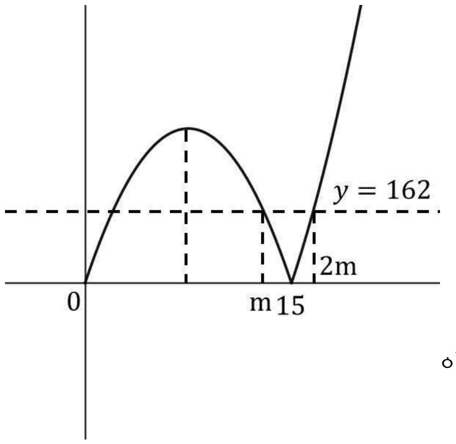
그리고 a_n은 사실상 n에 대한 일차식이고, S_n은 $\dfrac{-7d + (n-8)d}{2} \times n = \dfrac{n(n-15)d}{2}$이므로 사실상 최고차항의 계수가 $\dfrac{d}{2}$인 이차함수로 볼 수 있어요. 이때 최솟값을 가져야 하니까 d는 양수겠죠. $n=0$, $n=15$에서 n축과 만나구요.



대충 이렇게 되겠어요.

2) 절댓값 함수

이때 $|S_m| = |S_{2m}| = 162$인 자연수 $m(m>8)$이 존재한다고 합니다. 함수에 절댓값이 있네요? 접어 올려봅시다.



이렇게 됩니다.

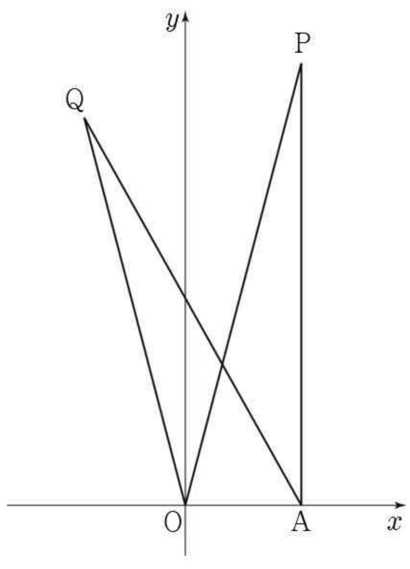
그러면 $n=m$ 부분은 아래에서 올라오게 된 거죠? S_n은 기본적으로 최고차항의 계수가 양수인 이차함수 형태니까요. 따라서 $S_m=-162$이고 $S_{2m}=162$입니다.

$S_n=\dfrac{d}{2}n(n-15)$이죠? 각각 넣어봅시다. $\dfrac{d}{2}m(m-15)=-162$, $dm(2m-15)=162$입니다. 다시 정리해보면 $dm^2-15dm=-324$이고 $2dm^2-15dm=162$이네요. 따라서 $dm^2=486$, $dm=-54$이고 $m=9$, $d=6$입니다. $a_n=6(n-8)$이고 $a_{13}=30$이네요.

7. 좌표평면 위의 두 점 O$(0,\ 0)$, A$(2,\ 0)$과 y좌표가 양수인 서로 다른 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{AQ}}=2\sqrt{15}$ 이고 $\overline{\mathrm{OP}}>\overline{\mathrm{OQ}}$ 이다.
(나) $\cos(\angle\mathrm{OPA})=\cos(\angle\mathrm{OQA})=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

사각형 OAPQ의 넓이가 $\dfrac{q}{p}\sqrt{15}$ 일 때, $p\times q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) 〔2023년 4월 21〕



7. 정답 22 〔2023년 4월 21〕

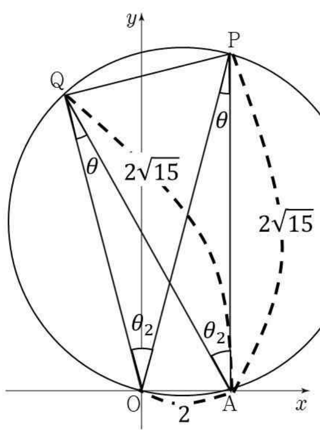
1) 그림 있으면 그림 보면서, 조건해석

그림과 같이 O(0, 0), A(2, 0)과 P, Q가 있습니다.

