著 : 雀
sukita1729@gmail.com

1. 적분가능한 함수 $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$가 $\int_0^1 xf(x)dx = 0$을 만족시킬 때, $\int_0^1 [f(x)]^2 dx \ge 4\left[\int_0^1 f(x)dx\right]^2$임을 증명하시오. (단, $\mathbb{R}$은 실수 전체의 집합이다.)
[★★★☆☆]

적분에 관한 코시-슈바르츠 부등식을 이용하는 문제이다. 교육과정 외이지만, 증명은 고등학교 교육과정 범위 내에서 충분히 가능하므로 이를 먼저 증명하게 한 후 이를 이용하는 문제를 출제할 수 있다.

실수 t에 대하여 $\int_a^b (tf(x)+g(x))^2 dx$를 생각하자. 피적분함수는 항상 0 이상이므로 적분값 역시 0 이상이다. 이를 전개하고 적분의 선형성을 이용하여 항을 분리하면 $t^2\int_a^b [f(x)]^2 dx + 2t\int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b [g(x)]^2 dx$이다. 이는 최고차항의 계수가 양수인 t에 관한 이차함수인데, 이 식의 값은 항상 0 이상이므로 판별식은 0보다 작거나 같아야 한다.

따라서
$\frac{D}{4} = \left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 - \int_a^b [f(x)]^2 dx \cdot \int_a^b [g(x)]^2 dx$
≤ 0이고, 이를 정리하면 다음을 얻는다.

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \le \sqrt{\int_a^b [f(x)]^2 dx}\sqrt{\int_a^b [g(x)]^2 dx}$$

이 절대부등식은 코시-슈바르츠 부등식의 한 갈래이다. (코시-슈바르츠 부등식은 본래 내적 공간에서 일반적으로 정의되고 증명되는 부등식이고, 위 부등식의 경우 정적분이 내적으로 주어진 공간에 대한 버전이다.)

이때 증명해야 하는 식에 $\int_0^1 [f(x)]^2 dx$가 있으므로 $a = 0,\ b = 1$을 대입하면

$$\left(\int_0^1 f(x)g(x)dx\right)^2 \le \int_0^1 [f(x)]^2 dx \int_0^1 [g(x)]^2 dx$$

이다.

이제 저 식에 적절한 g를 대입하여 증명하고자 하는 결과가 나오게 하면 된다. $\int_0^1 xf(x)dx = 0$이므로 이를 이용하기 위해 $g(x) = cx+d$라 가정하자. 이때

$$\left(\int_0^1 f(x)g(x)dx\right)^2 = \left(\int_0^1 (cx+d)f(x)dx\right)^2 = d^2\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2$$

이고, $\int_0^1 [g(x)]^2 dx = \int_0^1 (cx+d)^2 dx = \frac{1}{3c}\left[(cx+d)^3\right]_0^1$
$= \frac{(c+d)^3 - d^3}{3c} = \frac{c^2+3cd+3d^2}{3}$이다. 이를

$$\left(\int_0^1 f(x)g(x)dx\right)^2 \le \int_0^1 [f(x)]^2 dx \int_0^1 [g(x)]^2 dx$$

에 대입하면

$$d^2\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2 \le \frac{c^2+3cd+3d^2}{3}\int_0^1 [f(x)]^2 dx$$

이다. 우리는 $\int_0^1 [f(x)]^2 dx \ge 4\left[\int_0^1 f(x)dx\right]^2$을 증명해야 하므로 $\frac{3d^2}{c^2+3cd+3d^2} = 4$이면 된다. 분모와 분자의 차수가 같으므로 분모와 분자를 d^2으로 나누고 $\frac{c}{d} = k$라 하면 $\frac{3}{k^2+3k+3} = 4,\ 4k^2+12k+9 = 0,$
$(2k+3)^2 = 0,\ k = -\frac{3}{2}$이다. 즉, $c = 3,\ d = -2,$
$g(x) = 3x-2$일 때 코시-슈바르츠 부등식에 의해

$$\int_0^1 [f(x)]^2 dx \ge 4\left[\int_0^1 f(x)dx\right]^2$$

이 성립하게 되고 증명이 완료되었다. ■

2. 적분가능한 함수 $f:[0,1]\to[0,\infty)$에 대하여 다음이 성립함을 증명하시오. [★★★★☆]

$$\left(\int_0^1 f(x)dx\right)\left(\int_0^1 x^3 f(x)dx\right) \geq \left(\int_0^1 xf(x)dx\right)\left(\int_0^1 x^2 f(x)dx\right)$$

