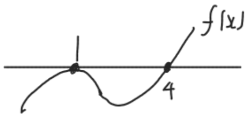
단답형

20. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\geq 0) \\ f(3)-f(x) & (f(x)<0) \end{cases}$이라 하자. $\lim_{x\to 1} g(x)=g(1)-4$, $g(4)=\lim_{x\to 4+} g(x)\neq \lim_{x\to 4-} g(x)$일 때, $g(5)$의 값은?

i) $\begin{cases} f(1)=0,\ f(4)=0 \\ f(3)=-4 \end{cases}$



$\therefore f(x)=(x-1)^2(x-4)$

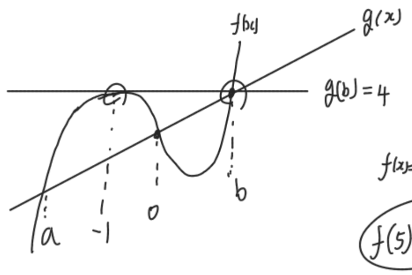
$g(5)=16$

22. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1인 일차함수 $g(x)$에 대하여 x에 대한 방정식 $f'(x)(x-t)+g(t)=f(x)$의 서로 다른 실근의 개수를 $h(t)$라 하자. 세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$가 다음 조건을 만족한다.

> (가) 방정식 $f(x)=g(x)$는 서로 다른 세 실근 $a, 0, b$ $(a<0<b)$를 갖는다.
>
> (나) $h(t)$는 $t=a, b$에서만 불연속이다.
>
> (다) 방정식 $f(x)=g(b)$가 서로 다른 두 실근을 가질 때, $f(-1)=g(b)=4$이다.

$f(5)$의 값을 구하시오.

i) $f'(x)=\dfrac{f(x)-g(t)}{x-t}$ $\Rightarrow$ $(x, f(x))$ 와 $(t, g(t))$ 이은 기울기가 $f'(x)$



$f(x)=(x+1)^2(x-2)+4$

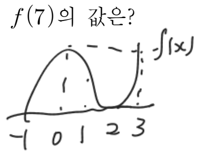
$f(5)=112$

20. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족한다.

(가) $f(x)=f(t)$의 서로 다른 모든 실근의 합이 $t=-1, t=2$에서만 불연속이다.
(나) $f(3)=0$

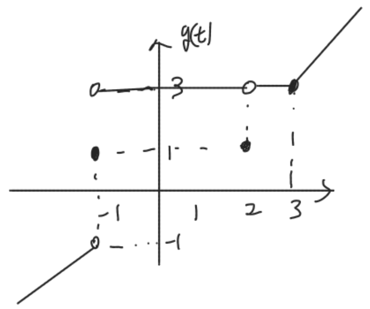
$\Downarrow$ $g(t)$

$f(7)$의 값은?



$f(x)=x^2(x-3)$

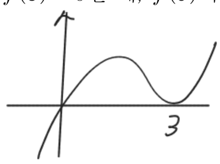
$f(7)=196$



20. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x_1 \le 0 \le x_2$인 모든 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1) \le 0 \le f(x_2)$를 만족시킨다.
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) \ge -3$이다.

$f(3)=0$일 때, $f(5)$의 최댓값은?



$f(x)=x(x-3)^2$ 일때 $f(5)$ 최대

$f(5)=20$

20. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$는 다음과 같다.

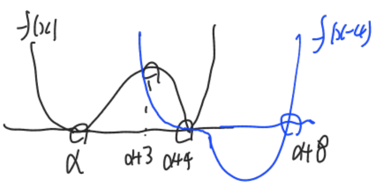
$$g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}\times f(x-4)$$

이때, 함수 $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
(나) x에 대한 방정식 $g(x)=0$의 실근을 작은 순서대로 x_1, x_2, x_3, x_4라 하면 x_1, x_2, x_3, x_4는 모두 정수이고 그 합은 11이다.

$f(5)$의 값을 구하시오.

i)



$4\alpha+15=11$

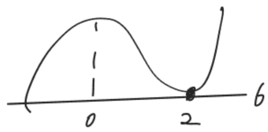
$\alpha=-1$

$f(x)=(x+1)^3(x-3)$

$\boxed{f(5)=432}$

19. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(x)=x^3+x^2+10$, $g(x)=4x^2+k$이다. $x\geq 0$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq g(x)$를 만족시킬 때, k의 최댓값을 구하시오.

