만든 놈: crazy_hansuckwon
수만휘: 한석원의눈물
오르비: 모의고사손풀이올리는계정

제 2 교시

수학 영역

홀수형

5지선다형

지수의 복잡한 계산 ⇒ 유리수 지수로! (밑이 양수라면)

1. $\sqrt[3]{24} \times 3^{\frac{2}{3}}$ 의 값은? [2점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

24는 양수이므로 유리수 지수사용가능

$\sqrt[3]{24} = 24^{\frac{1}{3}} = (2^3 \times 3)^{\frac{1}{3}} = 2 \times 3^{\frac{1}{3}}$ 이므로

㉠ $\sqrt[3]{24} \times 3^{\frac{2}{3}} = 2 \times 3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}}$

$= 2 \times 3$

$= \boxed{6}$

미분계수의 정의

2. 함수 $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3$ 에 대하여 $\lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

미분계수의 정의에 의해

$\lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = f'(2)$

곧 $f'(x) = 6x^2 - 10x$ 에서 ㉠ $f'(2) = 24 - 20$

$= \boxed{4}$

이젠 너무나도 익숙해...

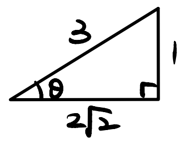
3. $\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$ 인 θ 에 대하여 $\sin(-\theta) = \frac{1}{3}$ 일 때, $\tan\theta$ 의 값은? [3점]

① $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $-\frac{\sqrt{2}}{4}$ ③ $-\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{2}}{4}$

우선, $\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$ 이므로 구하는 $\tan\theta < 0$

$\sin(-\theta) = -\sin\theta = \frac{1}{3}$ 이고, 곧 $\sin\theta = -\frac{1}{3}$ 이다.

θ를 예각으로 간주해 직각△을 그리면



⇒ ㉠ $\tan\theta = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = \boxed{-\frac{\sqrt{2}}{4}}$

문제 뜻만 알면 풀 정도 문제

4. 함수

$$f(x) = \begin{cases} 3x - a & (x < 2) \\ x^2 + a & (x \geq 2) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$x=2$ 대입

$6 - a = 4 + a$ 이므로 ㉠ $a = \boxed{1}$

만든 놈: crazy_hansuckwon
수만휘: 한석원의눈물
오르비: 모의고사손풀이올리는계정

도함수로부터의 원래함수 추론

5. 다항함수 $f(x)$가

$$f'(x)=3x(x-2), \quad f(1)=6$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

Sol1) 그냥 적분해서 계산

$f'(x)=3x^2-6x$ 이므로 부정적분하면 $f(x)=x^3-3x^2+C$

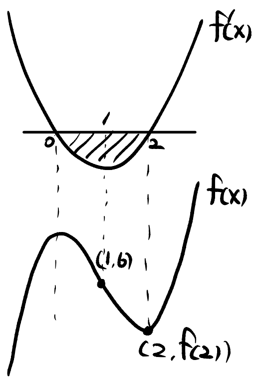
$\Rightarrow f(1)=6$ 이므로 $C=8$

$\therefore f(x)=x^3-3x^2+8$ ㉠ $f(2)=8-12+8$

$=\boxed{4}$

sol2) 도함수의 정적분 = 원함수의 함숫값 차 ⊕ 그래프의 대칭

$f'(x)$와 $f(x)$의 그래프를 그려보면



색칠한 부분의 넓이 : $\frac{3}{6}(2-0)^3=4$

이때 $y=f'(x)$는 $x=1$에 대칭이므로

$\int_1^2 f'(x)dx=\frac{4}{2}=2$ 인데,

이는 정적분의 기본정리에 의해 $f(2)-f(1)=2$

를 의미하므로 ㉠ $f(2)=\boxed{4}$

어렵지 않아요

6. 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$S_4-S_2=3a_4, \quad a_5=\frac{3}{4}$$

일 때, a_1+a_2의 값은? [3점]

① 27 ② 24 ③ 21 ④ 18 ⑤ 15

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r로 두면

$S_4-S_2=a_3+a_4=3a_4$ 이므로 $a_3=2a_4$ $\therefore r=\frac{1}{2}$

㉠ $a_1+a_2=\frac{1}{r^2}(a_3+a_4)=4\times 3a_4$

$\Rightarrow 4\times 6a_5$

$\Rightarrow 24\times\frac{3}{4}$

$=\boxed{18}$

(물론 평범하게 a_5으로부터 a_1, a_2을 차례대로 구해도 전혀 문제 X)

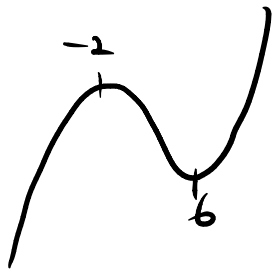
ㅋㅋ

7. 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2-12x+4$가 $x=\alpha$에서 극대이고 $x=\beta$에서 극소일 때, $\beta-\alpha$의 값은? (단, α와 β는 상수이다.) [3점]

① -4 ② -1 ③ 2 ④ 5 ⑤ 8

$f'(x)=x^2-4x-12$

$=(x-6)(x+2)$ 이므로



$\alpha=-2, \beta=6$

$\Rightarrow$ ㉠ $\beta-\alpha=\boxed{8}$

적분하는 건 하는건데 기함·우함 계산 줄이면 좋잖아?

8. 삼차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$xf(x)-f(x)=3x^4-3x$$

를 만족시킬 때, $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$의 값은? [3점]

① 12 ② 16 ③ 20 ④ 24 ⑤ 28

$(x-1)f(x)=3x(x^3-1)$
$=3x(x-1)(x^2+x+1)$

곧, $x\neq 1$인 x에 대해 $f(x)=3x(x^2+x+1)$이다.
그런데 $f(x)$는 삼차함수로 주어졌으므로

$f(x)$는 모든 실수 x에 대해 $f(x)=3x(x^2+x+1)$
$\Rightarrow f(x)=3x^3+3x^2+3x$

㉠ $\int_{-2}^{2} f(x)dx$ 의 적분구간이 원점에 대칭이므로
$\int_{-2}^{2}(\text{기함수})=0$, $\int_{-2}^{2}(\text{우함수})=2\int_{0}^{2}(\text{우함수})$임을 이용하면

$\int_{-2}^{2} f(x)dx=2\int_{0}^{2}3x^2dx=2[x^3]_0^2=\boxed{16}$

내분, 안 까먹었죠?

