2024학년도 뫼비우스 모의고사

4점 해설 영상

수 I

9번 해설

〈09번 해설〉

12번 해설

〈12번 해설〉

14번 해설

〈14번 해설〉

20번 해설

〈20번 해설〉

21번 해설

〈21번 해설〉

수 II

10번 해설

〈10번 해설〉

11번 해설

〈11번 해설〉

13번 해설

〈13번 해설〉

15번 해설

〈15번 해설〉

22번 해설

〈22번 해설〉

미적분

28번 해설

〈28번 해설〉

29번 해설

〈29번 해설〉

30번 해설

〈30번 해설〉

2024학년도 뫼비우스 모의고사

정답 및 해설

1	2	3	4	5	6	7	8
④	②	①	③	②	⑤	②	③
9	10	11	12	13	14	15	16
①	①	③	②	④	⑤	③	10
17	18	19	20	21	22		
18	30	63	2	10	108		
23	24	25	26	27	28	29	30
②	③	④	⑤	⑤	③	45	38

공통(수Ⅰ+수Ⅱ)

1. **출제 의도** : 지수법칙을 이용하여 값을 계산할 수 있는가?

정답풀이:

$\left(\dfrac{27}{3^{2\sqrt{2}}}\right)^{2\sqrt{2}+3}$

$=\left(3^{3-2\sqrt{2}}\right)^{3+2\sqrt{2}}$

$=3^{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})}$

$=3^{9-8}=3$

정답 ④

2. **출제 의도** : 주어진 조건을 이용하여 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이:

최고차항의 계수가 2이고 $f(1)=1$이므로

$f(x)=2(x-1)(x-a)+1$

$f'(x)=2(2x-1-a)$

$f'(1)=2(1-a)=1$

$\therefore\ a=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ f(x)=2(x-1)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)+1$

$f(2)=3+1=4$

정답 ②

3. **출제 의도** : 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이:

$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$이고, $\tan(\pi+\theta)=\tan\theta$이므로

$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)\tan(\pi+\theta)=\cos\theta\tan\theta$

$=\cos\theta\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\sin\theta=\dfrac{1}{5}$

$\cos\theta<0$이므로 $\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}$가 된다.

$\therefore\ \cos\theta=-\sqrt{1-\dfrac{1}{25}}=-\sqrt{\dfrac{24}{25}}=-\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$

정답 ①

4. **출제 의도** : 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이:

$\lim\limits_{x\to1-}f(x)=0,\ \lim\limits_{x\to2}f(x)=3$이므로

$\lim\limits_{x\to1-}f(x)+\lim\limits_{x\to2}f(x)=0+3=3$

정답 ③

5. **출제 의도** : 합의 기호 Σ의 성질과 등차중항을 이해하여 주어진 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이:

$(a_3+a_5)+\sum\limits_{k=1}^{3}(2a_k+1)$

$=2a_4+2\sum\limits_{k=1}^{3}a_k+3$

$=2\sum\limits_{k=1}^{4}a_k+3=39$

$\therefore\ \sum\limits_{k=1}^{4}a_k=18$

정답 ②

6. **출제 의도** : 주어진 함수를 미분하여 극값을 구할 수 있는가?

정답풀이:

$f(x)=x^3-3x^2-9x+k$에서

$f'(x)=3x^2-6x-9$

$\quad=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=3$이고

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이므로 $a=-1$이고
극댓값 $b=f(-1)$
$=-1-3+9+k$
$=5+k$이다.
비슷하게 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극소이므로 $c=3$이고
극솟값 $d=f(3)$
$=27-27-27+k$
$=-27+k$이다.
따라서
$a+b+c-d$
$=-1+(5+k)+3-(-27+k)$
$=34$

정답 ⑤

7. **출제 의도** : 지수와 로그의 성질을 이용하여 주어진 조건을 만족하는 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$5^b=10^c=k$에서 $5=k^{\frac{1}{b}}, 10=k^{\frac{1}{c}}$

$k^{\frac{1}{c}} \div k^{\frac{1}{b}} = k^{\frac{1}{c}-\frac{1}{b}} = k^{\frac{b-c}{bc}} = 10 \div 5 = 2$

즉, $\log_k 2 = \dfrac{b-c}{bc}$

$\therefore\ \dfrac{k}{bc}(b-c)=k\log_k 2$

$\log_2 a = k$에서 $a=2^k$, $\log_k a = 8$이므로

$\therefore\ k\log_k 2 = \dfrac{k}{bc}(b-c)=8$

정답 ②

8. **출제 의도** : 정적분을 이해하고 이를 이용하여 주어진 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\int_0^2 f(t)\,dt = k$ (k는 상수) $\cdots$ ㉠

라 하면 $f(x)=9x^2+2kx$이다.
이것을 ㉠에 대입하면

$\int_0^2 (9x^2+2kx)\,dx$

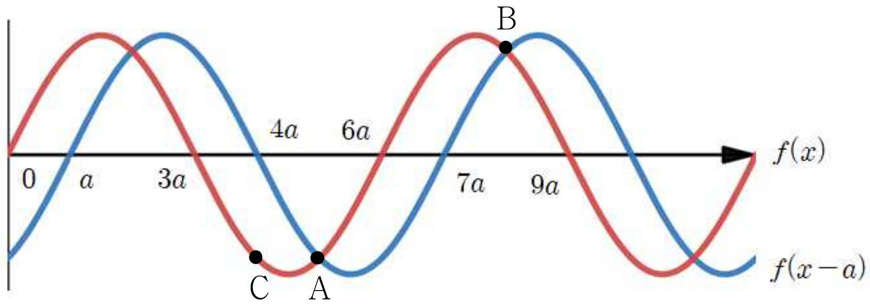
$=\left[3x^3+kx^2\right]_0^2=24+4k=k$

$\therefore\ k=-8$
따라서
$f(x)=9x^2-16x$ 이므로
$f(-1)=9+16=25$

정답 ③

9. **출제 의도** : 사인 함수 그래프의 특징을 이용하여 $\triangle$ABC의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :
닫힌구간 $[a, b]$ 에서 양수 a에 대하여 $f(x)$와 $f(x-a)$의 그래프를 그리고, 조건에 맞게 점 A, B, C를 표시하면 다음과 같다.



점 A를 지나고 x축과 평행한 직선과 점 B를 지나고 y축에 평행한 직선이 만나는 점을 H라고 하자.

$\angle CAB = \dfrac{3}{4}\pi$이므로 $\angle BAH = \dfrac{\pi}{4}$이다.

따라서 $\triangle$BAH는 직각이등변삼각형이고, $\overline{AH}=\overline{BH}$이다.

사인 함수 그래프의 특징에 의해 $f(4a)=f(5a)$ 이므로
점 A의 x좌표는 $5a$이다.
비슷한 방법으로 점 B의 x좌표는 $8a$이다.
따라서 $A(5a,-k)$, $B(8a,k)$, $H(8a,-k)$로 나타낼 수 있다.
(k는 유리수)

$\overline{AH}=\overline{BH}$ 이므로 $3a=2k$
$f(x-a)=g(x)$이면, $g(8a)=k$이다.

