제 2 교시

2024학년도 수능 대비 MIS X 소우주 모의고사

수학 영역

홀수형

성명	

수험 번호					—				

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

변한 것은 내가 아닌 삶의 무게

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형(홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 ‘0’이 포함되면 그 ‘0’도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 공통과목 및 자신이 선택한 과목의 문제지를 확인하고, 답을 정확히 표시하시오.

○ 공통과목 ·· 1~8쪽

○ 선택과목

미적분 ·· 9~12쪽

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

MIS X 소우주

출제진

송승혁(M.I.S)
[1번, 2번, 3번, 5번, 6번, 8번, 13번 원본, 14번, 15번, 19번, 23번, 24번, 25번, 26번, 30번]

박재윤(소우주수학)
[4번, 7번, 9번, 10번, 11번, 12번, 13번 마감, 16번, 17번, 18번, 20번, 21번, 22번, 28번, 29번]

강동현
[27번]

검토진

이민정 강사님

곽찬의

이서빈

주서연

제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $\sqrt[3]{2} \times 4^{\frac{5}{6}}$의 값은? [2점]

① 2 ② $2\sqrt{2}$ ③ 4 ④ $4\sqrt{2}$ ⑤ 8

$2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{5}{3}} = 2^2 = 4$

2. 함수 $f(x) = x^3 - 9x^2 + 7x + 1$에 대하여 $\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$의 값은? [2점]

① -20 ② -19 ③ -18 ④ -17 ⑤ -16

$f'(x) = 3x^2 - 18x + 7$

$f'(2) = 12 - 36 + 7 = -17$

3. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 2 + \frac{6}{7} f(3)$$

를 만족시킬 때, $f(3)$의 값은? [3점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

$f(3) = 2 + \frac{6}{7} f(3)$

$\frac{1}{7} f(3) = 2$ $\therefore f(3) = 14$

4. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_2 + a_5 = 1, \ \sum_{n=2}^{6} a_n = 2$$

일 때, a_1의 값은? [3점]

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

$a_2 + a_5 = 2a + 5d = 1$

$\sum_{n=2}^{6} a_n = \frac{5(2a+6d)}{2} = 5a + 15d = 2$

$\therefore a = 1$

출제자의 별해) 첨자의 합에서 등차중항을 눈치채셨다면 이렇게 푸셔도 괜찮았을거에요. 4번이니만큼 어떻게 푸셔도 무방합니다.

$\sum_{n=1}^{6} a_n = 6 \times \frac{\boxed{a_2 + a_5} \to 1}{2}$

$= \underbrace{\boxed{\sum_{n=2}^{6} a_n}}_{2} + a_1$

$\therefore a_1 = 6 \cdot \frac{1}{2} - 2$

$= \boxed{1}$

5. $\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$인 θ에 대하여 $\sin\theta = -\frac{12}{13}$일 때,
↳ 4사 : c⊕
$\cos\theta$의 값은? [3점]

① $\frac{5}{13}$ ② $\frac{12}{13}$ ③ $-\frac{5}{12}$
④ $-\frac{5}{13}$ ⑤ $-\frac{12}{13}$

$$\frac{144}{169} + c^2 = 1$$

$$\therefore c^2 = \frac{25}{169} \Rightarrow \cos\theta = \frac{5}{13}$$

6. 함수 $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 24x$의 극댓값과 극솟값의 차는? [3점]

① 27 ② 64 ③ 125 ④ 216 ⑤ 343

$$f'(x) = 6x^2 - 18x - 24$$

$$6(x-4)(x+1) = 0$$

$$\therefore f(4) = -112,\ f(-1) = 13$$

$$\Rightarrow 13 + 112 = 125$$

7. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. 모든 자연수 n에 대하여

$$S_n = \log_2\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \log_2\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

일 때, $\sum_{n=1}^{6}(S_n + a_{n+1})$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$
$$= \log_2\frac{n+1}{n} - \log_2\frac{n}{n-1}$$
$$= \log_2\frac{(n+1)(n-1)}{n^2} \quad (n \geq 2)$$

$$\Rightarrow a_{n+1} = \log_2\frac{(n+2)\cdot n}{(n+1)^2}$$

$$\sum_{n=1}^{6}(S_n + a_{n+1}) = \sum_{n=1}^{6}\log_2\frac{n+2}{n+1}$$
$$= \log_2\left(\frac{\cancel{3}}{2} \times \frac{\cancel{4}}{\cancel{3}} \times \cdots \times \frac{8}{\cancel{7}}\right)$$
$$= \log_2 4 = 2$$

8. $t=0$일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=3t^2-2t-1$$

이다. 시각 $t=4$에서 점 P의 위치는? [3점]

① 41 ② 42 ③ 43 ④ 44 ⑤ 45

$$\int_0^4 3t^2-2t-1\,dt=\left[t^3-t^2-t\right]_0^4$$

$$=44$$

9. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 네 개의 수

$$a_2,\ a_3,\ 15,\ a_5$$

가 이 순서대로 공차가 양수인 등차수열을 이룰 때, a_6의 값은? [4점]