9. 수직선 위의 두 점 $\mathrm{P}(\log_5 3)$, $\mathrm{Q}(\log_5 12)$에 대하여 선분 PQ를 $m:(1-m)$으로 내분하는 점의 좌표가 1일 때, 4^m의 값은? (단, m은 $0<m<1$인 상수이다.) [4점]

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

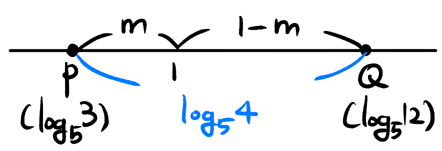
Sol1) 내분점 공식
PQ를 $m:(1-m)$으로 내분하는 점의 좌표는

$\frac{m\log_5 12+(1-m)\log_5 3}{m+(1-m)}=m\log_5 12+\log_5 3-m\log_5 3$
$=m\log_5 4+\log_5 3=1$

∴ $m\log_5 4=\log_5 \frac{5}{3}$ 이고, $m=\frac{\log_5 \frac{5}{3}}{\log_5 4}=\log_4 \frac{5}{3}$ 이다.

㉠ $4^m=4^{\log_4 \frac{5}{3}}=\boxed{\frac{5}{3}}$

Sol2) 그림을 한 번 그려볼까?



$m:(1-m)$은 총합이 1이므로 그냥 $\overline{PQ}=\log_5 12-\log_5 3=\log_5 4$에서
m에 해당하는 길이는 $\overline{PQ}$의 m배, 즉 $m\log_5 4$이다.

∴ $1=\log_5 3+m\log_5 4$ 에서 sol1)과 동일한 식을 얻는다. 이후로는 동일~

수험생을 위한 배려 ㄷㄷ

10. 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t\,(t\geq 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t)=t^2-6t+5,\quad v_2(t)=2t-7$$

이다. 시각 t에서의 두 점 P, Q 사이의 거리를 $f(t)$라 할 때, 함수 $f(t)$는 구간 $[0, a]$에서 증가하고, 구간 $[a, b]$에서 감소하고, 구간 $[b, \infty)$에서 증가한다. 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 Q가 움직인 거리는? (단, $0<a<b$) [4점]

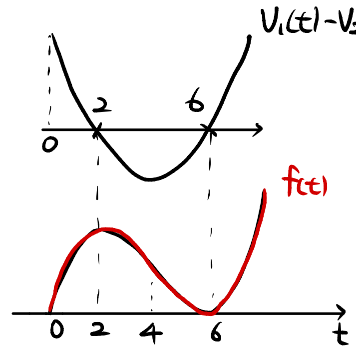
① $\frac{15}{2}$ ② $\frac{17}{2}$ ③ $\frac{19}{2}$ ④ $\frac{21}{2}$ ⑤ $\frac{23}{2}$

$t=0$일 때 동시에 "원점을" 출발했다는 것 check.

$f(t)$가 두 점 사이의 '거리'를 의미하므로 두 점의 변위 차를 의미
$\Rightarrow V_1(t)-V_2(t)$를 계산

절댓값 필수!... 긴 한데
이 문제에서는 없어도 상관없음.
배꼈는 애들 수능이고 하니 한 번 봐주셔요

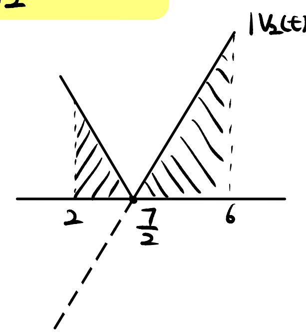
$V_1(t)-V_2(t)=t^2-8t+12$ 이므로
해당 그래프를 그리고, 이로부터 $f(t)$를 그리면 $f(0)=0$이므로 다음과 같음

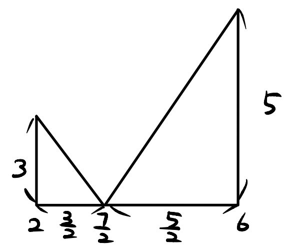


(삼차함수의 비율관계)

곧 문제 조건에 의해 $a=2$, $b=6$이다.

따라서 $t=2$에서 $t=6$까지 점 Q가 움직인 거리
$\Rightarrow \int_2^6 |V_2(t)|dt$ 이다.

∴


⇒


이므로 계산하면

㉠ $\frac{1}{2}\times 3\times\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\times 5\times\frac{5}{2}=\boxed{\frac{17}{2}}$

만든 놈: crazy_hansuckwon
수만휘: 한석원의눈물
오르비: 모의고사손풀이올리는계정

부분분수 꼴은 직접 찾아내는 것!

11. 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$|a_6| = a_8,\quad \sum_{k=1}^{5}\frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{5}{96}$$

일 때, $\sum_{k=1}^{15} a_k$의 값은? [4점]

① 60 ② 65 ③ 70 ④ 75 ⑤ 80

공차가 0이 아니므로 $a_6 \ne a_8$

⇒ $|a_6| = a_8$에서 $-a_6 = a_8$ ∴ $a_6 + a_8 = 2a_7 = 0$

곧 $a_7 = 0$이다.

⇒ $a_6 < 0$, $a_8 > 0$이라는 의미이므로 $\{a_n\}$의 공차 $d > 0$

$\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{a_k a_{k+1}} = \sum_{k=1}^{5}\frac{1}{a_{k+1}-a_k}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)$ 에서 (∵ 부분분수)

$\frac{1}{a_{k+1}-a_k}$는 $\frac{1}{d}$, 즉 상수이므로 Σ 밖으로 꺼낼 수 있다.

⇒ $\frac{1}{d}\boxed{\sum_{k=1}^{5}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)}$

$\left(\frac{1}{a_1}-\cancel{\frac{1}{a_2}}\right)$
$\left(\cancel{\frac{1}{a_2}}-\cancel{\frac{1}{a_3}}\right)$
$\vdots$
$\left(\cancel{\frac{1}{a_5}}-\frac{1}{a_6}\right)$ ⇒ $\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_6}$

∴ $\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_6}\right)=\frac{5}{96}$이고,

$a_1 = a_7 - 6d$, $a_6 = a_7 - d$에서 $a_7 = 0$이므로 $\begin{cases} a_1 = -6d \\ a_6 = -d \end{cases}$

따라서 $\frac{1}{d}\left(-\frac{1}{6d}+\frac{1}{d}\right)=\frac{5}{96}$을 계산하면 $d^2=16$이다.

∴ $d = 4$ (∵ $d > 0$)

㉮ $\sum_{k=1}^{15} a_k = 15a_8$
$= 15(a_7 + d)$
$= 15 \times 4$
$= \boxed{60}$

직관 vs 수식, 이 문제는 둘 다 가능~

12. 함수 $f(x)=\frac{1}{9}x(x-6)(x-9)$와 실수 $t\,(0<t<6)$에 대하여 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<t) \\ -(x-t)+f(t) & (x\ge t) \end{cases}$$

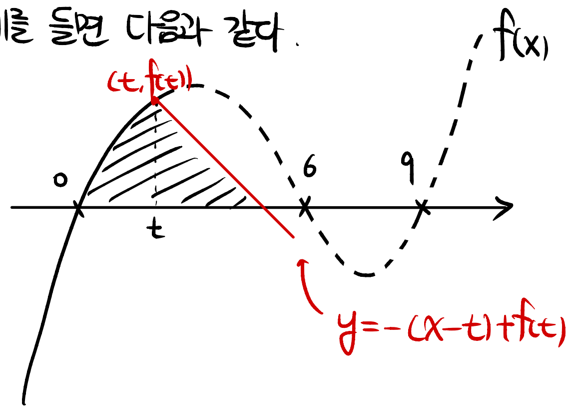
이다. 함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 영역의 넓이의 최댓값은? [4점]