$g(8a)=f(7a)$

$=\sin\left(\dfrac{\pi}{3a}\times 7a\right)$

$=\sin\dfrac{7\pi}{3}$

$=\sin\dfrac{\pi}{3}$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$k=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$이므로 $a=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

따라서 $\triangle$ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times a\times 3a$

$=\dfrac{1}{2}\times 3a^2$

$=\dfrac{1}{2}\times 3\times\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$

$=\dfrac{1}{2}$

정답 ①

10. **출제 의도** : 주어진 함수 위 한 점에서 그은 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이:

주어진 함수를 x에 대해 미분하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$이므로

$x=t$에서 접선의 기울기는 $3t^2+2at+b$

$x=t$에서 y좌표는 $f(t)=t^3+at^2+(b+1)t$

따라서 $x=t$에서의 접선의 방정식은

$y=(3t^2+2at+b)(x-t)+t^3+at^2+(b+1)t$

$=(3t^2+2at+b)x-2t^3-at^2+t$

이므로

$g(t)=-2t^3-at^2+t$

함수 $g(t)$가 $t=1$에서 극댓값을 가지므로 $g'(1)=0$

$g'(t)=-6t^2-2at+1$, $g'(1)=-2a-5=0$

$\therefore\ a=-\dfrac{5}{2}$

따라서 $g(t)=-2t^3+\dfrac{5}{2}t^2+t$

$g(1)=-2+\dfrac{5}{2}+1=\dfrac{3}{2}$

정답 ①

11. **출제 의도** : 주어진 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$를 구할 수 있는가?

정답풀이:

주어진 식을 인수분해하면

$\{f(x)\}^2-(x-1)(x-2)|f(x)|+(x-1)^2(x-3)$

$=\{|f(x)|-(x-1)(x-3)\}\{|f(x)|-(x-1)\}=0$

이므로

$\therefore\ |f(x)|=(x-1)(x-3)$ 또는 $|f(x)|=x-1$

함수 $f(x)$의 절댓값 $|f(x)|$에 대하여

$|f(x)|\geq 0$이고

$f(x)$가 연속이므로 $|f(x)|$ 또한 연속이다.

이때, $|f(x)|$의 그래프는

특정 구간에서마다

$y=(x-1)(x-3)$ 또는 $y=x-1$

두 개의 식 중,

위의 조건을 만족시키는 것을 선택해서 그려야 한다.

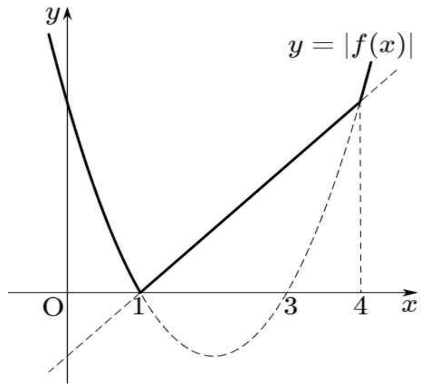
또한, $f(x)$의 극댓값이 존재하므로

$|f(x)|$는 극대 또는 극소를 갖는다.

위의 모든 조건을 만족시키고

$f(x)$가 두 점에서 미분가능하지 않도록 하는 $|f(x)|$는 다음과 같다.

$|f(x)|=\begin{cases}(x-1)(x-3) & (x<1 \text{ or } 4<x)\\ x-1 & (1\leq x\leq 4)\end{cases}$

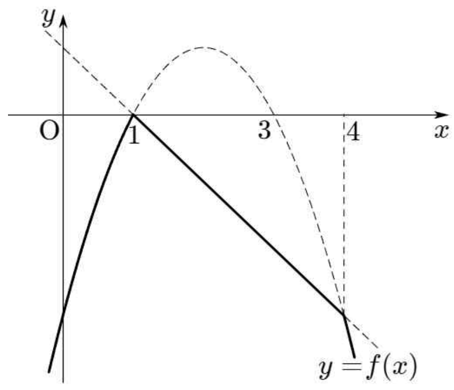


이때, $f(x)$는 극대를 가져야 하므로

$\therefore\ f(x)=-|f(x)|$

따라서 함수 $f(x)$는 다음과 같다.

$f(x)=\begin{cases}-(x-1)(x-3) & (x<1 \text{ or } 4<x)\\ -x+1 & (1\leq x\leq 4)\end{cases}$



따라서

$f(x)$에 $x=0$, $x=2$, $x=5$를 각각 대입하면

$f(0)+f(2)+f(5)$

$=-3+(-1)+(-8)$

$=-12$

정답 ③

12. **출제 의도** : 귀납적으로 정의된 수열의 합의 주어진 항을 구할 수 있는가?

정답풀이:

(다)에서 $a_n=S_n-S_{n-1}$ 형태로 바꾸면

$a_2=-2(a_1+a_3)$

$S_2-S_1=-2(S_1+S_3-S_2)$이고 전개 후 정리하면

$S_3=\dfrac{S_2-S_1}{2}$

(나)에서 $S_2=7$이고,

(i) $S_4=7$일 때

$S_3+S_2=2k$일 경우, $S_3=21$, $S_1=-35$

S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
-35	7	21	7	-7
a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
-35	-28	49	-42	-14

이때 $|a_5-a_1|=21$

$S_3+S_2=2k+1$일 경우, $S_3=0$, $S_1=7$

S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
7	7	0	7	0
a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
7	0	-7	14	-7

이때 $|a_5-a_1|=14$

(ii) $S_4=-9$일 때

$S_3+S_2=2k$일 경우, $S_3=-11$, $S_1=29$

S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
29	7	-11	-9	1
a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
29	-22	-18	2	10

이때 $|a_5-a_1|=19$

$S_3+S_2=2k+1$일 경우, $S_3=16$, $S_1=-25$

S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
-25	7	16	-9	16
a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
-25	32	9	-25	25

이때 $|a_5-a_1|=50$

따라서 모든 경우에서

$|a_5-a_1|$의 최댓값 M은 50, 최솟값 m은 14

$\therefore\ M+m=50+14=64$

정답 ②

13. **출제 의도** : 속도를 이용하여 점의 위치를 구할 수 있는가?

정답풀이:

조건 (가)에서 $v(3)=0$이고

$v(t)$는 점 $(3,0)$에 대해 점대칭인 것을 알 수 있다.

이때, $v(t)=at^3+bt^2+ct$

$v(0)=0$이므로

점대칭에 의해 $v(6)=0$

$\therefore\ v(t)=at(t-3)(t-6)$ (a는 상수)

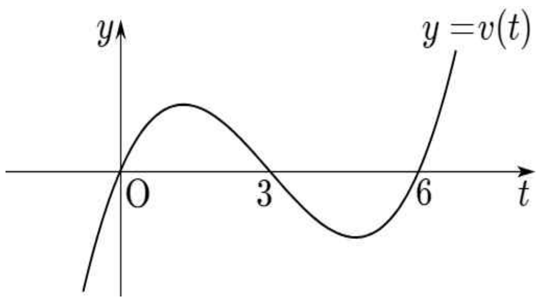
조건 (나)에 $t=1$을 대입하면 $v(1)=10$이고

$v(t)$에 대하여 $v(1)=10a$이므로 $a=1$이다.

따라서 $v(t)=t(t-3)(t-6)$

$=t^3-9t^2+18t$

이고 $y=v(t)$의 그래프는 다음과 같다.



시각 $t=0$일 때 점 P가 원점에서 출발했으므로

시각 $t=7$일 때의 점 P의 위치는

$0+\int_0^7 v(t)dt$

$=\int_0^7 (t^3-9t^2+18t)dt$

$=\left[\frac{1}{4}t^4-3t^3+9t^2\right]_0^7$

$=\left[\frac{1}{4}t^4-3t^3+9t^2\right]_6^7$

$=-\left[\frac{1}{4}t^4-3t^3+9t^2\right]_{-1}^0$

$=-\left\{-\left(\frac{1}{4}+3+9\right)\right\}$

$=\frac{49}{4}$

이다.