① -6 ② 12 ③ -24 ④ 36 ⑤ -48

$2a_3=a_2+15 \Rightarrow 2ar^2=ar+15$

$30=a_3+a_5 \Rightarrow 30=ar^2+ar^4$

$4ar^2-2ar=ar^2+ar^4$

$r(r+2)(r-1)^2=0$

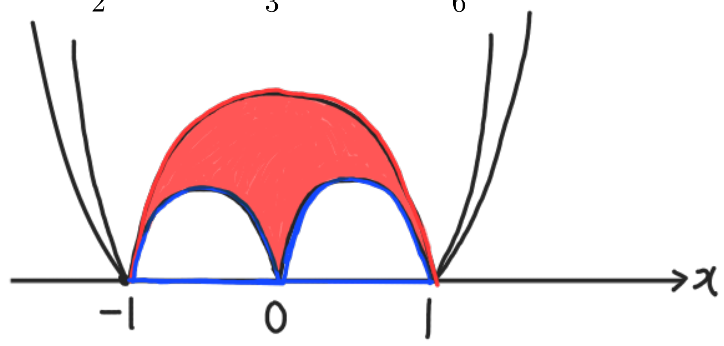
$\therefore r=-2,\ a=\frac{3}{2} \Rightarrow a_6=-48$

10. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=|f(x)|-|x^2-1|$$

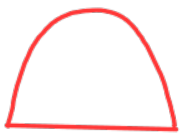
가 오직 $x=0$에서만 미분가능하지 않을 때, 곡선 $y=g(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는? [4점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{5}{6}$ ④ 1 ⑤ $\frac{7}{6}$



$f(-1)=f(1)=f(0)=0$, $f'(1)=2$, $f'(-1)=2$

$f(x)=x\cdot(x-1)(x+1)=x^3-x$

 $=\frac{1}{6}\times 2^3=\frac{4}{3}$

 $=\int_0^1 -x^3+x\,dx=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$

$=\frac{1}{4}$

$\therefore$ 넓이 $=\frac{4}{3}-2\times\frac{1}{4}=\frac{5}{6}$

출제자의 첨언) 삼차함수와 이차함수의 넓이공식을 쓰셔도 좋습니다.

11. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(3,\ f(3))$에서의 접선의 방정식은 $y=f'(5)(x-6)+6$이다.

$f(0)=0$일 때, $f'(4)$의 값은? [4점]

① -12 ② -11 ③ -10 ④ -9 ⑤ -8

$y = f'(3)(x-3)+f(3)$
$= f'(3)x - 3f'(3) + f(3)$
$= f'(5)x - 6f'(5) + 6$

$\Rightarrow f'(3) = f'(5)$, $-3f'(3)+f(3) = -6f'(5)+6$

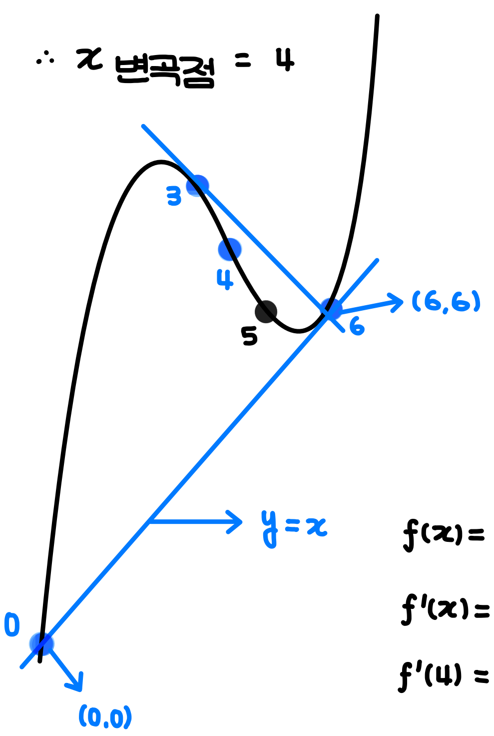
$\hookrightarrow f'(x) = 3(x-3)(x-5)+k$
$= 3x^2-24x+45+k$
$f(x) = x^3-12x^2+(45+k)x$
$f(3) = 3k+54$

$\Rightarrow -3k+3k+54 = -6k+6$
$\therefore k=-8 \Rightarrow f'(4) = -11$

출제자의 별해) 삼차함수의 비율관계는 다들 잘 알고 계실 거라 믿어요. 이 문항에서 주어진 모든 점이 절대 대충 막 주어진 것이 아니라는 점을 변곡점 x좌표가 4임에서 알아내셔서 푸셔도 좋아요. 물론 정석적인 계산풀이도 정말 훌륭합니다!