① $\frac{125}{4}$ ② $\frac{127}{4}$ ③ $\frac{129}{4}$ ④ $\frac{131}{4}$ ⑤ $\frac{133}{4}$

$g(x)$는 구간별로 정의된 함수

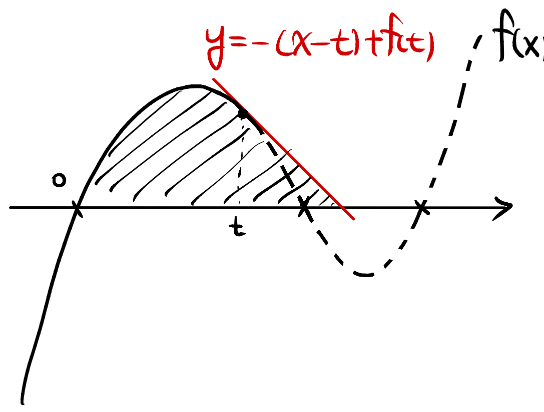
⇒ $y=-(x-t)+f(t)$의 의미해석 : $(t, f(t))$을 지나고 기울기 -1인 직선

예를 들면 다음과 같다.

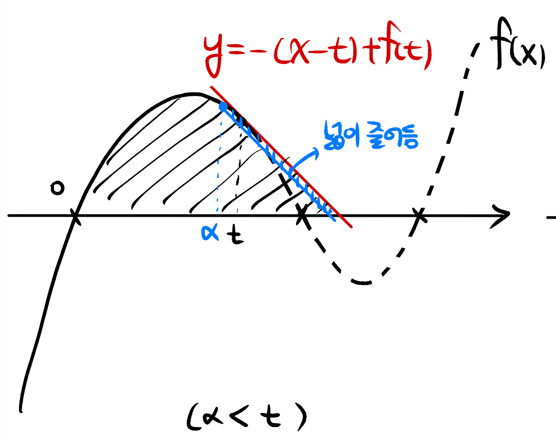


곧, $y=g(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 영역의 넓이는 $y=-(x-t)+f(t)$이 "$y=f(x)$의 접선일 때" 최대임을 의심가능
아직 확정은 아님

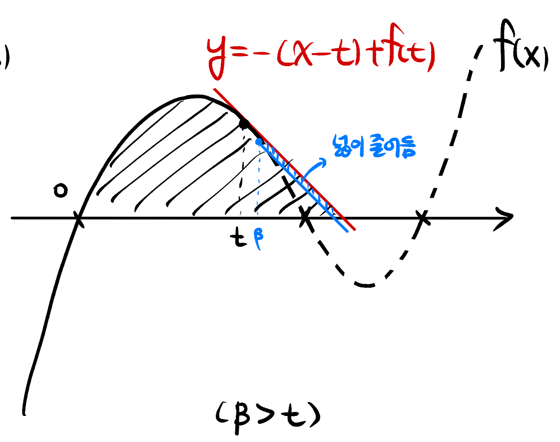
해당 상황을 그려보면 다음과 같다.



이 경우보다 t가 약간 크거나 작은 경우를 생각해보자. (각각 α, β)



(α < t)



(β > t)

곧 세웠던 가설이 성립함을 직관적으로 알 수 있다.

이게 직관적이지 않으면? 수식으로 생각해보자.

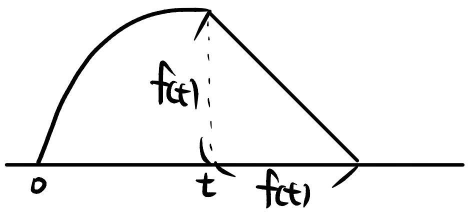
다음 page

만든 놈: crazy_hansuckwon
수만휘: 한석원의눈물
오르비: 모의고사손풀이올리는계정

12번 이어서

직관적이지 않다면?

$y=g(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S(t)$로 두면



$S(t)=\int_0^t f(x)dx+\frac{1}{2}\{f(t)\}^2$ 에서 양변을 미분하면

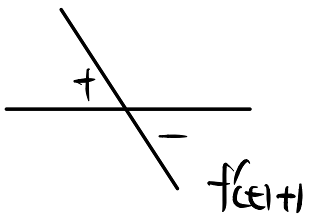
$S'(t)=f(t)+\frac{1}{2}\cdot 2f(t)f'(t)$

엥 우리 합성함수 미분 안 배움; 하시는 분들도 곱의 미분을 이용해 구할 수 있습니다.
$\{f(t)\}^2=f(t)\times f(t)$ 이므로 미분하면 $f'(t)f(t)+f(t)f'(t)=2f(t)f'(t)$

$=f(t)+f(t)f'(t)$

$=f(t)\{1+f'(t)\}$ 이다.

이때 $f(t)$는 $0<t<6$ 에서 항상 양수이므로 $S'(t)$의 부호변동은 $1+f'(t)=0$, 즉 $f'(t)=-1$일 때 발생한다.
곧, 미분가능한 함수 $S(t)$에 대해 $f'(t)=-1$일 때가 극점이고, 해당 지점 기준으로 $f'(t)$은 점점 작아지므로
개략적으로 부호변동양상만 살펴보면 다음과 같다.



$\Rightarrow$ $f'(t)=-1$ 일 때 극대

어쨌든, $y=-(x-t)+f(t)$가 $y=f(x)$의 접선일 때 넓이가 최대이므로 계산해보면

$f(x)=\frac{1}{9}(x^3-15x^2+54x)$

$\Rightarrow f'(t)=\frac{1}{9}(3t^2-30t+54)=-1$ 을 만족하는 t는 3이다. $(0<t<6)$

$\therefore (t, f(t))=(3, 6)$

㉠ $S(t)=\int_0^3 f(x)dx+\frac{1}{2}\cdot 6^2$

$=\frac{1}{9}\left[\frac{1}{4}x^4-5x^3+27x^2\right]_0^3+18$

$=\boxed{\frac{129}{4}}$

만든 놈: crazy_hansuckwon
수만휘: 한석원의눈물
오르비: 모의고사손풀이올리는계정

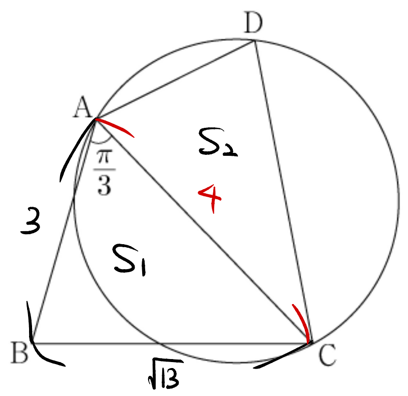
길이 생각보다 잘 보이는 편

13. 그림과 같이

$$\overline{AB}=3,\quad \overline{BC}=\sqrt{13},\quad \overline{AD}\times\overline{CD}=9,\quad \angle BAC=\frac{\pi}{3}$$

인 사각형 ABCD가 있다. 삼각형 ABC의 넓이를 S_1, 삼각형 ACD의 넓이를 S_2라 하고, 삼각형 ACD의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하자.

