제 2 교시

수학 영역

@math_is_song

5지선다형

1. $4^{1-\sqrt{3}} \times 2^{2\sqrt{3}-1}$ 의 값은? [2점] 4

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

2. 함수 $f(x)=x^3-7x+5$ 에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ 의 값은? [2점] 5

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

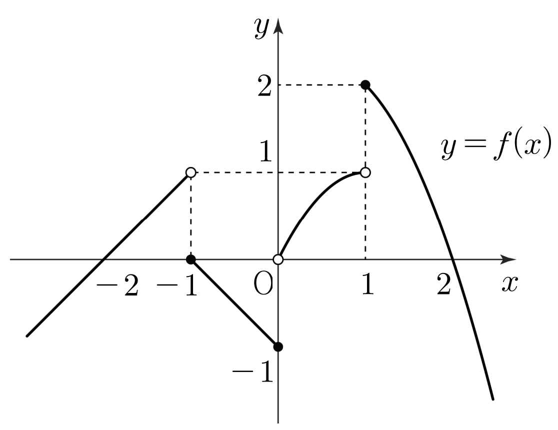
$3x^2-7\Big|_{x=2}=5$

3. $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\frac{3}{5}$ 이고 $\sin\theta\cos\theta<0$ 일 때, $\sin\theta+2\cos\theta$ 의 값은? [3점] 5

① $-\frac{2}{5}$ ② $-\frac{1}{5}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{2}{5}$

$\sin\theta=-\frac{4}{5}$, $\cos\theta=\frac{3}{5}$

4. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



0 1

$\lim_{x\to -1+} f(x) + \lim_{x\to 1-} f(x)$ 의 값은? [3점] 3

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

5. 함수

$$f(x)=\begin{cases} 3x+a & (x \le 1) \\ 2x^3+bx+1 & (x>1) \end{cases}$$

이 $x=1$에서 미분가능할 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점] ②

① -8 ② -6 ③ -4 ④ -2 ⑤ 0

(연속) $3+a=3+b$; $a=b$

(미·가) $3=6+b$; $b=-3$

$\therefore a+b=-6$

6. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

나눌 수 있음, $r>0$

$$a_3{}^2=a_6,\ a_2-a_1=2$$

일 때, a_5의 값은? [3점] ④

① 20 ② 24 ③ 28 ④ 32 ⑤ 36

$\cancel{a^2}\cancel{r^4}=\cancel{a}r^5 \Rightarrow a=r$

$a(r-1)=2 \Rightarrow r^2-r-2=0$

$r=2$ ($r>0$)

$a_5=16a=32$ ■

7. 함수 $f(x)=x^3+ax^2-9x+4$가 $x=1$에서 극값을 갖는다. 함수 $f(x)$의 극댓값은? (단, a는 상수이다.) [3점] ①

① 31 ② 33 ③ 35 ④ 37 ⑤ 39

$f'(x)=3x^2+2ax-9$

$3+2a-9=0$; $a=3$

즉 $f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$

$x=-3 \Rightarrow f$ 극대

$\therefore f(-3)=-27+27+27+4=31$ ■

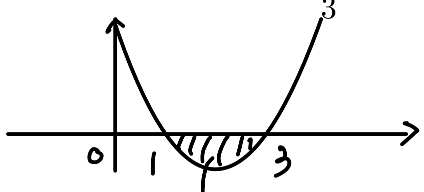
8. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=t^2-4t+3$$

이다. 점 P가 시각 $t=1$, $t=a\,(a>1)$에서 운동 방향을 바꿀 때, 점 P가 시각 $t=0$에서 $t=a$까지 움직인 거리는? [3점] ②

① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{8}{3}$ ③ 3 ④ $\frac{10}{3}$ ⑤ $\frac{11}{3}$

$a=3$



$\frac{1}{6}(3-1)^3 \cdot 2 = \frac{8}{3}$

9. 2 이상의 자연수 n에 대하여 x에 대한 방정식

$$(x^n-8)(x^{2n}-8)=0$$

의 모든 실근의 곱이 -4일 때, n의 값은? [4점] ②

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

i) n이 홀수

$x=\sqrt[n]{8},\ x=\pm\sqrt[2n]{8} \Rightarrow -\sqrt[n]{64}=-4$ 이므로

$n=3$

ii) n이 짝수

$x=\pm\sqrt[n]{8},\ x=\pm\sqrt[2n]{8} \Rightarrow$ (실근 곱) >0 ; 모순.

10. $0 \leq x < 2\pi$일 때, 곡선 $y=|4\sin 3x+2|$와 직선 $y=2$가 만나는 서로 다른 점의 개수는? [4점] ③

① 3 ② 6 ③ 9 ④ 12 ⑤ 15

i) $4\sin 3x=0 \Rightarrow x=0,\ \frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi,\ \pi,\ \frac{4}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi$

ii) $4\sin 3x=-4 \Rightarrow x=\frac{1}{2}\pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{5}{2}\pi$

11. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(1+x)+f(1-x)=0$이다.
(나) $\int_{-1}^{3} f'(x)dx = 12$

$\boxed{(1,0) \text{ 대칭}}$

$f(3)-f(-1)=12$

$f(3)+f(-1)=0$

$f(4)$의 값은? [4점] ①

① 24 ② 28 ③ 32 ④ 36 ⑤ 40

$f(3)=6,\ f(-1)=-6$

$f(x)=(x-1)^3+k(x-1)$

$\therefore f(x)=(x-1)^3-(x-1)$

$f(4)=27-3=24$ ■

12. 모든 항이 정수이고 공차가 5인 등차수열 $\{a_n\}$과 자연수 m이 다음 조건을 만족시킨다.

