만든 놈: plancoach_team
crazy_hansuckwon (개인계정)
수만휘: 한석원의눈물

제 2 교시

수학 영역

5지선다형

지수계산

1. $2^{\sqrt{2}} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}-1}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 4

$2^{\sqrt{2}} \times 2^{1-\sqrt{2}}$

$= \boxed{2}$

미분계수의 정의: 분모, 분자 꼴 맞춤

2. 함수 $f(x)=2x^3+3x$ 에 대하여 $\lim_{h \to 0} \frac{f(2h)-f(0)}{h}$ 의 값은? [2점]

① 0 ② 2 ③ 4 ④ 6 ⑤ 8

$\lim_{h \to 0} \frac{f(2h)-f(0)}{2h} \times 2 = 2f'(0)$

$f'(x) = 6x^2+3$ 이므로 ㉠ $2f'(0) = \boxed{6}$

등차수열/등비수열은 결국 공차/공비가 가장 중요!

3. 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$과 공비가 2인 등비수열 $\{b_n\}$이

$a_2 = b_2$, $a_4 = b_4$

를 만족시킬 때, a_1+b_1의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

$a_4 = a_2+6$
$b_4 = 4b_2$) ㉢

→ $a_2+6 = 4b_2$ 에서 $a_2=b_2$ 이므로

→ $a_2+6 = 4a_2$

∴ $a_2 = 2$

곧 $a_2=b_2=2$ 이고, $\left\{ \begin{array}{l} a_1 = a_2-3 = -1 \\ b_1 = \frac{b_2}{2} = 1 \end{array} \right.$) ㉠ $a_1+b_1 = \boxed{0}$

갑자기 사잇값 정리?

4. 두 자연수 m, n에 대하여 함수 $f(x)=x(x-m)(x-n)$이

$f(1)f(3)<0$, $f(3)f(5)<0$

을 만족시킬 때, $f(6)$의 값은? [3점]

① 30 ② 36 ③ 42 ④ 48 ⑤ 54

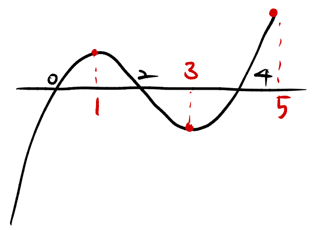
$f(x)=x(x-m)(x-n)$는 $x=0, m, n$에서 함숫값 0

① $f(1)f(3)<0$ 에서 $f(1)$과 $f(3)$은 부호가 다르다.
→ 구간 $(1,3)$에 $f(c)=0$을 만족하는 실수 c가 존재한다.

② $f(3)f(5)<0$ 에서 $f(3)$과 $f(5)$는 부호가 다르다.
→ 구간 $(3,5)$ //

이때 $f(x)=0$을 만족하는 x는 $0, m, n$인데
m, n이 자연수이므로 m, n이 각각 $2, 4$임을 알 수 있다. (순서는 상관 X)

ex)



∴ $f(x) = x(x-2)(x-4)$

㉠ $f(6) = 6 \times 4 \times 2$
$= \boxed{48}$

만든 놈: plancoach_team
crazy_hansuckwon (개인계정)
수만휘: 한석원의눈물

분모 통일 후 계산

5. $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$인 θ에 대하여

$$\frac{1}{1-\cos\theta}+\frac{1}{1+\cos\theta}=18$$

일 때, $\sin\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{2}{3}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

$$\frac{1+\cos\theta}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}+\frac{1-\cos\theta}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}$$

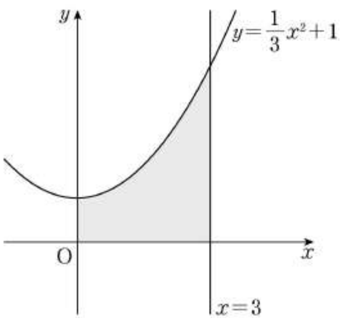
$$\Rightarrow \frac{2}{1-\cos^2\theta}=\frac{2}{\sin^2\theta}=18$$

$\therefore$ ㉠ $\sin\theta=\boxed{-\frac{1}{3}}$ $(\because \pi<\theta<\frac{3}{2}\pi)$

정적분계산...

6. 곡선 $y=\frac{1}{3}x^2+1$과 x축, y축 및 직선 $x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① 6 ② $\frac{20}{3}$ ③ $\frac{22}{3}$ ④ 8 ⑤ $\frac{26}{3}$



㉠ $\int_0^3\left(\frac{1}{3}x^2+1\right)dx$

$=\left[\frac{1}{9}x^3+x\right]_0^3$

$=\boxed{6}$

(평균)
등차수열의 합 = 등차중항 × 항의개수

7. 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때,

$$S_7-S_4=0,\ S_6=30$$

이다. a_2의 값은? [3점]

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

$S_7-S_4=a_5+a_6+a_7$

$=3a_6=0$ $\therefore a_6=0$

$S_6=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6$

$=6a_{3.5}=30$ $\therefore a_{3.5}=5$

곧 $a_6=a_{3.5}+2.5d$ 이므로 $0=5+2.5d$

$\therefore d=-2$

㉠ $a_2=a_{3.5}-1.5d$

$=5+3$

$=\boxed{8}$

만든 놈: plancoach_team
crazy_hansuckwon
수만휘: 한석원의눈물 (개인계정)

이젠 너무나도 익숙한 (해야만하는) 유형

8. 두 함수

$$f(x) = -x^4 - x^3 + 2x^2,\ g(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + a$$

가 있다. 모든 실수 x에 대하여 부등식

$$f(x) \le g(x)$$

가 성립할 때, 실수 a의 최솟값은? [3점]

① 8 ② $\frac{26}{3}$ ③ $\frac{28}{3}$ ④ 10 ⑤ $\frac{32}{3}$

두 함수를 따로 보기 어려우면 함수를 빼는 것... 이젠 알죠?

$(-x^4-x^3+2x^2) - (\frac{1}{3}x^3-2x^2+a) \le 0$ 을 만족한다.

$\Rightarrow -x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 4x^2 - a \le 0$

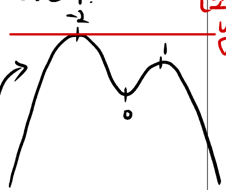
$\Rightarrow -x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 4x^2 \le a$로 생각하자.

$h(x) = -x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 4x^2$로 두면

$h'(x) = -4x^3 - 4x^2 + 8x$

$= -4x(x^2+x-2)$

$= -4x(x+2)(x-1)$



$\therefore h(-2) \le a$

㉠ $-16 + \frac{32}{3} + 16 \le a$

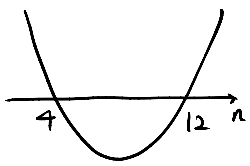
$\Rightarrow \boxed{\frac{32}{3} \le a}$

이것도 이젠 진짜 익숙해야 함

9. 자연수 $n\,(n \ge 2)$에 대하여 $n^2 - 16n + 48$의 n제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f(n)$이라 할 때, $\sum_{n=2}^{10} f(n)$의 값은? [4점]

① 7 ② 9 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15

$n^2 - 16n + 48 = (n-4)(n-12)$



실수인 거듭제곱근의 개수는 {① n이 홀수인지/짝수인지, ② 함숫값의 부호} 에 영향을 받으므로

i) n이 홀수인 경우

$\Rightarrow f(n)$은 무조건 1

$\Rightarrow f(3) = f(5) = f(7) = f(9) = 1$

ii) n이 짝수인 경우

$\Rightarrow \begin{cases} (n-4)(n-12) > 0 \text{ 이면 } f(n) = 2 \rightarrow f(2) = 2 \\ (n-4)(n-12) = 0 \text{ 이면 } f(n) = 1 \rightarrow f(4) = 1 \\ (n-4)(n-12) < 0 \text{ 이면 } f(n) = 0 \rightarrow f(6) = f(8) = 0 \end{cases}$

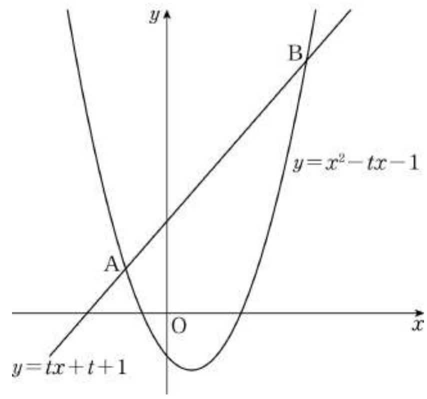
$\therefore$ ㉠ $\sum_{n=2}^{10} f(n) = 4\times1 + 2 + 1$

$= \boxed{7}$

좌표를 굳이 다 구해야 할까?

10. 실수 $t\,(t>0)$에 대하여 직선 $y = tx + t + 1$과 곡선 $y = x^2 - tx - 1$이 만나는 두 점을 A, B라 할 때, $\lim_{t\to\infty} \frac{\overline{AB}}{t^2}$의 값은? [4점]

① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② 1 ③ $\sqrt{2}$ ④ 2 ⑤ $2\sqrt{2}$



$y = x^2 - tx - 1$ 과 $y = tx + t + 1$을 연립하면

$(x^2 - tx - 1) - (tx + t + 1) = 0$ 이고,

$\Rightarrow x^2 - 2tx - (t+2) = 0$ 에서 점 A와 B의 x좌표를 α, β로 두자.

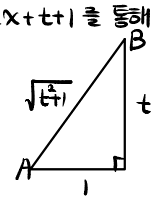
이때 $\beta - \alpha$, 즉 x좌표 변화량을 근과 계수의 관계를 통해 구할 수 있다.

① $\alpha + \beta = 2t$, ② $\alpha\beta = -(t+2)$ 이므로

$(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta = (\beta - \alpha)^2$

$\Rightarrow \sqrt{4t^2 + 4(t+2)} = \beta - \alpha$ 이다.

이때, 우리는 $y = tx + t + 1$을 통해



이? 기울기가 t? 라는 것을 알 수 있고,

$\overline{AB} = 2\sqrt{t^2+t+2} \times \sqrt{t^2+1}$ 임을 안다.

㉠ $\lim_{t\to\infty} \frac{2\sqrt{t^2+t+2} \times \sqrt{t^2+1}}{t^2} = \boxed{2}$

만든 놈: [O] plancoach_team
[O] crazy_hansuckwon
수만휘: 한석원의눈물 (개인계정)

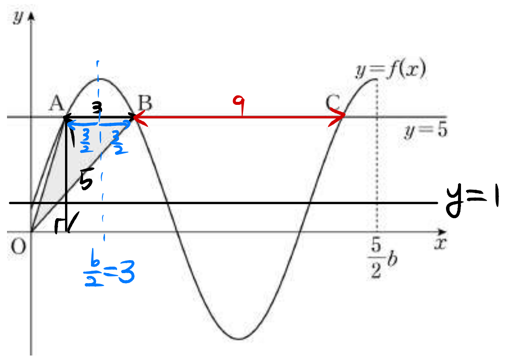
어렵지 않음. 주기의 길이가 12라는 것만 빨리 체크하자.

11. 그림과 같이 두 상수 a, b에 대하여 함수

$$f(x)=a\sin\frac{\pi x}{b}+1\ \left(0\le x\le\frac{5}{2}b\right)$$

의 그래프와 직선 $y=5$가 만나는 점을 x좌표가 작은 것부터 차례로 A, B, C라 하자.

$\overline{BC}=\overline{AB}+6$이고 삼각형 AOB의 넓이가 $\frac{15}{2}$일 때, a^2+b^2의 값은? (단, $a>4$, $b>0$이고, O는 원점이다.) [4점]



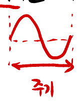
① 68 ② 70 ③ 72 ④ 74 ⑤ 76

우선, $\triangle AOB=\frac{15}{2}$ 에서 $\overline{AB}$를 밑변으로 간주하면

$\triangle AOB$의 높이: 점 A의 y좌표 $=5$이므로

$\frac{15}{2}=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times5$ $\therefore$ $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=9$ ($\overline{BC}=\overline{AB}+6$)

이때 점 A ~ 점 C는 삼각함수 $f(x)$의 한 주기를 의미한다.

꼭  일필요는 X

$\therefore$ $f(x)=a\sin\frac{\pi}{b}x+1$ 에서

주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{b}}=2b$ 이므로 $2b=\overline{AC}=12$ $\therefore$ $b=6$

곧 점 A와 B는 $x=\frac{b}{2}=3$ 에 대칭이고, $\overline{AB}=3$이므로

$A\left(\frac{3}{2},5\right)$, $B\left(\frac{9}{2},5\right)$이다.

이 점들이 $f(x)$ 위의 점이므로 $f\left(\frac{3}{2}\right)=a\sin\frac{\pi}{4}+1=5$

$\Rightarrow$ $a=4\sqrt{2}$

㉠ $a^2+b^2=32+36$
$=\boxed{68}$

절댓값은 차분하게 처리하면 무서울게 없다.

