著 : 雀
sukita1729@gmail.com

1. 미분가능한 함수 f에 대하여 $f(0)=0$, $f(1)=4$가 성립할 때, $f'(c)-3=2c$를 만족하는 c가 열린구간 $(0,1)$에 존재함을 증명하시오. [★☆☆☆☆]

2. 감소하는 연속함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$에 대하여 방정식 $f(x)=x$의 실근이 유일하게 존재함을 증명하시오. [★★☆☆☆]

3. 연속함수 f에 대하여 $\int_0^1 f(x)dx = 1$일 때,

$\int_0^c f(x)dx = 1 - cf(c)$를 만족하는 c가

열린구간 $(0, 1)$에 존재함을 증명하시오.
[★★★☆☆]

4. 연속함수 f에 대하여 $\int_0^1 f(x)dx = 0$일 때,

$\int_0^c f(x)dx = f(c)$를 만족하는 c가 열린구간 $(0, 1)$에

존재함을 증명하시오. [★★★★☆]

5. $\int_0^1 f(x)dx = \dfrac{\sqrt{\pi}(e-1)}{e^3}$을 만족시키는 연속함수 f에 대하여 $\int_1^c \dfrac{1}{x} f(\ln x)dx = \dfrac{\sqrt{\pi}}{3c^2} - \dfrac{1}{3}f(\ln c)$를 만족시키는 실수 c가 열린구간 $(1, e)$에 적어도 하나 존재함을 증명하시오. [★★★★☆]

6. 임의의 실수 a, b, c에 대하여 다음 방정식의 실근 중 적어도 하나가 $\dfrac{1}{6}$과 $\dfrac{5}{6}$ 사이에 존재함을 증명하여라. [★★★★★]

$$4ax^3 + 3bx^2 + 2cx - (a+b+c) = 0$$

7. 함수 $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$는 연속이고 모든 $x \in [a, b]$에 대하여 $g(x) \ge 0$이다. 이때,

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$$

를 만족하는 실수 c가 열린구간 (a, b)에 존재함을 증명하시오. [★★★★☆]

8. 연속함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$의 합성함수 $f \circ f$가 항등함수일 때, $f(c) = c$인 실수 c가 존재함을 증명하시오. (단, 함수 g가 항등함수인 것은 정의역의 임의의 x에 대하여 $g(x) = x$인 것을 의미한다.) [★★★☆☆]

9. 두 연속함수 $f, g : [0, 1] \to [0, 1]$에 대하여 $f \circ g = g \circ f$가 성립할 때, $f(c) = g(c)$를 만족시키는 실수 c가 닫힌구간 $[0, 1]$에 존재함을 증명하시오. [★★★★★]

10. (보너스 문제) 다음 적분의 값을 구하여라.

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{3x+4}{(4x+3)^2\sqrt{1-x^2}}\,dx$$