$[0,1]$의 서로 다른 원소 x_i, x_j에 대하여 $x_i+x_j \geq 0$, $f(x_i), f(x_j) \geq 0$, $(x_i-x_j)^2 \geq 0$이므로 다음이 성립한다.

$$(x_i-x_j)^2(x_i+x_j)f(x_i)f(x_j) \geq 0$$

$$(x_i^2-x_j^2)(x_i-x_j)f(x_i)f(x_j) \geq 0$$

$$(x_i^3+x_j^3)f(x_i)f(x_j) \geq (x_i^2x_j+x_ix_j^2)f(x_i)f(x_j)$$

이때 자연수 n에 대하여 양변에 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}$을 취하면 좌변은 $\left(\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\right)\left(\sum_{k=1}^{n} k^3 f(x_k)\right)$이고, 우변은 $\left(\sum_{k=1}^{n} kf(x_k)\right)\left(\sum_{k=1}^{n} k^2 f(x_k)\right)$이다. (항을 모두 전개한 후 각각을 비교하면 쉽게 확인할 수 있다.)

따라서

$$\left(\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\right)\left(\sum_{k=1}^{n} k^3 f(x_k)\right) \geq \left(\sum_{k=1}^{n} kf(x_k)\right)\left(\sum_{k=1}^{n} k^2 f(x_k)\right)$$

이고, 양변을 n^3으로 나누면

$$\left(\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^3 f(x_k)\right) \geq \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n} f(x_k)\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2 f(x_k)\right)$$

이다. 이때 x_k는 구간 $[0,1]$의 임의의 실수가 될 수 있으므로 $0 \leq x_k = \frac{k}{n} \leq 1$로 설정하고 양변에 $n\to\infty$의 극한을 취하면 정적분과 급수 사이의 관계에 의해

$$\left(\int_0^1 f(x)dx\right)\left(\int_0^1 x^3 f(x)dx\right) \geq \left(\int_0^1 xf(x)dx\right)\left(\int_0^1 x^2 f(x)dx\right)$$

를 얻는다. ■

3. 정의역에서 연속이고 위로볼록이며 $f(x)\geq 0$이고 $f(0)=1$인 함수 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$에 대하여 다음이 성립함을 증명하시오. (단, $\mathbb{R}$은 실수 전체의 집합이다.) [★★★★☆]

(1) $\displaystyle\int_0^x f(t)dt \geq \frac{1}{2}xf(x)+\frac{1}{2}x$

(2) $\displaystyle\int_0^1 xf(x)dx \leq \frac{2}{3}\left[\int_0^1 f(x)dx\right]^2$

(1) f는 위로볼록인 연속함수이므로 두 점 $(0,1)$, $(x, f(x))$를 이은 접선보다 구간 $(0,x)$에서의 $y=f(x)$의 그래프가 더 위에 있다. (이는 위로볼록의 정의에 해당하므로 증명은 필요 없다.)

따라서 원점 $\mathrm{O}(0,0)$, 점 $\mathrm{H}(x,0)$, 점 $\mathrm{P}(x,f(x))$, 그리고 점 $\mathrm{Q}(0,1)$에 대하여 사다리꼴 OQPH의 넓이는 $y=f(x)$의 그래프의 구간 $(0,x)$에 대한 밑넓이보다 작거나 같고, 이를 식으로 쓰면

$$\square\mathrm{OQPH} \leq \int_0^x f(t)dt$$

이다. 한편 $\square\mathrm{OQPH}=\frac{x}{2}\times(1+f(x))$이므로 이를 위 식에 대입하면 증명하고자 하는 식을 얻고, 증명이 완료된다. ■

(2) 여러 개의 소문항이 있을 때는 앞의 소문항의 결과를 이용하는 것이 기본이다. 대부분의 경우 앞의 결과를 이용해야 하므로 억지로라도 앞의 결과를 적용해보면 무언가 보일 것이다.