$f'(3) = f'(5)$

$\therefore x_{변곡점} = 4$



$f(x) = x(x-6)^2+x$

$f'(x) = 3(x-2)(x-6)+1$

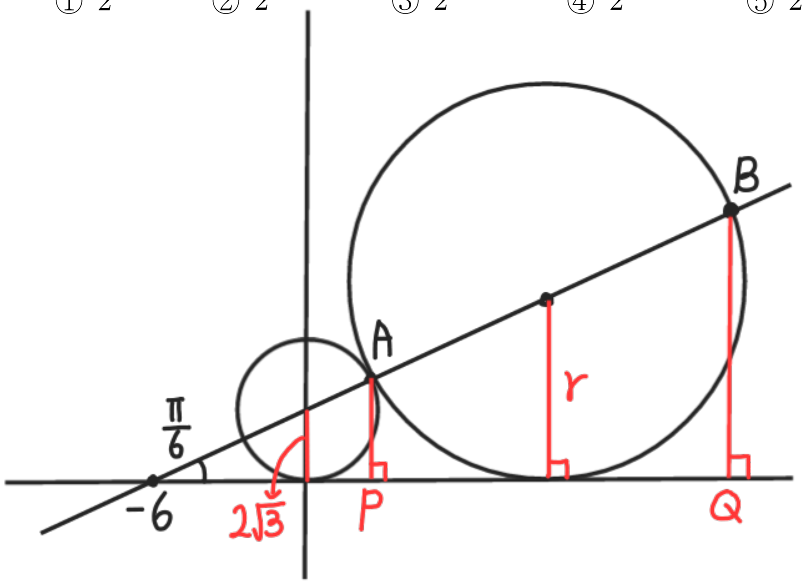
$f'(4) = \boxed{-11}$

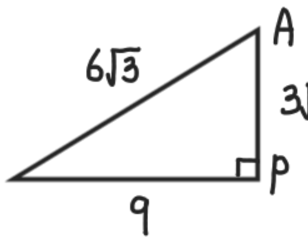
12. 두 양수 $a(a>1)$, b에 대하여 x축 위의 점 $(-6,\ 0)$을 지나고 기울기가 $\frac{\sqrt{3}}{3}$인 직선이 곡선

$$y=\log_a(bx+1)$$

과 만나는 두 점을 x좌표가 작은 순서대로 A, B라 하자. 선분 AB를 지름으로 하는 원을 C_1, 점 A에서 원 C_1에 접하고 원점을 지나는 원을 C_2라 하자. 두 원 C_1, C_2가 모두 x축에 접할 때, $a^{\sqrt{b}}$의 값은? [4점]

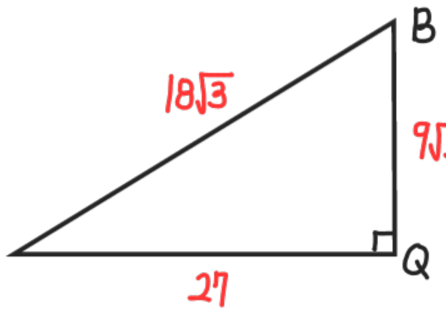
① 2 ② $2^{\frac{2}{3}}$ ③ $2^{\frac{1}{3}}$ ④ $2^{\frac{1}{6}}$ ⑤ $2^{\frac{1}{9}}$





$\Rightarrow A(3,\ 3\sqrt{3})$

$2r = r + 6\sqrt{3}$ $\therefore r = 6\sqrt{3}$



$\Rightarrow B(21,\ 9\sqrt{3})$

$a^{3\sqrt{3}} = 3b+1$, $a^{9\sqrt{3}} = 21b+1$

$a^{3\sqrt{3}} = k \Rightarrow k^3 - 7k + 6 = 0$

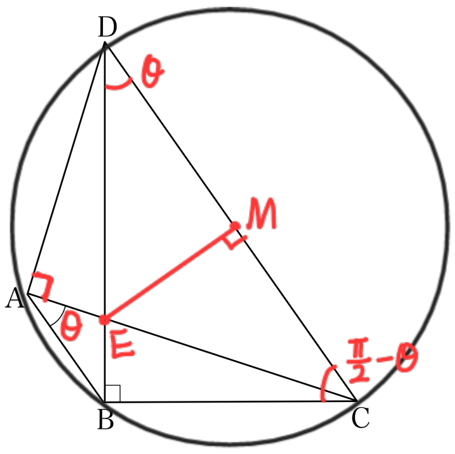
$\therefore k = 2 = a^{3\sqrt{3}}$. $b = \frac{1}{3}$

$a^{\sqrt{b}} = a^{\frac{\sqrt{3}}{3}} = (a^{3\sqrt{3}})^{\frac{1}{9}} = 2^{\frac{1}{9}}$

13. $\overline{AB}=5$, $\cos(\angle BAD)=-\frac{3}{5}$인 사각형 ABCD가 있다. 직선 AB와 직선 CD가 서로 평행하고

$$\overline{BC}=\overline{CD}\times\sin(\angle BAC),\ \angle CBD=\frac{\pi}{2}$$

일 때, 선분 AC의 길이는? [4점]



① 10 ② $\frac{80}{7}$ ③ $\frac{90}{7}$ ④ $\frac{100}{7}$ ⑤ $\frac{110}{7}$

$\frac{\overline{BC}}{\overline{CD}}=\cos(\angle BCD)=\sin(\angle BAC)$

$\Rightarrow \angle BAC=\theta$, $\angle BCD=\frac{\pi}{2}-\theta$

$\therefore \angle BDC=\theta$

$\cos(\angle BAD)=\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\sin\theta=-\frac{3}{5}$

$\therefore \sin\theta=\frac{3}{5}$, $\cos\theta=\frac{4}{5}$

$\overline{ME}=3k$, $\overline{DE}=5k$, $\overline{EB}=\frac{7}{5}k$

$\Rightarrow 5:8k=7:25 \Rightarrow 8k=\frac{125}{7}$

$\therefore \overline{AC}=\frac{32}{5}k=\frac{100}{7}$

출제자의 첨언) 사다리꼴이 원에 내접하기 위해서는 등변해야한다는 점을 알고 계셨다면 계산이 좀 더 쉬웠을 수 있겠어요. 하지만 이를 꼭 알아야 풀리는 문항은 아니니 다양한 풀이의 가능성을 열어놓고 싶어요.

14. 최고차항의 계수가 $a\,(a\neq 0)$이고 $f(1)=0$, $f(2)=2$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\int_x^{x+2}\{|f(t)|+f(t)\}dt & (x\geq 1)\\ a & (x<1)\end{cases}$$

라 하자. 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이고

$$\{x\,|\,g(x)\leq 4\}=\{x\,|\,x\leq 1\}$$

일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $f(3)>4$ $=4$

ㄴ. $x>1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)>g(1)$이다.