$S_2=\frac{5}{6}S_1$일 때, $\frac{R}{\sin(\angle ADC)}$의 값은? [4점]



① $\frac{54}{25}$ ② $\frac{117}{50}$ ③ $\frac{63}{25}$ ④ $\frac{27}{10}$ ⑤ $\frac{72}{25}$

우선, 구하는 값을 보면 $\frac{R}{\sin(\angle ADC)}$이다.

이때 sin Law에 의해 $\frac{\overline{AC}}{\sin(\angle ADC)}=2R$이므로 $\overline{AC}$를 구해야 뭐라도 될 것 같다.

곧, cos Law를 이용하면

$(\sqrt{13})^2=3^2+\overline{AC}^2-6\overline{AC}\cos\frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow 13=9+\overline{AC}^2-3\overline{AC}$

$\Rightarrow \overline{AC}^2-3\overline{AC}-4=0$

$\rightarrow (\overline{AC}-4)(\overline{AC}+1)=0$ 이므로 $\overline{AC}=4$ $(\overline{AC}>0)$

이 때 주어진 조건의 $\overline{AD}\times\overline{CD}$, S_2, $\sin(\angle ADC)$ … 를 보고 풀이의 가닥이 잡히면 좋다.

$\begin{cases} S_1=\frac{1}{2}\times3\times4\times\sin\frac{\pi}{3}=3\sqrt{3} \\ S_2=\frac{1}{2}\times\overline{AD}\times\overline{CD}\times\sin(\angle ADC)=\frac{9}{2}\sin(\angle ADC)\end{cases}$ 에서 $S_2=\frac{5}{6}S_1$이므로

$\frac{9}{2}\sin(\angle ADC)=\frac{5}{6}\times3\sqrt{3} \Longrightarrow \therefore \sin(\angle ADC)=\frac{5\sqrt{3}}{9}$

곧 sin Law에서 $\frac{\overline{AC}}{\sin(\angle ADC)}=\frac{4}{\frac{5\sqrt{3}}{9}}=2R$이므로 $R=\frac{6\sqrt{3}}{5}$

㉮ $\frac{\frac{6\sqrt{3}}{5}}{\frac{5\sqrt{3}}{9}}=\boxed{\frac{54}{25}}$

결국은 특수한 경우!

14. 두 자연수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases}2x^3-6x+1 & (x\le 2)\\ a(x-2)(x-b)+9 & (x>2)\end{cases}$$

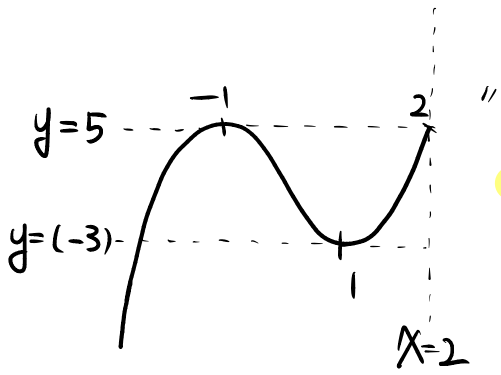
이다. 실수 t에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자.

$$g(k)+\lim_{t\to k-}g(t)+\lim_{t\to k+}g(t)=9$$

를 만족시키는 실수 k의 개수가 1이 되도록 하는 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여 $a+b$의 최댓값은? [4점]

① 51 ② 52 ③ 53 ④ 54 ⑤ 55

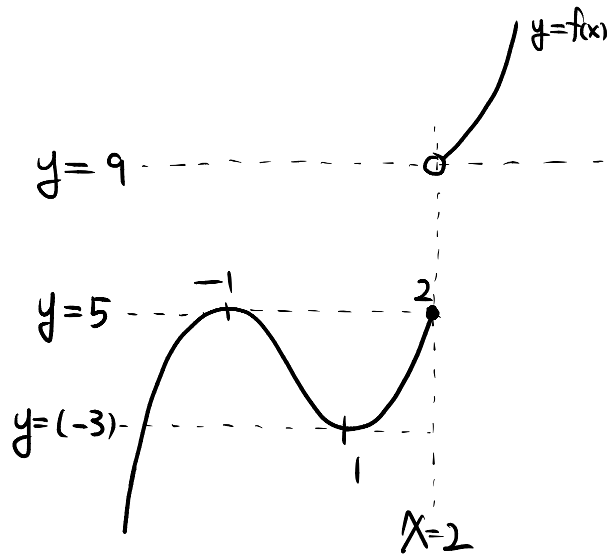
$f(x)$는 $x<2$일 때 $6(x+1)(x-1)$임을 이용해 그래프를 그려보면



"(2, 9), (b, 9)를 지나고 최고차항의 계수 자연수인 이차함수" 이다.

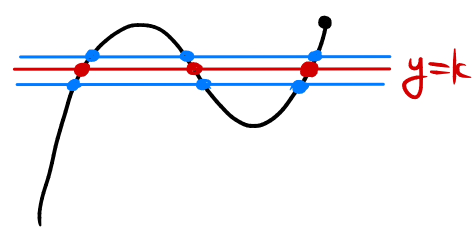
우리는 아직 b와 2 사이의 대소관계를 모르므로 case 분류해보면

i) $b<2$ (b는 자연수이므로 $b=1$)



이 경우는 $g(k)+\lim_{t\to k-}g(t)+\lim_{t\to k+}g(t)=9$를 만족하는 실수 k가 $-3<t<5$ 내에 무수히 많이 존재하므로 모순이다.

※

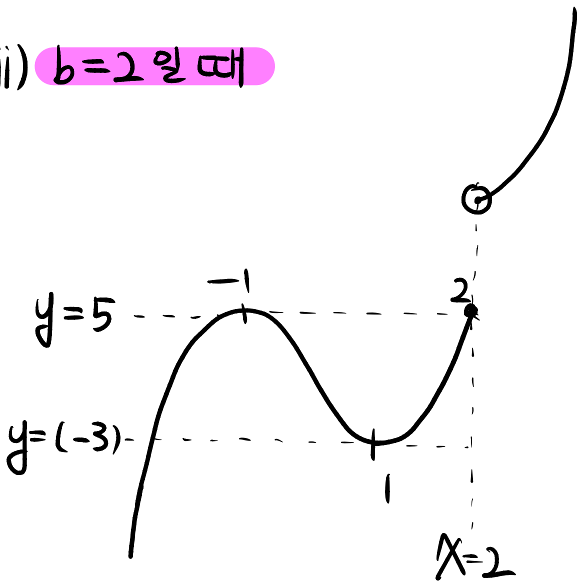


나머지 경우는 다음 page

만든 놈: crazy_hansuckwon
수만휘: 한석원의눈물
오르비: 모의고사손풀이올리는계정

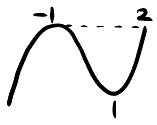
14번 이어서

ii) $b=2$ 일 때



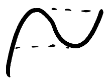
⇒ i)과 마찬가지로 모순.