일단 점들이 있는 형태를 보세요. 뭔가 원주각을 쓰면 좋을 것 같은 느낌이 들지 않나요? 일단 그렇게 되려면 점들이 모두 한 원 위의 있어야 할 것 같아요.

이때 (가)조건에서 $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{AQ}}=2\sqrt{15}$ 이고 $\overline{\mathrm{OP}}>\overline{\mathrm{OQ}}$ 이라네요. 그리고 (나)조건에서는

$\cos(\angle\mathrm{OPA})=\cos(\angle\mathrm{OQA})=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$ 이라고 하구요. 이거 (나)조건에서 나온 각들을 원주각으로 이용할 수 있겠네요! 어차피 우리는 사각형 OAPQ의 넓이까지 구해야 하니까 미리 선을 이어서 사각형을 만들어 놓을게요.

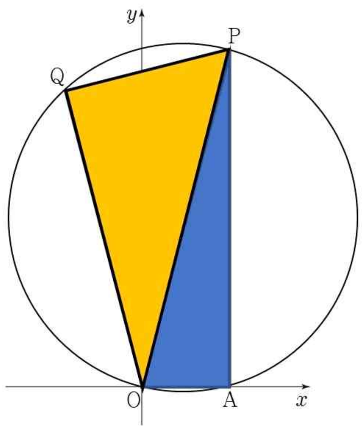


일단 이렇게 설정해놓을게요.

일단 코사인부터 해결해보죠. 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\dfrac{(2\sqrt{15})^2+\overline{\mathrm{OQ}}^2-2^2}{2\times2\sqrt{15}\times\overline{\mathrm{OQ}}}=\dfrac{(2\sqrt{15})^2+\overline{\mathrm{OP}}^2-2^2}{2\times2\sqrt{15}\times\overline{\mathrm{OP}}}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$ 이고 정리하면 $(x-7)(x-8)=0$의 방정식의 두 근이 $\overline{\mathrm{OQ}}$와 $\overline{\mathrm{OP}}$가 됩니다. 이때 $\overline{\mathrm{OP}}>\overline{\mathrm{OQ}}$이라고 했으니까 $\overline{\mathrm{OQ}}=7$, $\overline{\mathrm{OP}}=8$이 되겠네요.

이제 사각형의 넓이를 구해야 하는데, 직사각형이 아니니까 삼각형 두 개로 쪼개서 구하면 좋을 것 같죠? 근데 하나는 직각삼각형으로 나와 있으니까 이거랑 나머지를 해서 구해봅시다.



일단 파란색 부분은 밑변의 길이가 2이고 높이가 $2\sqrt{15}$ 인 삼각형이므로 넓이는

$\frac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{15}=2\sqrt{15}$ 입니다.

2-1) 그림 있으면 그림 보면서

이제 노란색 부분을 구해보죠. 먼저 $\overline{OQ}=7$는 알고 있으니까 그림에 표시해놓은 $\sin\theta_2$를 알아야 합니다. 이때 원주각을 이용하면 그림과 같이 θ_2를 파악할 수 있죠. 이때 삼각형 OQP와 AQP는 같은 변을 공유하고 두 변의 길이를 알고 있으니까 $\cos\theta_2=\frac{(2\sqrt{15})^2+(2\sqrt{15})^2-\overline{QP}^2}{2\times 2\sqrt{15}\times 2\sqrt{15}}=\frac{7^2+8^2-\overline{QP}^2}{2\times 7\times 8}$ 이고 $\overline{QP}=\sqrt{15}$ 입니다.