ㄷ. $g(2)=a^2$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

$g(1)=a=4$

$=\frac{1}{2}\cdot\int_1^3\{|f(t)|+f(t)\}dt=4$

$=8$

$x>1$ 에서 $f(x)\geq 0$

$\therefore \int_1^3\{|f(t)|+f(t)\}dt=\int_1^3 2f(t)dt=8$

$f(x)=4(x-1)(x^2+ax+b)$

$\Rightarrow \int_1^3 f(x)dx=\left[x^4+\frac{4}{3}(a-1)x^3+2(b-a)x^2-4bx\right]_1^3$

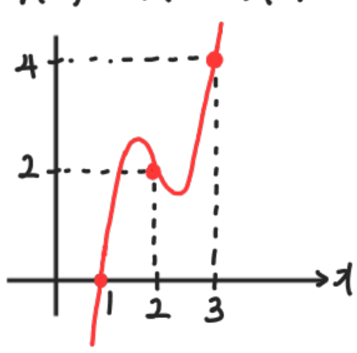
$=80+\frac{104}{3}(a-1)+16(b-a)-8b=4$

$\therefore 14a+6b=-31$

$f(2)=4(4+2a+b)=2$

$\therefore 2a+b=-\frac{7}{2} \Rightarrow a=-5,\ b=\frac{13}{2}$

$f(x)=4(x-1)(x^2-5x+\frac{13}{2}) \Rightarrow f'(x)=12(x-2)^2+\square$



ㄱ. $f(3)=4$ (×)

ㄴ. $x>1 \Rightarrow g(x)=\int_x^{x+2}f(x)dx$

$\therefore g(x)>g(1)$ (O)

ㄷ. $g(2)=\int_2^4 f(x)dx$

$=\left[x^4-8x^3+23x^2-26x\right]_2^4$

$=240-448+276-52$

$=16=a^2$ (O)

15. 함수

$f(x)=4\sin ax+b$ $\Rightarrow M=4+b,\ m=-4+b$

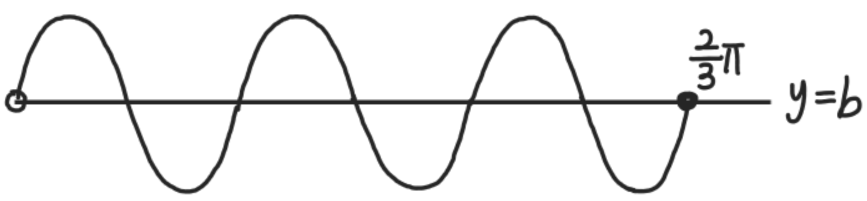
가 다음 조건을 만족시키도록 하는 두 실수 a, b에 대하여 모든 $a+b$의 값을 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 α_1, α_2, $\cdots$, α_m(m은 자연수)라 할 때, $m+\alpha_m-\alpha_2$의 값은? [4점]

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f\left(x+\frac{2}{3}\pi\right)$이다.

(나) 구간 $\left(0,\ \frac{2}{3}\pi\right]$에서 방정식 $|f(x)|=2$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다. $\hookrightarrow f(x)=-2,2$

① 28 ② 30 ③ 32 ④ 34 ⑤ 36

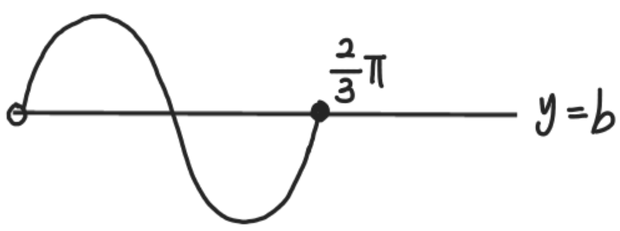
i) $|a|=9$



$4+b=-2$ or $-4+b=2$

$\therefore b=-6, 6$

ii) $|a|=3$



$4+b=2$ or $-4+b=-2$

$\therefore b=-2, 2$

α : $-15, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 15$

$\therefore m=8,\ \alpha_m=15,\ \alpha_2=-5$

$\Rightarrow m+\alpha_m-\alpha_2=28$

출제자의 첨언) (가) 조건이 문항을 구성하는 핵심입니다. $\frac{2}{3}\pi$가 주기가 아닐 수도 있다는 점과 a가 음수일 수도 있다는 점을 모두 고려해야 답을 구할 수 있는 만큼 꽤나 까다롭고 아름답습니다.

단답형

16. 부등식 $\log_2 x+\log_2(x+1)\le 1$을 만족시키는 정수 x의 개수를 구하시오. [3점]

$\log_2(x^2+x)\le 1$

$x^2+x-2\le 0$

$(x+2)(x-1)\le 0$

$-2\le x\le 1$

$\Rightarrow 0<x\le 1$ ($\because$ 진수조건 $x>0$)

$\therefore$ 1개

17. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$g(x)=x^2f(x)$

라 하자. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ f(1))$에서의 접선의 방정식이 $y=2x-1$일 때, $g'(1)$의 값을 구하시오. [3점]

$f'(1)=2,\ f(1)=1$

$g'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)$

$g'(1)=2f(1)+f'(1)=4$

18. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{5} na_n = 10,\ \ \sum_{n=1}^{5}(a_n - n)^2 = 100$$