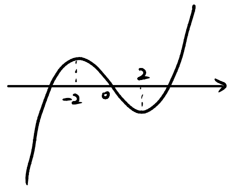
12. 양수 k에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=|x^3-12x+k|$$

라 하자. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=a\,(a\ge0)$이 만나는 서로 다른 점의 개수가 홀수가 되도록 하는 실수 a의 값이 오직 하나일 때, k의 값은? [4점]

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

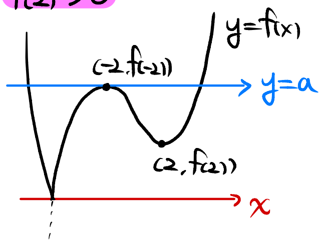
$g(x)=x^3-12x+k$로 두면 $g'(x)=3x^2-12$
$=3(x+2)(x-2)$

곧 $g(x)$는  $y=k$ 로 둘 수 있다.

이제 k의 값에 따라 x축의 상대적인 위치가 결정될 것이므로 case 분류!

(k의 값이 양수이므로 x축은 무조건 $y=k$ 아래에 위치)

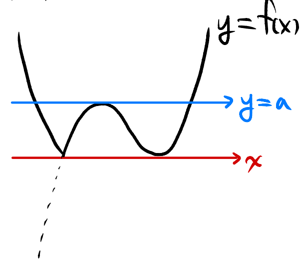
i) $f(2)>0$



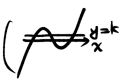
$\therefore$ $\begin{cases} a=f(-2)\text{ 일때 교점 3개} \\ a=0\text{ 일때 교점 1개} \end{cases}$

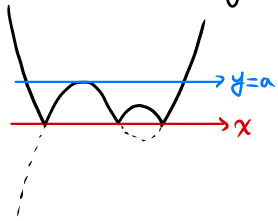
$\Rightarrow$ 조건만족하는 $a\ge0$인 a 2개
$\Rightarrow$ 모순!

ii) $f(2)=0$



$\therefore$ 조건 만족하는 $a\ge0$인 a는 $f(-2)$ 단 하나뿐!

iii) $f(2)<0$ (이 경우 $y=k$가 x축보다 위에 있는 경우만) ()



$\therefore$ i)과 동일하게 a는 2개 발생
$\Rightarrow$ 모순!

곧 ii)가 정답이고, $f(2)=|8-24+k|=0$ 이므로 ㉠ $k=\boxed{16}$

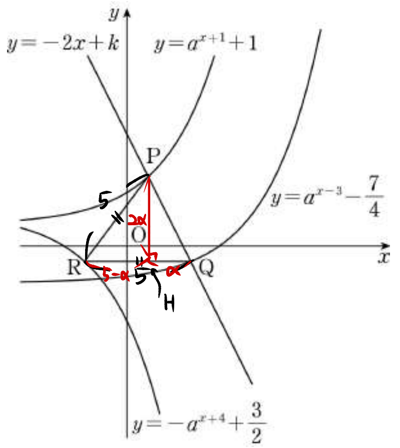
만든 놈: plancoach_team
crazy_hansuckwon (개인계정)
수만휘: 한석원의눈물

성질 vs 계산

13. 그림과 같이 두 상수 $a\,(a>1)$, k에 대하여 두 함수

$$y=a^{x+1}+1,\ y=a^{x-3}-\frac{7}{4}$$

의 그래프와 직선 $y=-2x+k$가 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 점 Q를 지나고 x축에 평행한 직선이 함수 $y=-a^{x+4}+\frac{3}{2}$의 그래프와 점 R에서 만나고 $\overline{\mathrm{PR}}=\overline{\mathrm{QR}}=5$일 때, $a+k$의 값은? [4점]



① $\frac{13}{2}$ ② $\frac{27}{4}$ ③ 7 ④ $\frac{29}{4}$ ⑤ $\frac{15}{2}$

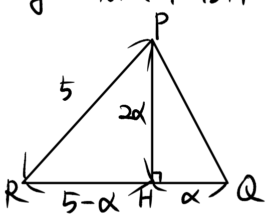
관찰부터 해보자~

$y=a^{x+1}+1 \xrightarrow[\text{평행이동}]{x\to+4,\ y\to-\frac{11}{4}} y=a^{x-3}-\frac{7}{4}$

만약 $x\to+4$이고, $y\to-8$ 평행이동이었으면 기울기가 -2인 직선 $y=-2x+k$와의 교점은 위치관계가 똑같으니~ 이런 소리를 할 수 있지만 여긴 그렇지 않음.

⇒ 성질보다는 계산!

$y=-2x+k$의 기울기가 -2이므로 P에서 $\overline{QR}$에 내린 수선의 발을 H로 두면



과 같이 둘 수 있다.

⇒ △PHR에서 피타고라스 정리를 사용하면 $4\alpha^2+25-10\alpha+\alpha^2=25$

⇒ $\alpha(\alpha-2)=0$ ∴ $\alpha=2$ $(\alpha>0)$

다음 page

우리 14번 이렇게 내기로 한 거 아니었어? 이렇게 쉬운걸 내버리면...

14. 최고차항의 계수가 1이고 $f'(2)=0$인 이차함수 $f(x)$가 모든 자연수 n에 대하여

$$\int_4^n f(x)\,dx \ge 0$$

을 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

< 보 기 >

ㄱ. $f(2)<0$

ㄴ. $\int_4^3 f(x)\,dx > \int_4^2 f(x)\,dx$

ㄷ. $6 \le \int_4^6 f(x)\,dx \le 14$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

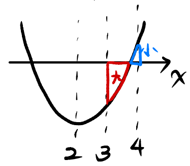
이차함수 $f(x)=(x-2)^2+k$ 꼴: $\int_4^n f(x)dx \ge 0$ (n은 자연수)

여기서 주의할 점은 $n<4$일 때 적분값은 부호가 반대가 된다는것!

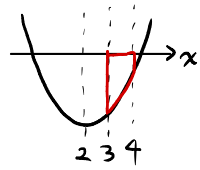
① $n=4$일 때 $\int_4^4 f(x)dx=0$은 자명하니 그 주변을 살펴보자.

② $n=3$일 때 $\int_4^3 f(x)dx=-\int_3^4 f(x)dx \ge 0$이므로 $\int_3^4 f(x)dx \le 0$이다.

즉,

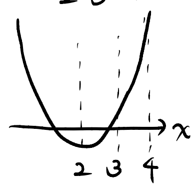


꼴 혹은 아예



일 수도 있다.

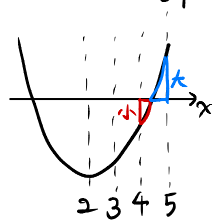
만약



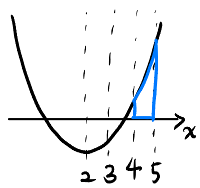
꼴이면 $\int_3^4 f(x)dx>0$ 이므로 모순이고,

종합하면 x축이 $x=3$보다는 오른쪽에서 $f(x)$와 만난다.

또한, ③ $n=5$일 때 $\int_4^5 f(x)dx \ge 0$ 이므로 비슷한 논리에 의해



꼴 혹은

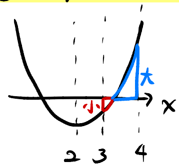


일 수도 있다.

종합하면 x축이 $x=5$보다는 왼쪽에서 $f(x)$와 만난다.

∴ $f(x)=0$의 실근은 '일단은' 구간 $(3, 5)$에 존재한다.

왜? ex)



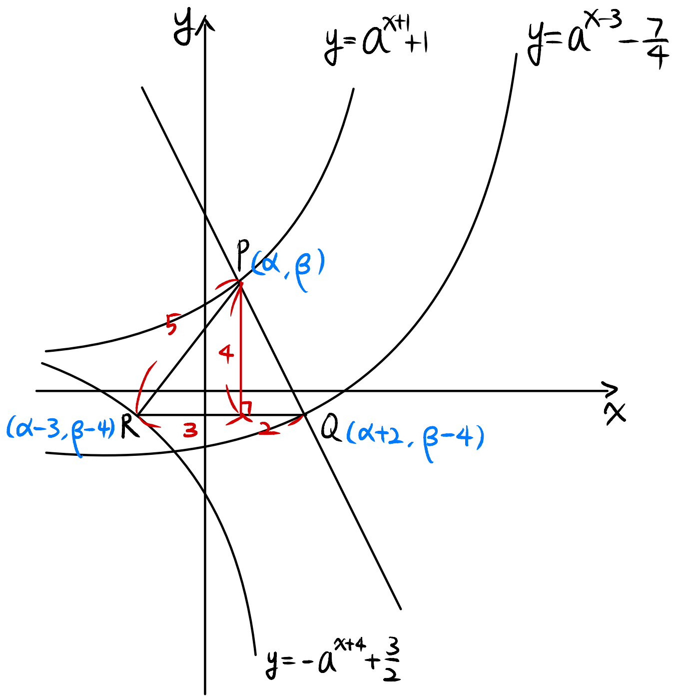
이면 $\int_3^4 f(x)dx \ge 0$

$\int_4^5 f(x)dx$도 마찬가지.

다음 page

만든 놈: plancoach_team
crazy_hansuckwon (개인계정)
수만휘: 한석원의눈물

13번 이어서



어쩔 수 없이 좌표 잡고 계산하자.

① $\beta = a^{\alpha+1}+1$

② $\beta-4 = a^{\alpha-1}-\frac{7}{4}$

③ $\beta-4 = -a^{\alpha+1}+\frac{3}{2}$

①과 ③을 연립하면 $a^{\alpha+1}=\frac{9}{4}$ 이고,

이를 ①에 대입하면 $\beta=\frac{13}{4}$ 이다.

$\therefore a^2=\frac{9}{4}$

곧 ②에서 $a^{\alpha-1}=1$ 이므로 $a^{\alpha+1}=a^2(a^{\alpha-1})=\frac{9}{4}$

사실 여기서 $a^0=1$ 이용해서 바로 구해도 ㄱㅊ

따라서 $a=\frac{3}{2}$ $(a>1)$을 얻고, $\alpha=1$ 이다.

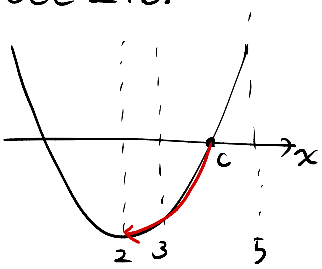
$\therefore P(1, \frac{13}{4})$이 $y=-2x+k$ 위의 점이므로 $\frac{13}{4}=-2+k$ $\therefore k=\frac{21}{4}$

㉠ $a+k=\boxed{\frac{27}{4}}$

만든 놈: plancoach_team
crazy_hansuckwon
수만휘: 한석원의눈물 (개인계정)

14번 이어서

ㄱ. 위에서 확인한 그래프 모두 $f(2)<0$ 이다. 라고 하면 욕먹을수 있으니 다르게 얘기해보자면
사실, $f'(2)=0$ 이므로 $x>2$ 에서 $f'(x)>0$ 인데, $f(c)=0$ 을 만족하는 c가 $x>2$에 존재하므로
당연한 소리임.



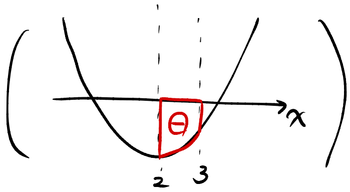
ㄴ. $\int_4^3 f(x)dx > \int_4^2 f(x)dx$ 헷갈리면 범위 변경 ~

$\Rightarrow -\int_3^4 f(x)dx > -\int_2^4 f(x)dx$

$\Rightarrow \cancel{\int_3^4 f(x)dx} < \int_2^4 f(x)dx = \int_2^3 f(x)dx + \cancel{\int_3^4 f(x)dx}$

$\Rightarrow 0 < \int_2^3 f(x)dx$ 인지 여부를 판단하면 끝!

하지만 이 또한 $f(3)<0$, $f(2)<0$인 시점에서 $\int_2^3 f(x)dx<0$ 이다.



즉, 모순이다.

ㄷ. $6 \le \int_4^6 f(x)dx \le 14$

$n=1, 2, 6\cdots$ 등등의 경우는 그래프를 보시면 아시겠지만 굳이 따질 필요 X

이를 위해 k의 범위를 보다 정확하게 결정하자.

① $\int_3^4 f(x)dx \le 0 \rightarrow \int_3^4 \{(x-2)^2+k\}dx$

$\Rightarrow \left[\frac{1}{3}(x-2)^3+kx\right]_3^4$

$= \frac{7}{3}+k \le 0$

② $\int_4^5 f(x)dx \ge 0 \rightarrow \int_4^5 \{(x-2)^2+k\}dx$

$\Rightarrow \left[\frac{1}{3}(x-2)^3+kx\right]_4^5$

$= \frac{19}{3}+k \ge 0$

$-\frac{19}{3} \le k \le -\frac{7}{3}$

㉠ $\int_4^6 f(x)dx$

$= \int_4^6 ((x-2)^2+k)dx$

$= \left[\frac{1}{3}(x-2)^3+kx\right]_4^6$

$= \frac{56}{3}+2k$ 이므로

$\frac{56}{3}-2\cdot\frac{19}{3} \le \frac{56}{3}+2k \le \frac{56}{3}-2\cdot\frac{7}{3}$

$\Rightarrow \boxed{6 \le \int_4^6 f(x)dx \le 14}$

만든 놈: plancoach_team
crazy_hansuckwon
수안회: 한석원의눈물 (개인계정)

케이스 몇개 안됨. 할만하다. 실수만 ㄴㄴ!