$\cos\theta_2=\frac{7}{8}$ 이고 $\cos^2\theta_2+\sin^2\theta_2=1$에 의해 $\sin\theta_2=\frac{\sqrt{15}}{8}$ 입니다. 따라서 삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 7\times\sin\theta_2\times 8=\frac{7\sqrt{15}}{2}$ 입니다. 아까 구한 파란색과 더하면 $\frac{11}{2}\sqrt{15}$ 네요. $p=2$, $q=11$이므로

$p\times q=22$입니다.

2-2) 그림 있으면 그림 보면서

삼각형이 원에 내접하니까 사인법칙도 사용할 수 있겠네요. $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$을 이용하면 $\sin\theta=\frac{1}{4}$ 이고

사인법칙에 의해 $\frac{\overline{OA}}{\sin\theta}=8=2R$입니다. 어? 그런데 8이라는 숫자는 $\overline{OP}=8$에서 봤잖아요? 그럼 이게 지름이네요. 그리고 우리가 구할 노란색 삼각형 OQP는 직각삼각형이구요. 이미 $\overline{OQ}=7$는 알고 있으니까 $\overline{QP}$ 만 구하면 되겠어요.

이때 직각삼각형 OQP에서 빗변과 높이를 알잖아요? $\overline{OQ}=7$, $\overline{OP}=8$를 알고 있으니까 피타고라스의 정리에

의해 $7^2+\overline{\mathrm{QP}}^2=8^2$이고 $\overline{\mathrm{QP}}=\sqrt{15}$입니다. 따라서 삼각형의 넓이는 $\frac{7}{2}\sqrt{15}$이고 아까 구한 파란색과 더하면 $\frac{11}{2}\sqrt{15}$네요. $p=2$, $q=11$이므로 $p\times q=22$입니다.

8. 두 상수 a, $b(b \neq 1)$과 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, 도함수 $g'(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
(나) $\lvert x \rvert < 2$일 때, $g(x) = \int_0^x (-t+a)dt$이고 $\lvert x \rvert \geq 2$일 때, $\lvert g'(x) \rvert = f(x)$이다.
(다) 함수 $g(x)$는 $x=1$, $x=b$에서 극값을 갖는다.

$g(k)=0$을 만족시키는 모든 실수 k의 값의 합이 $p+q\sqrt{3}$일 때, $p \times q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 유리수이다.)
〔2023년 4월 22〕

8. 정답 32 〔2023년 4월 22〕

1) 조건해석, 정적분의 위끝에 변수가 있는 경우, 절댓값 함수

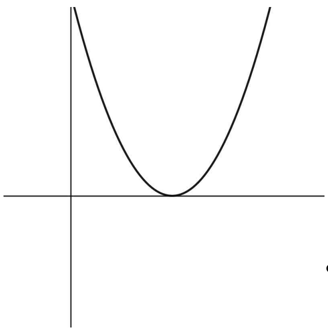
일단 이차함수 $f(x)$와 $g(x)$가 있는데 (가)조건에서 $g(x)$는 미분가능하고 도함수는 연속이랍니다.

(나)조건을 정리해보면 결국

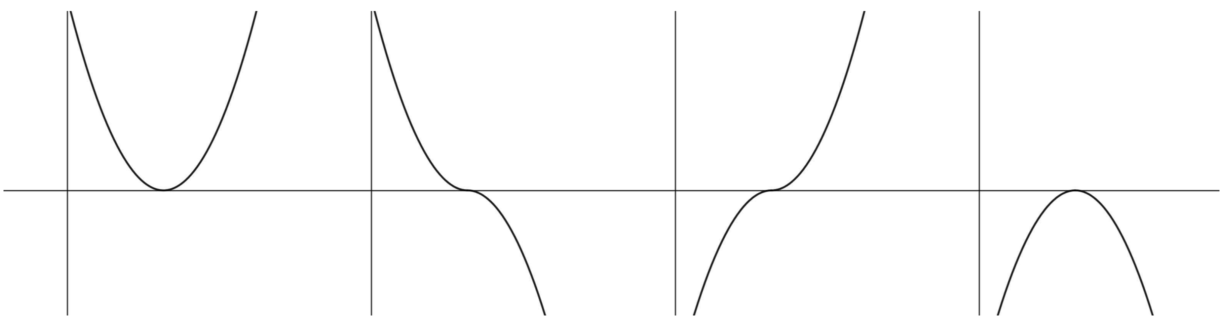
$-2 < x < 2$일 때는 $g(0) = 0,\ g'(x) = -x + a$이고,

$x \geq 2,\ x \leq -2$일 때는 $|g'(x)| = f(x)$이라는 거죠.