일 때, $\sum_{n=1}^{5}(a_n)^2$의 값을 구하시오. [3점]

$$\sum_{n=1}^{5}(a_n^2 - 2n\cdot a_n + n^2)$$

$$= \sum_{n=1}^{5} a_n^2 - 2\cdot\sum_{n=1}^{5} na_n + \sum_{n=1}^{5} n^2$$

$$= \sum_{n=1}^{5} a_n^2 - 20 + 55 = 100$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{5} a_n^2 = 65$$

19. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여

$$\lim_{x\to 2}\frac{|f(x)-2|}{x-2} = f'(4)$$

일 때, $f(6)$의 값을 구하시오. [3점]

$f(2) = 2$, $f'(2) = f'(4) = 0$

$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$

$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x + C$

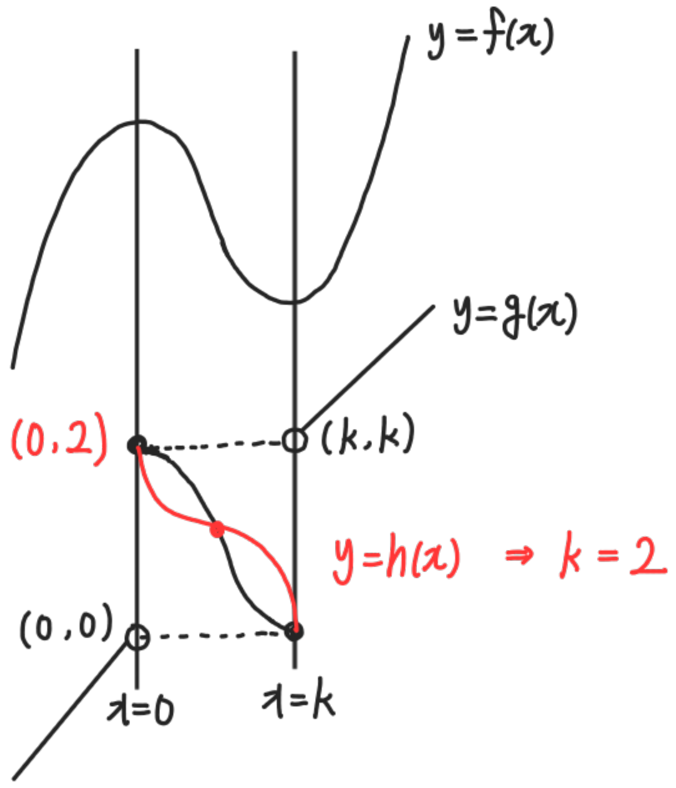
$f(2) = 20 + C = 2$ $\quad\therefore C = -18$

$\Rightarrow f(6) = 18$

20. $x=0$에서 극대인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x) = \begin{cases} x & (f'(x) > 0) \\ f(x) & (f'(x) \le 0) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 정의된 역함수 $h(x)$를 갖는다.
함수 $h(x)$가 극댓값 2를 가질 때, $f(5)$의 값을 구하시오. [4점]



$f'(x) = ax(x-2) = ax^2 - 2ax$

$f(x) = \frac{1}{3}ax^3 - ax^2 + C$

$f(0) = C = 2$, $f(2) = -\frac{4}{3}a + 2 = 0$

$\therefore a = \frac{3}{2}$

$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2 \Rightarrow f(5) = 27$

출제자의 첨언) 역함수가 존재하기 위한 조건은 일대일대응입니다. 이는 증가감소 및 연속과는 무관합니다. 다만 연속함수이면 증가하거나 감소하기만 하여야 역함수가 존재한다고 잘 알려져 있어서 많이 사용합니다. 이 문항에서는 그러한 상투적인 개념의 허를 찌르면서, 역함수가 극값을 갖는다는 조건으로 함수가 연속일 수 없음을 내비쳐 난이도를 20번에 걸맞도록 쉽게 조절하였습니다.

21. 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{10}|a_n|$의 최댓값을 구하시오. [4점]

(가) $a_1 + a_{10} = 0$

(나) 모든 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{(a_n+2)^2}{8}$이다.

(나) $n=1 \Rightarrow a^2 = \frac{(a+2)^2}{8}$ $\quad \therefore a=2$

$\Rightarrow a_{10} = -2$

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= \frac{(a_n+2)^2}{8} - \frac{(a_{n-1}+2)^2}{8}$