$a_n = 5(n-1)+a_1$

(가) $\sum_{k=1}^{2m+1} a_k < 0$
(나) $|a_m|+|a_{m+1}|+|a_{m+2}| < 13$

$S_{2m+1} = \dfrac{\boxed{a_1+a_1+2md}}{2} \times (2m+1) < 0$

$<0 \Rightarrow a_{m+1}<0$

>0

$24 < a_{21} < 29$일 때, m의 값은? [4점] ③

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

$a_m = k$라고 하면 (나)에서

i) $a_{m+2} > 0$ $(-10<k<-5)$

$-k-k-5+k+10 < 13$

$-k+5<13$; $k>-8$

모든 항이 정수이므로 $a_m = k = -9$

ii) $a_{m+2} < 0$ $(k+10<0)$

$-k-k-5-k-10<13$

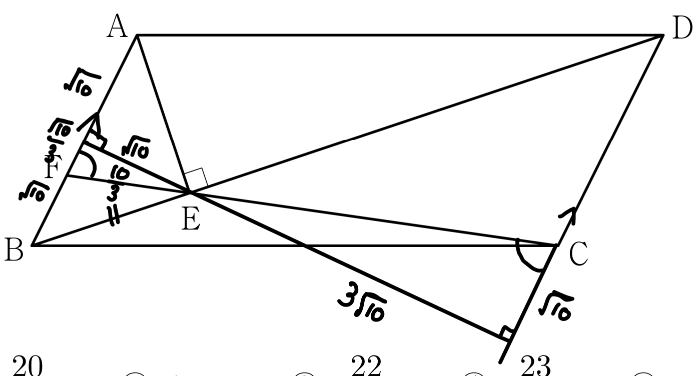
$-28<3k \Rightarrow k>-\frac{28}{3}$

$k<-10$에 모순

$24 < a_{21} = -9+5\times7 = 26 < 29$이므로

$m=14$ ■

13. 그림과 같이 평행사변형 ABCD 가 있다. 점 A 에서 선분 BD 에 내린 수선의 발을 E 라 하고, 직선 CE 가 선분 AB 와 만나는 점을 F 라 하자.
$\cos(\angle \mathrm{AFC}) = \dfrac{\sqrt{10}}{10}$, $\overline{\mathrm{EC}} = 10$ 이고 삼각형 CDE 의 외접원의 반지름의 길이가 $5\sqrt{2}$ 일 때, 삼각형 AFE 의 넓이는? [4점] ①



① $\dfrac{20}{3}$ ② 7 ③ $\dfrac{22}{3}$ ④ $\dfrac{23}{3}$ ⑤ 8

$\frac{4}{3}\sqrt{10}\cdot 2\sqrt{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{20}{3}$ ■

14. 최고차항의 계수가 1 이고 $f(-3)=f(0)$ 인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<-3 \text{ 또는 } x\geq 0) \\ -f(x) & (-3\leq x<0) \end{cases}$$

이라 하자. 함수 $g(x)g(x-3)$ 이 $x=k$ 에서 불연속인 실수 k 의 값이 한 개일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점] ⑤

<보 기>

ㄱ. 함수 $g(x)g(x-3)$ 은 $x=0$ 에서 연속이다.

ㄴ. $f(-6)\times f(3)=0$

ㄷ. 함수 $g(x)g(x-3)$ 이 $x=k$ 에서 불연속인 실수 k 가 음수일 때 집합 $\{x \mid f(x)=0,\ x \text{는 실수}\}$ 의 모든 원소의 합이 -1 이면 $g(-1)=-48$ 이다. → $k=-3$.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. $\lim_{x\to 0+} g(x)g(x-3) = -f(3)\times f(0)$

$g(0)g(-3) = -f(3)\times f(0)$

$\lim_{x\to 0-} g(x)g(x-3) = -f(3)\times f(0)$; 참.

ㄴ. $g(x)$가 $x=3$ 혹은 $x=-3$에서 불연속

i) $x=3$ 불연속 ($k=3$)

$x=-3$ 연속.

$\lim_{x\to -3-} g(x)g(x-3) = f(-3)\cdot f(6)$

$\lim_{x\to -3+} g(x)g(x-3) = -f(-3)f(6)$ ⇒ $f(-3)f(-6)=0$

$g(-3)g(-6) = -f(-3)f(-6)$

$x=3$ 불연속.

$\lim_{x\to 3-} g(x)g(x-3) = -f(0)f(3)$

$\lim_{x\to 3+} g(x)g(x-3) = f(0)f(3)$

$g(0)g(3) = f(0)f(3)$

∴ $f(0)\neq 0$, $f(3)\neq 0$

↓

$f(-3)\neq 0$; $f(6)=0$

ii) $x=-3$ 불연속 ($k=3$) ⇒ $f(3)=0$ ∴ $f(3)f(-6)=0$

ㄷ. $k=-3$ ⇒ $f(3)=0$

$f(x) = (x-3)(x^2+ax+b)$ → $f(-3)=f(0)$; $f(x) = (x-3)(x^2+ax+6a-18)$

1) $a=4$ ⇒ $x^2+4x+6\neq 0$ (모순)

2) $a=8$ ⇒ $x^2+8x+30\neq 0$ (모순) (중근)

3) $a=1$ → $f(x) = (x-3)^2(x+4)$

∴ $g(-1) = -f(-1) = -48$

참 ■

15. 모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $a_1 < 300$
> (나) 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{3}a_n & (\log_3 a_n \text{이 자연수인 경우}) \\ a_n + 6 & (\log_3 a_n \text{이 자연수가 아닌 경우}) \end{cases}$$
> 이다.