$\therefore\ p=4$, $q=49$이므로

$p+q=53$

(※ 이때, 문제에 제시된 대로 원칙상 $t\geq 0$이어야 하지만 식과 그래프의 관점에서 다음과 같이 계산해도 정답을 구하는 데 문제가 없고, 계산상의 편의를 고려했을 때 시간 관리가 요구되는 실제 시험에서는 이러한 풀이가 유리하다)

정답 ④

14. **출제 의도** : 지수함수 점근선의 성질을 알고 있는가? 구간별로 정의된 삼각, 지수함수의 그래프를 이해하고 주어진 구간 내에서 지수함수의 평행이동을 통한 함숫값의 변화를 관찰할 수 있는가?

정답풀이:

a_n, b_n의 의미를 파악하자.

먼저 $a_n := \{n(a)\,|\,f(a)\in\{1,3,5\}, a$는 실수$\}$

즉, $y=f(x)$와 $y=1$, $y=3$, $y=5$가 만나는 교점의 개수를 의미한다.

마찬가지로 b_n은 $y=f(x)$와 $y=2$, $y=4$가 만나는 교점의 개수이다.

이제 함수 $f(x)$의 정의역에 주의하면서 n의 값의 변화에 따른 교점 개수를 파악하자. 사실 n의 영향을 받지 않는 그래프 모양의 교점을 먼저 세는 것이 합리적인데 이는

만나는 점의 고정된 개수를 알 수 있기 때문이다.
그 후에는 고정된 점의 개수에 지수함수의 평행이동에 따른 교점의 개수만 더해주면 된다.

n의 값에 관계없이 $y=f(x)$와 $y=1$, $y=3$, $y=5$가 만나는 교점의 개수는 $y=3|\sin(2\pi x)|-2\sin(2\pi x)$ 의 제한된 정의역에서의 그래프와 $y=1$, $y=3$, $y=5$가 만나는 교점의 개수와 같다.(24개)
n의 값에 관계없이 $y=f(x)$와 $y=2$, $y=4$ 가 만나는 교점의 개수는 $y=3|\sin(2\pi x)|-2\sin(2\pi x)$의 제한된 정의역에서의 그래프와 $y=2$, $y=4$가 만나는 교점의 개수와 같다.(16개)

다음으로 n의 값에 관계되는 그래프인 $y=-2^{x-\frac{n}{2}}+n$의 특징을 파악해야 한다.
이 함수의 특징은 먼저 점근선이 존재하고 정의역 전구간에서 감소함수라는 것이다. 관찰할 것은 5 이하의 자연수와 만나는 그래프 교점이기 때문에 이는 매우 중요한 사실이다.

두 번째, n이 1씩 커질 때 그래프는 x축으로 $+\frac{1}{2}$만큼, y축으로 $+1$만큼 평행이동을 한다. 이 두 사실을 종합할 때 $n=5$일 때부터 구하는 것이 합리적이다. (많은 경우의 수에서 적은 경우의 수로 나아갈 수 있는 방법이다.)

$n=5$일 때, $y=-2^{x-\frac{5}{2}}+5$ 의 값이 5 이하의 자연수가 되는 순서쌍 집합
$(x, y):=\{(2.5, 4), (3.5, 3), (2.5+\log_2 3, 2), (4.5, 1)\}$ 에서 $2k \le x \le 2k+1$ (k는 정수)를 만족하는 순서쌍은 $(2.5, 4)$, $(2.5+\log_2 3, 2)$, $(4.5, 1)$이다.
즉, $a_5=24+1=25$, $b_5=16+2=18$
$n=4$일 때, 이제 순서쌍을 평행이동하기만 하면 된다.
심지어 경우의 수는 점근선과 y값의 자연수 조건에 의해 더 빠르게 줄어든다. y가 자연수가 되는 순서쌍 집합 $(x, y):=\{(2, 3), (3, 2), (2+\log_2 3, 1)\}$에서 x의 범위를 만족하는 순서쌍은 $(2, 3)$, $(3, 2)$이다.
$a_4=24+1=25$, $b_4=16+1=17$
똑같은 방법으로 5 이하의 자연수 n에 대하여 a_n, b_n의 값을 구하면 아래의 표와 같다.

n	1	2	3	4	5
a_n	24	25	25	25	25
b_n	16	16	16	17	18
$2b_n-a_n$	8	7	7	9	11

$\therefore \displaystyle\sum_{n=1}^{5}(2b_n-a_n)=42$

정답 ⑤

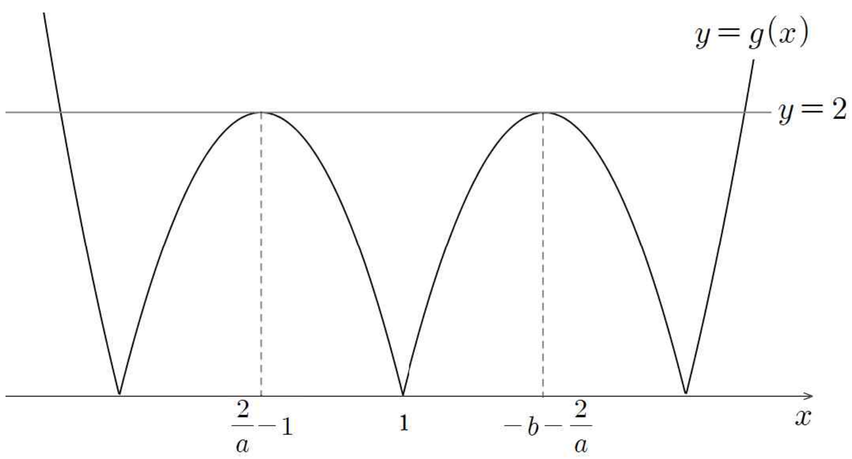
15. **출제 의도** : 이차함수의 대칭성을 고려하여 그래프의 개형을 찾고 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이:
$g(x)=|f(x)+4x-4|$ 라 하면
$f(x)$가 연속함수이므로 $g(x)$도 연속함수이다.
또한 $f(x)$는 구간에 따라 다르게 정의되었지만, 최고차항 계수의 절댓값이 $|a|$로 동일하다.
따라서 $f(x)$는 같은 폭을 가진 두 이차함수 그래프를 평행이동과 대칭이동을 이용하여 적절히 변형한 후 $x=1$을 기점으로 연결한 그래프로 이해할 수 있다.

이제 $g(x)=k$를 만족하는 서로 다른 실근의 합이 6이 되도록 하는 구간이 존재함에 집중하자.
조건을 만족하는 구간이 $0<k<2$ 한 개로 제한되어 있으므로 $g(x)$는 반드시 절댓값 조건에 의해 x축 위로 꺾여 올라가는 부분이 대칭적으로 존재하며, 정확히 $x=1$ 대칭일 때 해당 조건을 만족할 수 있다.
덧붙여 $g(x)$를 구간에 따라 표준형으로 변환하면 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$g(x)=\begin{cases} \left|a\left(x+\dfrac{2}{a}+b\right)^2-\dfrac{4}{a}-4b+c-4\right| & (x \ge 1) \\ \left|-a\left(x+1-\dfrac{2}{a}\right)^2+\dfrac{4}{a}+d-8\right| & (x<1) \end{cases}$$

이때, $g(x)$의 개형은 다음과 같다.