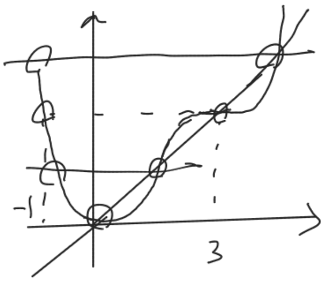
$x^3-3x^2+10\geq k$



6

22. 최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$에 대하여 [redacted]이다. 방정식 $f(f(x))=f(x)$가 서로 다른 7개의 실근을 갖는다. 이 7개의 실근을 작은 것부터 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_7$라고 하자. $a_2=-1,\ a_6=3$이고 $f'(a_5)>0,\ f'(a_6)=0$이다. $f(x)=0$의 실근은 0 뿐이다. [redacted]의 값을 구하시오.

$\boxed{f(6)}$



$\frac{1}{9}(x+1)(x-3)^3+3$

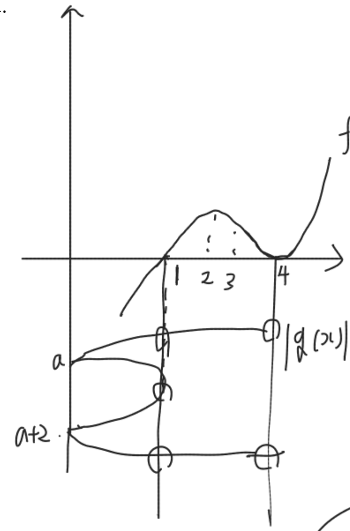
$f(6)=24$

20. 두 함수 $f(x),\ g(x)$에 대하여 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고 $g(x)=(x-a)(x-b)$이다. $h(x)=|g(x)|$라 하자. 방정식 $f(h(x))=0$의 서로 다른 실근의 개수는 5개이다. 이때 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(x)$의 최솟값은 -1이다.
(나) 함수 $f'(x)$는 $x=3$에서 음수인 최솟값을 갖는다.

$f'(2)=0$이고 $g(f(2))=g(f(3))=0$일 때, $g(6)$의 값을 구하시오.

$f(x)=(x-1)(x-4)^2$



$f(2)=4$
$f(3)=2$

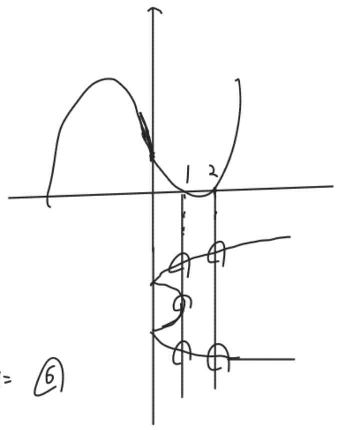
$g(x)=(x-2)(x-4)$

$g(6)=8$

20. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 최솟값이 -1인 이차함수 $g(x)$에 대하여 $\lim_{x \to 2}\left\{\frac{1}{x-2}\int_{|g(a)|}^{x} f'(t)\,dt\right\} = f'(-2)$

를 만족하는 실수 a의 개수가 5일 때, $\int_0^3 f'(x)\,dx$의 값을 구하시오.

$$\begin{cases} f(2) = f(|g(a)|) \\ f'(2) = f'(-2) \end{cases}$$



$f(x) = x^3 - kx + c$

$f(1) = f(2) \quad \cdots \quad k = 7$

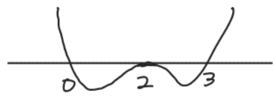
$f(3) - f(0) = 27 - 21 = 6$

20. 최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$와 삼차함수 $g(x)$에 대하여 $h(x) = f(x) + g(x)$이다. 이때 세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

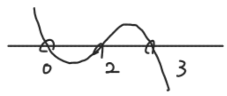
> (가) 세 방정식 $f(x)=0$, $g(x)=0$, $h(x)=0$은 모두 세 실근 0, 2, 3만을 갖는다.
> (나) $h'(2) > 0$
> (다) $f'(3) = 2$

$f'(0) < 0$일 때, $h(5)$의 값을 구하시오.

$f(x)$

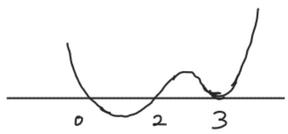


$g(x)$



$h(x) = \frac{2}{3}x(x-2)(x-3)^2$

+



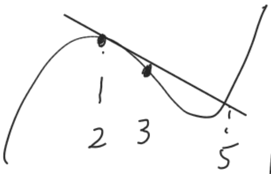
$h(5) = 40$

22. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족한다.