$\sum_{k=4}^{7} a_k = 40$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점] ④

① 315 ② 321 ③ 327 ④ 333 ⑤ 339

i) $a_4 \neq 3^k$ (k가 자연수)

$4a_4 + 36 = 40 \Rightarrow a_4 = 1$

ii) a_4가 3의 배수지만 9의 배수✗

$a_4 + \frac{1}{3}a_4 + \frac{2}{3}a_4 + 18 = 40$

$a_4 = 11$ (모순)

iii) a_4가 9의 배수이지만 27의 배수✗

$a_4 + \frac{1}{3}a_4 + \frac{1}{9}a_4 + \frac{1}{9}a_4 + 6 = 40$

$\frac{14}{9}a_4 = 34$ (모순)

iv) a_4가 27의 배수

$\frac{40}{27}a_4 = 40$; $a_4 = 27$

$\therefore a_4 = 1$ or $a_4 = 27$

$a_4 \quad a_3 \quad a_2 \quad a_1$

$1 \to 3 \to 9 \to 27$
$3 \to 9 \to \cancel{3}$
$3 \to \cancel{3}$
$1 \to \cancel{5}$
$27 \to 81 \to 243 \to \cancel{729}$
$243 \to 237$
$81 \to 75 \to \cancel{225}$
$75 \to 69$
$27 \to 21 \to \cancel{81}$
$21 \to 15 \to \cancel{9}$
$15 \to \cancel{45}$

$27 + 237 + 69$
$= 333$

단답형

16. 방정식 $\log_2(x-5) = \log_4(x+7)$을 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

(진수조건) $x > 5$

$(x-5)^2 = x+7$; $x = 9$

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x) = 9x^2 - 8x + 1$이고 $f(1) = 10$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

$f(x) = 3x^3 - 4x^2 + x + 10$

$\therefore f(2) = 24 - 16 + 12 = 20$

18. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10}(2a_k+3)=40,\ \sum_{k=1}^{10}(a_k-b_k)=-10$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10}(b_k+5)$의 값을 구하시오. [3점]

$\cancel{2}\sum_{k=1}^{10} a_k = \cancel{10}\ 5$

$\therefore \sum_{k=1}^{10} b_k = 15 \Rightarrow \sum_{k=1}^{10}(b_k+5) = 65$

19. 곡선 $y=x^3-10$ 위의 점 $\mathrm{P}(-2,\ -18)$에서의 접선과 곡선 $y=x^3+k$ 위의 점 Q에서의 접선이 일치할 때, 양수 k의 값을 구하시오. [3점]

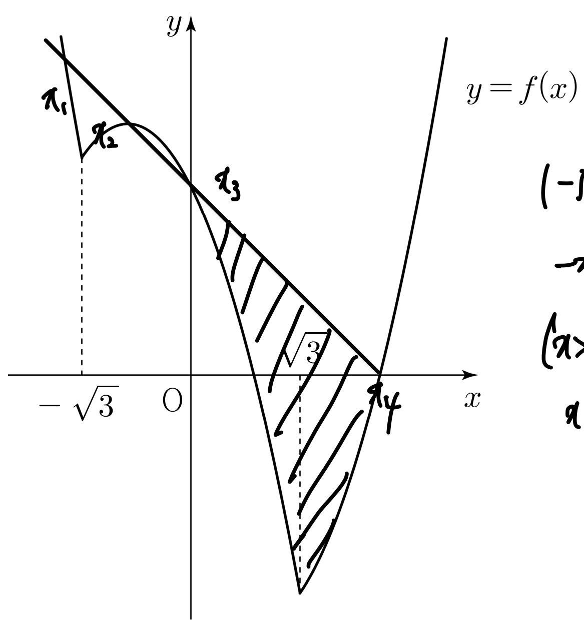
$y = 12(x+2) - 18 = 12x+6$

$12x+6 = 12(x-2) + 30 \quad \therefore k = 22$

20. 실수 $t\left(\sqrt{3}<t<\frac{13}{4}\right)$에 대하여 두 함수

$$f(x)=|x^2-3|-2x,\ g(x)=-x+t$$

의 그래프가 만나는 서로 다른 네 점의 x좌표를 작은 수부터 크기순으로 x_1, x_2, x_3, x_4라 하자. $x_4-x_1=5$일 때, 닫힌구간 $[x_3,\ x_4]$에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는 $p-q\sqrt{3}$이다. $p\times q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 유리수이다.) [4점]



$(-\sqrt{3} \le x \le \sqrt{3})$

$-x^2-2x+3$

$(x>\sqrt{3},\ x<-\sqrt{3})$

x^2-2x-3

$x^2-2x-3 = -x+t$ 교점 : x_1, x_4

$x^2-x-3-t=0$

$x_1+x_4 = 1$, $x_1x_4 = -3-t = -6$ $\Rightarrow (x_1+x_4)^2 - 4x_1x_4 = 1+12+4t = 25 \quad \therefore t=3.$

$\rightarrow x_4 = 3$

$-x^2-2x+3 = -x+3$ 교점 : x_2, x_3 $(x_2<x_3)$

$-x^2-x=0\ ;\ x_3=0$

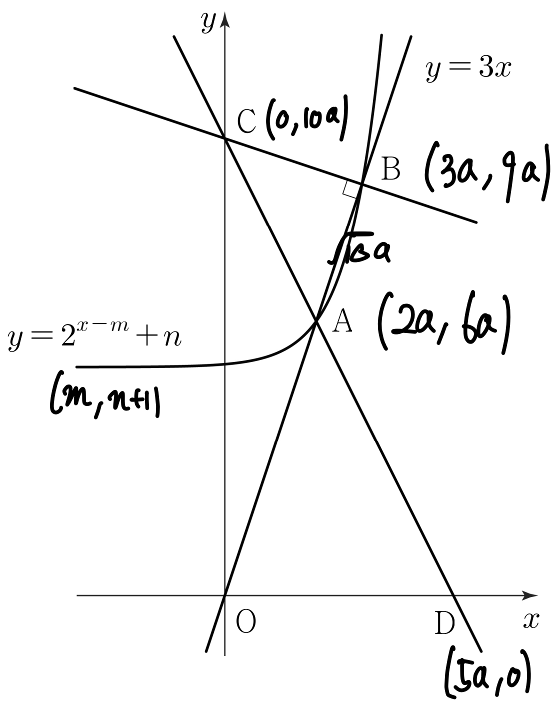
$$\int_0^{\sqrt{3}}|-x^2-x|\,dx + \int_{\sqrt{3}}^{3}|x^2-x-6|\,dx$$

$$\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\Big|_0^{\sqrt{3}} + \left|\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-6x\Big|_{\sqrt{3}}^{3}\right|$$

$$=\sqrt{3}+\frac{3}{2}+\left|\underbrace{9-\cancel{\frac{9}{2}}-18-\sqrt{3}+\cancel{\frac{3}{2}}+6\sqrt{3}}_{-12+5\sqrt{3}}\right|$$