이제 구체적인 a, b, c, d의 값을 구해보자.
$g(x)$가 $x=1$대칭이므로
구간에 따른 두 이차함수의 축 또한 $x=1$ 대칭이다.
즉, $\frac{2}{a}-1-b-\frac{2}{a}=2$, $b=-3$
다음으로 $g(1)=0$이므로
$x=1$에서의 우극한과 좌극한을 순서대로 계산하면 다음과 같은 결과를 얻는다.
$\displaystyle\lim_{x\to 1+} g(x)=4a+c=0$, $c=-4a$
$\displaystyle\lim_{x\to 1-} g(x)=-4a+d=0$, $d=4a$

마지막으로 $g\left(\frac{2}{a}-1\right)=2$이므로

$\left|\frac{4}{a}+4a-8\right|=2$

$\frac{4}{a}+4a-8=-2 \quad \left(\because \frac{2}{a}-1<1\text{에서 } a>1\right)$

$2a^2-5a+2$

$=(2a-1)(a-2)$

$=0$

$\therefore\ a=2$

따라서 $f(4)\times f(-1)$

$=(a+c)\times d$

$=-3a\times 4a$

$=-48$

정답 ③

16. **출제 의도** : 지수의 성질을 이용하여 부등식의 모든 자연수 해의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$(\sqrt{2})^x \le \left(\frac{1}{2}\right)^{x-6}$

$(\sqrt{2})^x=2^{\frac{x}{2}},\ \left(\frac{1}{2}\right)^{x-6}=2^{-x+6}$

$\frac{x}{2}\le -x+6$

$\frac{3}{2}x\le 6$

$\therefore\ x\le 4$

자연수 x의 값은 1, 2, 3, 4이다.

$1+2+3+4=10$

정답 10

17. **출제 의도** : 수열의 합의 기호의 성질을 이용하여 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\sum_{k=1}^{10}(k-c)=25$에서

$\frac{10\times 11}{2}-10c=25$

$55-10c=25$

$c=3$

$\sum_{k=1}^{5}(a_k+3c)=60$에서

$\sum_{k=1}^{5}a_k+15c=60$

$\sum_{k=1}^{5}a_k+45=60$

$\sum_{k=1}^{5}a_k=15$

따라서 $\sum_{k=1}^{5}a_k+c$

$=15+3$

$=18$

정답 18

18. **출제 의도** : 곱의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=(x^2+3x-1)(x^2+2)x$

$=(x^2+3x-1)(x^3+2x)$

이때, $f(x)$를 x에 대해 미분하면

$f'(x)=(2x+3)(x^3+2x)+(x^2+3x-1)(3x^2+2)$

이므로

$f'(1)=5\times 3+3\times 5=30$

정답 30

19. **출제 의도** : 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\int_1^5 x^2dx-\int_{-1}^1(x+2)^2dx+\int_6^7(x-1)^2dx$

$=\int_1^5 x^2dx-\int_1^3 x^2dx+\int_5^6 x^2dx$

$=\int_1^6 x^2dx-\int_1^3 x^2dx$

$=\int_3^6 x^2dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_3^6$

$=\frac{1}{3}\times 6^3-\frac{1}{3}\times 3^3$

$=72-9$

$=63$

정답 63

20. **출제 의도** : 코사인 법칙을 이용하여 원의 현의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\overline{\mathrm{BD}} = \overline{\mathrm{BE}} = a$

$\triangle\mathrm{ABC} \backsim \triangle\mathrm{BCD}$ (닮음)이므로

$a^2 : 1 = 2+\sqrt{3} : 1$

$a^2 = 2+\sqrt{3}$

$\therefore$ (가)$=2$

$\cos\theta = \dfrac{2a^2-1}{2a^2}$에 ㉠을 대입하면

$\cos\theta = \dfrac{3+2\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore\ \theta = \dfrac{\pi}{6}$

$\angle\mathrm{EBD} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{3\theta}{2} = \dfrac{\pi}{4}$

$\therefore$ (나)$=\dfrac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned}(\overline{\mathrm{DE}})^2 &= a^2+a^2-2a^2\cdot\cos\frac{\pi}{4}\\ &= 2a^2-\sqrt{2}a^2\\ &= (2-\sqrt{2})a^2\\ &= (2-\sqrt{2})(2+\sqrt{3})\\ &= 4+2\sqrt{3}-2\sqrt{2}-\sqrt{6}\end{aligned}$$

$\therefore$ (다)$=4$

$\dfrac{1}{\pi}\times p\times q\times r = \dfrac{1}{\pi}\times 2\times\dfrac{\pi}{4}\times 4 = 2$

정답 2

21. **출제 의도** : 등차수열의 합의 꼴과 성질을 알고 주어진 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

문제의 조건에 따라 $S_{10} = -70$, $S_4 = 76$ or $S_4 = -76$ 이다. 또한, 등차수열 합의 일반항은 상수항이 없는 이차식으로 표현된다. 즉, 상수 a, b에 대하여 $S_n = an^2+bn\ (a\neq 0)$

ⅰ) $S_4 = 76$ 일 때

$S_4 = 76$, $S_{10} = -70$을 이용하여 a, b의 값을 결정한다.

$S_4 = 76 = 16a+4b$ ⋯ ㉠

$S_{10} = -70 = 100a+10b$ ⋯ ㉡

㉠과 ㉡을 연립하면,

$a = -\dfrac{13}{3}$, $b = \dfrac{109}{3}$

하지만 이는 첫째항과 공차가 정수라는 조건에 모순.

ⅱ) $S_4 = -76$ 일 때

$S_4 = -76 = 16a+4b$ ⋯㉢

$S_{10} = -70 = 100a+10b$ ⋯㉣

㉢과 ㉣을 연립하면,

$a=2$, $b=-27$

$\therefore\ S_n = 2n^2-27n$

이제 부등식 $\displaystyle\sum_{k=n}^{n+4} S_k \geq 0$ 을 만족하는 자연수 n의 최솟값을 구하자.

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{n+4} S_k &= S_n+S_{n+1}+S_{n+2}+S_{n+3}+S_{n+4}\\ &= 5(S_{n+2}+4) \geq 0\end{aligned}$$

이다.

즉, $S_{n+2}+4 \geq 0$ 을 만족하는 자연수 n의 최솟값을 찾는다.

$$\begin{aligned}S_{n+2}+4 &= 2(n+2)^2-27(n+2)+4.\\ &= 2n^2-19n-42 \geq 0\end{aligned}$$

부등식의 해는 $n \leq \dfrac{19-\sqrt{697}}{4}$ 또는 $n \geq \dfrac{19+\sqrt{697}}{4}$

그러나 n은 자연수이므로 만족시키는 n의 범위는

$n \geq \dfrac{19+\sqrt{697}}{4}$

$\therefore m = 12$

$\therefore\ \left|\dfrac{S_{m+1}}{S_{m-5}}\times S_{m-2}\right| = \left|\dfrac{S_{13}}{S_7}\times S_{10}\right| = \left|-\dfrac{13}{7\times 13}\times 7\times 10\right| = 10$

정답 10

다른 풀이) $\displaystyle\sum_{k=n}^{n+4} S_k = S_n+S_{n+1}+S_{n+2}+S_{n+3}+S_{n+4}$ 를 전개하지 않고 S_n을 x에 관한 이차함수 $y=2x^2-27x$로 나타낸 후 함수가 0이 되는 x값 근처에서 S_n값들의 계산을 통해 $\displaystyle\sum_{k=n}^{n+4} S_k$의 부호를 판단할 수 있다.