15. 모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_{n+1}=\begin{cases}\frac{1}{2}a_n+2n & (a_n\text{이 } 4\text{의 배수인 경우}) \\ a_n+2n & (a_n\text{이 } 4\text{의 배수가 아닌 경우})\end{cases}$$
> 이다.
>
> (나) $a_3 > a_5$

$50 < a_4 + a_5 < 60$이 되도록 하는 a_1의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m$의 값은? [4점]

① 224 ② 228 ③ 232 ④ 236 ⑤ 240

주어진 조건에 따라 수형도를 그려보자. (조건에 나온 $a_3 \sim a_5$)
↳ 어차피 경우의 수 4개뿐이니 그릴 만하다는 판단.

a_3 a_4 a_5

- a_3 (a_3 4의배수) → $\frac{1}{2}a_3+6$
  - (a_4 4의배수) → ① $\frac{1}{4}a_3+11$ → $\left(a_3 > \frac{44}{3}\right)$ ($\because a_3 > a_5$)
  - (a_4 4의배수X) → ② $\frac{1}{2}a_3+14$ → $(a_3 > 28)$ (〃)
- a_3 (a_3 4의배수X) → a_3+6
  - (a_4 4의배수) → ③ $\frac{1}{2}a_3+11$ → $(a_3 > 22)$ (〃)
  - (a_4 4의배수X) → ④ a_3+14 → 불가능! $(a_3 > a_3+14??)$

이제 각 경우에 대해 $50 < a_4 + a_5 < 60$을 해석해보자.

① $a_4 + a_5 = \left(\frac{1}{2}a_3+6\right)+\left(\frac{1}{4}a_3+11\right)$
$= \frac{3}{4}a_3+17$

$\therefore$ $50 < \frac{3}{4}a_3+17 < 60$에서 $44 < a_3 < \frac{172}{3}$ ← 57.xx

이때, ① 과정을 따랐다는 건 a_3, a_4 모두 4의 배수이므로
$a_3 = 48, 52, 56$이고, 그 때의 a_4는 각각 $30, 32, 34$이다.
따라서 조건을 만족하는 $(a_3, a_4) = (52, 32)$뿐이다.

다음 page

단 답 형

익숙...
16. 방정식

$$\log_2(x-2) = 1 + \log_4(x+6)$$

을 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

우선 진수조건!! 제발 빼먹지 말자
① $x-2>0$, ② $x+6>0$ 에서 $x>2$

밑 통일~
$\log_{2^2}(x-2)^2 = \log_4 4(x+6)$
$\Rightarrow x^2-4x+4 = 4x+24$
$\Rightarrow x^2-8x-20=0$
$\Rightarrow (x-10)(x+2)=0$
$\therefore$ ㉮ $x=\boxed{10}$ $(x>2)$

곱의 미분
17. 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x) = (x+2)f(x)$$

라 하자. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(3, 2)$에서의 접선의 기울기가 4일 때, $g'(3)$의 값을 구하시오. [3점]

$y=f(x)$ 위의 점 $(3,2)$ → $f(3)=2$
접선의 기울기 4 → $f'(3)=4$

$g(x)=(x+2)f(x)$ 에서
$g'(x)=f(x)+(x+2)f'(x)$

$\therefore$ ㉮ $g'(3)=f(3)+5f'(3)$
$=2+20$
$=\boxed{22}$

만든 놈: plancoach_team
crazy_hansuckwon (개인계정)
수만휘: 한석원의눈물

15번 이어서 … ①

② $a_4+a_5=\left(\frac{1}{2}a_3+6\right)+\left(\frac{1}{2}a_3+14\right)$

$=a_3+20$

$\therefore$ $50<a_3+20<60$ 에서 $30<a_3<40$

이 때, ② 과정을 따랐다는 건 a_3은 4의 배수지만 a_4는 4의 배수가 아니므로

$a_3=32, 36$이고, 그 때의 a_4는 각각 $22, 24$이다.

따라서 조건을 만족하는 $(a_3, a_4)=(32, 22)$뿐이다.

③ $a_4+a_5=(a_3+6)+\left(\frac{1}{2}a_3+11\right)$

$=\frac{3}{2}a_3+17$

$\therefore$ $50<\frac{3}{2}a_3+17<60$ 에서 $22<a_3<\frac{86}{3}$ (28.xx)

이 때, ③ 과정을 따랐다는 건 a_3은 4의 배수가 아니지만 a_4는 4의 배수이므로

$a_3=23, 25, 26, 27$이고, 그 때의 a_4는 각각 $29, 31, 32, 33$ 이다.

따라서 조건을 만족하는 $(a_3, a_4)=(26, 32)$뿐이다.

$\Rightarrow$ ①, ②, ③ 을 종합하면 가능한 $(a_3, a_4)=(52, 32), (32, 22), (26, 32)$ 이다.

이제 각 a_3으로부터 a_1까지 거꾸로 추론해보자.

i) $a_3=52$ $\begin{cases} \frac{1}{2}a_2+4 \quad (a_2 \text{ 4의 배수}) \longrightarrow a_2=96 \\ a_2+4 \quad (a_2 \text{ 4의 배수 X}) \longrightarrow a_2=48 \end{cases}$

모순!

$\Rightarrow a_2=96$ $\begin{cases} \frac{1}{2}a_1+2 \quad (a_1 \text{ 4의 배수}) \rightarrow a_1=188 \quad \text{o.k!} \\ a_1+2 \quad (a_1 \text{ 4의 배수X}) \rightarrow a_1=94 \quad \text{o.k!} \end{cases}$

다음 page

15번 이어서 … ②

만든 놈: plancoach_team
crazy_hansuckwon (개인계정)
수만휘: 한석원의눈물

ii) $a_3=32$ $\begin{cases} \frac{1}{2}a_2+4 & (a_2\ 4\text{의 배수}) \to a_2=56 \\ a_2+4 & (a_2\ 4\text{의 배수} \times) \to a_2=28 \end{cases}$

모순!

$\Rightarrow a_2=56$ $\begin{cases} \frac{1}{2}a_1+2 & (a_1\ 4\text{의 배수}) \to a_1=108 \\ a_1+2 & (a_1\ 4\text{의 배수} \times) \to a_1=54 \end{cases}$

o.k!
o.k!

iii) $a_3=26$ $\begin{cases} \frac{1}{2}a_2+4 & (a_2\ 4\text{의 배수}) \to a_2=44 \\ a_2+4 & (a_2\ 4\text{의 배수} \times) \to a_2=22 \end{cases}$

모순!

$\Rightarrow a_2=22$ $\begin{cases} \frac{1}{2}a_1+2 & (a_1\ 4\text{의 배수}) \to a_1=40 \\ a_1+2 & (a_1\ 4\text{의 배수} \times) \to a_1=20 \end{cases}$

o.k!

모순!

㉮ a_1의 Max+min

$\Rightarrow 188+40$

$= \boxed{228}$

만든 놈: plancoach_team
crazy_hansuckwon (개인계정)
수만휘: 한석원의눈물

Σ 연산

18. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10}(a_k-b_k+2)=50,\quad \sum_{k=1}^{10}(a_k-2b_k)=-10$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10}(a_k+b_k)$의 값을 구하시오. [3점]

$\sum_{k=1}^{10}(a_k-b_k+2)=\sum_{k=1}^{10}(a_k-b_k)+20=50$

$\therefore \sum_{k=1}^{10}(a_k-b_k)=30$

곧 $\sum_{k=1}^{10}(a_k-2b_k)=-10$과 연립하면

$\sum_{k=1}^{10}(a_k-b_k)-\sum_{k=1}^{10}(a_k-2b_k)=\sum_{k=1}^{10}b_k=40$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{10}a_k=70$ 이므로

㉮ $\sum_{k=1}^{10}(a_k+b_k)=70+40$

$=\boxed{110}$

너무 많이 나온 유형

19. 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t\,(t\ge 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t)=12t-12,\quad v_2(t)=3t^2+2t-12$$

이다. 시각 $t=k\,(k>0)$에서 두 점 P, Q의 위치가 같을 때, 시각 $t=0$에서 $t=k$까지 점 P가 움직인 거리를 구하시오. [3점]

속도 정적분 : 변위 , |속도| = 속력 정적분 : 이동거리

P, Q가 출발한 위치가 같고, t=k 에서의 위치도 같으므로

$\int_0^k V_1(t)\,dt=\int_0^k V_2(t)\,dt$ 이다.

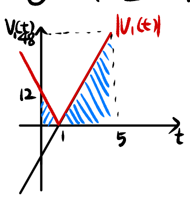
$\Rightarrow \int_0^k (V_2(t)-V_1(t))\,dt=0$

$\Rightarrow \int_0^k (3t^2-10t)\,dt=0$

$\Rightarrow \left[t^3-5t^2\right]_0^k=0$

$\Rightarrow k^2(k-5)=0$ 이므로 $k=5$ $(k>0)$

㉮ $\int_0^5 |V_1(t)|\,dt=$



$:\ \frac{1}{2}\times1\times12+\frac{1}{2}\times4\times48$

$=6+96$

$=\boxed{102}$

"다항함수" 조건이 중요함. ㊉ 변수 원리 조심!

20. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$2x^2f(x)=3\int_0^x(x-t)\{f(x)+f(t)\}\,dt$$

를 만족시킨다. $f'(2)=4$일 때, $f(6)$의 값을 구하시오. [4점]

① $x=0$ 대입해보면 $0=0$이므로 의미 X

② 양변 x에 대해 미분

$2x^2f(x)=3\int_0^x(xf(x)+xf(t)-tf(x)-tf(t))\,dt$ 이므로

$\Rightarrow 2x^2f(x)=3\left\{xf(x)\int_0^x 1\,dt+x\int_0^x f(t)\,dt-f(x)\int_0^x t\,dt-\int_0^x tf(t)\,dt\right\}$

x는 상수취급, t가 변수!

변수에 주의하며 미분하면 $\int_0^x 1\,dt=x$, $\int_0^x t\,dt=\frac{1}{2}x^2$ 이므로

$4xf(x)+2x^2f'(x)$

$=3\left\{\cancel{2xf(x)}+\cancel{x^2f'(x)}+\int_0^x f(t)\,dt+\cancel{xf(x)}-\left(\cancel{xf(x)}+\frac{1}{2}\cancel{x^2f'(x)}\right)-\cancel{xf(x)}\right\}$

$=3\left(xf(x)+\frac{1}{2}x^2f'(x)+\int_0^x f(t)\,dt\right)$

$\therefore 4xf(x)+2x^2f'(x)=3xf(x)+\frac{3}{2}x^2f'(x)+3\int_0^x f(t)\,dt$ 에서

$xf(x)+\frac{1}{2}x^2f'(x)=3\int_0^x f(t)\,dt$

$\Rightarrow$ 계산의 편의를 위해 $2xf(x)+x^2f'(x)=6\int_0^x f(t)\,dt$ 로 두자.

"다항함수"라는 조건은 아주 중요한 조건.

$\Rightarrow$ 다항함수일 경우, 최고차항의 계수 & 차수 비교가 가능하다. ☆

$f(x)=ax^n+\boxed{}$ 꼴로 두면

$f'(x)=nax^{n-1}+\boxed{}$ 이다.

또한, $\int_0^x f(t)\,dt=\frac{a}{n+1}x^{n+1}+\boxed{}$ 이므로

$\Rightarrow 2xf(x)+x^2f'(x)=6\int_0^x f(t)\,dt$

$\Rightarrow 2ax^{n+1}+nax^{n+1}+\boxed{}=\frac{6a}{n+1}x^{n+1}+\boxed{}$

$\therefore a(n+2)=\frac{6a}{n+1}$ 이므로 $n=1$ $(a\ne0,\ n\ge0)$

곧 $f(x)$는 일차함수이고, $f'(2)=4$에서 $y=4x+k$ 꼴이다.

이를 다시 $2xf(x)+x^2f'(x)=6\int_0^x f(t)\,dt$ 에 대입하면

$\Rightarrow 8x^2+2kx+4x^2=6\left[2t^2+kt\right]_0^x$

$\Rightarrow 12x^2+2kx=12x^2+6kx$ 이므로 $k=0$

$\therefore f(x)=4x$

㉮ $f(6)=\boxed{24}$

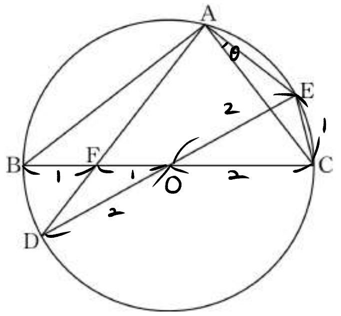
만든 놈: plancoach_team
crazy_hansuckwon (개인계정)
수만휘: 한석원의눈물

중학교 공부 열심히 한 사람, 미적분 선택자면 유리했을듯. 오랜만에 할선정리!