$=\frac{27}{2}-4\sqrt{3} \qquad \therefore \frac{27}{\cancel{2}}\times\cancel{4}2 = 54$

21. 그림과 같이 곡선 $y=2^{x-m}+n\ (m>0,\ n>0)$과 직선 $y=3x$가 서로 다른 두 점 A, B에서 만날 때, 점 B를 지나며 직선 $y=3x$에 수직인 직선이 y축과 만나는 점을 C라 하자. 직선 CA가 x축과 만나는 점을 D라 하면 점 D는 선분 CA를 $5:3$으로 외분하는 점이다. 삼각형 ABC의 넓이가 20일 때, $m+n$의 값을 구하시오. (단, 점 A의 x좌표는 점 B의 x좌표보다 작다.) [4점]



$5a^2=20 \Rightarrow a=2$

$A(4,12),\ B(6,18)$

$2^{4-m}+n=12$ $\qquad 2^{6-m}-2^{4-m}=6$

$2^{6-m}+n=18$ $\qquad 8 \qquad 2$

$\boxed{m=3,\ n=10}$

$\therefore 13$

22. 최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f(x)-x-f(t)+t$$

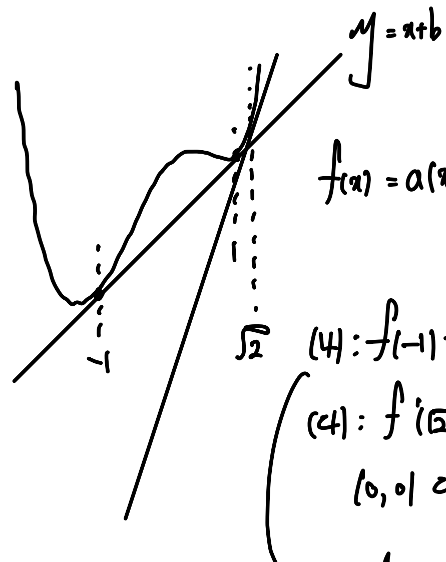
라 할 때, 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수를 $h(t)$라 하자. 두 함수 $f(x)$와 $h(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{t\to-1}\{h(t)-h(-1)\}=\lim_{t\to1}\{h(t)-h(1)\}=2$

(나) $\int_0^{\alpha} f(x)dx=\int_0^{\alpha}|f(x)|dx$를 만족시키는 실수 α의 최솟값은 -1이다.

(다) 모든 실수 x에 대하여 $\dfrac{d}{dx}\int_0^x\{f(u)-ku\}du\ge 0$이 되도록 하는 실수 k의 최댓값은 $f'(\sqrt{2})$이다.

$f(6)$의 값을 구하시오. [4점]



$f(x)=a(x-1)^2(x+1)^2+x+b$

(나): $f(-1)=0 \Rightarrow b=1.$

(다): $f'(\sqrt{2})(x-\sqrt{2})+f(\sqrt{2})=y$에서 $(0,0)$ 대입.

$f(x)=a(x-1)^2(x+1)^2+x+1$

$f'(x)=4a(x-1)(x+1)x+1$

$f'(\sqrt{2})=4\sqrt{2}a+1$

(다): $\sqrt{2}f'(\sqrt{2})=f(\sqrt{2})$

$a+\sqrt{2}+1=8a+\sqrt{2}$

$\therefore 7a=1;\ a=\frac{1}{7}$

$\therefore f(6)=7\cdot5^2+7=182$

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「**선택과목(확률과 통계)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

5지선다형

23. 다항식 $(x^2+2)^6$의 전개식에서 x^8의 계수는? [2점]

① 30 ② 45 ③ 60 ④ 75 ⑤ 90

24. 한 개의 주사위를 네 번 던질 때 나오는 눈의 수를 차례로 a, b, c, d라 하자. 네 수 a, b, c, d의 곱 $a \times b \times c \times d$가 27의 배수일 확률은? [3점]

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{4}{27}$ ③ $\frac{5}{27}$ ④ $\frac{2}{9}$ ⑤ $\frac{7}{27}$

25. 이산확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

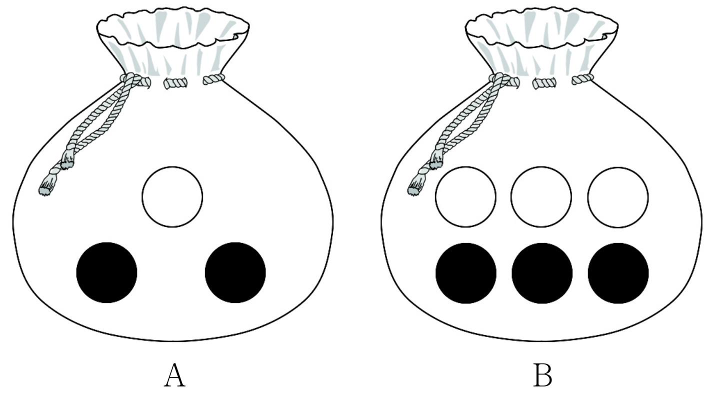
X	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	$a+b$	b	1

$\mathrm{E}(X^2)=a+5$일 때, $b-a$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

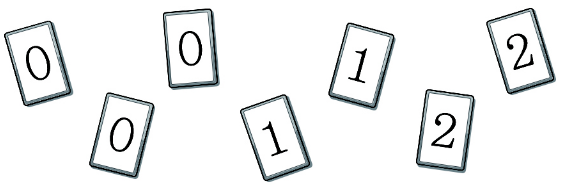
26. 주머니 A에는 흰 공 1개, 검은 공 2개가 들어 있고, 주머니 B에는 흰 공 3개, 검은 공 3개가 들어 있다. 주머니 A에서 임의로 1개의 공을 꺼내어 주머니 B에 넣은 후 주머니 B에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 주머니 B에서 꺼낸 3개의 공 중에서 적어도 한 개가 흰 공일 확률은? [3점]