$y = 2x^2-27x = x(2x-27)$ $x=0$ 또는 $x=\dfrac{27}{2}$에서 이차함수가 0이 된다. $13 < \dfrac{27}{2} < 14$(n은 자연수)이므로, 따라서 근처의 6개 값 (S_{11}부터 S_{16}까지)의 적절한 연산 비교를 통해 m의 값을 구할 수 있다.

S_{11}	S_{12}	S_{13}	S_{14}	S_{15}	S_{16}
-55	-36	-13	14	45	96

$\displaystyle\sum_{n=11}^{15} S_n = -45 < 0$, $\displaystyle\sum_{n=12}^{16} S_n = 106 > 0$이므로 $m=12$ 이다.

$\left|\dfrac{S_{m+1}}{S_{m-5}}\times S_{m-2}\right| = \left|\dfrac{S_{13}}{S_7}\times S_{10}\right| = \left|-\dfrac{13}{7\times 13}\times 7\times 10\right| = 10$

22. **출제 의도** : 주어진 조건을 만족하는 함수를 찾을 수 있는가?

정답풀이 :

$f(f(2))=0$이므로, 방정식 $f(x)=0$은 $x=f(2)$를 해로 갖는다.
그리고 집합 A의 정의에 따라 $f(2)\in A$이다.
또한, 조건 (가)를 통해
각각의 α_n(n은 자연수)이 자연수임을 알 수 있다.
이때, $\alpha_2 \geq 3$이면
집합 A에서 α_1 이외에 $\alpha_k=k$를 만족하는 α가 존재할 수 없으므로 조건 (나)에 모순이다.
따라서 조건 (나)에 의해 $\alpha_1=1$, $\alpha_2=2$이고,
만약 A의 원소 개수가 3 이상이라면 $\alpha_3>3$이 되어야 한다.
또한 집합 A의 정의에 따라,
방정식 $f(x)f'(x)=0$은 $x=1$과 $x=2$를 해로 갖는다.
즉, $f(1)f'(1)=0$, $f(2)f'(2)=0$
여기서
$f(2)\in A$이므로 $f(2)>0$이고, 따라서 $f'(2)=0$
이때, 만약 $f'(1)=0$이면
방정식 $f'(x)=0$에서
$f'(x)$는 $(x-1)$과 $(x-2)$를 인수로 갖게 되므로
$\therefore\ f'(x)=3(x-1)(x-2)$
따라서
$f(x)=\int_1^x f'(t)dt$ 또는 $f(x)=\int_{\alpha_3}^x f'(t)dt$
이다.
두 경우 모두 $f(2)<0$인데
이는 $f(2)>0$에 모순이므로,
$\therefore\ f'(1)\neq 0$, $f(1)=0$

이제 방정식 $f(x)=0$의 근의 개수에 따라 경우를 나눠 생각하자.

ⅰ) $f(x)=0$의 해의 개수가 3인 경우
$f(x)=(x-1)(x-\alpha_3)(x-\alpha_5)$,
$f'(x)=3(x-2)(x-\alpha_4)$이다.

ⅱ) $f(x)=0$의 해의 개수가 2인 경우
$f'(1)\neq 0$이므로, $f'(x)=3(x-2)(x-\alpha_3)$,
$f(x)=(x-1)(x-\alpha_3)^2$
이때, $f(f(2))=0$이므로 $f(2)=(2-\alpha_3)^2=(\alpha_3)^2-4\alpha_3+4$의 값이 1 또는 α_3
$(\alpha_3)^2-4\alpha_3+4=1$이면 $\alpha_3=1$ 또는 $\alpha_3=3$
$(\alpha_3)^2-4\alpha_3+4=\alpha_3$이면 $\alpha_3=1$ 또는 $\alpha_3=4$
$\alpha_3>3$이므로, $\alpha_3=4$이다.
따라서 $f(x)=(x-1)(x-4)^2$

ⅲ) $f(x)=0$의 해의 개수가 1인 경우
$f'(x)=3(x-2)(x-p)$ ($p=2$ 또는 $p=\alpha_3$),
$f(x)=\int_1^x f'(t)dt$
이때, $f(f(2))=0$이므로

$$
\begin{aligned}
f(2)&=\int_1^2 f'(t)dt\\
&=\int_1^2 (3t^2-(3p+6)t+6p)\\
&=\left[t^3-\left(\frac{3p+6}{2}\right)t^2+6pt\right]_1^2\\
&=(8-6p-12+12p)-(1-\frac{3}{2}p-3+6p)\\
&=\frac{3}{2}p-2=1
\end{aligned}
$$

이므로 $p=2$
따라서 $f'(x)=3(x-2)^2$, $f(x)=(x-2)^3+1$

이제 사차함수 $g(x)$와 조건 (다)를 생각하자.
우선, $g(x)$는 사차함수이고 양수인 최댓값이 존재하므로
최고차항의 계수가 음수임을 알 수 있다.
또한 $g(x)$는 조건 (다)에 의해 집합 A의 원소를 해로 갖는다.
그리고 함수 $g(x)$는 사차함수이므로 $m\leq 4$
ⅰ)에서 집합 A의 원소의 개수가 5인데,
이는 모순이다.
따라서, 집합 A는
ⅱ)에 따라 $A=\{1,2,4\}$ 또는
ⅲ)에 따라 $A=\{1,2\}$이다.
두 경우 모두에서 함수 $g(x)$는 닫힌구간 $\left[-1,\frac{3}{2}\right]$에서 유일하게 $x=1$만을 해로 갖는다.
이때, $g(-1)$과 $g\left(\frac{3}{2}\right)$이 모두 음수이므로,
방정식 $g(x)=0$이 $x=1$에서 중근을 가지면서
함수 $g(x)$가 $x=1$에서 극대이어야 한다.
따라서 $g(x)=a(x-1)^2(x^2+bx+c)$ $(a<0)$
즉, 함수 $g(x)$는
ⅱ)에 따라 $g(x)=a(x-1)^2(x-2)(x-4)$ 또는
ⅲ)에 따라 $g(x)=a(x-1)^2(x-2)^2$이다.
만약 $g(x)=a(x-1)^2(x-2)^2$이면
$g(x)$의 최댓값이 0인데,
이는 $g(x)$의 최댓값이 $\frac{9+6\sqrt{3}}{8}$임에 모순이므로
ⅲ)을 만족하는 $g(x)$가 존재하지 않는다.
따라서
ⅱ)에 따라
$g(x)=a(x-1)^2(x-2)(x-4)$, $g(-1)=60a=-30$
$\therefore\ a=-\frac{1}{2}$, $g(x)=-\frac{1}{2}(x-1)^2(x-2)(x-4)$
$m=3$, $f(2)=4$, $g'(4)=-9$이므로

$m\times|f(2)\times g'(4)|=108$

정답 108

다른 풀이 1) $f(x)=0$의 해의 개수 대신 $f'(x)=0$의 해의 개수를 기준으로 나눠 풀이를 진행할 수도 있다.

방정식 $f'(x)=0$의 해에 따라 경우를 나눠 생각하자.