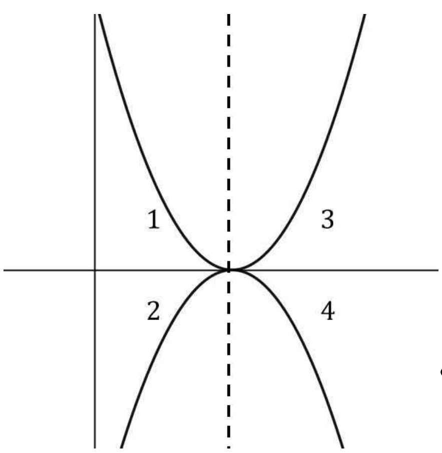
$|g'(x)| = f(x)$이라는 건 $g'(x)$가 $f(x)$를 따라가는데 아래로 접는 것도 가능하다는 말이에요. 다시 말하자면



이게 $f(x)$라고 했을 때



$g(x)$는 이 네 가지 형태가 모두 가능합니다. 어차피 절댓값으로 올리면 $f(x)$랑 똑같이 되거든요. 그러니까 다시 말하자면



이렇게 1, 2번 중에서 하나를 고르고, 3, 4번 중에서 하나를 고르면 되는

함수인 거예요. 이때 주의해야 할 점은 절댓값을 씌운 결과가 $f(x)$이기 때문에 범위 내에서는 $f(x)$는 무조건 x축 위에 있어야 합니다. x축 아래에 있으면 음수라는 말인데 절댓값을 씌우면 음수가 불가능하잖아요.

2) 연속은 좌극한 우극한 함숫값 확인, 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

(다)조건에서 $g(x)$가 $x=1$, $x=b$에서 극값을 갖는다고 합니다. 일단 $x=1$에서 극값을 가지니까 $g'(1)=0$이죠? 따라서 $a=1$입니다. $-2<x<2$에서 $g'(x)=-(x-1)$이네요.

이때 도함수는 연속이어야 하니까 $g'(-2)=f(-2)=3$, $g'(2)=-1$이어야 하겠죠? 당연히 $|g'(2)|=f(2)=1$이구요.

$x=b$에서도 극값을 갖는데 이미 $g'(1)=0$은 있으니까 $|x|\geq 2$에서 조건을 만족시키는 거겠죠? 일단 $g'(b)=f(b)=0$입니다.

여기서 문제는 $f(x)$의 개형이에요. 만약 $f(x)$의 최고차항의 계수가 음수라면? $|x|\geq 2$에서 무조건 x축과 만나고 x축 아래로 내려가게 됩니다. 이러면 범위 내에서 x축 위에 있어야 한다는 조건과 모순이 발생하죠? 최고차항의 계수는 양수입니다.

$f(-2)=3$, $f(2)=1$이므로 $x=-2$에서 $f(x)$는 감소해야 합니다. $f(x)$는 이차함수라 한 번 증가하면 계속 증가해야 하는데 $f(-2)=3$, $f(2)=1$이면 감소하잖아요?

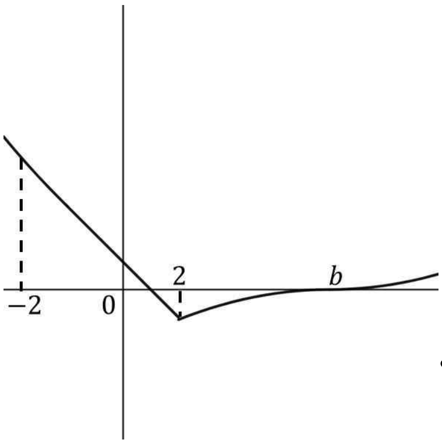
이때 이미 $f(-2)$의 값이 양수이므로 감소하는 $f(x)$의 특성상 $x<-2$에서 x축과 만날 수 없습니다. 따라서 $f(b)=0$이 되는 b는 $x>2$에 있어야 합니다.