① $\frac{6}{7}$ ② $\frac{92}{105}$ ③ $\frac{94}{105}$ ④ $\frac{32}{35}$ ⑤ $\frac{14}{15}$



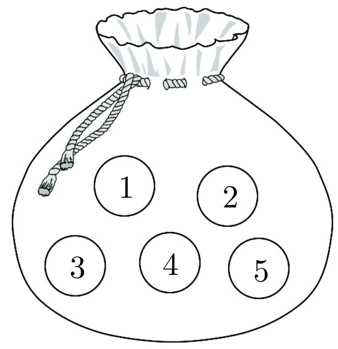
27. 숫자 0, 0, 0, 1, 1, 2, 2가 하나씩 적힌 7장의 카드가 있다. 이 7장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 나열할 때, 이웃하는 두 장의 카드에 적힌 수의 곱이 모두 1 이하가 되도록 나열하는 경우의 수는? (단, 같은 숫자가 적힌 카드끼리는 서로 구별하지 않는다.) [3점]

① 14 ② 15 ③ 16 ④ 17 ⑤ 18



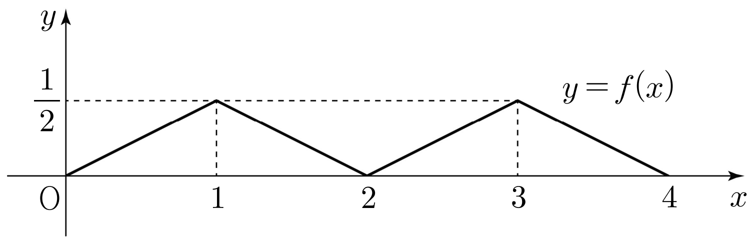
28. 1부터 5까지의 자연수가 하나씩 적힌 5개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 공을 임의로 한 개씩 5번 꺼내어 $n\,(1 \le n \le 5)$번째 꺼낸 공에 적혀 있는 수를 a_n이라 하자. $a_k \le k$를 만족시키는 자연수 $k\,(1 \le k \le 5)$의 최솟값이 3일 때, $a_1 + a_2 = a_4 + a_5$일 확률은? (단, 꺼낸 공은 다시 넣지 않는다.) [4점]

① $\frac{4}{19}$ ② $\frac{5}{19}$ ③ $\frac{6}{19}$ ④ $\frac{7}{19}$ ⑤ $\frac{8}{19}$



단답형

29. 두 연속확률변수 X와 Y가 갖는 값의 범위는 $0 \le X \le 4$, $0 \le Y \le 4$이고, X와 Y의 확률밀도함수는 각각 $f(x)$, $g(x)$이다. 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



확률변수 Y의 확률밀도함수 $g(x)$는 닫힌구간 $[0, 4]$에서 연속이고 $0 \le x \le 4$인 모든 실수 x에 대하여

$$\{g(x)-f(x)\}\{g(x)-a\}=0 \quad (a\text{는 상수})$$

를 만족시킨다. 두 확률변수 X와 Y가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\mathrm{P}(0 \le Y \le 1) < \mathrm{P}(0 \le X \le 1)$
(나) $\mathrm{P}(3 \le Y \le 4) < \mathrm{P}(3 \le X \le 4)$

$\mathrm{P}(0 \le Y \le 5a)=p-q\sqrt{2}$일 때, $p\times q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 자연수이다.) [4점]

30. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X\to X$의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $f(7)-f(1)=3$

(나) 5 이하의 모든 자연수 n에 대하여 $f(n)\le f(n+2)$이다.

(다) $\frac{1}{3}|f(2)-f(1)|$과 $\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{4} f(2k-1)$의 값은 모두 자연수이다.

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「선택과목(미적분)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{n\to\infty} 2n\left(\sqrt{n^2+4}-\sqrt{n^2+1}\right)$의 값은? [2점] ③

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

24. 함수 $f(x)=\ln\left(x^2-x+2\right)$와 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $g(x)$가 있다. 실수 전체의 집합에서 정의된 합성함수 $h(x)$를 $h(x)=f(g(x))$라 하자. $\lim_{x\to2}\frac{g(x)-4}{x-2}=12$일 때, $h'(2)$의 값은? [3점] ②

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

$g(2)=4$, $g'(2)=12$; $h'(x)=f'(g(x))g'(x)$

$f'(4)g'(2)=\frac{7}{14}\times12=6$

25. 곡선 $2e^{x+y-1}=3e^{x}+x-y$ 위의 점 $(0,\ 1)$에서의 접선의 기울기는? [3점] ①

① $\frac{2}{3}$ ② 1 ③ $\frac{4}{3}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ 2

$$2e^{x+y-1}\cdot\left(1+\frac{dy}{dx}\right)=3e^{x}+1-\frac{dy}{dx}$$

$$\left(2e^{x+y-1}+1\right)\frac{dy}{dx}=3e^{x}+1-2e^{x+y-1}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=0\\y=1}}=\frac{2}{3}\ \blacksquare$$

26. 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 도함수가 연속이고

$$\int_{1}^{2}(x-1)f'\left(\frac{x}{2}\right)dx=2$$

를 만족시킨다. $f(1)=4$일 때, $\int_{\frac{1}{2}}^{1}f(x)dx$의 값은? [3점] ④

① $\frac{3}{4}$ ② 1 ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{7}{4}$

$$\frac{x}{2}=t \longrightarrow \frac{1}{2}dx=dt$$

$$\Rightarrow \int_{1}^{2}(x-1)f'\left(\frac{x}{2}\right)dx=\int_{\frac{1}{2}}^{1}2\cdot(2t-1)f'(t)\,dt$$

$$=4\int_{\frac{1}{2}}^{1}tf'(t)\,dt-2\int_{\frac{1}{2}}^{1}f'(t)\,dt=2$$

$$=4\times\left\{\left[tf(t)\right]_{\frac{1}{2}}^{1}-\int_{\frac{1}{2}}^{1}f(t)\,dt\right\}-2\left\{f(1)-f\left(\frac{1}{2}\right)\right\}$$

$$=4f(1)-2f\left(\frac{1}{2}\right)-4\int_{\frac{1}{2}}^{1}f(t)\,dt-2f(1)+2f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$=8-4\int_{\frac{1}{2}}^{1}f(t)\,dt=2;\quad \int_{\frac{1}{2}}^{1}f(x)\,dx=\frac{3}{2}\ \blacksquare$$