$a_n^2 - 4a_n - a_{n-1}^2 - 4\cdot a_{n-1} = 0$

$(a_n + a_{n-1})(a_n - a_{n-1} - 4) = 0$

$\therefore a_n = -a_{n-1}$ or $a_{n-1}+4$

$a_1 = 2$

$a_2 = -2 \qquad 6$

$a_3 = 2 \qquad -6 \qquad 10$

$a_4 = -2 \quad 6 \qquad 6 \quad -2 \qquad -10 \quad 14$

$\vdots$

$\sum_{n=1}^{10}|a_n|$ 최대가 되려면

a_n : 2 6 10 14 18 -18 -14 -10 -8 -2

$\therefore \sum_{n=1}^{10}|a_n| = 2\times 50 = \underline{100}$

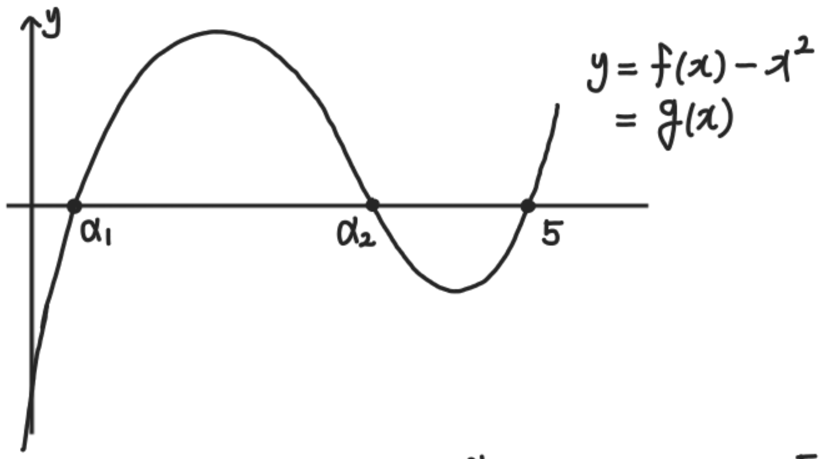
22. 최고차항의 계수가 2인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

방정식 $f(x) = x^2$은 서로 다른 세 실근 α_1, α_2, 5를 갖고 $\alpha_1 + \alpha_2 = 4$이다.

두 곡선 $y=f(x)$, $y=x^2$과 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=x^2$으로 둘러싸인 두 부분의 넓이를 각각 S_2, S_3이라 하자.

$$S_1 = |S_2 - S_3|$$

일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. (단, $0<\alpha_1<3<\alpha_2<5$) [4점]



$S_1 = \int_0^{\alpha_1} -g(x)dx$, $S_2 = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} g(x)dx$, $S_3 = \int_{\alpha_2}^{5} -g(x)dx$

$\int_0^{\alpha_1} -g(x)\,dx = \int_{\alpha_1}^{5} g(x)dx$

$\therefore \int_0^5 g(x)\,dx = 0$

$g(x) = 2(x-5)(x^2-4x+k)$

$\left[\frac{1}{2}x^4 - 6x^3 + (k+20)x^2 - 10kx\right]_0^5 = 0$

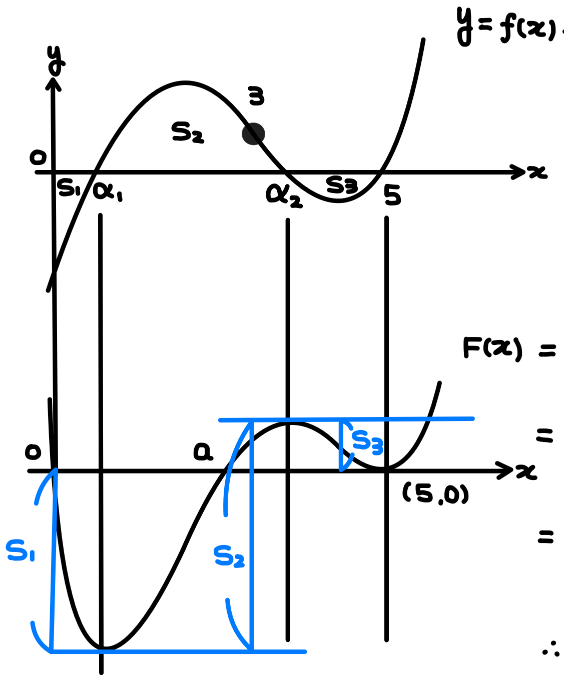
$-25k + \frac{125}{2} = 0 \qquad \therefore k = \frac{5}{2}$

$f(x) = 2(x-5)(x^2-4x+\frac{5}{2}) + x^2$

$\therefore f(2) = 13$

$F(x) = \int_0^x \{f(t) - t^2\}\,dt$

$y = f(x) - x^2 = 2x^3 - 18x^2 + \cdots$



$F(x) = \frac{1}{2}x^4 - 6x^3 + \cdots$

$= \frac{1}{2}x(x-a)(x-5)^2$

$= \frac{1}{2}(x^4 - (0+a+5+5)x^3 + \cdots)$

$\therefore 0 + a + 5 + 5 = 12$

$\therefore a = 2$

$F'(2) = f(2) - 4$

$= 9 \qquad f(2) = \boxed{13}$

출제자의 별해) 한 부정적분의 함숫값 차이로 정적분을 해석하고 삼차함수와 사차함수에서 근과 계수의 관계를 활용하여 풀이를 진행하셨다면 적분 계산 없이 문제를 해결하실 수도 있어요.

＊ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. 곡선 $3x^2+2xy=y^2$ 위의 점 $(2,\ 6)$에서의 접선의 기울기는? [2점]

① 3 ② 4 ③ 6 ④ 9 ⑤ 12

$$6x+2y+2x\cdot\frac{dy}{dx}=2y\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-3x-y}{x-y}\Rightarrow\frac{-12}{-4}=3$$

24. $\sin 2\alpha=\frac{4}{5}$, $\cos 2\beta=\frac{15}{17}$일 때, $\cos^2\alpha+\sin^2\beta$의 최솟값은? [3점]

① $\frac{16}{85}$ ② $\frac{18}{85}$ ③ $\frac{4}{17}$ ④ $\frac{22}{85}$ ⑤ $\frac{24}{85}$

$$\cos 2\beta=2\cdot\cos^2\beta-1=\frac{15}{17}$$

$$\Rightarrow\cos^2\beta=\frac{16}{17},\ \sin^2\beta=\frac{1}{17}$$

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{4}{5}$$

$$\sin\alpha=\frac{2}{5\cdot\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow\frac{4}{25\cos^2\alpha}+\cos^2\alpha=1$$