ⅰ) $f'(x)=0$이 $x=2$를 유일하게 해로 갖는 경우

$f'(x)=3(x-2)^2$이다.

따라서 방정식 $f(x)-f(2)=0$이 $x=2$에서 삼중근을 갖는다.

$f(1)=0$이므로,

$\therefore\ f(x)=(x-2)^3+1$

이때, $A=\{1,2\}$

ⅱ) $f'(x)=0$이 $x=2$ 외에 다른 해를 갖는 경우

$x=2$ 외의 다른 해를 $x=p(p\neq 2)$라 하자.

그러면 $f'(x)=3(x-2)(x-p)$, $f(x)=\int_1^x f'(t)dt$

$f(x)=0$의 해와 집합 A는 $f(p)$의 부호에 따라 결정된다.

ⅱ-ⅰ) $f(p)>0$인 경우

$f(f(2))=0$이므로

$$f(2)=\int_1^2 f'(t)dt$$
$$=\int_1^2(3t^2-(3p+6)t+6p)$$
$$=\left[t^3-\left(\frac{3p+6}{2}\right)t^2+6pt\right]_1^2$$
$$=(8-6p-12+12p)-(1-\frac{3}{2}p-3+6p)$$
$$=\frac{3}{2}p-2=1$$

이를 만족하는 p는 $p=2$뿐이다.

이는 p가 $x=2$ 이외의 다른 해라는 전제에 모순이므로,

$f(p)>0$인 함수 $f(x)$는 존재하지 않는다.

ⅱ-ⅱ) $f(p)=0$인 경우

$f(f(2))=0$이므로

$f(2)=\int_1^2 f'(t)dt=\frac{3}{2}p-2$의 값이 1 또는 p이다.

$p\neq 2$이므로, $p=4$

따라서 $f(4)=f'(4)=0$, $f(x)=(x-1)(x-4)^2$

이때, $A=\{1,2,4\}$

ⅱ-ⅲ) $f(p)<0$인 경우

$f(2)>0$이므로 $f(x)=0$은 3개의 서로 다른 실근을 갖는다.

따라서

$f(x)=(x-1)(x-\alpha_3)(x-\alpha_5)$이고 $f'(x)=3(x-2)(x-p)$

이때, $A=\{1, 2, \alpha_3, p, \alpha_5\}$

이제 사차함수 $g(x)$와 조건 (다)를 생각하자.

함수 $g(x)$는 조건 (다)에 의해 집합 A의 원소를 해로 갖는다.

$g(x)$는 사차함수이므로 $m\le 4$인데

ⅱ-ⅲ)에서 $m=5$이므로 이는 모순이다.

따라서, 집합 A는

ⅰ)에 따라 $A=\{1,2\}$ 또는

ⅱ-ⅱ)에 따라 $A=\{1,2,4\}$이다.

이는 본래 풀이의 ⅱ)와 ⅲ)에 각각 대응된다.

역시 마찬가지로 ⅱ-ⅱ)를 만족하는 $g(x)$가 존재하지 않고,

$g(x)$는 ⅰ)에 따라

$g(x)=-\frac{1}{2}(x-1)^2(x-2)(x-4)$이다.

$m\times|f(2)\times g'(4)|=108$

다른 풀이 2) 순서를 바꿔, $g(x)$와 조건 (다)를 먼저 접근할 수도 있다.

사차함수 $g(x)$가 양수인 최댓값을 가지므로

최고차항의 계수가 음수이고 2개 이상의 서로 다른 실근을 갖는다.

이때, 조건 (다)에 의해

$g(x)=a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x^2+bx+c)\,(a<0)$로 쓸 수 있다.

또한, 본래 풀이와 마찬가지로 조건 (가)와 (나)에 의해

$\alpha_1=1$, $\alpha_2=2$

조건 (다)에 의해 $g(1)=g(2)=0$이다.

따라서

$g(x)=a(x-1)(x-2)(x^2+bx+c)\,(a<0)$

여기서, 함수 $g(x)$는

닫힌구간 $\left[-1,\frac{3}{2}\right]$에서 유일하게 $x=1$만을 해로 갖는다.

이때, $g(-1)$과 $g\left(\frac{3}{2}\right)$이 모두 음수이므로,

방정식 $g(x)=0$이 $x=1$에서 중근을 가지면서

함수 $g(x)$가 $x=1$에서 극댓값 0을 가져야 한다.

따라서 $g(x)=a(x-1)^2(x^2+bx+c)$ $(a<0)$

즉, $m<4$이므로 $m=2$ 또는 $m=3$

$m=2$이면, $g(x)=a(x-1)^2(x-2)^2$인데,

$g(x)\le 0$이므로 $g(x)$의 최댓값이 $\frac{9+6\sqrt{3}}{8}$임에 모순이다.

$\therefore\ m=3$

따라서 $A=\{1,2,\alpha_3\}\,(\alpha_3>3)$이고

$g(x)=a(x-1)^2(x-2)(x-\alpha_3)$

여기서, 집합 A의 정의에 의해

$f(x)f'(x)=0$의 해는 $x=1$, $x=2$, $x=\alpha_3$ 뿐이다.

만약 $f(x)=0$이 3개의 서로 다른 실근을 가지면

롤의 정리에 의해 $f(x)=0$의 해 이외에
$f'(x)=0$인 x가 존재하므로 $m=3$에 모순이다.
따라서, 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근은 2개 이하이다.
또한 $f'(x)=0$의 서로 다른 실근이 1개 이하이면
집합 A의 원소 개수가 3보다 작으므로 역시 $m=3$에 모순이다.
따라서, 방정식 $f'(x)=0$은 반드시 2개의 서로 다른 실근을 가진다.
이때, $f(f(2))=0$이므로 $f(2)=1$ 또는 $f(2)=\alpha_3$
즉, $f(2)>0$이고 $f'(2)=0$
이를 만족하기 위해서는 반드시
$f(1)=0$, $f'(1)\neq 0$이고 $f'(\alpha_3)=0$이어야 한다.
$f(x)$가 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로,
그 도함수인 $f'(x)$는 최고차항의 계수가 3인 이차함수이다.
따라서 $f'(x)$는
$f'(x)=3(x-2)(x-\alpha_3)$
$f(1)=0$이므로 함수 $f(x)$는 $f(x)=\int_1^x f'(t)dt$

$$\begin{aligned}f(2)&=\int_1^2 f'(t)dt\\&=\int_1^2(3t^2-(3\alpha_3+6)t+6\alpha_3)\\&=\left[t^3-\left(\frac{3\alpha_3+6}{2}\right)t^2+6\alpha_3 t\right]_1^2\\&=(8-6\alpha_3-12+12\alpha_3)-(1-\frac{3}{2}\alpha_3-3+6\alpha_3)\\&=\frac{3}{2}\alpha_3-2\end{aligned}$$

$f(2)=1$이면 $\alpha_3=2$인데, 이는 $\alpha_3>3$에 모순이다.
따라서 $f(2)=\alpha_3$이고 $\alpha_3=4$
즉, $A=\{1,2,4\}$이고
함수 $g(x)$는
$g(x)=a(x-1)^2(x-2)(x-4)$
$g(-1)=60a=-30$
$\therefore\ a=-\frac{1}{2}$, $g(x)=-\frac{1}{2}(x-1)^2(x-2)(x-4)$
$m=3$, $f(2)=4$, $g'(4)=-9$이므로
$m\times|f(2)\times g'(4)|=108$

선택과목(미적분)

23. **출제 의도** : 치환적분법을 활용하여 자연로그의 정적분 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\ln x = t$로 놓으면 $\frac{1}{x}dx = dt$이다.