27. 그림과 같이 $\overline{AB_1} = \overline{AC_1} = \sqrt{17}$, $\overline{B_1C_1} = 2$인 삼각형 AB_1C_1이 있다. 선분 AB_1 위의 점 B_2, 선분 AC_1 위의 점 C_2, 삼각형 AB_1C_1의 내부의 점 D_1을

$$\overline{B_1D_1} = \overline{B_2D_1} = \overline{C_1D_1} = \overline{C_2D_1},\ \angle B_1D_1B_2 = \angle C_1D_1C_2 = \frac{\pi}{2}$$

가 되도록 잡고, 두 삼각형 $B_1D_1B_2$, $C_1D_1C_2$에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

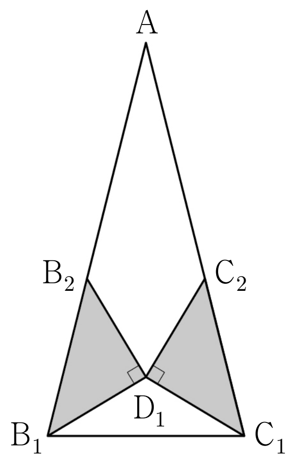
그림 R_1에서 선분 AB_2 위의 점 B_3, 선분 AC_2 위의 점 C_3, 삼각형 AB_2C_2의 내부의 점 D_2를

$$\overline{B_2D_2} = \overline{B_3D_2} = \overline{C_2D_2} = \overline{C_3D_2},\ \angle B_2D_2B_3 = \angle C_2D_2C_3 = \frac{\pi}{2}$$

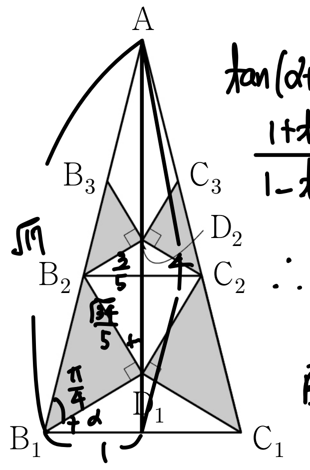
가 되도록 잡고, 두 삼각형 $B_2D_2B_3$, $C_2D_2C_3$에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]

③



R_1



R_2

$\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = 4$

$\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha} = 4$

$\therefore \tan\alpha = \frac{3}{5}$

$\Downarrow$

$\overline{B_1D_1} = \frac{\sqrt{34}}{5}$

…

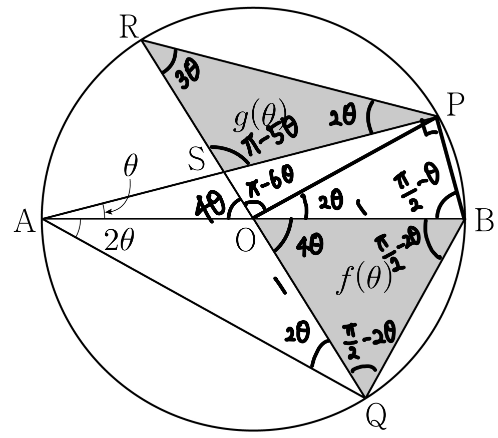
① 2 ② $\frac{33}{16}$ ③ $\frac{17}{8}$ ④ $\frac{35}{16}$ ⑤ $\frac{9}{4}$

(초항) = $\frac{34}{25}$, (공비) = $\left(\frac{3}{5}\right)^2$

$\frac{\frac{34}{25}}{1-\frac{9}{25}} = \frac{17}{8}$ ■

28. 그림과 같이 중심이 O이고 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 원이 있다. 원 위에 점 P를 $\angle PAB = \theta$가 되도록 잡고, 점 P를 포함하지 않는 호 AB 위에 점 Q를 $\angle QAB = 2\theta$가 되도록 잡는다. 직선 OQ가 원과 만나는 점 중 Q가 아닌 점을 R, 두 선분 PA와 QR가 만나는 점을 S라 하자. 삼각형 BOQ의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 PRS의 넓이를 $g(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta\to 0+} \frac{g(\theta)}{f(\theta)}$의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{6}$) [4점]

②



$1\times 1\times 4\theta\times\frac{1}{2} = f(\theta)$

$g(\theta) = \frac{3}{5}\cdot\cancel{\frac{2}{5}}\cdot\cancel{\frac{1}{2}}\cdot\cancel{5}\theta$

$= \frac{3}{5}\theta$

$\frac{\frac{3}{5}}{\frac{1}{2}} = \frac{6}{5}$ ■

① $\frac{11}{10}$ ② $\frac{6}{5}$ ③ $\frac{13}{10}$ ④ $\frac{7}{5}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

단답형

29. 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 도함수가 연속이고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x<1$일 때, $f'(x)=-2x+4$이다.
(나) $x\ge 0$인 모든 실수 x에 대하여
$f(x^2+1)=ae^{2x}+bx$이다. (단, a, b는 상수이다.)