⇒ $x>2$에서 어떻게든

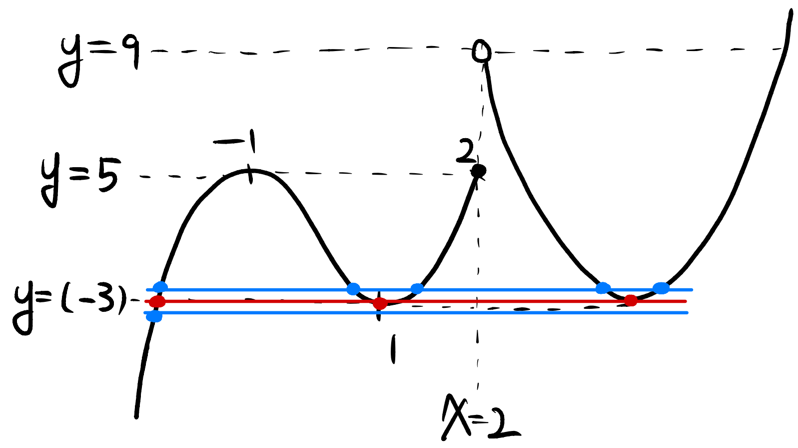


부분에 영향을 미쳐야 함

iii) $b>2$ 일 때

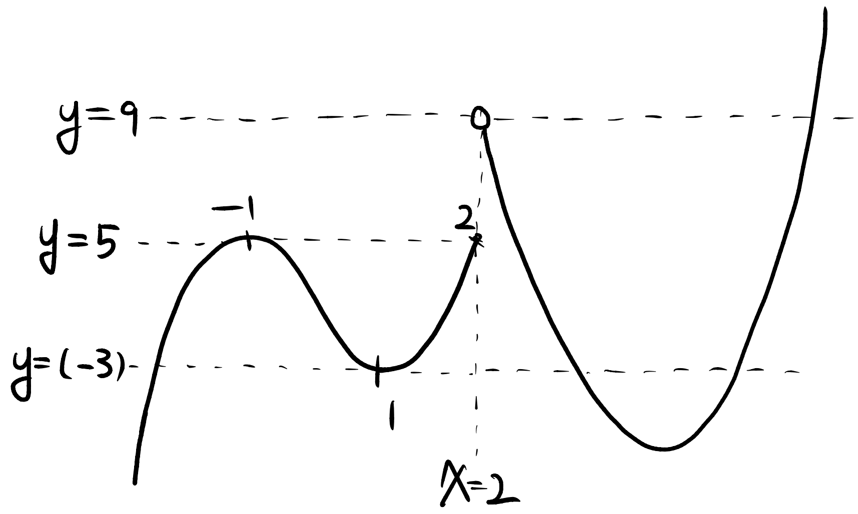
⇒  ↕ 에 모두 영향을 끼치도록 $x>2$에서의 $f(x)$를 추론하면

①



⇒ 주어진 조건을 만족하는 $k=-3$ 단 하나!

②



⇒ 조건을 만족하는 k 존재 X

곧 iii)-①이 원하는 개형이고, 이 경우 $y=a(x-2)(x-b)+9$의 꼭짓점이 $\left(\frac{2+b}{2}, -3\right)$이므로 대입하면

$$a\left(\frac{b-2}{2}\right)\left(\frac{2-b}{2}\right)+9=-3$$

⇒ $a(b-2)^2=48$ $(b>2)$

이를 만족하는 자연수 (a, b)의 순서쌍은 $48=48\times1^2, 12\times2^2, 3\times4^2$ 으로 표현될 수 있으므로 $(48, 3), (12, 4), (3, 6)$

㉠ $a+b$의 최댓값: $48+3=\boxed{51}$

만든 놈: crazy_hansuckwon
수만휘: 한석원의눈물
오르비: 모의고사손풀이올리는계정

역추적 ⊕ 구간 반복의 아이디어!

15. 첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} 2^{a_n} & (a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ \frac{1}{2}a_n & (a_n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킬 때, $a_6+a_7=3$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① 139 ② 146 ③ 153 ④ 160 ⑤ 167

먼저, $a_{n+1}=\begin{cases} 2^{a_n} & (a_n : \text{홀수}) \\ \frac{1}{2}a_n & (a_n : \text{짝수}) \end{cases}$ 에서 2^{a_n}은 무조건 짝수이므로

만약 a_n이 홀수라면 a_{n+1}은 무조건 짝수임을 안다.

↳ 다르게 말하면 a_{n+1}이 홀수이면 a_n은 짝수!

이 때, $a_6+a_7=3$ (홀수) 이므로 $(a_6, a_7)=$ (홀, 짝), (짝, 홀) 중 하나

i) $(a_6, a_7)=$ (홀, 짝)

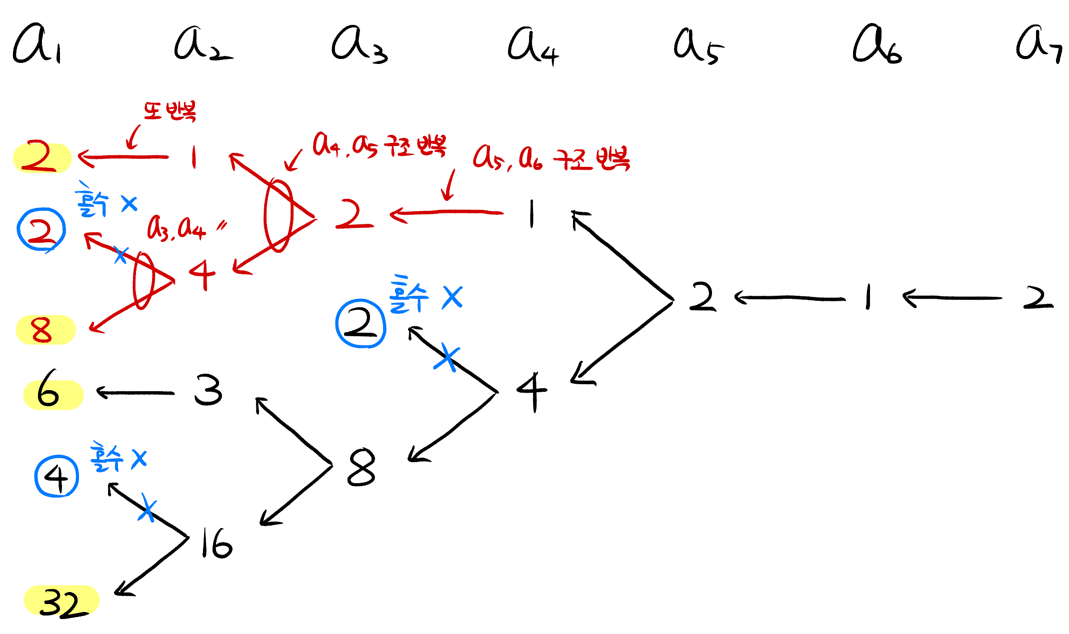
a_6 = 홀수이므로 $a_7=2^{a_6}$ 이고, 이 경우 $a_6+2^{a_6}=3$ 이다.