이 문제 역시 좌변에 $\int_0^1 xf(x)dx$가 있으므로 (1)의 결과를 이용하기 위해 $\int_0^x f(t)dt \geq \frac{1}{2}xf(x)+\frac{1}{2}x$의 양변을 0부터 1까지 적분해보자. ($f$는 연속함수이므로 부정적분이 존재한다. f의 한 부정적분을 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$라 하자.)

$$\int_0^1\left(\frac{1}{2}xf(x)+\frac{1}{2}x\right)dx \leq \int_0^1 F(x)dx$$

에서 우변을 $1\times F(x)$로 보고 부분적분을 하면

$$\int_0^1 F(x)dx = [xF(x)]_0^1 - \int_0^1 xf(x)dx$$

이다. 한편 좌변은 $\frac{1}{2}\int_0^1 xf(x)dx + \frac{1}{4}$이므로 이를 대입하면

$$\frac{3}{2}\int_0^1 xf(x)dx \le F(1) - \frac{1}{4}$$

이다. 문제는 $\int_0^1 xf(x)dx \le \frac{2}{3}F(1)^2$을 보이는 것이므로 만약 $F(1) - \frac{1}{4} \le F(1)^2$이라면 증명이 완료된다.

이는 $F(1)^2 - F(1) + \frac{1}{4} \ge 0$, $\left(F(1) - \frac{1}{2}\right)^2 \ge 0$과 동치이므로 $F(1)$의 값과 관계없이 항상 성립하고, 따라서 증명이 완료되었다. ■

4. 증가하는 연속함수 $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$에 대하여 다음이 성립함을 증명하시오. (단, $\mathbb{R}$은 실수 전체의 집합이다.) [★★★★☆]

$$\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)dx \le \int_0^1 xf(x)dx \le \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx$$

$\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}f(x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{2}f(x)dx$의

첫 번째 적분에서 x를 $1-x$로 치환하면

$$\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)dx = \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}f(1-x)(-dx) + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{2}f(x)dx$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(1-x)\right)dx$$

이다. 한편 f는 증가함수이므로 $\frac{1}{2} \le x \le 1$일 때

$x \ge 1-x$, $f(x) \ge f(1-x)$이고

$\left(x - \frac{1}{2}\right)f(x) \ge \left(x - \frac{1}{2}\right)f(1-x)$이다.

이를 정리하면

$$\frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(1-x) \le xf(x) + (1-x)f(1-x)$$

이므로

$$\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(1-x)\right)dx$$

$$\le \int_{\frac{1}{2}}^1 (xf(x) + (1-x)f(1-x))dx = k$$

이다. 한편

$$k = \int_{\frac{1}{2}}^1 xf(x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x)f(1-x)dx$$

의 두 번째 적분에서 $1-x$를 x로 치환하면

$$k = \int_{\frac{1}{2}}^1 xf(x)dx + \int_0^{\frac{1}{2}} xf(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx$$

이고,

$$\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)dx \le \int_0^1 xf(x)dx$$

가 증명되었다. 또한, $\frac{1}{2} \le x \le 1$일 때 $x \ge 1-x$이고 $f(x) \ge f(1-x)$이므로

$$k = \int_0^1 xf(x)dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 (xf(x)+(1-x)f(1-x))dx$$

$$\le \int_{\frac{1}{2}}^1 (xf(x)+(1-x)f(x))dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx$$

이고

$$\int_0^1 xf(x)dx \le \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx$$

가 증명되었다. 따라서 위의 결과 두 개를 종합하면 다음을 얻고, 증명이 완료된다. ■

$$\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)dx \le \int_0^1 xf(x)dx \le \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx$$

5. 구간 $[0, 1]$을 정의역으로 가지는 적분가능한 함수 f에 대하여 $\int_0^1 f(x)dx = 0$이고 정의역의 모든 x에 대하여 $-1 \le f(x) \le 1$일 때, 다음 식의 값의 최댓값을 구하여라. (단, $\mathbb{R}$은 실수 전체의 집합이다.) [★★★★☆]

$$\int_0^1 [f(x)]^3 dx$$

이 문제는 적분에 관한 횔더 부등식이나 젠센 부등식을 이용하면 비교적 간단하게 해결할 수 있다. 하지만 이 문제는 고등학교 교육과정 내에서 푸는 것이 핵심이다.