그런데 그렇다고 $-2<x<2$에서 극소점이 있으면 안 됩니다. 그러면 $x>2$에서 증가하는 형태인데 $f(2)$의 값이 양수라 x축과 만날 수 없거든요. 따라서 $f(b)=0$이 되는 b는 $f(x)$가 x축과 만나게 되는 가장 작은 실근이 되고 $f(x)$는 $x=b$까지 계속 감소하는 형태입니다.

그런데 여기서 또 $f(x)$가 x축과 두 번 만나는 것도 불가능합니다. 그러면 x축 아래로 내려가는 부분이 생기는데 $x>2$의 범위에서는 $f(x)$는 항상 x축 위에 있어야 한다고 했었죠?

결국 $f(x)$는 $x=b$에서 x축에 접해야 합니다. $f(x)=k(x-b)^2$의 형태가 되는 거죠.

이때 $g'(x)$는 $f(x)$의 개형에서 부호를 선택할 수 있다고 했고, $g'(2)=-1$이므로 $g'(x)$가 연속이 되기 위해서는 $2<x<b$ 부분에서 $-f(x)$의 형태가 되어야 합니다.



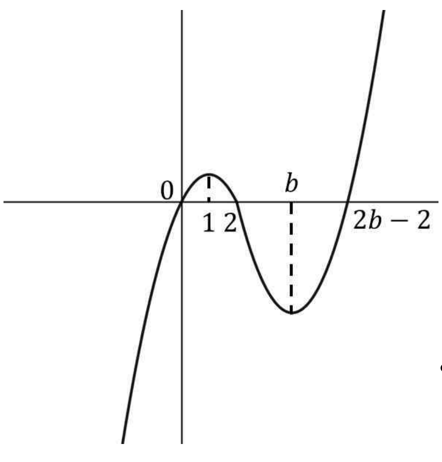
이렇게 그려지겠죠?

이제 우리가 구해야 할 건 x축과 만나는 모든 점의 x좌표의 합을 구해야 합니다. 일단 $g(0)=0$을 알긴 하죠.

$-2<x<2$에서 $g'(x)=-(x-1)$이고 적분해서 올린 후 $g(0)=0$을 넣으면 $g(x)=-\dfrac{1}{2}x(x-2)$입니다.

$g(2)=0$이네요.

이제 대충 그려보면



이렇게 되겠네요.

$x=b$를 전후로 함수가 부호가 바뀐 관계이므로 $x>2$에서 $g(x)$는 $x=b$축 대칭입니다. 따라서 우리가 구하는 x축과 만나는 점의 x좌표는 그림과 같이 구할 수 있고 합은 $2b$인 거죠. b를 구해야 합니다.

$f(x)=k(x-b)^2$인데 $f(-2)=3$, $f(2)=1$이죠? 가볼게요. $k(b+2)^2=3$, $k(b-2)^2=1$이고 정리하면 $kb^2+4kb+4k=3$, $kb^2-4kb+4k=1$에 $b^2-8b+4=0$입니다. 근의 공식을 이용하면 $4\pm2\sqrt{3}$입니다. 이때 $b>2$이므로 $b=4+2\sqrt{3}$이네요. 합은 $8+4\sqrt{3}$이고 $p=8$, $q=4$이므로 $p\times q=32$입니다.