그런데 a_1이 자연수이므로 주어진 조건에 따르면 $\{a_n\}$의 모든 항이 자연수이다.

∴ $a_6+2^{a_6}=3$을 만족하는 자연수 a_6은 1뿐임을 알 수 있다. (∵ $a_6>1$이면 $2^{a_6}>3$)

⇒ $a_6=1$, $a_7=2$

역추적해서 a_1을 구해보자. (반복되는 구조 사용하면 시간 단축 ㄱㄴ)



곧, 이 경우 가능한 $a_1=2, 6, 8, 32$이다.

나머지 case는 다음 page ~

단답형

지수방정식 기초문제

16. 방정식 $3^{x-8}=\left(\frac{1}{27}\right)^x$을 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

$3^{x-8}=3^{-3x}$ 이므로

$x-8=-3x$ ∴ ㉠ $x=\boxed{2}$

곰의 미분 ~

17. 함수 $f(x)=(x+1)(x^2+3)$에 대하여 $f'(1)$의 값을 구하시오. [3점]

$f'(x)=(x^2+3)+(x+1)\cdot 2x$ 이므로

㉠ $f'(1)=4+4$
$=\boxed{8}$

만든 놈: crazy_hansuckwon
수만휘: 한석원의눈물
오르비: 모의고사손풀이올리는계정

15번 이어서

ii) $(a_6, a_7)=$(짝, 홀)

a_6=짝수이므로 $a_7=\frac{1}{2}a_6$ 이고, 이 경우 $a_6+\frac{1}{2}a_6=3$ 이다.

∴ $\frac{3}{2}a_6=3$ 이므로 $a_6=2$

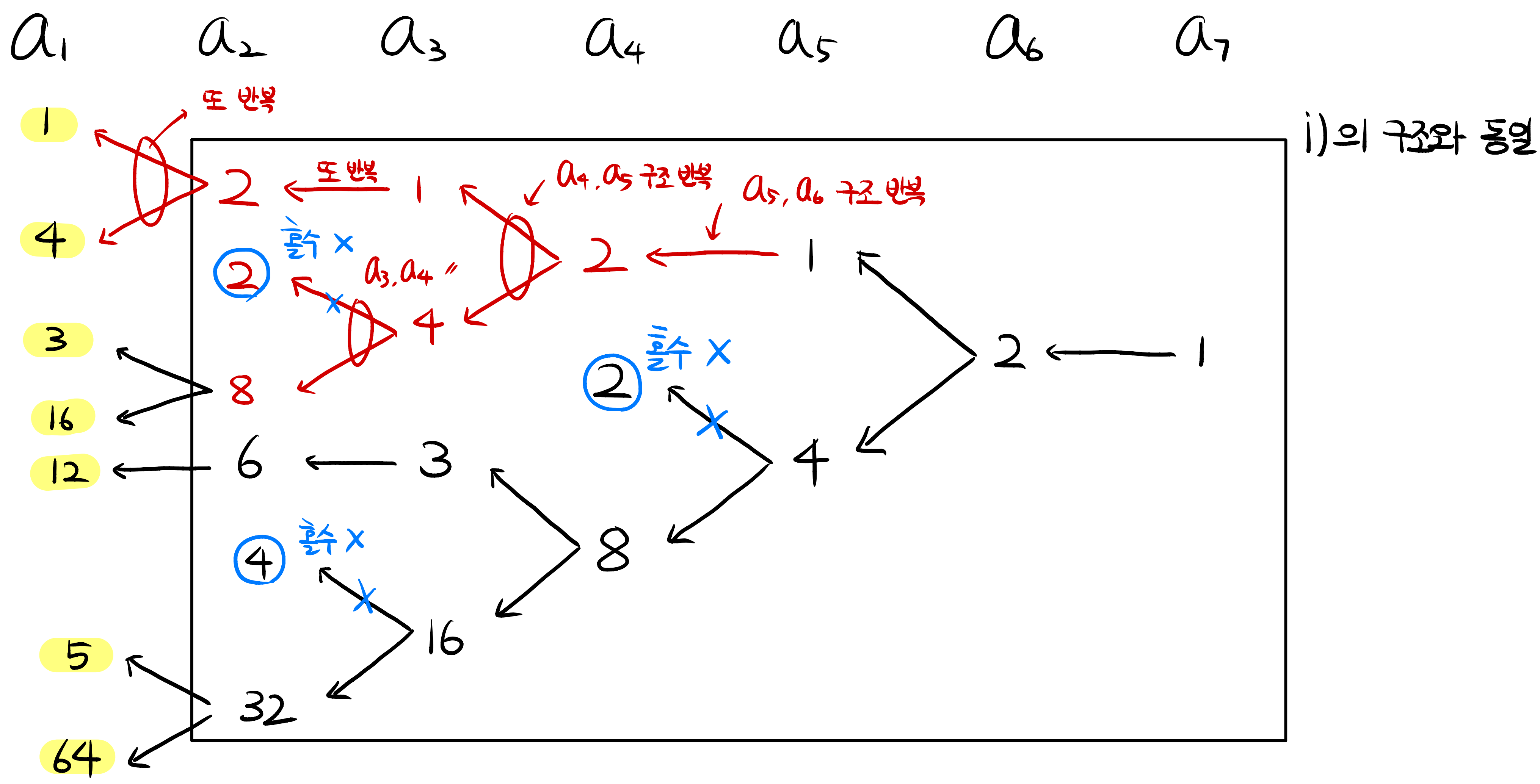
⇒ $a_6=2,\ a_7=1$

동일하게 역추적해서 a_1을 구해보자. (반복되는 구조 사용하면 시간 단축 ㄱㄴ)

그런데 구조를 잘 보면 i)의 구조가 그대로 오른쪽으로 간 것을 알 수 있다.

⇒ i) 에서의 $a_1\sim a_6$가 ii)에서의 $a_2\sim a_7$ 역할

⇒ a_1만 구하자!



곧, 이 경우 가능한 $a_1=1, 3, 4, 5, 12, 16, 64$ 이다.