$x = e$일 때 $t = 1$, $x = e^2$일 때 $t = 2$이므로

$$\int_e^{e^2} \frac{(1+\ln x)}{x \ln x} dx = \int_1^2 \frac{(1+t)}{t} dt$$
$$= \int_1^2 \left(\frac{1}{t} + 1\right) dt$$
$$= [\ln t + t]_1^2$$
$$= \ln 2 + 2 - 1$$
$$= \ln 2 + 1$$

정답 ②

24. **출제 의도** : 지수함수의 극한을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\lim_{x\to0} x = 0$ 이므로 $\lim_{x\to0}(8^x + 4^x - a) = 0$이다.

$a = 2$를 얻는다.

$$\lim_{x\to0} \frac{8^x + 4^x - 2}{x}$$
$$= \lim_{x\to0} \frac{(8^x - 1) + (4^x - 1)}{x}$$
$$= \lim_{x\to0} \frac{(8^x - 1)}{x} + \lim_{x\to0} \frac{(4^x - 1)}{x}$$
$$= \ln 8 + \ln 4$$
$= 3\ln 2 + 2\ln 2 = 5\ln 2$이다.

따라서 $a = 2$, $b = 5$

$a + b = 2 + 5 = 7$

정답 ③

25. **출제 의도** : 입체도형의 부피를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

x축에 수직인 평면으로 자른 단면은 반지름의 길이가 $\frac{1}{\sin x \cos x}$인 사분원 모양이므로 단면의 넓이 $S(x)$는

$$S(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sin x \cos x}\right)^2 \pi = \frac{\pi}{4\sin^2 x \cos^2 x}$$

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\pi}{4\sin^2 x \cos^2 x} dx = \frac{\pi}{4}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$$
$$= \frac{\pi}{4}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$$
$$= \frac{\pi}{4}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} dx$$
$$= \frac{\pi}{4}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} dx$$
$$= \frac{\pi}{4}\left\{\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin^2 x} dx\right\}$$
$$= \frac{\pi}{4}[\tan x - \cot x]_{x=\frac{\pi}{6}}^{x=\frac{\pi}{4}}$$
$$= \frac{\pi}{4}\left\{\left(1 - \frac{1}{1}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}\right)\right\}$$
$$= \frac{\pi}{4} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}\pi}{6}$$

정답 ④

26. **출제 의도** : 음함수의 미분법을 사용하여 함수의 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$g(x) = e^x + e^{-x}$라 하면 $g(x)$는 우함수이다.

$e^x + e^{-x} = 3t^2 + 3$의 양수 해를 $x = \alpha(t)$라 하면 나머지 해는 $x = -\alpha(t)$이다.

이때 $e^{\alpha(t)} + e^{-\alpha(t)} = 3t^2 + 3$ 의 양변을 미분하면 $\alpha(t)$는 x에 관한 식이므로 $\frac{dx}{dt} = \alpha'(t)$이다.

따라서

$$\frac{dx}{dt}(e^{\alpha(t)} - e^{-\alpha(t)}) = 6t$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{6t}{e^{\alpha(t)} - e^{-\alpha(t)}} \quad \cdots ㉠$$

한편 $f(t) = 2\alpha(t)$이고 미분가능하므로 $f'(t) = 2\alpha'(t) = 2\frac{dx}{dt}$

$\frac{dx}{dt}$에 ㉠을 대입하면

$$f'(t) = \frac{12t}{e^{\alpha(t)} - e^{-\alpha(t)}} = \frac{12t}{\sqrt{\{e^{\alpha(t)} + e^{-\alpha(t)}\}^2 - 4}} = \frac{12t}{\sqrt{(3t^2+3)^2 - 4}}$$

따라서 $f'\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{12}} = 2$

정답 ⑤

27. **출제 의도** : 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 값을 구할 수 있는가?

정답풀이:

$f(x)=6-2(\ln x)^2$의 도함수와 이계도함수를 이용해 $\tan\theta_2$를 먼저 구하자.

$f'(x)=-\dfrac{4\ln x}{x}$, $f''(x)=\dfrac{4\ln x-4}{x^2}$이고, 진수 조건에 의해 $x>0$이다.

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f''(x)$		$-$	0	$+$
$f'(x)$		↘	$-\dfrac{4}{e}$	↗

$f(x)$의 변곡점의 x좌표가 e이므로 $\tan\theta_2=f'(e)=-\dfrac{4}{e}$이다.

원점에서 곡선 $f(x)$에 그은 접선의 접점의 x좌표를 t라 할 때, 접선의 방정식은 $y=-\dfrac{4\ln t}{t}(x-t)+6-2(\ln t)^2$이다.

이 접선이 원점을 지나므로 $(0,0)$을 대입하면 $4\ln t+6-2(\ln t)^2=0$이다.

이 식을 인수분해하면 $-2(\ln t-3)(\ln t+1)=0$이므로 $t=e^3$ 또는 $t=\dfrac{1}{e}$이다.

따라서 $\tan\theta_1=f'\left(\dfrac{1}{e}\right)=4e$이다. ($\because\ f'(e^3)=-\dfrac{12}{e^3}<0$)

$$\therefore \tan(\theta_2-\theta_1)=\frac{\tan\theta_2-\tan\theta_1}{1+\tan\theta_2\tan\theta_1}=\frac{\left(-\frac{4}{e}\right)-4e}{1+\left(-\frac{4}{e}\right)(4e)}$$

$$=\frac{-4}{-15}\left(\frac{1}{e}+e\right)=\frac{4}{15e}(e^2+1)$$

정답 ⑤

28. **출제 의도** : 부분적분법을 활용하여 복잡한 식의 정적분 값을 구할 수 있는가?

정답풀이:

(가) $\ln f(x)=\displaystyle\int_1^x tg'(t)dt$에서 $x=1$을 대입하면 $f(1)=1$이라는 값을 얻고, 양변을 미분하면 $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=xg'(x)$와 $f'(x)=xg'(x)f(x)$라는 식을 얻는다.

문제에서 주어진 정적분 $\displaystyle\int_1^2\frac{\{f''(x)+f'(x)\}e^{g(1)}}{xg'(x)+1}dx$을 풀기 위해서는 적절한 부분적분을 이용해야 한다.

$v'=f''(x)+f'(x)$, $v=f'(x)+f(x)$

$u=\dfrac{e^{g(1)}}{xg'(x)+1}$, $u'=\left(\dfrac{e^{g(1)}}{xg'(x)+1}\right)'=\dfrac{e^{g(x)}}{f(x)}$라고 하면

$$\int_1^2\frac{\{f''(x)+f'(x)\}e^{g(1)}}{xg'(x)+1}dx=\int_1^2 v'u\,dx$$

$$=[uv]_1^2-\int_1^2 vu'dx$$

$$=\left[\{f'(x)+f(x)\}\frac{e^{g(1)}}{xg'(x)+1}\right]_1^2-\int_1^2\{f'(x)+f(x)\}\frac{e^{g(x)}}{f(x)}dx$$

형태가 된다.