$\int_0^5 f(x)dx=pe^4-q$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 유리수이다.) [4점]

$\lim_{x\to 1^-} f'(x)=2$

$2x\cdot f'(x^2+1)=2ae^{2x}+b$

$f'(x^2+1)=\dfrac{2ae^{2x}+b}{2x} \Rightarrow b=-2a,\ 2a=2$

$\therefore a=1, b=-2.$

$f(1)=1 \Rightarrow$ (가): $x<1$에서 $f(x)=-x^2+4x-2$

$\int_0^1(-x^2+4x-2)dx=-\frac{1}{3}+\cancel{2-2}$

$2x f(x^2+1)=2xe^{2x}-4x^2$

$x^2+1=u \rightarrow 2xdx=du$

$\int_0^2 2xf(x^2+1)dx=\int_1^5 f(u)du=\int_0^2(2xe^{2x}-4x^2)dx$

$=\left(x-\frac{1}{2}\right)e^{2x}-\frac{4}{3}x^3\Big|_0^2=\frac{3}{2}e^4-\frac{32}{3}-\left(-\frac{1}{2}\right)$

$\therefore \int_0^5 f(x)dx=\frac{3}{2}e^4-\frac{21}{2}$

$\therefore \frac{3}{2}+\frac{21}{2}=12$

30. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$g(x)=\sin|\pi f(x)|$

라 하자. 함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축이 만나는 점의 x좌표 중 양수인 것을 작은 수부터 크기순으로 모두 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자. 함수 $g(x)$와 자연수 m이 다음 조건을 만족시킨다.

$g(x)=0$

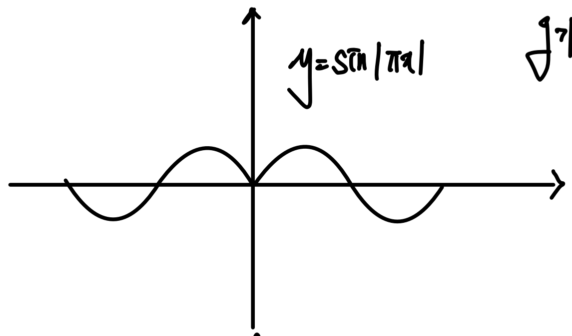
(가) 함수 $g(x)$는 $x=a_4$와 $x=a_8$에서 극대이다.
(나) $f(a_m)=f(0)$

$f(a_k)\le f(m)$을 만족시키는 자연수 k의 최댓값을 구하시오. [4점]

$g(x)=\sin|\pi f(x)|=\begin{cases}\sin \pi f(x) & (f(x)\ge 0)\\ -\sin \pi f(x) & (f(x)<0)\end{cases}$

$g'(x)=\begin{cases}\pi f'(x)\cos \pi f(x) & (f(x)\ge 0)\\ -\pi f'(x)\cos\pi f(x) & (f(x)<0)\end{cases}$

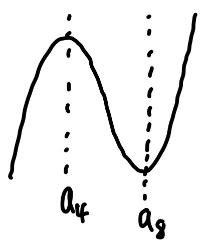
$g(x)=0 \rightarrow f(x)=$(정수)



$x=a_4$, $x=a_8$에서

g가 극대 $\Rightarrow f'(a_4)=f'(a_8)=0.$

$f'(x)=3(x-a_4)(x-a_8)$

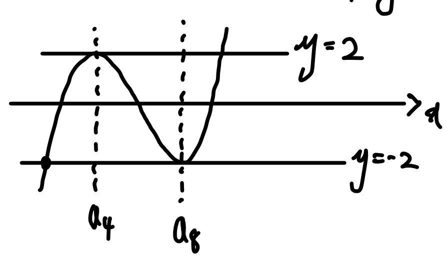


$f(a_4)-f(a_8)=4$이므로

만약 $f(a_4)<0$, $f(a_8)>0$ 일 수 없음.

$a_8-a_4=2$

$x=a_4$ g 극대 $\rightarrow f(a_4)$ 짝수.



$m=8 \rightarrow f(0)=-2$

$\frac{1}{3}a_8=2 \rightarrow a_8=3$

$\therefore f(x)=x(x-3)^2-2$

$f(8)=8\cdot 5^2-2=198$

$\Rightarrow 198+10=208$

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「선택과목(기하)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(기하)

5지선다형

23. 두 벡터 $\vec{a}=(2,\ 3)$, $\vec{b}=(4,\ -2)$에 대하여 벡터 $2\vec{a}+\vec{b}$의 모든 성분의 합은? [2점]

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

24. 타원 $\frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{8}=1$ 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 $(a,\ b)$에서의 접선이 점 $(8,\ 0)$을 지날 때, $a+b$의 값은? [3점]

① 5 ② $\frac{11}{2}$ ③ 6 ④ $\frac{13}{2}$ ⑤ 7

25. 좌표평면에서 벡터 $\vec{u}=(3,\ -1)$에 평행한 직선 l과 직선 $m:\dfrac{x-1}{7}=y-1$이 있다. 두 직선 l, m이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은? [3점]

① $\dfrac{2\sqrt{3}}{5}$ ② $\dfrac{\sqrt{14}}{5}$ ③ $\dfrac{4}{5}$
④ $\dfrac{3\sqrt{2}}{5}$ ⑤ $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

26. 포물선 $y^2=4px\ (p>0)$의 초점 F를 지나는 직선이 포물선과 서로 다른 두 점 A, B에서 만날 때, 두 점 A, B에서 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하자. $\overline{\mathrm{AC}}:\overline{\mathrm{BD}}=2:1$이고 사각형 ACDB의 넓이가 $12\sqrt{2}$일 때, 선분 AB의 길이는? (단, 점 A는 제1사분면에 있다.) [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

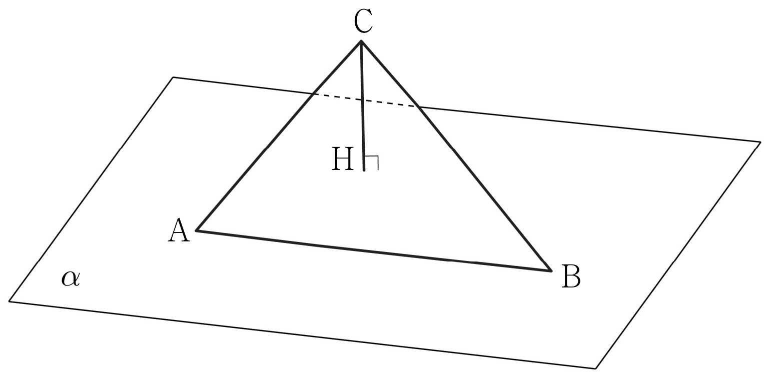
27. 공간에 선분 AB를 포함하는 평면 α가 있다. 평면 α 위에 있지 않은 점 C에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 점 H가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\angle \mathrm{AHB} = \frac{\pi}{2}$