∴ i)과 ii)를 종합하면 $a_1=1,2,3,4,5,6,8,12,16,32,64$

㉠ a_1의 합$=\boxed{153}$

만든 놈: crazy_hansuckwon
수만휘: 한석원의눈물
오르비: 모의고사손풀이올리는계정

Σ의 성질

18. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = \sum_{k=1}^{10}(2b_k-1),\quad \sum_{k=1}^{10}(3a_k+b_k)=33$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10} b_k$의 값을 구하시오. [3점]

① $\sum_{k=1}^{10} a_k = 2\sum_{k=1}^{10} b_k - 10$

② $3\sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} b_k = 33$ 이므로 연립하면

$3\left(2\sum_{k=1}^{10} b_k - 10\right) + \sum_{k=1}^{10} b_k = 33$

⇒ $7\sum_{k=1}^{10} b_k = 63$ 이므로 ㉠ $\sum_{k=1}^{10} b_k = \boxed{9}$

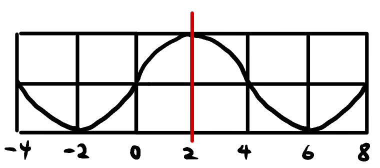
결국 또 대칭성 ⊕ 특수각

19. 함수 $f(x)=\sin\frac{\pi}{4}x$라 할 때, $0<x<16$에서 부등식

$$f(2+x)f(2-x)<\frac{1}{4}$$

을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합을 구하시오. [3점]

$f(x)=\sin\frac{\pi}{4}x$ 는 주기가 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}}=8$ 인 삼각함수이므로 그래프를 그려보면

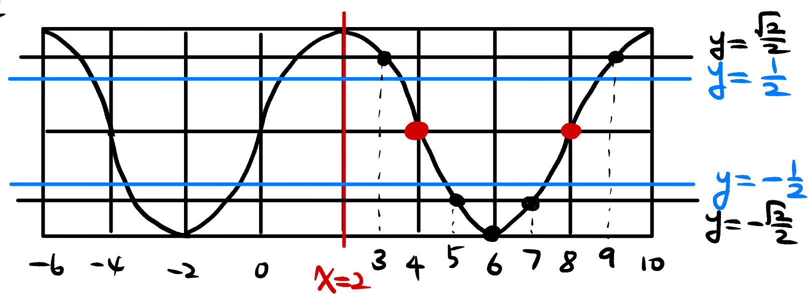


... : $x=2$ 에 대칭

이때 $f(2+x)$와 $f(2-x)$는 $x=2$에 대칭이므로 $f(2+x)=f(2-x)$

∴ $f(2+x)f(2-x)=\{f(2+x)\}^2<\frac{1}{4}$ 이므로 $-\frac{1}{2}<f(2+x)<\frac{1}{2}$ 이다.

곧



처럼 $f(4)$ ($x=2$일 경우), $f(8)$ ($x=6$일 경우) ...

일 때만 주어진 조건을 만족하므로 (모르겠으면 x에 자연수 대입 ㄱㄱ)

$x=2, 6, 10, 14$ ($0<x<16$) 에서 조건 성립

㉠ $\boxed{32}$

원 위의 점? 조건 두두두두 튀어나옴

20. $a>\sqrt{2}$ 인 실수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=-x^3+ax^2+2x$$

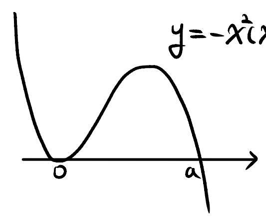
라 하자. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 O$(0, 0)$에서의 접선이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점 중 O가 아닌 점을 A라 하고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서의 접선이 x축과 만나는 점을 B라 하자. 점 A가 선분 OB를 지름으로 하는 원 위의 점일 때, $\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{AB}}$의 값을 구하시오. [4점]

문제 상황을 파악해보자.

$f(x)=-x^3+ax^2+2x$ 에서 a의 값을 모르니까 $f(x)$ 그래프 확정 X

⇒ $f'(x)=-3x^2+2ax+2$ 에서 $(0, 0)$에서의 접선은 $y=2x$

곧 $-x^3+ax^2+2x=2x$ 에서 점 A의 좌표를 구할 수 있다.

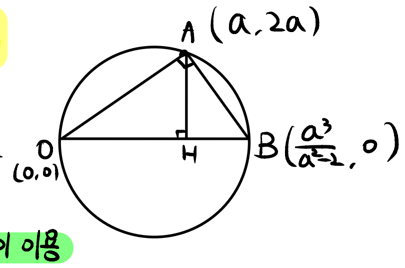


∴ $A(a, 2a)$

또한 점 $A(a, 2a)$에서 $f(x)$의 접선은 $y=f'(a)(x-a)+f(a)$ 이므로

$y=(-a^2+2)(x-a)+2a$

$=(-a^2+2)x+a^3$ 이므로 x절편 $B\left(\frac{a^3}{a^2-2}, 0\right)$



이 때 점 A가 $\overline{OB}$를 지름으로 하는 원 위의 점이므로 오른쪽 그림처럼 $\angle OAB=\frac{\pi}{2}$ 이다.

⇒ 문제에서 구하도록 한 값이 $\overline{OA}\times\overline{AB}$ 이므로 $\triangle OAB$의 넓이 이용

$\triangle OAB$는 직각$\triangle$이므로 $\frac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{AB}=\frac{1}{2}\times\overline{OB}\times\overline{AH}$

∴ $\overline{OA}\times\overline{AB}=\overline{OB}\times\overline{AH}=\frac{a^3}{a^2-2}\times 2a$

$=\frac{2a^4}{a^2-2}$ 을 구하면 된다.

이 때, $\angle OAB=\frac{\pi}{2}$ 이므로 $\overline{OA}$의 기울기 × $\overline{AB}$의 기울기 $=-1$ 이고,

$\overline{OA}$의 기울기 $=2$ 이므로 $\overline{AB}$의 기울기 $=\frac{0-2a}{\frac{a^3}{a^2-2}-a}$

$=-a^2+2=-\frac{1}{2}$ 이다.

∴ $a^2=\frac{5}{2}$ 이므로 ㉠ $\overline{OA}\times\overline{AB}=\frac{2a^4}{a^2-2}$ 에 대입하면 $\frac{2\times\frac{25}{4}}{\frac{5}{2}-2}=\boxed{25}$

만든 놈: crazy_hansuckwon
수만휘: 한석원의눈물
오르비: 모의고사손풀이올리는계정

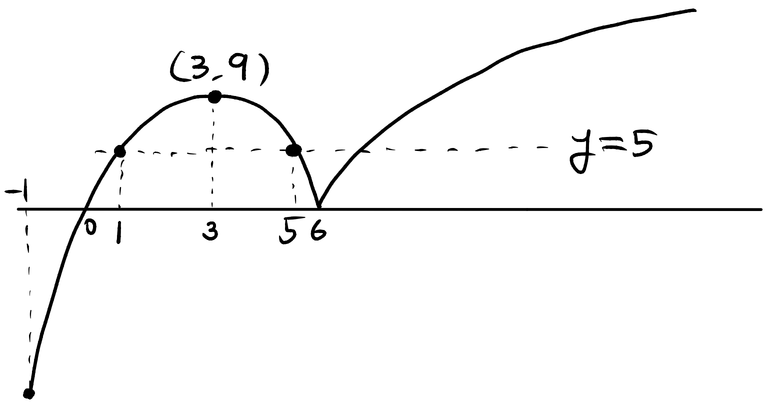
결국 구간의 양끝점

21. 양수 a에 대하여 $x \ge -1$에서 정의된 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+6x & (-1\le x<6)\\ a\log_4(x-5) & (x\ge 6)\end{cases}$$