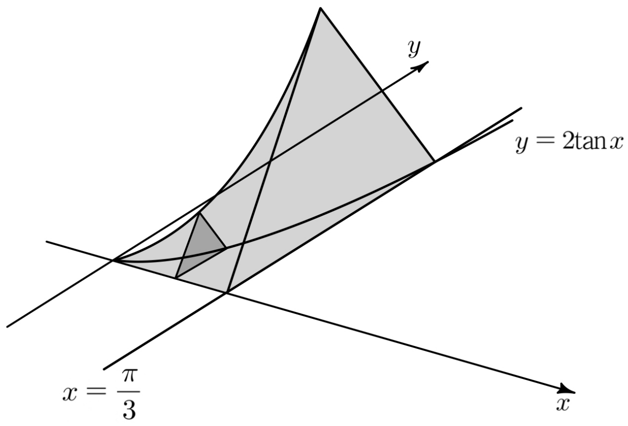
$$\cos^2\alpha=C\Rightarrow 25C^2-25C+4=0$$

$$(5C-1)(5C-4)=0$$

$$\therefore C=\frac{1}{5},\ \frac{4}{5}$$

$$\cos^2\alpha+\sin^2\beta=\cos^2\alpha+\frac{1}{17}\ \text{최솟값}=\frac{1}{5}+\frac{1}{17}=\frac{22}{85}$$

25. 그림과 같이 곡선 $y=2\tan x$와 x축, y축 및 직선 $x=\frac{\pi}{3}$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정삼각형일 때, 이 입체도형의 부피는? [3점]



① $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$　② $3-\frac{\pi}{3}$　③ $3-\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$　④ $3\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$　⑤ $3\sqrt{3}-\pi$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{3}\cdot\tan^2 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{3}\cdot(\sec^2 x-1)\,dx$$
$$= \left[\sqrt{3}\cdot(\tan x - x)\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$
$$= 3-\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$$

출제자의 첨언) 일러스트를 못 써서 그림그리느라 힘들었습니다.

26. 양수 t에 대하여 $x=0$에서 $x=1$까지 곡선

$$y=\frac{e^{tx}}{2}+\frac{1}{2t^2e^{tx}}$$

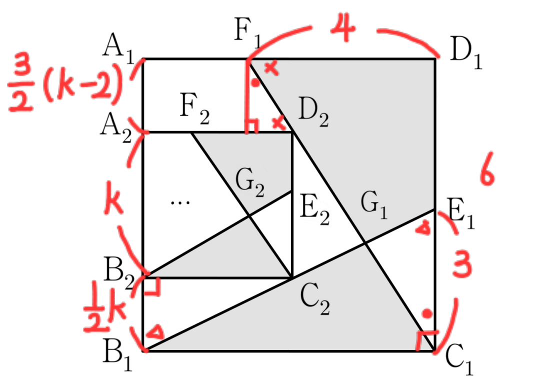
의 길이를 $f(t)$라 할 때, $\lim_{t\to 0+} tf(t)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{4}$　② $\frac{1}{2}$　③ 1　④ 2　⑤ 4

$$y' = \frac{1}{2}t\cdot e^{tx} - \frac{1}{2t}\cdot e^{-tx}$$
$$f(t) = \int_0^1 \sqrt{1+(y')^2}\,dx$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{2}te^{tx} + \frac{1}{2t}e^{-tx}\,dx$$
$$= \left[\frac{1}{2}e^{tx} - \frac{1}{2t^2}e^{-tx}\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2t^2}e^{-t} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2t^2}$$
$$\lim_{t\to 0+} \frac{1}{2}t\cdot(e^t-1) + \frac{1-e^{-t}}{2t} = \frac{1}{2}$$

출제자의 첨언) 교과서적인 소재인 곡선의 길이를 3점에 알맞는 난이도로 출제하면서, 한 문항 안에서 미분 적분 극한의 다양한 평가요소를 요구하여 완성도 있는 비킬러라고 생각합니다.

27. 그림과 같이 한 변의 길이가 6인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 선분 C_1D_1의 중점을 E_1, 선분 A_1D_1을 $1:2$로 내분하는 점을 F_1이라 하자. 선분 B_1E_1이 선분 C_1F_1과 만나는 점을 G_1이라 할 때, 사각형 $F_1G_1E_1D_1$의 넓이를 a_1, 삼각형 $B_1C_1G_1$의 넓이를 b_1이라 하자.
선분 A_1B_1 위의 두 점 A_2, B_2와 선분 B_1G_1 위의 점 C_2, 선분 G_1F_1 위의 점 D_2를 사각형 $A_2B_2C_2D_2$가 정사각형이 되도록 잡는다. a_1, b_1의 값을 얻은 것과 같은 방법으로 두 점 F_2, G_2를 정하고 사각형 $F_2G_2E_2D_2$의 넓이를 a_2, 삼각형 $B_2C_2G_2$의 넓이를 b_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 사각형 $F_nG_nE_nD_n$의 넓이를 a_n, 삼각형 $B_nC_nG_n$의 넓이를 b_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)$의 값은? [3점]



$a_1 - b_1 = \triangle F_1D_1C_1 - \triangle B_1E_1C_1$
$= 12 - 9 = 3$

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

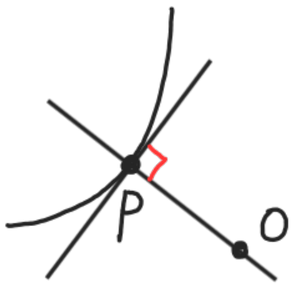
$\frac{3}{2}(k-2) + k + \frac{1}{2}k = 6$