21. 그림과 같이 선분 BC를 지름으로 하는 원에 두 삼각형 ABC와 ADE가 모두 내접한다. 두 선분 AD와 BC가 점 F에서 만나고

$$\overline{BC}=\overline{DE}=4,\ \overline{BF}=\overline{CE},\ \sin(\angle CAE)=\frac{1}{4}$$

이다. $\overline{AF}=k$일 때, k^2의 값을 구하시오. [4점]



3가지 풀이를 보여줄텐데, 모두 공통적으로 구해야 하는 부분은

1. $\overline{BC}$ 와 $\overline{DE}$ 모두 원의 지름이므로 둘의 교점은 원의 중심 (O)

$\Rightarrow \overline{BO}=\overline{CO}=\overline{DO}=\overline{EO}=2$

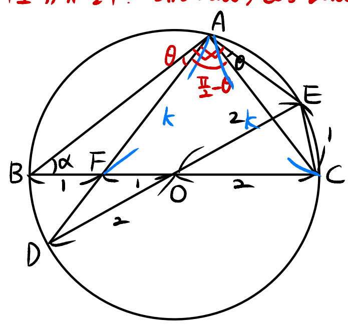
2. $\angle CAE=\theta$로 두면 $\sin\theta=\frac{1}{4}$에서 $\triangle ACE$에 sin Law 적용

$\Rightarrow \frac{\overline{CE}}{\sin\theta}=2R=4$ $\therefore \overline{BF}=\overline{CE}=1$ ($\because \overline{BF}=\overline{CE}$)

$\Rightarrow \overline{FO}=\overline{BO}-\overline{BF}$ 이므로 $\overline{FO}=1$

곧 기본세팅이 위 문제 그림처럼 된다.

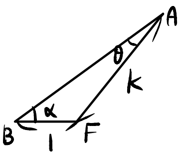
sol1) 난 철저히 수I밖에 몰라! sin Law, cos Law만 써야 돼!



⊕ $\angle FAC=\frac{\pi}{2}-\theta$

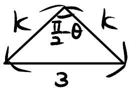
STEP 1. $\angle BAC=\angle DAE=\frac{\pi}{2}$ 이므로 $\angle BAF=\theta$

STEP 2. $\triangle BAF$에서 sin Law 적용하면 ($\angle ABF=\alpha$)



$\frac{1}{\sin\theta}=\frac{k}{\sin\alpha}=4$ 이므로 $\sin\alpha=\frac{1}{4}k$

STEP 3. 직각 $\triangle ABC$에서 $\overline{AC}=\overline{BC}\sin\alpha=k$

STEP 4.  에서 cos Law 적용

$\rightarrow 3^2=k^2+k^2-2k^2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) \Rightarrow 9=2k^2-2k^2\sin\theta$

$\therefore$ 계산하면 ⓐ $k^2=\boxed{6}$ 다음 page

2017학년도 수능 가형 30번 핵너프버전. 개쉽다. 마지막 계산만 안 찔고 하면 끝

22. 삼차함수 $f(x)$에 대하여 구간 $(0,\infty)$에서 정의된 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} x^3-8x^2+16x & (0<x\le 4) \\ f(x) & (x>4) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $g(x)$가 구간 $(0,\infty)$에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시킬 때, $g(10)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

> (가) $g\left(\frac{21}{2}\right)=0$
>
> (나) 점 $(-2,0)$에서 곡선 $y=g(x)$에 그은, 기울기가 0이 아닌 접선이 오직 하나 존재한다.

$g(x)=\begin{cases} x(x-4)^2 & (0<x\le 4) \\ f(x) & (x>4) \end{cases}$ 가 구간 $(0,\infty)$에서 미분가능하므로

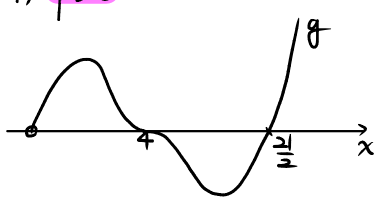
① $f(4)=0$, ② $f'(4)=0$ 이다. $\Rightarrow f(x)=p(x-4)^2(x-q)$ 꼴

이때 조건 (가)에서 $g\left(\frac{21}{2}\right)=f\left(\frac{21}{2}\right)=0$ 이므로

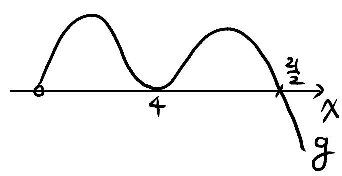
$f(x)=p(x-4)^2\left(x-\frac{21}{2}\right)$로 함수의 최고차항을 빼고 전부 결정된다.

$\Rightarrow$ 최고차항의 계수 부호에 따라 $g(x)$를 그려보면

i) $p>0$



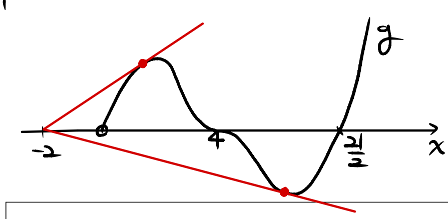
ii) $p<0$



으로 그려진다.

이제 조건 (나)를 보면, 접선 개수를 통해 개형을 결정하면 되는데

$p>0$인 경우는 다음처럼 무조건 기울기가 0이 아닌 접선이 2개 존재한다.



$\therefore p<0$

다음 page

* 확인 사항

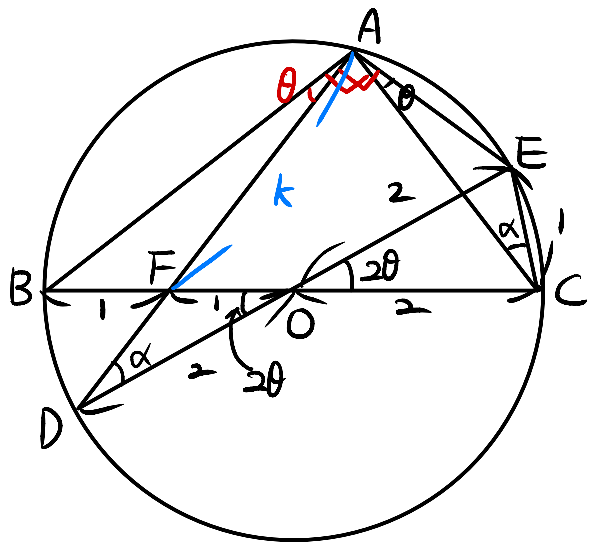
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기) 했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「선택과목(확률과 통계)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

만든 놈: plancoach_team
crazy_hansuckwon (개인계정)
수만휘: 한석원의눈물

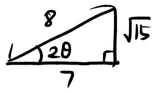
21번 이어서 ···①

sol₂) 미적분 선택자긴 한데 할선 정리 몰라요 중학교 때 놓았음 ㅋㅋ 하는 분들을 위한 풀이



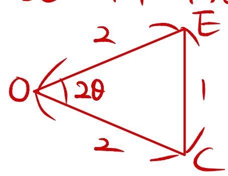
STEP 1. $\angle CAE=\theta$ 이므로 원주각과 중심각의 관계에 의해 $\angle EOC=2\theta \rightarrow \angle BOD=2\theta$ (맞꼭지각)

STEP 2. $\sin 2\theta$, $\cos 2\theta$ 구하기 → $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\times\frac{1}{4}\times\frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{\sqrt{15}}{8}$

→ 

$\therefore \sin 2\theta = \frac{\sqrt{15}}{8}$, $\cos 2\theta = \frac{7}{8}$ $\left(0<2\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

↳ 물론 여기서 배각공식을 쓰지 않고 cos Law를 사용해

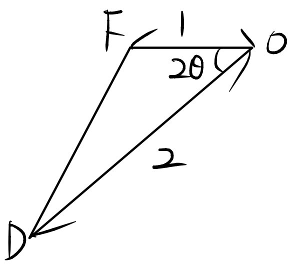


$1^2 = 2^2+2^2-8\cos 2\theta$

→ $\cos 2\theta = \frac{7}{8}$ 을 구해도 된다.

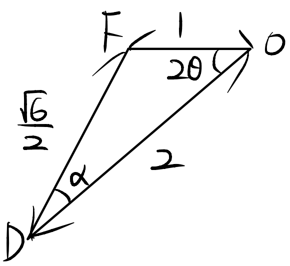
단, 미적분 선택자가 아니면 미적분 선택자에 비해 2θ꼴을 다룰일이 적어 불리하다고 한것

STEP 3. △ODF에 cos Law 적용



⇒ $\overline{DF}^2 = 1^2+2^2-4\cos 2\theta$
$= \frac{3}{2}$
$\therefore \overline{DF} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

STEP 4. $\angle ODF = \alpha$ 로 두고 마찬가지로 △ODF에 cos Law 적용해 $\cos\alpha$ 구하기



⇒ $1^2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2+2^2-4\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}\cos\alpha$

$\therefore \cos\alpha = \frac{9}{4\sqrt{6}}$

다음 page

STEP 5. 직각△ADE에서 $\frac{\overline{AD}}{\overline{DE}} = \cos\alpha$: $\frac{k+\frac{\sqrt{6}}{2}}{4} = \frac{9}{4\sqrt{6}}$ 이고, 계산하면 $k=\sqrt{6}$ ㉠ $k^2=\boxed{6}$

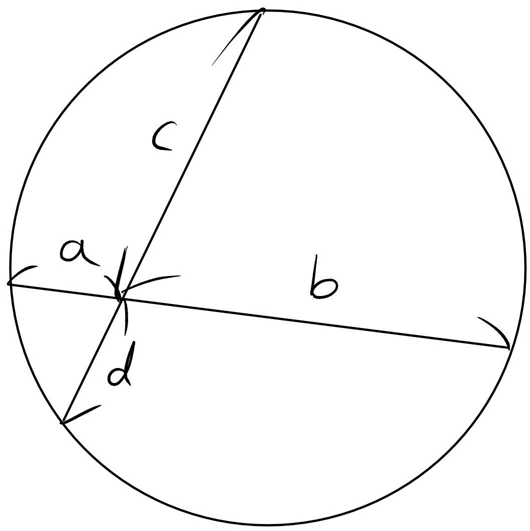
21번 이어서 ... ②

Sol$_3$) 할선 정리를 알아요!

만든 놈: plancoach_team
crazy_hansuckwon (개인계정)
수만휘: 한석원의눈물

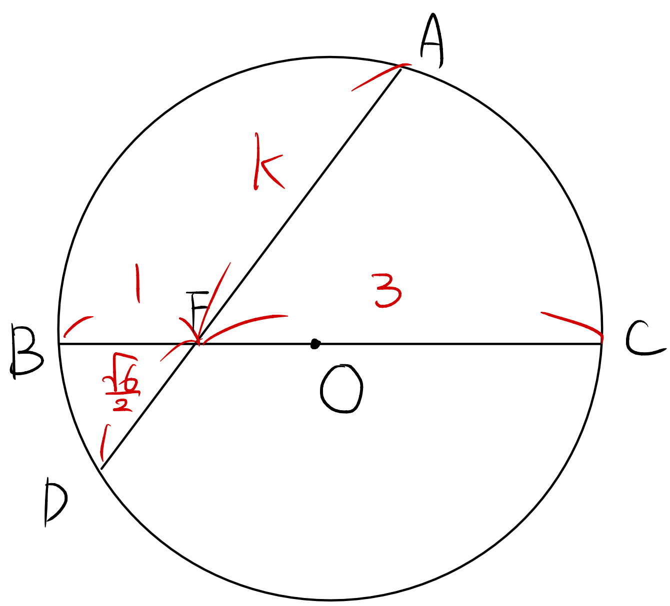
Sol$_2$)의 STEP 3까지 구했다고 생각하자.

할선 정리란,



일 때 $ab=cd$인 정리이다.

이 문제에 대입해보면



이므로 $1\times3=\frac{\sqrt{6}}{2}k$

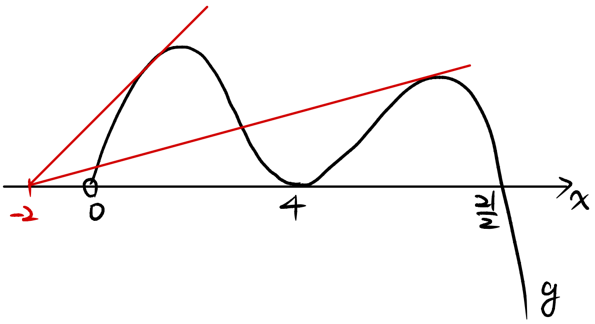
$\therefore k=\sqrt{6}$이고,

㉠ $k^2=\boxed{6}$

만든 놈: plancoach_team
crazy_hansuckwon
수만휘: 한석원의눈물 (개인계정)

22번 이어서

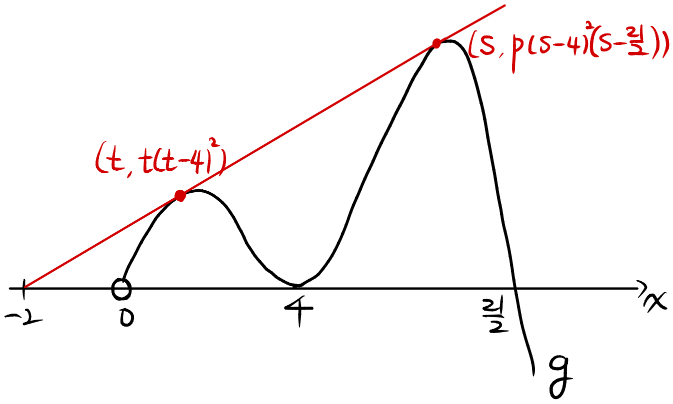
곧, $p<0$ 이고 개형을 그려보면 일반적인 경우엔



처럼 접선이 2개가 존재한다.