9. 숫자 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4가 하나씩 적혀 있는 8장의 카드가 있다. 이 8장의 카드 중에서 7장을 택하여 이 7장의 카드 모두를 일렬로 나열할 때, 서로 이웃한 2장의 카드에 적혀 있는 수의 곱 모두가 짝수가 되도록 나열하는 경우의 수는? (단, 같은 숫자가 적힌 카드끼리는 서로 구별하지 않는다.) 〔2023년 4월 확통 28〕

① 264　② 268　③ 272　④ 276　⑤ 280

9. 정답 ① [2023년 4월 확통 28]

1) 확통은 상황이해 후 기준 잡고 분류, 조건해석

1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4 중에서 7개를 골라서 나열할 때 모든 이웃한 2장의 곱이 모두 짝수가 되도록 나열하는 경우의 수를 구하라네요.

일단 모든 이웃한 2장의 곱이 짝수가 되도록 해야 한다는 건 홀수가 연속된 경우가 없이 무조건 짝수가 붙어 있어야 한다는 거죠? 그러면 짝수를 먼저 배열한 후, 사이사이에 홀수를 넣어서 이웃하지 못하게 만들어버리면 되겠네요.

이제 8장 중 7장을 선택해야 하니까 어떤 숫자를 제외할지를 정해야 합니다. 경우는 2가지겠죠? 짝수거나 홀수거나. 지금 현재 짝수 4장, 홀수 4장이므로 이 중 한 장을 제외해봅시다.

2) 케이스 분류

2-1) 짝수가 3개일 때

짝수를 제외했다면 짝수는 3개입니다. 다만 2를 제외한 경우와 4를 제외한 경우가 있죠.

2를 제외했다면 남은 짝수는 224입니다. 이걸 나열하는 경우의 수는 $\dfrac{3!}{2!}=3$입니다.

4를 제외했다면 남은 짝수는 222입니다. 경우의 수는 1이네요. 총 $3+1=4$입니다.

그럼 이제 사이사이에 끼워넣어보죠. 짝수 3개를 나열한 후 짝수 바로 옆에 해당하는 4자리에 나머지 홀수를 배열하면 됩니다. 1133이므로 나열하는 경우의 수는 $\dfrac{4!}{2!\times 2!}=6$입니다. 구하는 경우의 수는 $4\times 6=24$네요.

2-2) 짝수가 4개일 때

홀수를 제외했다면 짝수는 4개입니다. 2224를 배열하면 $\dfrac{4!}{3!}=4$입니다.

이후에는 짝수 바로 옆자리 5자리 중 3자리를 결정해야 해요. 경우의 수는 ${}_5C_3=10$입니다.

자리가 결정되었다면 4개의 홀수 중에서 어느 것을 제외하고 배열할지를 결정해야 합니다. 1을 제외하거나 3을 제외해야 하는데 113과 133 어느 경우라도 나열하는 경우의 수는 $\dfrac{3!}{2!}=3$이므로 총 6입니다. 따라서 구하는 경우의 수는 $4\times 10\times 6=240$입니다.

모든 경우의 수를 합하면 $24+240=264$입니다. 답은 ①번이네요.

10. 두 집합

$$X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\},\ \ Y=(1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$$

에 대하여 다음 조건을 만족시키는 X에서 Y로의
함수 f의 개수를 구하시오. 〔2023년 4월 확통 29〕

(가) $f(4)=f(1)+f(2)+f(3)$ (나) $2f(4)=f(5)+f(6)+f(7)+f(8)$

10. 정답 523 〔2023년 4월 확통 29〕

1) 확통은 상황이해 후 기준 잡고 분류, 조건해석

$X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$, $Y=(1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$인데 $X \rightarrow Y$인 f를 구하랍니다.

(가)조건에서 $f(4)=f(1)+f(2)+f(3)$이고 (나)조건에서 $2f(4)=f(5)+f(6)+f(7)+f(8)$라고 하네요. 이거 일단 $f(4)$가 겹치므로 가장 중요하고, $f(4)$를 결정한 후에 나머지를 나열하는 식으로 가야 할 것 같아요.