(가) 조건에서 찾은 $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=xg'(x)$식으로 인해 $xg'(x)+1=\dfrac{f'(x)}{f(x)}+1=\dfrac{f'(x)+f(x)}{f(x)}$가 되므로

$$\left[\{f'(x)+f(x)\}\frac{e^{g(1)}}{xg'(x)+1}\right]_1^2$$

$$=\left[\{f'(x)+f(x)\}\frac{f(x)e^{g(1)}}{f'(x)+f(x)}\right]_1^2$$

$=\left[f(x)e^{g(1)}\right]_1^2=\{f(2)-f(1)\}e^{g(1)}=e^{g(1)}$이 된다.

(다른 방법으로 $f'(x)=xg'(x)f(x)$이므로

$$\left[\{f'(x)+f(x)\}\frac{e^{g(1)}}{xg'(x)+1}\right]_1^2$$

$$=\left[\{xg'(x)+1\}f(x)\frac{e^{g(1)}}{xg'(x)+1}\right]_1^2$$

$=\left[f(x)e^{g(1)}\right]_1^2=\{f(2)-f(1)\}e^{g(1)}=e^{g(1)}$를 얻을 수도 있다.)

$$\int_1^2\{f'(x)+f(x)\}\frac{e^{g(x)}}{f(x)}dx$$

$$=\int_1^2\left\{\frac{f'(x)}{f(x)}+1\right\}e^{g(x)}dx$$

$=\displaystyle\int_1^2\{xg'(x)+1\}e^{g(x)}dx \qquad \because$ (가) $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=xg'(x)$

$=\left[xe^{g(x)}\right]_1^2=2e^{g(2)}-e^{g(1)} \qquad \because \left(xe^{g(x)}\right)'=\{1+xg'(x)\}e^{g(x)}$

이 된다.

$$\int_1^2\frac{\{f''(x)+f'(x)\}e^{g(1)}}{xg'(x)+1}dx$$

$$=\left[\{f'(x)+f(x)\}\frac{e^{g(1)}}{xg'(x)+1}\right]_1^2-\int_1^2\{f'(x)+f(x)\}\frac{e^{g(x)}}{f(x)}dx$$

$=e^{g(1)}-\left\{2e^{g(2)}-e^{g(1)}\right\}$

$=e^{g(1)}-2e^{g(2)}+e^{g(1)}$

$=2e^{g(1)}-2e^{g(2)}$

$=2\left\{e^{g(1)}-e^{g(2)}\right\}$

$=2\times8=16$이 된다.

정답 ③

29. **출제 의도** : 무한급수를 부분합의 극한으로 바꿀 수 있는가?

정답풀이 :

근의 공식에 의해 $x=a_1 \pm \sqrt{a_1^2+4n^4+8n^3}$이고

조건에 의해 $a_{n+1}=a_1-\sqrt{a_1^2+4n^4+8n^3}$이다.

이때 $b_n=a_n-a_{n+1}-4n$이라 하면 b_n의 부분합 S_n은

$S_n=(a_1-a_2-4)+(a_2-a_3-8)+\cdots+(a_3-a_4-4n)$

$=(a_1-a_2+a_2-\cdots+a_n-a_{n+1})-\sum_{k=1}^{n}4k$

$=a_1-a_{n+1}-4\times\dfrac{n(n+1)}{2}=a_1-a_{n+1}-2n(n+1)$

$=a_1-(a_1-\sqrt{a_1^2+4n^4+8n^3})-2n(n+1)$

$=\dfrac{(a_1^2+4n^4+8n^3)-(4n^4+8n^3+4n^2)}{\sqrt{a_1^2+4n^4+8n^3}+(2n^2+2n)}$

$=\dfrac{a_1^2-4n^2}{\sqrt{a_1^2+4n^4+8n^3}+(2n^2+2n)}$

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1}-4n)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}S_n$이므로

$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_1^2-4n^2}{\sqrt{a_1^2+4n^4+8n^3}+(2n^2+2n)}=\dfrac{-4}{\sqrt{4}+2}=-1$

따라서 $45\times\left|\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1}-4n)\right|=45\times|-1|=45$

정답 45

30. **출제 의도** : 합성함수의 미분법과 주어진 조건을 이용하여 함수를 구하고 정적분 값의 범위를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $g(x)$가 $x=0$에서 미분 불가능하므로 $|f(x)|$가 $x=0$에서 미분 불가능하다.

$a>0$인 실수 a에 대하여 $f(a)=0$이므로 $f(x)=x(x-a)^2$이다.

$(0, a)$에서 함수 $g(x)$의 극대를 확인하기 위해 $g'(x)$의 부호를 확인하자.

$x>0$일 때, $g(x)=e^{\sin(\pi f(x))}$, $g'(x)=f'(x)\cos(\pi f(x))e^{\sin(\pi f(x))}$

모든 실수 x에 대하여 $e^{\sin(\pi f(x))}>0$이므로 $g'(x)$의 부호는 $f'(x)\cos(\pi f(x))$의 부호와 같다. $f'(x)=(x-a)(3x-a)$이므로

$f\left(\dfrac{1}{3}a\right)$는 $(0, a)$에서의 함수 $f(x)$의 최댓값이다.

$f\left(\dfrac{1}{3}a\right)$를 k, $\cos(\pi f(x))$를 $h(x)$라 하자.

$k\le\dfrac{1}{2}$이면,

x	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{3}a$	$\cdots$	a
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	k	$\searrow$	
$h(x)$		$+$	$\cos k\pi$	$+$	
$f'(x)h(x)$		$+$	0	$-$	

이므로 극대가 되는 점의 개수는 1이다.

$\dfrac{1}{2}<k\le\dfrac{3}{2}$이고, $f(x)=\dfrac{1}{2}$인 두 점의 x좌표를 각 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면,

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\dfrac{1}{3}a$	$\cdots$	β	$\cdots$	a
$f'(x)$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\dfrac{1}{2}$	$\nearrow$	k	$\searrow$	$\dfrac{1}{2}$	$\searrow$	
$h(x)$		$+$	0	$-$	$\cos k\pi$	$-$	0	$+$	
$f'(x)h(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

이므로 극대가 되는 점의 개수는 2이다.

$\dfrac{1}{2}<f\left(\dfrac{1}{3}a\right)\le\dfrac{3}{2}$일 때,

함수 $g(x)$가 극대가 되는 점의 개수가 2이므로

$f\left(\dfrac{1}{3}a\right)=\dfrac{1}{3}a\left(-\dfrac{2}{3}a\right)^2=\dfrac{4}{27}a^3$에서

$\dfrac{1}{2}<\dfrac{4}{27}a^3\le\dfrac{3}{2}$,

$\dfrac{3^3}{2^3}<a^3\le\dfrac{3^4}{2^3}$,

$\dfrac{3}{2}<a\le\dfrac{3^{\frac{4}{3}}}{2}$ $(a>0)$

$\int_{-a}^{2a}f(x)\,dx=\int_{-a}^{2a}x(x-a)^2dx=\int_{-a}^{2a}(x^3-2ax^2+a^2x)\,dx$

$=\left[\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{2}{3}x^3+\dfrac{1}{2}a^2x^2\right]_{-a}^{2a}=\dfrac{15}{4}a^4-6a^4+\dfrac{3}{2}a^4$

$=-\dfrac{3}{4}a^4$

$\dfrac{3}{2}<a\le\dfrac{3^{\frac{4}{3}}}{2}$이므로 $-\dfrac{3}{4}a^4$의 최솟값은 $-\dfrac{3^{\frac{19}{3}}}{2^6}$이다.

이때, $p=6$, $q=\dfrac{19}{3}$이므로 $p\times q=38$이다.

정답 38