⇒ 접선이 1개가 되려면? 두 접선이 겹쳐질 때!

∴ 올바른 개형은



이다.

$(-2,0) \sim (t, t(t-4)^2)$까지의 평균변화율 $=$ $(t, t(t-4)^2)$에서의 $y=x(x-4)^2$의 순간변화율이므로

$\hookrightarrow y' = (x-4)^2 + 2x(x-4)$
$= (x-4)(3x-4)$

$$\Rightarrow \frac{t(t-4)^{\cancel{2}}}{t+2} = \cancel{(t-4)}(3t-4) \quad (t \neq 4)$$

⇒ $t(t-4) = (t+2)(3t-4)$ 이므로 계산하면 $t=1$ 이고, 그때의 접선기울기 : 3이다.

똑같은 논리로

$(-2,0) \sim (s, p(s-4)^2(s-\frac{21}{2}))$까지의 평.변 $=$ $(s, p(s-4)^2(s-\frac{21}{2}))$에서의 $y=p(x-4)^2(x-\frac{21}{2})$의 순.변이고, 그 값이 3이므로

$\hookrightarrow y' = 2p(x-4)(x-\frac{21}{2}) + p(x-4)^2$
$= p(x-4)(3x-25)$

$$\Rightarrow \frac{p(s-4)^{\cancel{2}}(s-\frac{21}{2})}{s+2} = p\cancel{(s-4)}(3s-25) \quad (s \neq 4)$$

⇒ $(s-4)(s-\frac{21}{2}) = (s+2)(3s-25)$

⇒ 열심히 전개해서 풀어보면 기적처럼 $s=8$ $(\because s>4)$이 나온다.

곧 $f'(8) = p(8-4)(3\cdot 8-25) = 3$이므로 $p = -\frac{3}{4}$

∴ $f(x) = -\frac{3}{4}(x-4)^2(x-\frac{21}{2}) \longrightarrow$ ㉠ $g(10) = f(10) = \frac{27}{2}$, $p+q = \boxed{29}$

만든 놈: plancoach_team
crazy_hansuckwon (개인계정)
수만휘: 한석원의눈물

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

5지선다형

이항분포와 정규분포의 관계

23. 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(45, p)$를 따르고 $\mathrm{E}(X)=15$일 때, p의 값은? [2점]

① $\frac{4}{15}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{2}{5}$ ④ $\frac{7}{15}$ ⑤ $\frac{8}{15}$

$B(45, p)$는 근사적으로 $N(45p, 45p(1-p))$를 따른다.

→ $45p=15$ 이므로 ∴ $p=\boxed{\frac{1}{3}}$

벤 다이어그램 그려도 ok!

24. 두 사건 A, B가 서로 배반사건이고

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{5}{6},\ \mathrm{P}(A^C)=\frac{3}{4}$$

일 때, $\mathrm{P}(B)$의 값은? (단, A^C은 A의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{5}{12}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{7}{12}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

배반사건이므로 $P(A\cap B)=0$

→ $P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{5}{6}$

또한, $P(A^C)=1-P(A)=\frac{3}{4}$ 이므로 $P(A)=\frac{1}{4}$

∴ $P(B)=\frac{5}{6}-\frac{1}{4}=\boxed{\frac{7}{12}}$

만든 놈: plancoach_team
crazy_hansuckwon (개인계정)
수만휘: 한석원의 눈물

여사건은 빨리 캐치할수록 좋다.

25. 숫자 0, 1, 2 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 네 자리의 자연수 중 각 자리의 수의 합이 7 이하인 자연수의 개수는? [3점]

① 45 ② 47 ③ 49 ④ 51 ⑤ 53

네 자리 수의 각 자리 숫자 합 최대 8

⇒ 여사건!

가능한 네 자리 수의 총 개수

⇒ $2 \times 3 \times 3 \times 3$ (∵ □□□□ : 1~2, 0~2, 0~2, 0~2)

$= 54$

네 자리 숫자 합 8인 경우: 2222인 경우뿐

∴ ㉠ $54 - 1 = \boxed{53}$

기본적인 표본평균의 추정문제

26. 어느 지역에서 수확하는 양파의 무게는 평균이 m, 표준편차가 16인 정규분포를 따른다고 한다. 이 지역에서 수확한 양파 64개를 임의추출하여 얻은 양파의 무게의 표본평균이 $\bar{x}$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $240.12 \le m \le a$이다. $\bar{x}+a$의 값은? (단, 무게의 단위는 g이고, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $P(|Z| \le 1.96) = 0.95$로 계산한다.) [3점]

① 486 ② 489 ③ 492 ④ 495 ⑤ 498

양파의 무게를 확률변수 X로 두면

$X \sim N(m, 16^2)$을 따른다.

이 중 16개를 임의추출해서 얻은 무게의 평균이 $\bar{x}$이므로
모평균 m을 신뢰도 95%로 추정하면

$\bar{x} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \bar{x} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 에서 $\sigma = 16$, $n = 64$이므로

$\bar{x} - 1.96 \times \frac{16}{8} \le m \le \underbrace{\bar{x} + 1.96 \times \frac{16}{8}}_{a}$

∴ $\bar{x} - 3.92 = 240.12$

⇒ $\bar{x} = 244.04$이고, 이를 다시 $a = \bar{x} + 3.92$에 대입하면 $a = 247.96$

㉠ $\bar{x} + a = 244.04 + 247.96$
$= \boxed{492}$

만든 놈: plancoach_team
crazy_hansuckwon (개인계정)
수만휘: 한석원의눈물

조건은 신박했으나 결국 3점짜리의 한계

27. 1부터 8까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 8개의 의자가 있다. 이 8개의 의자를 일정한 간격을 두고 원형으로 배열할 때, 서로 이웃한 2개의 의자에 적혀 있는 두 수가 서로소가 되도록 배열하는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]

① 72 ② 78 ③ 84 ④ 90 ⑤ 96

"서로소"라는 조건이 생소할 수 있는데,
결국 서로 이웃하면 안되는 경우를 찾는게 관건이다.

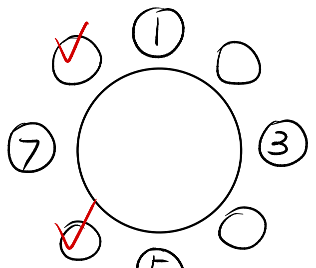
1은 모든 자연수와 서로소이므로 어디에 들어가든 상관 X
그런데 짝수들을 생각해보면 짝수들은 모두 소인수 2를 포함하므로 서로소가 아니다.

∴ 짝수끼리는 이웃하면 X

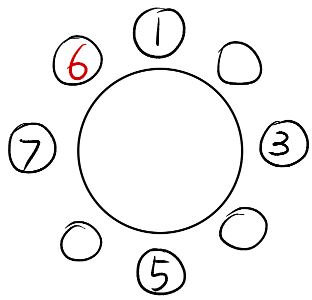
여기에 3 또한 6과 서로소가 아니므로 3과 6은 이웃할 수 없다.
이 두 가지 조건 외에는 어떻게 배열되더라도 상관 X

STEP1. 홀수 선 배열 → 원순열이므로 $(4-1)! = 3!$
(이후 짝수를 홀수 사이에 1개씩 배열하면 된다)
STEP2. 3 옆에 6이 배열되지 않도록 하기

ex)



에서 6을 배열하는 경우의 수: 2가지



⇒ 나머지 세 자리에 나머지 수를 배열하는 경우의 수: 3! 가지

∴ $3! \times 2 \times 3! = \boxed{72}$

보다 본질적인 부분을 묻는 문제. 개인적으로 Good!! 너무 기계적으로 표준화하는건 지양하자.

28. 정규분포를 따르는 두 확률변수 X, Y의 확률밀도함수는 각각 $f(x)$, $g(x)$이다. $\mathrm{V}(X) = \mathrm{V}(Y)$이고, 양수 a에 대하여

$$f(a) = f(3a) = g(2a),$$
$$\mathrm{P}(Y \le 2a) = 0.6915$$

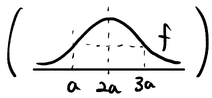
일 때, $\mathrm{P}(0 \le X \le 3a)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [4점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.5328 ② 0.6247 ③ 0.6687
④ 0.7745 ⑤ 0.8185

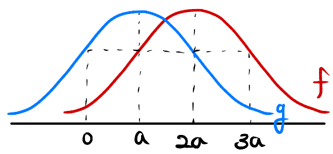
$V(X) = V(Y)$: $f(x)$와 $g(x)$의 모양이 같다. 즉, 둘은 평행이동 관계에 있다.

① $f(x)$는 대칭축을 기준으로 대칭인데, $f(a) = f(3a)$이므로
$x = 2a$에 대칭인 형태를 보인다.

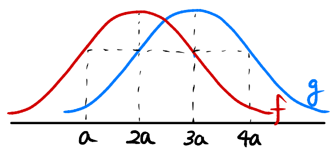


② $f(a)$, $f(3a)$와 $g(2a)$가 같으므로 다음과 같이 두 경우 중 하나다.

i)

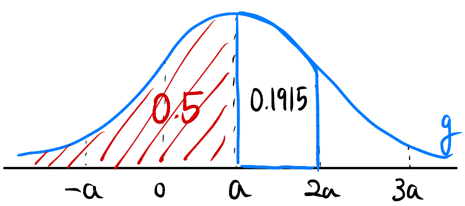


ii)



이 때, 조건에서 $P(Y \le 2a) = 0.6915 > 0.5$이므로 ii)은 모순이다.
(∵ ii)의 경우 $P(Y \le 2a) < P(Y \le 3a) = 0.5$)

곧 i)이고, 이 경우 $P(a \le Y \le 2a) = 0.1915$임을 알 수 있다.



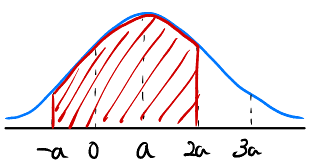
이 때 위의 표에서 표준화한 값이 $0 \le Z \le \frac{1}{2}$일 때 0.1915인데
이는 Y에서 $P(a \le Y \le 2a)$와 대응된다.
즉, $g(x)$의 간격 a가 표준화했을 때의 간격 $\frac{1}{2}$과 동일하다.

이 부분 이해가 어렵다면? 개념 쪽 이슈라 뭐라 설명하기 어려우니 그냥 하던대로 표준화해서 계산 ㄱㄱ

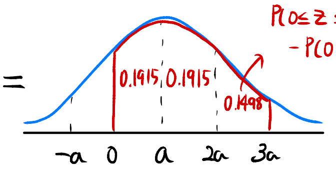
⇒ $P(2a \le Y \le 3a)$는 $\frac{1}{2} \le Z \le 1$일 때의 확률값과 동일

③ $P(0 \le X \le 3a)$는 f 그래프를 왼쪽으로 a만큼 평행이동한 게 g이므로
$P(-a \le Y \le 2a)$와 같다. ⇒ 대칭성을 고려해 그래프를 그려보면

$P(0 \le Z \le 1) - P(0 \le Z \le \frac{1}{2})$



=



⇒ $2 \times 0.1915 + 0.1498 = \boxed{0.5328}$

만든 놈: plancoach_team
crazy_hansuckwon (개인계정)
수만휘: 한석원의눈물

단 답 형

? 29번이요? 아ㅋㅋ 9평이 이런식으로 반영되네

29. 다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수를 구하시오. [4점]

> (가) $a \le b \le c \le 8$
> (나) $(a-b)(b-c)=0$

(가) 조건을 만족하는 순서쌍 (a, b, c) 개수는

8개 수 중 중복허락해서 3개 숫자 뽑는 경우의 수 $\Rightarrow {}_8H_3 = {}_{10}C_3$
$= 120$

(나) 조건을 만족하는 경우

$\Rightarrow a=b$ OR $b=c$

이 경우, 체크해야 할 게 많으므로 여사건 생각!

여사건: $a \ne b \ne c$ → 그냥 ${}_8C_3$ 임

$\therefore {}_8C_3 = 56$

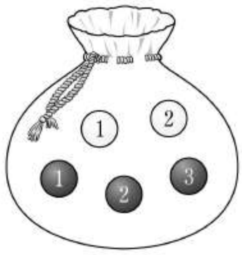
㉮ $120-56=\boxed{64}$

쉬워요~ 30번은 이제 조건부확률 준고정인듯?

30. 주머니에 숫자 1, 2가 하나씩 적혀 있는 흰 공 2개와 숫자 1, 2, 3이 하나씩 적혀 있는 검은 공 3개가 들어 있다.
이 주머니를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내어
> 꺼낸 공이 서로 같은 색이면 꺼낸 공 중 임의로 1개의 공을 주머니에 다시 넣고,
> 꺼낸 공이 서로 다른 색이면 꺼낸 공을 주머니에 다시 넣지 않는다.