$f(4)$가 결정되면 익숙한 형태로 바뀌죠. 서로 다른 상자에 같은 공을 넣는 경우, 즉 중복조합의 상황입니다. 그런데 문제는 최솟값과 최댓값이 정해져 있다는 거예요. 넘는 경우만 제외하는 방식으로 해도 되지만 지금은 그냥 다 세겠습니다. 의외로 얼마 안 걸려요.

일단 각 함숫값들은 1부터 5까지의 값이므로 $f(4)$는 최소 3 최대 5여야 합니다. 경우는 3, 4, 5 이렇게 3가지죠?

2) 케이스 분류

2-1) $f(4)=3$일 때

$f(1)+f(2)+f(3)=3$

$f(5)+f(6)+f(7)+f(8)=6$

이건 5를 넘는 경우가 없어서 중복조합으로 가겠습니다. $1\times{}_4H_2=10$입니다.

2-2) $f(4)=4$일 때

$f(1)+f(2)+f(3)=4$

$f(5)+f(6)+f(7)+f(8)=8$

이것도 넘는 경우가 없네요. 바로 가보죠. ${}_3H_1\times{}_4H_4={}_3C_1\times{}_7C_4=105$입니다.

2-3) $f(4)=5$일 때

$f(1)+f(2)+f(3)=5$

$f(5)+f(6)+f(7)+f(8)=10$

일단 $f(1)+f(2)+f(3)=5$의 경우 5를 넘는 경우가 없어서 그냥 중복조합으로 하면 됩니다.

${}_3H_2={}_4C_2=6$입니다.

문제는 $f(5)+f(6)+f(7)+f(8)=10$의 경우죠. 5를 넘는 경우가 발생하거든요. 전체 경우의 수인 ${}_4H_6={}_9C_6=84$에서 넘는 경우 즉 1126, 1117의 경우만 빼서 계산하면 될 것 같습니다. 1126의 경우 $\frac{4!}{2!}=12$이고, 1117의 경우 $\frac{4!}{3!}=4$입니다. 따라서 경우의 수는 $84-12-4=68$이네요. 구하는 경우의 수는 $6\times68=408$입니다.

모든 경우의 수를 합하면 $10+105+408=523$입니다.

11. 세 문자 a, b, c 중에서 중복을 허락하여 각각 5개 이하씩 모두 7개를 택해 다음 조건을 만족시키는 7자리의 문자열을 만들려고 한다.

(가) 한 문자가 연달아 3개 이어지고 그 문자는 a뿐이다. (나) 어느 한 문자도 연달아 4개 이상 이어지지 않는다.

예를 들어, $baaacca$, $ccbbaaa$는 조건을 만족시키는 문자열이고 $aabbcca$, $aaabccc$, $ccbaaaa$는 조건을 만족시키지 않는 문자열이다. 만들 수 있는 모든 문자열의 개수를 구하시오.
〔2023년 4월 확통 30〕

11. 정답 188 〔2023년 4월 확통 30〕

1) 확통은 상황이해 후 기준 잡고 분류, 조건해석

a, b, c 중에서 중복을 허용하여 7개를 선택하는데 각각 5개를 넘으면 안 된다고 합니다.
(가)조건에서 a만 3개 연속으로 이어진다고 하네요.
(나)조건에서 4개 이상으로 이어지는 문자는 없어야 한다고 합니다.

정리해보면 일단 aaa는 고정이고 나머지 4개 자리에 어떤 문자를 배치하느냐가 핵심이 되겠네요.

일단 a만이 3개 연속으로 이어지고, 각 문자는 5개를 넘지 말아야 하고, 4개 이상 연속으로 이어지면 안 된다는 조건은 a와 많이 관련되어 있네요. aaa가 고정이므로 b나 c는 애초에 5개를 넘을 수 없구요, b와 c가 4개 연속 이어지는 경우만 제외해주면 되겠어요.

일단 가능한 경우는 a가 3개인 경우, 4개인 경우, 5개인 경우입니다.