$\therefore k = 3 \Rightarrow r = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n) = \frac{4}{3} \cdot 3 = 4$

28. 양수 t와 곡선 $y=te^{-x}$ 위를 움직이는 점 P에 대하여 원점과 점 P 사이의 거리가 최소일 때, 점 P의 x좌표를 $f(t)$라 하면 $f(t)$는 미분가능한 함수이다. $f(\alpha)=2$인 양수 α에 대하여 $\int_e^{\alpha} t^2 f'(t)dt$의 값은? [4점]

① $\frac{3e^4-e^2}{4}$ ② $\frac{3e^4-e^2}{2}$ ③ $\frac{2e^4-e^2}{4}$ ④ $\frac{2e^4-e^2}{2}$ ⑤ $\frac{e^4-e^2}{4}$



$P(p,\ t\cdot e^{-p})$, 접·기 $= -t\cdot e^{-p}$

$\overline{OP}$ 기울기 $= \frac{t\cdot e^{-p}}{p}$

$\therefore \frac{t\cdot e^{-p}}{p} \times -t\cdot e^{-p} = -1$

$\Rightarrow t^2 = p\cdot e^{2p}$, $p = f(t)$

$f(\alpha) = 2 \Rightarrow t = \alpha,\ p = 2$

$dp = f'(t)dt$, $t=\alpha \to p=2$, $t=e \to p=1$

$\int_e^{\alpha} t^2 \cdot f'(t)dt = \int_1^2 p\cdot e^{2p}dp$

$= \left[\frac{1}{2}pe^{2p} - \frac{1}{4}e^{2p}\right]_1^2$

$= \frac{3e^4-e^2}{4}$

출제자의 첨언) f'(t)dt가 df(t)로 바로 묶여 치환적분으로 해결할 수 있습니다. f는 어디선가 여러 번 본 듯한 상투적인 함수이지만, 이를 적분으로 틀어 매력적인 문항으로 만들어진 것 같습니다.

단답형

29. 상수 p와 모든 항이 실수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $0 < a_n < 6$
>
> (나) $a_{n+1} = a_n \times (a_n - 6) + p$

$\sum_{k=1}^{\infty} \log_2 a_k = 3$일 때, $80 \times a_1$의 값을 구하시오. [4점]

$\lim_{n\to\infty} \log_2 a_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 1 \quad \therefore p = 6$

(나) $a_n = \dfrac{a_{n+1}-6}{a_n-6}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \log_2 a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \log_2 \frac{a_{k+1}-6}{a_k-6}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\log_2 \left(\frac{a_2-6}{a_1-6} \right) \cdot \left(\frac{a_3-6}{a_2-6} \right) \cdots \left(\frac{a_{n+1}-6}{a_n-6} \right) \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \log_2 \left(\frac{a_{n+1}-6}{a_1-6} \right)$$

$$= \log_2 \frac{-5}{a_1-6} = 3$$

$$\frac{-5}{a_1-6} = 8 \quad \therefore a_1 = \frac{43}{8}$$

$$\Rightarrow 80a_1 = 430$$

출제자의 첨언) 교과서적인 소재를 물었지만,
발상을 떠올리기 쉽지 않다는 점이 살짝 아쉽습니다.
6월 평가원의 형식의 탈피와 당황스러운 느낌을
구현하기 위해 수록하였습니다.

30. 최고차항의 계수가 1이고 $f(1) = 5$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x) = \sin\{\pi f(x)\}$$

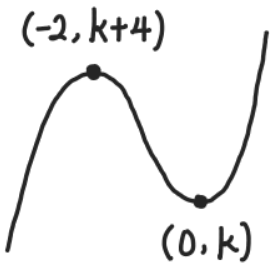
는 $x = 0$에서 극댓값 0을 갖는다. $|f(0) - f(-2)| = 4$일 때, 모든 $f(6)$의 값의 합을 구하시오. [4점]

$g(0) = \sin(\pi \cdot f(0)) = 0 \Rightarrow f(0) = $ 정수

$g'(0) = \underbrace{\cos(\pi f(0))}_{\neq 0} \cdot \pi \cdot f'(0) = 0 \Rightarrow f'(0) = 0$

$\Rightarrow g(0) =$ 극댓값 $\quad \therefore f(0) =$ 홀수

i) $f(-2) = f(0) + 4$



$f(x) = x^2(x-\alpha) + k$

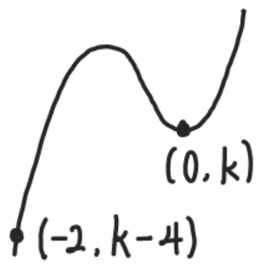
$f(-2) = -8 - 4\alpha + k = k + 4$

$\therefore \alpha = -3$

$f(1) = 4 + k = 5 \quad \therefore k = 1$

$f(x) = x^2(x+3) + 1 \Rightarrow f(6) = 325$

ii) $f(-2) = f(0) - 4$



$f(x) = x^2(x-\alpha) + k$

$f(-2) = -8 - 4\alpha + k = k - 4$

$\therefore \alpha = -1$

$f(1) = 2 + k = 5 \quad \therefore k = 3$

$f(x) = x^2(x+1) + 3 \Rightarrow f(6) = 255$

$\therefore \oplus = 325 + 255 = 580$

> ＊ 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

※시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.