이 시행을 한 번 한 후 주머니에 들어 있는 모든 공에 적힌 수의 합이 3의 배수일 때, 주머니에서 꺼낸 2개의 공이 서로 다른 색일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



원래 주머니에 들어있던 공에 적힌 수의 합: 9 → 3의 배수

$\Rightarrow$ 시행 후에 주머니에 남은 공에 적힌 수의 합 3의 배수 : 시행에서 꺼낸 공에 적힌 수의 합도 3의 배수

i) 같은 색 공 2개 뽑는 경우

① 흰 공 2개 뽑는 경우

$\Rightarrow$ 공 1개를 다시 넣어야하는데, 뭘 넣더라도 조건 만족 ×

② 검은 공 2개 뽑는 경우

$\Rightarrow$ 공 1개를 다시 넣고 내 손에 들려있는 공이 ❸이어야 함

공을 뽑는 확률
"1"이 쓰인 공을 다시 넣을 확률

(1, 2) : 불가능
(1, 3) : ❶을 다시 넣으면 됨 → $\boxed{\frac{1}{{}_5C_2}} \times \boxed{\frac{1}{2}} = \frac{1}{20}$
(2, 3) : 동일한 논리 → $\frac{1}{{}_5C_2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{20}$

ii) 다른 색 공 2개 뽑는 경우

수의 합이 3의 배수인 두 공을 뽑아야 하므로 (①, ❷), (②, ❶) 뿐이다.

$\Rightarrow \frac{2}{{}_5C_2} = \frac{1}{5}$

$\therefore$ ㉮ $\dfrac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{20}+\frac{1}{20}+\frac{1}{5}} = \frac{2}{3}$ 이므로 $p+q=\boxed{5}$

> * 확인 사항
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기) 했는지 확인하시오.
> ○ 이어서, 「선택과목(미적분)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

만든 놈: plancoach_team
crazy_hansuckwon (개인계정)
수만휘: 한석원의눈물

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

최고차항의 계수비

23. $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n-5}{n^2+1}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+\cancel{3n-5}}{n^2\cancel{+1}}=\boxed{2}$$

(정석은 $\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}-\frac{5}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}=2$)

구분구적법. 언제든 등장가능

24. $\lim_{n\to\infty}\frac{2\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{\pi k}{3n}$ 의 값은? [3점]

① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$ ④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

구분구적법은 결국 암만 복잡해보여도 $\frac{1}{n}k$ 꼴과 $\frac{1}{n}$을 맞춰주면 됨

$6\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\left(\frac{\pi}{3n}k\right)\right)\cdot\frac{\pi}{3n}$ 로 꼴을 바꾸고 $\frac{\pi}{3n}k=x_k$로 두면

㉠ $6\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin x\,dx$ 이 된다.

$\Rightarrow 6\left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$

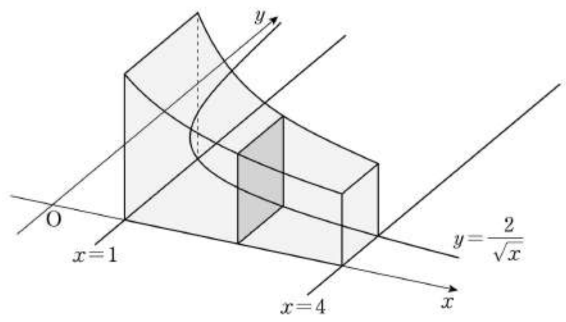
$\Rightarrow 6\left(-\frac{1}{2}+1\right)$

$=\boxed{3}$

만든 놈: plancoach_team
crazy_hansuckwon (개인계정)
수만휘: 한석원의눈물

그림 생긴 꼬라지에 쫄지 말자.

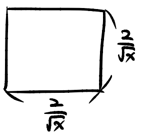
25. 그림과 같이 곡선 $y=\dfrac{2}{\sqrt{x}}$ 와 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=4$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형인 입체도형의 부피는? [3점]



① $6\ln2$ ② $7\ln2$ ③ $8\ln2$ ④ $9\ln2$ ⑤ $10\ln2$

입체도형의 부피
⇒ 단면을 모은다!

단면의 넓이: 정사각형이므로



⇒ $\frac{4}{x}$

㉠ $\int_1^4 \frac{4}{x}dx = [4\ln x]_1^4 = \boxed{8\ln2}$

귀찮긴한데… 단순계산. 합성함수의 미분법 ⊕ 역함수의 미분법 연습!

26. 함수 $f(x)=e^{2x}+e^x-1$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 함수 $g(5f(x))$의 $x=0$에서의 미분계수는? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

$(g(5f(x)))' = g'(5f(x))\cdot 5f'(x)$ 이므로 $x=0$에서의 미분계수는 $g'(5f(0))\cdot 5f'(0)$이다.

⇒ 각각의 요소를 구해보면

① $g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}$ 이므로 $f(0)=1$ 에서 $g'(5f(0))=g'(5)=\frac{1}{f'(g(5))}$ 이다.

⇒ $g(5)=k$ 로 두면 $f(k)=5$이므로 $e^{2k}+e^k-1=5$이다.
⇒ $e^{2k}+e^k-6=0$ 에서 $(e^k+3)(e^k-2)=0$
∴ $e^k=2$ ⟶ $k=\ln2$

곧, $g(5)=\ln2$ 이므로 $g'(5f(0))=\frac{1}{f'(\ln2)}$ 이다.

② $f'(x)=2e^{2x}+e^x$ 에서 $f'(0)=3$, $f'(\ln2)=10$

㉠ $g'(5f(0))\cdot 5f'(0) = \frac{1}{10}\times15$
$= \boxed{\frac{3}{2}}$

만든 놈: plancoach_team
crazy_hansuckwon (개인계정)
수만휘: 한석원의눈물

모든 항이 자연수인 등비수열?

27. 모든 항이 자연수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} = 4$$

이고 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_{2n}}$이 실수 S에 수렴할 때, S의 값은? [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

급수가 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{3^n} = 0$ 이다.

⇒ $\{a_n\}$은 모든 항이 자연수인 등비수열이므로 초항, 공비 모두 자연수이다.

∴ $\{a_n\}$의 공비가 3보다 작아야 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{3^n}=0$을 만족하므로

$\{a_n\}$의 공비: 1 or 2

i) $\{a_n\}$ 공비 1

$\{a_n\}=k$ (k는 상수)로 두면 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k}{3^n} = \frac{\frac{k}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{k}{2} = 4$ ∴ $k=8$

하지만 이 경우 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{8}$ 이고, 이는 발산하므로 모순이다.

ii) $\{a_n\}$ 공비 2

$\{a_n\} = a\cdot 2^{n-1}$로 두면 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a\cdot 2^{n-1}}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{\frac{a}{3}}{1-\frac{2}{3}} = a = 4$ ∴ $a=4$

곧 ㉠ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4\cdot 2^{2n-1}}$

$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{8\cdot 4^{n-1}}$

$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

$= \frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{4}}$

$= \boxed{\frac{1}{6}}$

개웃참해보이지만 결국 걍 계산. 눈치만 빠르면 계산 반토막 가능!

28. 함수

$$f(x) = \sin x \cos x \times e^{a\sin x + b\cos x}$$

이 다음 조건을 만족시키도록 하는 서로 다른 두 실수 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여 $a-b$의 최솟값은? [4점]

> (가) $ab=0$
>
> (나) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = \frac{1}{a^2+b^2} - 2e^{a+b}$

① $-\frac{5}{2}$ ② -2 ③ $-\frac{3}{2}$ ④ -1 ⑤ $-\frac{1}{2}$

(가) 조건에서 $a=0$ OR $b=0$이므로 case 분류

i) $a=0$, $b\neq 0$ (∵ (나) 조건에서 $a^2+b^2\neq 0$)

$f(x) = \sin x\cos x e^{b\cos x}$

→ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos x e^{b\cos x}dx = \frac{1}{b^2} - 2e^b$

치환적분! $\cos x$이 두 번 등장하므로 $\cos x = t$로 치환해보자.

$\cos x = t$이면 $0\to 1$, $\frac{\pi}{2}\to 0$, $-\sin x = \frac{dt}{dx}$ 이므로 $-\int_1^0 te^{bt}dt$으로 변형된다.

→ $\int_0^1 te^{bt}dt$ 에서 부분적분을 사용하면 $\left[\frac{1}{b}te^{bt}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{b}e^{bt}dt$

→ $\left[\frac{1}{b}te^{bt}\right]_0^1 - \frac{1}{b}\left[\frac{1}{b}e^{bt}\right]_0^1$

→ $\frac{1}{b}e^b - \frac{1}{b^2}e^b + \frac{1}{b^2}$

= $\frac{1}{b^2} + \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{b^2}\right)e^b$이 $\frac{1}{b^2} - 2e^b$와 같다.

∴ $\frac{1}{b} - \frac{1}{b^2} = (-2)$ 에서 양변에 b^2을 곱하면 ($b^2\neq 0$)

→ $2b^2+b-1=0$

곧, $b=\frac{1}{2}$ OR -1 이고 그때의 $a-b$의 값은 각각 $-\frac{1}{2}$, 1 이다.

ii) $a\neq 0$, $b=0$ (∵ 〃)

$f(x) = \sin x\cos x e^{a\sin x}$

→ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos x e^{a\sin x}dx = \frac{1}{a^2} - 2e^a$

치환적분! 이번엔 $\sin x = t$로 치환해보자.

$\sin x = t$이면 $0\to 0$, $\frac{\pi}{2}\to 1$, $\cos x = \frac{dt}{dx}$ 이므로 $\int_0^1 te^{at}dt$로 변형된다.

이는 앞서 구한 i)의 경우와 a, b만 뒤바뀐 것이므로 계산생략하고 $a=\frac{1}{2}$ OR -1

⇒ 그 때의 $a-b$의 값은 각각 $\frac{1}{2}$, -1이다.

㉠ $a-b$의 최솟값은 $\boxed{-1}$

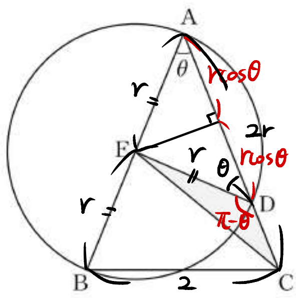
만든 놈: plancoach_team
crazy_hansuckwon (개인계정)
수만휘: 한석원의눈물

미분가능여부와 극대/극소 여부는 아무런 관계가 없다. ⊕ $|f(x)|$ 인데...나름 낚시인 듯

단답형

결국 또 수선, 코사인법칙 등등...

29. 그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{AC}$, $\overline{BC}=2$인 삼각형 ABC에 대하여 선분 AB를 지름으로 하는 원이 선분 AC와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 D라 하고, 선분 AB의 중점을 E라 하자. $\angle BAC=\theta$일 때, 삼각형 CDE의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $60\times\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta}$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$) [4점]



지름이 $\overline{AB}$이므로 중점인 E는 원의 중심이다.

STEP 1. $\overline{AE}=\overline{BE}=\overline{DE}=r$로 두면 $\triangle ADE$는 이등변$\triangle$이다.

$\therefore \angle EDA=\theta$

STEP 2. $\overline{DE}=r$, $\angle EDC=\pi-\theta$을 알고 있으므로 $S(\theta)$를 구하기 위해서는 $\overline{CD}$만 구하면 된다.

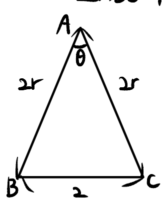
이 때 $\triangle ADE$가 이등변$\triangle$이므로 점 E에서 $\overline{AD}$에 내린 수선의 발을 H로 두면 $\triangle AEH$는 직각$\triangle$이고, $\overline{AH}=r\cos\theta$이다.

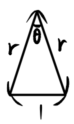
곧 $\overline{AD}=2\overline{AH}=2r\cos\theta$에서

$\overline{CD}=\overline{AC}-\overline{AD}$
$=2r-2r\cos\theta$이므로

$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{CD}\times\overline{DE}\times\sin(\pi-\theta)$
$=\frac{1}{2}\times2r(1-\cos\theta)\times r\sin\theta$
$=r^2(1-\cos\theta)\sin\theta$에서 r^2을 구하기 위해

$\triangle ABC$에 cos Law를 적용해보자.



: 

에 cos Law 적용해도 동일

$\Rightarrow 1^2=r^2+r^2-2r^2\cos\theta$이고 $r^2=\frac{1}{2(1-\cos\theta)}$이므로

$S(\theta)=\frac{1}{2(1-\cos\theta)}(1-\cos\theta)\sin\theta=\frac{1}{2}\sin\theta$

㉮ $60\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta}=30\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta}{\theta}$
$=\boxed{30}$

30. 두 정수 a, b에 대하여 함수

$$f(x)=(x^2+ax+b)e^{-x}$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $f(x)$는 극값을 갖는다.
> (나) 함수 $|f(x)|$가 $x=k$에서 극대 또는 극소인 모든 k의 값의 합은 3이다.

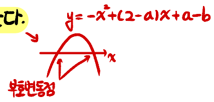
$f(10)=pe^{-10}$일 때, p의 값을 구하시오. [4점]

$f(x)$는 다항함수 × 지수함수이므로 미분가능함수이다.

(가) 조건에 의해 $y=f'(x)$의 부호변동점이 존재한다.