구간 $[-1, 1]$을 정의역으로 가지는 함수 $g(x) = x^3 - \frac{3}{4}x$를 고려하자. $g'(x) = 3x^2 - \frac{1}{4}$이므로 $g'(x) = 0$이면 $x = \pm\frac{1}{2\sqrt{3}}$이다. 이때 $g(1) = \frac{1}{4}$, $g(-1) = -\frac{1}{4}$, $g\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{3\sqrt{3}}$, $g\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{3\sqrt{3}}$이므로 $g(x) = x^3 - \frac{3}{4}x \le \frac{1}{4}$이다.

한편 $-1 \le f(x) \le 1$이므로 이를 $g(x)$에 대입하면

$$[f(x)]^3 \le \frac{3}{4}f(x) + \frac{1}{4}$$

이 성립하고, $\int_0^1 f(x)dx = 0$이므로

$$\int_0^1 [f(x)]^3 dx \le \int_0^1 \left(\frac{3}{4}f(x) + \frac{1}{4}\right)dx = \frac{1}{4}$$

이다. 한편 $\int_0^1 [f(x)]^3 dx$의 최댓값이 $\frac{1}{4}$이라고 결론을 내리기 위해서는 문제의 조건을 모두 만족시키면서 $\int_0^1 [f(x)]^3 dx = \frac{1}{4}$인 함수 f가 존재함을 보여야 한다.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (0 \le x \le \frac{1}{3}) \\ -\frac{1}{2} & (\frac{1}{3} < x \le 1) \end{cases}$$

이면 f는 문제의 조건을 모두 만족시킴과 동시에 $\int_0^1 [f(x)]^3 dx = \frac{1}{4}$도 만족시킨다. 따라서 $\int_0^1 [f(x)]^3 dx$의 최댓값은 $\frac{1}{4}$이다. ■

6. 연속함수 $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$에 대하여 다음 식의 최댓값을 L이라 하자. 식의 값이 최대가 될 때의 함수 f를 f_0라 할 때, $128f_0(L)$의 값을 구하시오. (단, $\mathbb{R}$은 실수 전체의 집합이다.) [★★★☆☆]

$$\int_0^1 x^2 f(x)dx - \int_0^1 x[f(x)]^2 dx$$

이차함수의 최대최소를 구하는 아이디어를 함수에 그대로 적용하는 문제이다. 아무 생각 없이 풀다보면 풀리는 간단한 문제이지만, 생소한 유형이라 어렵게 느낄 수 있다.

두 적분의 적분 범위가 같으므로 적분을 합친 후 피적분함수를 살펴보면

$$x^2 f(x) - x[f(x)]^2 = -x\big([f(x)]^2 - xf(x)\big)$$

$$= -x\left(f(x) - \frac{x}{2}\right)^2 + \frac{x^3}{4}$$

이다. 이때 $0 \le x \le 1$이므로 $-x\left(f(x) - \frac{x}{2}\right)^2$은 항상 0보다 작거나 같은 값을 가지고, $f(x) = \frac{x}{2}$일 때 0이 되어 적분값이 최대가 된다. 따라서 $f_0(x) = \frac{x}{2}$이고, 이때 L은 $\int_0^1 \frac{x^3}{4}dx = \frac{1}{16}$이다. 따라서 $f_0\left(\frac{1}{16}\right) = \frac{1}{32}$이고 $128f_0(L) = 4$이다. ■

7. (보너스 문제) 다음 적분의 값을 구하여라.

$$\int_1^e \frac{3\ln x - 1 + 2x}{x\ln x + x^2 + 2x^4}\,dx$$

(올해 MIT 적분대회 기출문제, 제한시간 3분)

분수 꼴의 적분을 계산할 때에는 항상 계산할 수 있는 것들을 먼저 밖으로 빼낸 후 남은 분수를 적분해야 한다. 예를 들어, $\frac{f'(x)}{f(x)}$ 꼴, $\frac{1}{x^n}$로 정리되는 꼴, $\frac{1}{(ax+b)^n}$로 정리되는 꼴을 미리 밖으로 빼내자.