> (가) $x \neq 3$인 모든 실수 x에 대하여
> $f(g(x)) = f(x) + f'(x)(g(x) - x)$
> (나) 방정식 $g(x) = x$의 실근은 3뿐이다.
> (다) $f'(x)$의 최솟값은 -3이고, $f(3) = 3$이다.

$g(2) + f(5)$의 값을 구하시오.

$g(x) \neq x$ 일때 $\dfrac{f(g(x)) - f(x)}{g(x) - x} = f'(x)$



$f(x) = (x-3)^3 - 3x + 12$

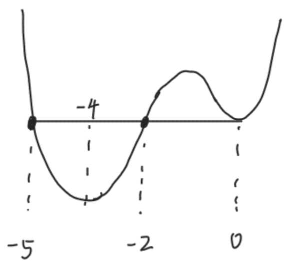
$g(2) = 5$
$f(5) = 5$

10

20. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$와 상수 k에 대하여 구간 $(-\infty, t]$에서 함수 $f(x)$의 최솟값을 m_1, $[t, \infty)$에서 함수 $f(x)$의 최솟값을 m_2라 하고, $g(t) = |m_1 - m_2|$라 하자. 이때 함수 $g(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

> $g(t) = k$를 만족하는 모든 실수 t의 집합은
> $\{t \mid t = -5$ 또는 $-2 \leq t \leq 0\}$이다.

$f(0) = 0$일 때, $k + f(3)$의 값은?



$f(x) = x^2(x+2)(x+5)$
$f'(x) = 4x^3 + 21x^2 + 20x$
5
4
4
1

$f(-4) = -32$ ‥ $k = 32$ ‥ ①
$f(3) = 360$ ‥ ②

392

수학 영역

12. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $g(x)=\int_0^x |f'(t)|\,dt-x$이다. 이때, 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족한다.

> (가) 상수 k에 대하여 함수 $|g(x)-k|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
> (나) 모든 실수 x에 대하여 $g(4-x)=-g(x)$이다. $+2k$

$g(2)$의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

$g(x) \Rightarrow (2, k)$ 대칭

$g'(x)=|f'(x)|-1$

$\hookrightarrow 3(x-2)^2+1$

$g(x)=(x-2)^3+8$

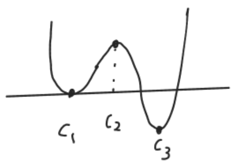
$g(2)=8$

$\boxed{4번}$

22. 최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$에 대하여 방정식 $f(x)=f(t)$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, 두 함수가 다음 조건을 만족한다.

> (가) $\lim_{t\to c} g(t) > g(c)$인 실수 c의 개수는 3이고, 이를 작은 수부터 크기순으로 나열하면 c_1, c_2, c_3이다.
> (나) $\sum_{n=1}^{3} c_n = 9$이고, c_1, c_2, c_3는 모두 자연수이다.
> (다) 함수 $|f(x)-f(c_1)|$는 $x=a$와 $x=b$에서만 미분가능하지 않다.

c_2+c_3를 구하시오.



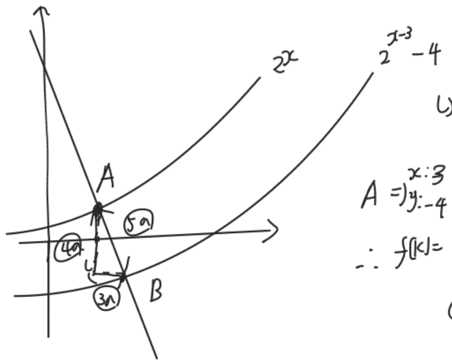
$(c_1,\ c_2+c_3)$

$\Rightarrow$ $(1, 8) \Rightarrow \underline{c_2=2,\ c_3=6}$ 만 가능

$(2, 7) \Rightarrow c_2=3,\ c_3=4$ 간격 같음 (X)

$\boxed{8}$

9. 실수 k에 대하여 직선 $y=-\frac{4}{3}x+k$가 두 곡선 $y=2^x$, $y=2^{x-3}-4$와 만나는 두 점 사이의 거리를 $f(k)$라 할 때, $f(0)+f(3)+f(9)$의 값은?



ㄴ) $\begin{cases} x \to 3 \\ y = -4 \end{cases}$

A $\Rightarrow$ $x:3$, $y:-4$ 이동 B

$\therefore f(k)=5$

15