(나) $\sin(\angle \mathrm{CAH}) = \sin(\angle \mathrm{ABH}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

평면 ABC와 평면 α가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은? (단, 점 H는 선분 AB 위에 있지 않다.) [3점]

① $\frac{\sqrt{7}}{14}$　② $\frac{\sqrt{7}}{7}$　③ $\frac{3\sqrt{7}}{14}$　④ $\frac{2\sqrt{7}}{7}$　⑤ $\frac{5\sqrt{7}}{14}$

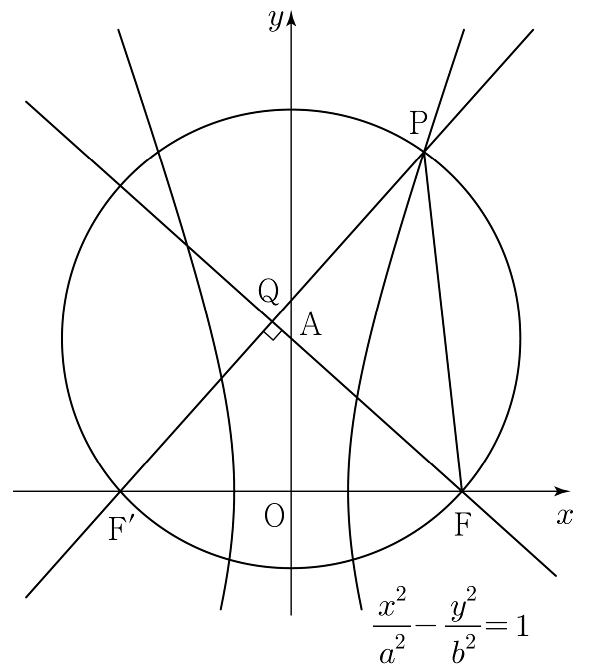


28. 두 초점이 $\mathrm{F}(c, 0)$, $\mathrm{F}'(-c, 0)$ $(c > 0)$인 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$과 점 $\mathrm{A}(0, 6)$을 중심으로 하고 두 초점을 지나는 원이 있다. 원과 쌍곡선이 만나는 점 중 제1사분면에 있는 점 P와 두 직선 PF′, AF가 만나는 점 Q가

$$\overline{\mathrm{PF}} : \overline{\mathrm{PF'}} = 3 : 4, \quad \angle \mathrm{F'QF} = \frac{\pi}{2}$$

를 만족시킬 때, $b^2 - a^2$의 값은? (단, a, b는 양수이고, 점 Q는 제2사분면에 있다.) [4점]

① 30　② 35　③ 40　④ 45　⑤ 50



단답형

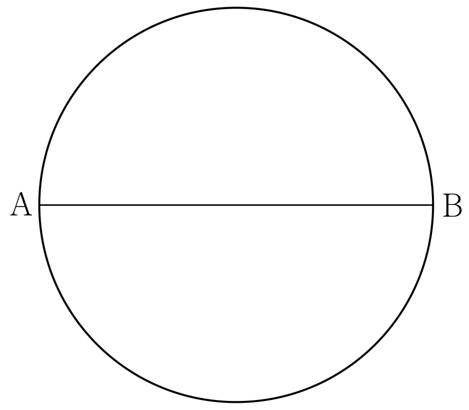
29. 좌표평면 위에 길이가 6인 선분 AB를 지름으로 하는 원이 있다. 원 위의 서로 다른 두 점 C, D가

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 27,\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 9,\ \overline{CD} > 3$$

을 만족시킨다. 선분 AC 위의 서로 다른 두 점 P, Q와 상수 k가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\frac{3}{2}\overrightarrow{DP} - \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{BC}$
(나) $\overrightarrow{QB} \cdot \overrightarrow{QD} = 3$

$k \times (\overrightarrow{AQ} \cdot \overrightarrow{DP})$의 값을 구하시오. [4점]



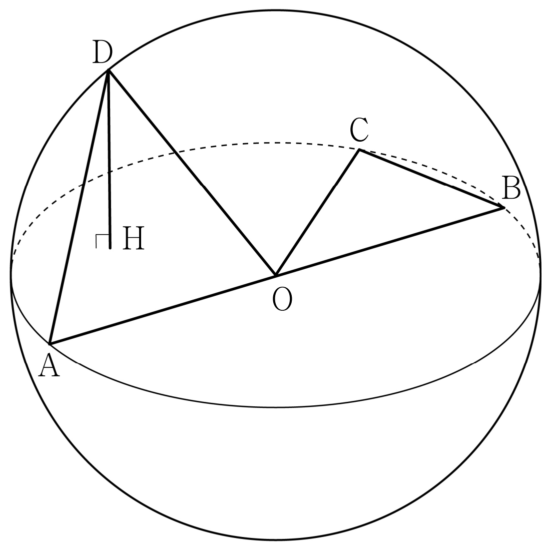
30. 공간에 중심이 O이고 반지름의 길이가 4인 구가 있다. 구 위의 서로 다른 세 점 A, B, C가

$$\overline{AB} = 8,\ \overline{BC} = 2\sqrt{2}$$

를 만족시킨다. 평면 ABC 위에 있지 않은 구 위의 점 D에서 평면 ABC에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 점 D가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 두 직선 OC, OD가 서로 수직이다.
(나) 두 직선 AD, OH가 서로 수직이다.

삼각형 DAH의 평면 DOC 위로의 정사영의 넓이를 S라 할 때, $8S$의 값을 구하시오. (단, 점 H는 점 O가 아니다.) [4점]



* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.