이 문제의 경우 분모의 함수를 f라 두면 $f'(x) = \ln x + 1 + 2x + 8x^3$이고, $\frac{f(x)}{x} = \ln x + x + 2x^3$이므로 이들을 적절히 조합해서 분자를 만들어보면 된다. $\frac{4f(x)}{x} - f'(x)$를 계산하면 정확히 분자의 식이 된다는 것을 관찰할 수 있으므로 주어진 적분을 I라 하면

$$I = \int_1^e \left(\frac{4}{x} - \frac{(x\ln x + x^2 + 2x^4)'}{x\ln x + x^2 + 2x^4}\right)dx$$

$$= \left[4\ln|x| - \ln\left|x\ln x + x^2 + 2x^4\right|\right]_1^e$$

$$= \left[3\ln|x| - \ln\left|\ln x + x + 2x^3\right|\right]_1^e$$

$$= 3 - \ln\left(\frac{3}{1 + e + 2e^3}\right)$$

이다. ■

8. (보너스 문제) 다음 적분의 값을 구하여라.
(단, $\{x\}$는 x의 소수부이다.)

$$\int_0^{\ln 2}\left\{\frac{1}{e^x-1}\right\}dx$$

(올해 MIT 적분대회 기출문제, 제한시간 3분)

정수 n에 대하여 $n \le x < n+1$일 때 x의 정수부는 n이고, x의 소수부는 $x-n$이다. 따라서 적분을 구간별로 나누어 피적분함수 f를 직접 구해보자.

$\frac{1}{e^x-1} > 0$이므로 자연수 n만을 고려해도 충분하다.

자연수 n에 대하여 $n \le \frac{1}{e^x-1} < n+1$이면

$f(x) = \frac{1}{e^x-1} - n$이고, 이때 x의 범위를 구해보면

$\frac{1}{n+1} + 1 < e^x \le \frac{1}{n} + 1$에서

$\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) < x \le \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$이다.

이제 자연수 n에 대하여 $b_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$,

$a_n = \int_{b_{n+1}}^{b_n} f(x)dx$라 정의하면 앞선 논의에 의해

$$a_n = \int_{b_{n+1}}^{b_n} f(x)dx = \int_{b_{n+1}}^{b_n}\left(\frac{1}{e^x-1} - n\right)dx$$

이다. 따라서 a_n의 부분합 S_n은

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}\int_{b_{n+1}}^{b_n}\left(\frac{1}{e^x-1} - n\right)dx$$

$$= \int_{b_{n+1}}^{\ln 2}\frac{1}{e^x-1}\,dx - \sum_{k=1}^{n} k\cdot\left[\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - \ln\left(\frac{k+2}{k+1}\right)\right]$$

이다. 한편

$$\int_{b_{n+1}}^{\ln 2}\frac{1}{e^x-1}\,dx = = \int_{b_{n+1}}^{\ln 2}\left(\frac{e^x}{e^x-1} - 1\right)dx$$

$$= \left[\ln(e^x-1) - x\right]_{b_{n+1}}^{\ln 2} = -\ln 2 - \ln\left(\frac{1}{n+1}\right) + \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{n+2}{2}\right)$$

이고,

$$\sum_{k=1}^{n} k\cdot\left[\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - \ln\left(\frac{k+2}{k+1}\right)\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - n\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$$

$$= \ln(n+1) - n\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$$

이므로

$$S_n = \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) - \ln 2 + n\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$$

이다. 또한, $n \to \infty$일 때 $b_n \to 0$이므로

$$\int_0^{\ln 2}\left\{\frac{1}{e^x-1}\right\}dx = \lim_{n\to\infty} S_n$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) - \ln 2 + n\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) - \ln 2 + \ln\left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{(n+1)\cdot\frac{n}{n+1}}\right]\right]$$

$$= 1 - \ln 2$$

이다. ■