$\Rightarrow f'(x)=(2x+a)e^{-x}-(x^2+ax+b)e^{-x}$
$=(-x^2+(2-a)x+a-b)e^{-x}$에서 $e^{-x}>0$이므로

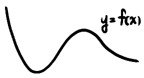
부호변동점은 $-x^2+(2-a)x+a-b$에서 발생한다.



$\therefore D>0$이고, 곧 $a^2+4>4b$이다.

① $\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+ax+b}{e^x}$에서 $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}=0+$이므로 $\lim_{x\to\infty}f(x)=0+$

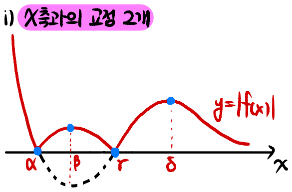
② $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{t\to\infty}(t^2-at+b)e^t=\infty$이고,

(가) 조건에서 극점이 총 2개이므로 

꼴임을 추론할 수 있다.

이때 $\lim_{x\to\infty}f(x)=0+$이므로 x축과의 관계에 따라 함수를 case 분류하면

i) x축과의 교점 2개



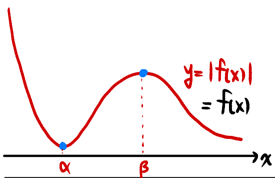
: α, r는 $f(x)=0$을 만족하는 두 근.
$\Rightarrow \alpha+r$는 근과 계수의 관계에 의해 $-a$
($\because x^2+ax+b=0$의 두 근)

β, δ는 $f'(x)=0$을 만족하는 두 근.
$\Rightarrow \beta+\delta$는 근과 계수의 관계에 의해 $2-a$
($\because -x^2+(2-a)x+a-b=0$의 두 근)

$\Rightarrow$ 조건 (나)에서 $\alpha+\beta+r+\delta=2-2a=3$ $\therefore a=(-\frac{1}{2})$

하지만 a는 정수이므로 모순이다.

ii) x축과의 교점 1개 OR 0개



: 이 경우 $f(x)<0$인 구간이 존재하지 않으므로 $|f(x)|=f(x)$이고 (나)를 만족시키는 지점 α, β는 근과계수의 관계에 의해 $\alpha+\beta=2-a=3$이다.

$\therefore a=-1$

다음 page

> * 확인 사항
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
> ○ 이어서, 「선택과목(기하)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

만든 놈: plancoach_team
crazy_hansuckwon
수만휘: 한석원의눈물 (개인계정)

30번 이어서

x축과의 교점이 없거나 1개라는 의미는 $y=x^2+ax+b$의 그래프와 x축 사이의 교점이 없거나 1개라는 뜻.

$\therefore$ $D\le 0$ 에서 $a^2-4b\le 0$이다.

$\Rightarrow$ 이 때, $a=-1$ 이므로 $1\le 4b$ 이고, 이를 앞서 (가) 조건 해석을 통해 구한 $a^2+4>4b$와 연립하면

$1\le 4b<5$, b는 정수이므로 $b=1$이다.

$\therefore$ $f(x)=(x^2-x+1)e^{-x}$ 이므로 ⊕ $f(10)=(100-10+1)e^{-10}$
$=91e^{-10}$

$\Rightarrow p=\boxed{91}$

만든 놈: plancoach_team
crazy_hansuckwon
수만휘: 한석원의 눈물 (개인계정)

제 2 교시

수학 영역(기하)

5지선다형

yz 평면?

23. 좌표공간의 두 점 A$(a, 0, 1)$, B$(2, -3, 0)$에 대하여 선분 AB를 $3:2$로 외분하는 점이 yz평면 위에 있을 때, a의 값은? [2점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

yz 평면 위: x좌표 0

A$(a,0,1)$, B$(2,-3,0)$에서
$\overline{AB}$ $3:2$ 외분점의 좌표 중 x좌표만 보면 된다.

→ $\dfrac{6-2a}{3-2}=0$ 이므로 ㉠ $a=\boxed{3}$

쌍곡선의 점근선

24. 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{27}=1$의 한 점근선의 방정식이 $y=3x$일 때, 이 쌍곡선의 주축의 길이는? (단, a는 양수이다.) [3점]

① $\dfrac{2}{3}$ ② $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{3}$ ⑤ 6

점근선의 방정식: $y=\pm\dfrac{3\sqrt{3}}{a}x$ $(a>0)$

이 두 직선 중 하나가 $y=3x$ 이므로 $a=\sqrt{3}$ 이다.

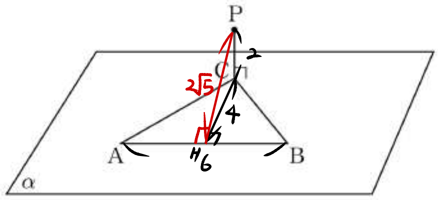
∴ ㉠ 주축의 길이: $2a=\boxed{2\sqrt{3}}$

만든 놈: plancoach_team
crazy_hansuckwon (개인계정)
수만휘: 한석원의눈물

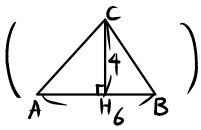
삼수선의 정리 기본유제

25. 평면 α 위에 $\overline{AB}=6$이고 넓이가 12인 삼각형 ABC가 있다. 평면 α 위에 있지 않은 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발이 점 C와 일치한다. $\overline{PC}=2$일 때, 점 P와 직선 AB 사이의 거리는? [3점]

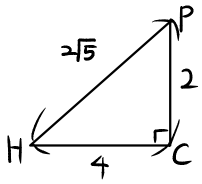
① $3\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{22}$ ④ $2\sqrt{6}$ ⑤ $\sqrt{26}$



$\triangle ABC$의 밑변이 6이고, 넓이가 12이므로
점 C에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H로 두면 $\overline{CH}=4$이다.



곧 삼수선의 정리에 의해 $\overline{PC}\perp\overline{AB}$, ($\because$ $\overline{AB}$가 속한 평면 α에 수직하므로)
$\overline{CH}\perp\overline{AB}$ 이므로 $\overline{PH}\perp\overline{AB}$ 이고, 이 때의 $\overline{PH}$이 구하는 값이다.



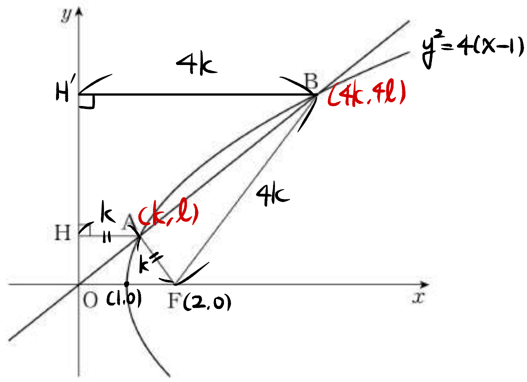
$\Rightarrow$ $\therefore$ ㉠ $\overline{PH}=\boxed{2\sqrt{5}}$

오랜만에 보는... 중심이 원점이 아닌 포물선

26. 그림과 같이 초점이 F(2, 0)이고 x축을 축으로 하는 포물선이 원점 O를 지나는 직선과 제1사분면 위의 두 점 A, B에서 만난다. 점 A에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$$\overline{AF}=\overline{AH},\ \overline{AF}:\overline{BF}=1:4$$

일 때, 선분 AF의 길이는? [3점]



① $\frac{13}{12}$ ② $\frac{7}{6}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{17}{12}$

$\overline{AH}=\overline{AF}$이므로 쌍곡선의 정의에 의해 y축이 이 포물선의 준선이고,
포물선의 꼭짓점은 $\overline{OF}$의 중점인 (1, 0)이다.

→ 포물선의 방정식: $y^2=4(x-1)$

$\overline{AH}=\overline{AF}=k$로 두면 점 A(k, l)이고, 점 B의 x좌표는 4k이다.
($\because$ $\overline{AF}:\overline{BF}=1:4$ 이므로 $\overline{BF}=4k$ 이고, 포물선의 정의에 의해 $\overline{BH'}=4k$)

이 때, 점 A와 B는 모두 원점을 지나는 직선 위의 점이므로 $\frac{\text{A의 y좌표}}{\text{A의 x좌표}}=\frac{\text{B의 y좌표}}{\text{B의 x좌표}}$ 이고, 곧 B(4k, 4l)

곧 A(k, l)이 $y^2=4(x-1)$ 위의 점이므로

① $l^2=4(k-1)$이 성립하고

B(4k, 4l)도 $y^2=4(x-1)$ 위의 점이므로

② $16l^2=4(4k-1)$도 성립한다.

→ ①과 ②를 연립하면 ㉠ $k=\boxed{\frac{5}{4}}$

만든 놈: plancoach_team
crazy_hansuckwon (개인계정)
수만휘: 한석원의눈물

교과서식 풀이 VS 그림그려서 상황파악

27. 사각형 ABCD가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 두 벡터 $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$는 서로 평행하다.
> (나) $t\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}$를 만족시키는 실수 t가 존재한다.

삼각형 ABD의 넓이가 12일 때, 사각형 ABCD의 넓이는? [3점]

① 16 ② 17 ③ 18 ④ 19 ⑤ 20

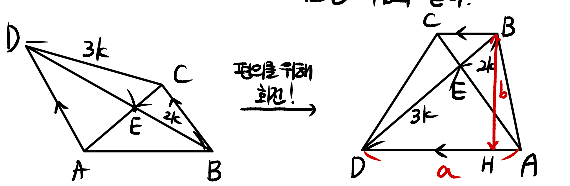
sol₁) (나)조건, 어디서 많이 본 형태? - 교과서적 풀이

(나) 조건의 양변을 5로 나누면 $\frac{t}{5}\overrightarrow{AC}=\frac{3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}}{5}$

→ $\overline{BD}$ 2:3 내분점과 관련 ⇒ E로 둔다.

⇒ $t\overrightarrow{AC}=5\overrightarrow{AE}$ 이므로 E는 $\overline{AC}$ 위의 점

주어진 조건에 따라 □ABCD를 그려보면 다음과 같다.



$\overline{AD}=a$, $\overline{BH}=b$로 두면 △ABD = 12에서 $ab=24$이다.

이 때 △ADE와 △CBE는 3:2 닮음이므로 $\overline{BC}=\frac{2}{3}a$

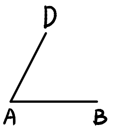
∴ $\square ABCD=\frac{1}{2}\times\left(a+\frac{2}{3}a\right)\times b$

$=\frac{5}{6}ab$

$=\boxed{20}$

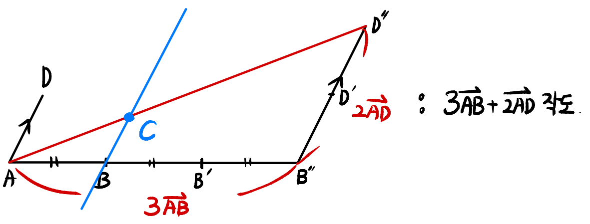
sol₂) 일단 그림을 그려보자.

STEP1.



: 조건 (나)에서 확실히 알고 있는 A, B, D 작도.
(해보면 알겠지만 ∠DAB가 둔각이어도 똑같다)

STEP2.

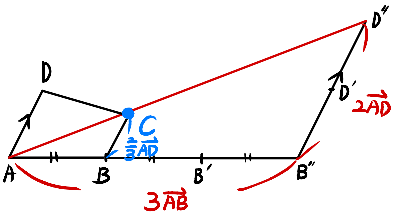


: $3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}$ 작도.

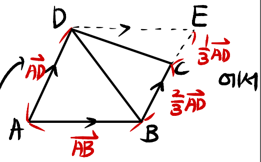
$\overrightarrow{AD}\,/\!/\,\overrightarrow{BC}$이므로 이 직선 위에 점 C 존재

⇒ $t\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD''}$ 이므로 점 C는 $\overline{AD''}$ 위의 점이고, 파란색 직선 위의 점이기도 하므로 표시된 위치에 점 C가 위치한다.

∴



⇒ △ABC와 △AB″D″는 1:3 닮음이므로 $\overrightarrow{BC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$



에서

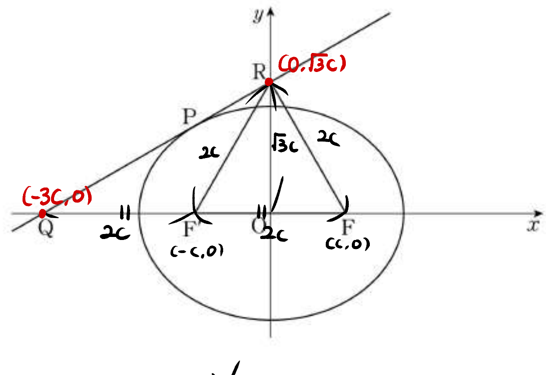
△ABD 넓이 = 12 이므로
□ABED 넓이 : 24이고,
△CDE $=\frac{1}{6}$□ABED 이므로

∴ $\square ABCD=24-\frac{1}{6}\times 24$

$=\boxed{20}$

기울기가 결정된 접선의 방정식

28. 그림과 같이 두 초점이 F$(c,0)$, F′$(-c,0)$ $(c>0)$인 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{18}=1$이 있다. 타원 위의 점 중 제2사분면에 있는 점 P에서의 접선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 Q, R이라 하자. 삼각형 RF′F가 정삼각형이고 점 F′은 선분 QF의 중점일 때, c^2의 값은? (단, a는 양수이다.) [4점]



① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

타원의 정의에 의해 $a^2=c^2+18$

△RF′F가 정△인데 $\overline{FF'}=2c$이므로 $\overline{F'R}=\overline{FR}=2c$이고, $\overline{RO}=\sqrt{3}c$이다.