2) 케이스 분류

2-1) a가 5개일 때

$aaaaabb$, $aaaaabc$, $aaaaacc$가 가능합니다.
이때 a가 아닌 문자를 먼저 배치한 후, 이웃하지 않게 나열하는 것이 핵심이겠죠. 이때 a는 aaa, a, a와 aaa, aa 이렇게 두 가지로 가능합니다.

$aaaaabb$의 경우 먼저 bb를 먼저 배치한 후, 옆자리 3개에 aaa, a, a를 배열하면 됩니다. 경우의 수는 3이네요. aaa, aa를 배열하는 경우는 6입니다. 총 9인데 $aaaaacc$도 구조적으로 마찬가지이므로 경우의 수는 18이네요.
$aaaaabc$의 경우 b와 c의 자리배열만 추가하면 되니까 경우의 수는 $2\times9=18$입니다. 총 36이네요.

2-2) a가 4개일 때

$aaaabbb$, $aaaabbc$, $aaaabcc$, $aaaaccc$가 가능합니다. 사실상 두 경우를 구한 후에 2를 곱하면 되는 구조죠.
$aaaabbb$의 경우 bbb를 먼저 배열한 후에 옆자리 4자리에 aaa, a를 배열하면 됩니다. 먼저 4자리 중 2자리를 고른 경우의 수에서 aaa, a가 각 끝자리를 갖게 되는 경우, 즉 bbb가 연속하는 경우만 제외한 후 aaa, a를 배열해주면 됩니다. 경우의 수는 $\left({}_4C_2-1\right)\times2=10$입니다.

$aaaabbc$의 경우 어차피 a가 아닌 나머지 문자가 3개 연속될 수 없으니까 그냥 배열해주면 되겠네요. 먼저

bbc를 배열한 후 옆자리 4자리 중 2자리를 골라 aaa, a를 배열하면 됩니다. 경우의 수는

$\frac{3!}{2!} \times {}_4C_2 \times 2! = 36$입니다.

나머지 2가지 경우는 사실상 앞의 두 경우와 동일한 구조이므로 경우의 수는 같습니다. 따라서 구하는 경우의 수는 $2 \times (10+36) = 92$입니다.

2-3) a가 3개일 때

$aaabbbb$, $aaabbbc$, $aaabbcc$, $aaabccc$, $aaacccc$가 가능합니다. $aaabbbb$와 $aaacccc$, $aaabbbc$와 $aaabccc$는 구조적으로 동일하므로 하나만 구하고 2를 곱하면 되겠죠?

$aaabbbb$의 경우 $bbbb$를 배열한 후 옆자리 5자리 중 aaa의 자리를 결정하면 되지만 문제는 b가 3개 연속으로 이어지지 않게 하는 경우가 $bbaaaabb$ 하나밖에 없다는 거예요. 경우의 수는 1입니다.

$aaabbbc$의 경우 b가 3개이기 때문에 연속되는 상황을 주의해야 합니다. $bbbc$가 배열하는 상황은 $bbbc$, $bbcb$, $bcbb$, $cbbb$로 4가지입니다. 이 중에서 $bbcb$, $bcbb$는 aaa를 어느 곳에 끼워넣어도 a를 제외한 나머지 문자가 3개 연속되지 않으므로 상관없습니다. 각 경우의 수는 5이구요. 경우가 2가지니까 총 10이네요.

다만 $bbbc$, $cbbb$의 경우 b가 연속되지 않게 하기 위해 aaa를 b 사이에 끼워넣어야 합니다. 경우의 수는 2이고 경우가 2가지이므로 4네요.

$aaabbcc$의 경우 어차피 a를 제외한 나머지 문자가 3개 연속될 수가 없으니까 그대로 하면 됩니다. $bbcc$를 먼저 배열한 후 옆자리 5자리 중 aaa의 자리를 결정하면 됩니다. 경우의 수는 $\frac{4!}{2! \times 2!} \times 5 = 30$입니다.

따라서 구하는 경우의 수는 $2 \times (1+10+4) + 30 = 60$입니다.

모두 합하면 $36 + 92 + 60 = 188$입니다.