∴ R$(0,\sqrt{3}c)$

또한, $\overline{QF}$의 중점이 F′이므로 $\overline{FF'}=2c$에서 $\overline{QF'}=2c$이다.

∴ Q$(-3c,0)$

직선 QR의 x절편과 y절편이 결정되었으므로 $\frac{x}{-3c}+\frac{y}{\sqrt{3}c}=1$ 로 쓸 수 있다.

⇒ QR: $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\sqrt{3}c$ (※ 특수각과 관련)

곧, 기울기가 결정된 접선의 방정식 공식을 쓰면 $\left(y=mx\pm\sqrt{m^2a^2+b^2}\right)$

$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x\pm\sqrt{\frac{1}{3}a^2+18}$ 인데 이 중 하나가 QR이므로

$\pm\sqrt{\frac{a^2}{3}+18}=\sqrt{3}c \xrightarrow{\text{양변 제곱}} \frac{a^2}{3}+18=3c^2$

⇒ $\frac{c^2+18}{3}+18=3c^2$ (∵ $a^2=c^2+18$)

⇒ $\frac{8}{3}c^2=24$

∴ $c^2=\boxed{9}$

만든 놈: plancoach_team
crazy_hansuckwon (개인계정)
수만휘: 한석원의눈물

단답형

두 정점과 수직을 이루는 점의 위치 : 원과 연관!

29. 좌표평면 위의 점 A(5, 0)에 대하여 제1사분면 위의 점 P가

$$|\overrightarrow{OP}|=2,\ \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AP}=0$$

을 만족시키고, 제1사분면 위의 점 Q가

$$|\overrightarrow{AQ}|=1,\ \overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{AQ}=0$$

을 만족시킬 때, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{PQ}$의 값을 구하시오.
(단, O는 원점이다.) [4점]

① $|\overrightarrow{OP}|=2$ 이므로 점 P는 원 $x^2+y^2=4$ 중 $x>0, y>0$인 점 (∵ 1사분면)

⇒ $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AP}=0$에서 $\overrightarrow{OP}$와 $\overrightarrow{AP}$는 수직이고,
이는 점 P가 $\overline{OA}$를 지름으로 하는 원 위의 점임을 의미한다.

⇒ 점 P는 $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2$ 위의 점

∴ 종합하면, $x^2+y^2=4$의 1사분면 부분과 $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2$의 교점이 P

⇒ 연립하면 $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2-5x=0$ 에서 $x=\frac{4}{5}$

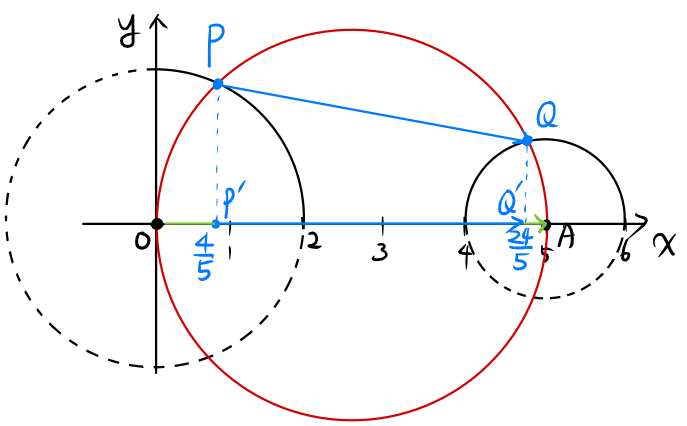
∴ $P\left(\frac{4}{5}, \square\right)$

② 동일한 논리로 Q도 해석해보면
$|\overrightarrow{AQ}|=1$ 이므로 점 Q는 원 $(x-5)^2+y^2=1$ 중 $y>0$인 점 (∵ 〃)
⇒ $\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{AQ}=0$에서 $\overrightarrow{OQ}$와 $\overrightarrow{AQ}$는 수직이고,
이는 점 Q가 $\overline{OA}$를 지름으로 하는 원 위의 점임을 의미한다.
⇒ 점 Q도 $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2$ 위의 점

∴ 종합하면, $(x-5)^2+y^2=1$의 1사분면 부분과 $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2$의 교점이 Q

⇒ 연립하면 $x^2+y^2-10x+24=0$, $x^2+y^2-5x=0$ 에서 $x=\frac{24}{5}$

∴ $Q\left(\frac{24}{5}, \triangle\right)$



곧 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{PQ}$은 $\overrightarrow{PQ}$을 $\overrightarrow{OA}$에 정사영해 $|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{PQ'}|$을 구하면 되므로

㉠ $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{PQ}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{P'Q'}|=5\times\left(\frac{24}{5}-\frac{4}{5}\right)$

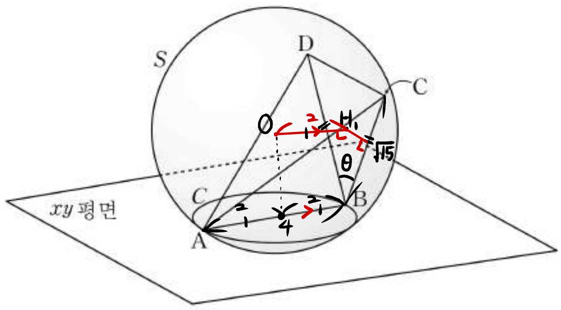
$=\boxed{20}$

고선은 이미 나와있고... 고선에 수직인 직선 나와있고... 남은 건?

30. 좌표공간에 구 $S: x^2+y^2+(z-\sqrt{5})^2=9$가 xy평면과 만나서 생기는 원을 C라 하자. 구 S 위의 네 점 A, B, C, D가 다음 조건을 만족시킨다.

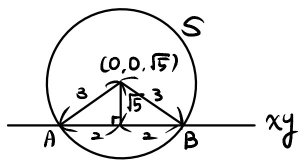
> (가) 선분 AB는 원 C의 지름이다.
> (나) 직선 AB는 평면 BCD에 수직이다.
> (다) $\overline{BC}=\overline{BD}=\sqrt{15}$

삼각형 ABC의 평면 ABD 위로의 정사영의 넓이를 k라 할 때, k^2의 값을 구하시오. [4점]



평면의 다른 평면 위로의 정사영 : "두 평면이 이루는 각"을 찾는게 중요!
고선에 수직으로 내린 두 직선이 이루는 각

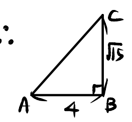
우선, $x^2+y^2+(z-\sqrt{5})^2=3$이 xy평면과 만나는 상황은



이므로 원 C는 반지름의 길이가 2인 원이다.

이 때 $\overline{BC}=\overline{BD}=\sqrt{15}$ 이므로 $\triangle BCD$는 이등변$\triangle$이고,
$\overline{AB}$가 평면 BCD와 수직이므로 $\overline{AB}$는 평면 BCD 위의 모든 직선과 수직이다.
⇒ $\overline{AB}\perp\overline{BC}$ 이므로 $\triangle ABC$는 직각$\triangle$이다.

∴



에서 $\triangle ABC=\frac{1}{2}\times4\times\sqrt{15}$
$=2\sqrt{15}$

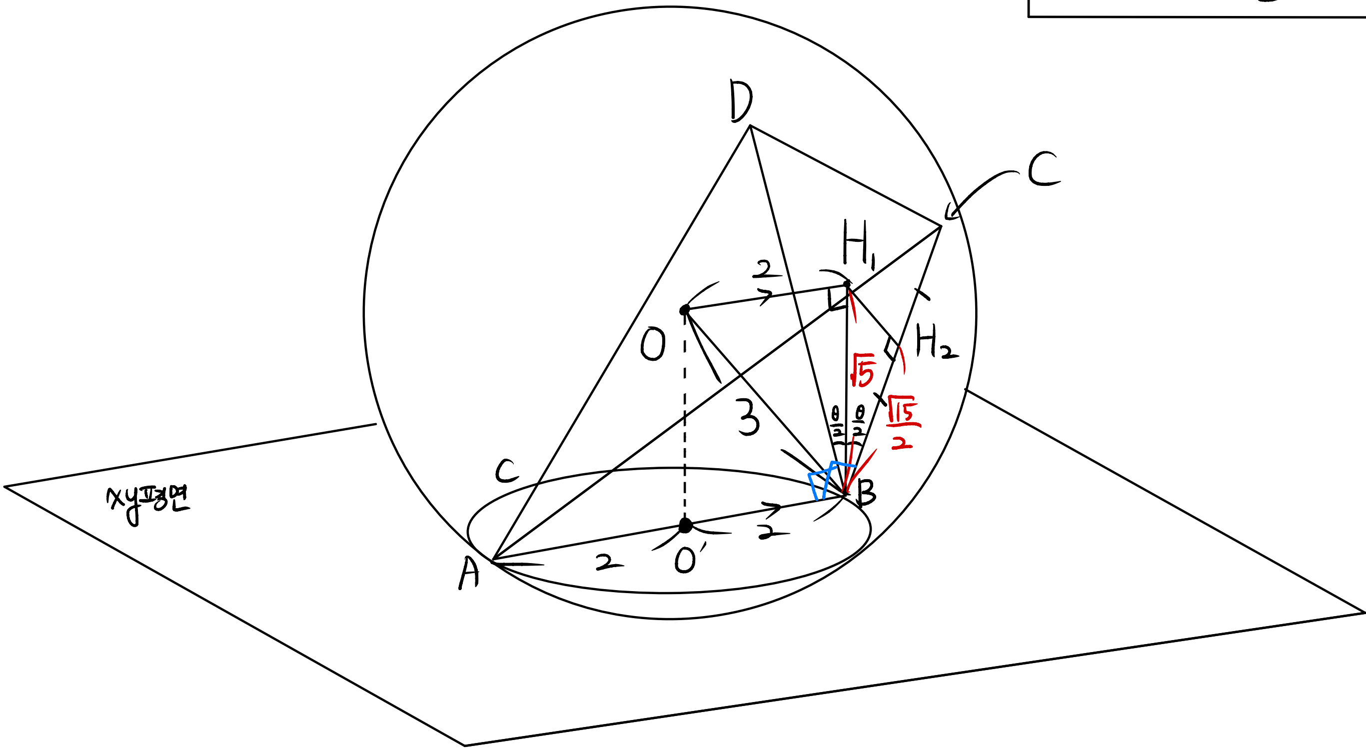
이제 평면 ABC와 평면 ABD 사이의 이면각을 구해야 하는데,
동일한 논리로 $\overline{AB}\perp\overline{BD}$ 이므로 우리는 고선에 수직인 두 직선이 각각 $\overline{BC}$, $\overline{BD}$ 라는 것을 안다.
⇒ $\angle CBD=\theta$ (이면각)

다음 page

> * 확인 사항
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

만든 놈: plancoach_team
crazy_hansuckwon (개인계정)
수만휘: 한석원의눈물

30번 이어서



이때, 원 C 의 중심을 O′로 두면 $\overline{O'B}=2$ 이고,

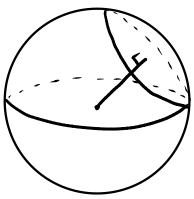
점 O에서 △BCD에 내린 수선의 발을 H_1로 두면 $\overline{O'B} // \overline{OH_1}$ 에서 $\overline{OH_1}=\overline{O'B}=2$ 이다.

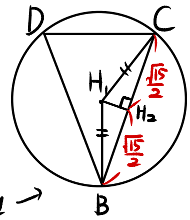
∴ 직각△ △OH_1B에서 $\overline{OB}=3$ (∵ 반지름) 이므로 $\overline{BH_1}=\sqrt5$이다.

(또는 그냥 $\overline{OO'} // \overline{BH_1}$, $\overline{O'B} // \overline{OH_1}$에서 $\overline{BH_1}=\overline{OO'}=\sqrt5$)

이제 $\angle H_1BC=\frac{\theta}{2}$의 삼각비를 구하기 위해 점 H_1에서 $\overline{BC}$에 수선의 발을 내리고 H_2로 두면

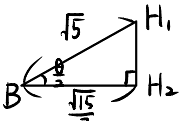
$\overline{BH_2}=\overline{CH_2}=\frac{\sqrt{15}}{2}$ 이다.

(∵  처럼, 구의 중심에서 구 위의 점들로 이루어진 원에 수선의 발을 내리면 원의 중심으로 떨어진다.

곧, △BCD의 외접원을 생각하면 점 H_1는 외접원의 중심이고, 곧 

이다.

△BCD의 외접원)

곧 △BH_1H_2에서 

⇒ $\cos\frac{\theta}{2}=\frac{\sqrt3}{2}$ 이므로 $\frac{\theta}{2}=\frac{\pi}{6}$ 이고, $\theta=\frac{\pi}{3}$이다.

∴ $k=(\triangle ABC$의 넓이$)\times\cos\theta = 2\sqrt{15}\times\cos\frac{\pi}{3}=\sqrt{15}$ 이므로 ㉠ $k^2=\boxed{15}$