이다. $t \ge 0$인 실수 t에 대하여 닫힌구간 $[t-1,\ t+1]$에서의 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 하자. 구간 $[0,\ \infty)$에서 함수 $g(t)$의 최솟값이 5가 되도록 하는 양수 a의 최솟값을 구하시오. [4점]

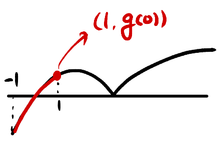
f(x)의 그래프를 그려보면



여기서 예를 들어 g(t)가 어떤 함수인지를 파악해보자.

ex) t=0 이면

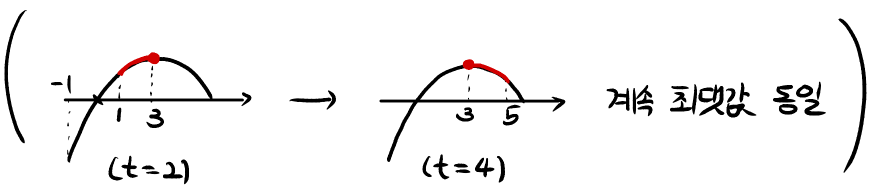
[−1, 1]에서의 f(x)의 최댓값 g(0) :



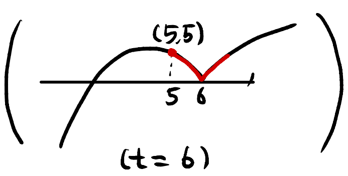
∴ g(0)=f(1)=5

곧 t가 증가하면 t=2 까지는 y=f(x)의 개형을 따라 g(t)도 따라서 증가할 것이다.
(정확하게는, g(t)=f(t+1) (0≤t≤2))

그 후 구간의 왼쪽 끝이 x=3이 되는 t=4까지 g(t)는 f(3)으로 동일하게 유지된다.

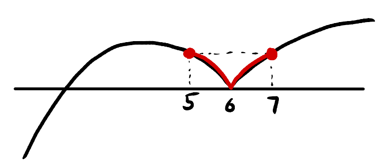


이제 t가 더 증가하면 g(t) 또한 감소하기 시작하는데,
이 때의 구간 내의 최댓값이 5 아래로 떨어지지 않도록 하는것이 문제.
그런데 f(5)=5임을 이용해 보면
구간의 왼쪽 끝이 x=5인 경우 전까지는 (t<6) g(t)≥f(5)=5이므로 문제 X



⇒ t>6이 되는 순간 구간의 왼쪽 끝은 5보다 작은 값을 가지므로
g(t)≥5를 만족하려면 구간의 오른쪽 끝, 즉 f(7)≥5를 만족해야 한다.

↳



이 이후로는 g(t)는 계속 구간의 오른쪽 끝을 따라 증가하므로 문제 X

∴ $a\log_4 2 \ge 5$ 이므로 $a \ge 10$

㉠ a의 최솟값 $\boxed{10}$

문제 기똥차게 잘 냈다. 쉬운듯 현장에서는 어려웠을 듯

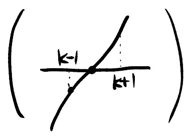
22. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> 함수 $f(x)$에 대하여
>
> $f(k-1)f(k+1)<0$
>
> 을 만족시키는 정수 k는 존재하지 않는다.

$f'\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4},\ f'\left(\frac{1}{4}\right)<0$일 때, $f(8)$의 값을 구하시오. [4점]

문제 조건을 해석해보면
f(k−1)f(k+1) < 0을 만족시키는 '정수' k는 존재 X
⇒ 모든 정수 k에 대해 f(k−1)f(k+1) ≥ 0
⇒ 〃 f(k−1)와 f(k+1)는 부호가 같거나 0

그런데 f(x)는 삼차함수이므로 필연적으로 함숫값의 부호가 바뀌는 지점이 존재할 수밖에 없고, 일반적인 경우라면 조건을 만족하기 힘듦

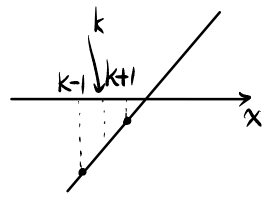


⇒ 함숫값의 부호가 바뀌는 지점에서의 처리가 관건!

예를 들어보자.

만약 f(k−1)<0 이라면 조건에 의해 f(k+1)도 음수거나 0이어야 한다.

⇒

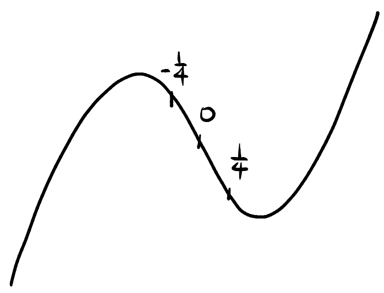


이 때 f(k+1)이 음수라면 f(k)도 음수여야 하고
f(k+2)이 음수이고, 다시 f(k+3)도 음수고... 무한반복

∴ 언젠가는 함숫값의 부호가 바뀌어야 하므로 누군가가 총대 메고 0이 되어야 한다.

그런데 일반적인 경우라면 f(k−1)<0, f(k)=0 이면 f(k+1)>0 이므로
f(k−1)f(k+1)<0 이라서 모순이다. ∴ f(k+1)=0

또한, 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 f(x)에서
$f'(-\frac{1}{4})=-\frac{1}{4}<0$ 이고, $f'(\frac{1}{4})<0$ 이므로 f(x)는 다음 그래프 개형을 가짐



다음 page

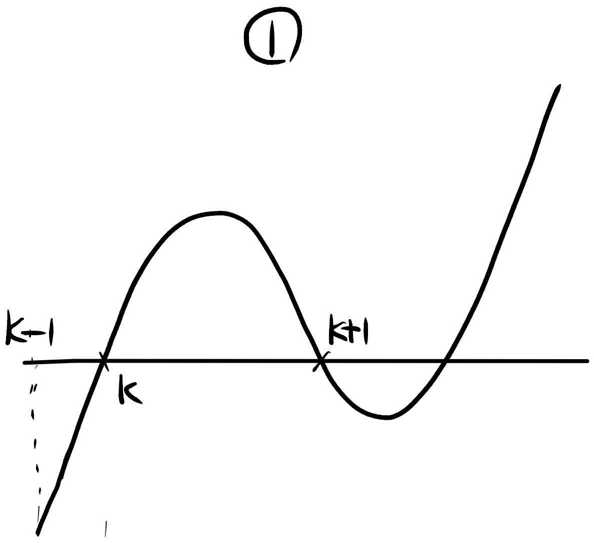
곧, f(0)<0 이다.

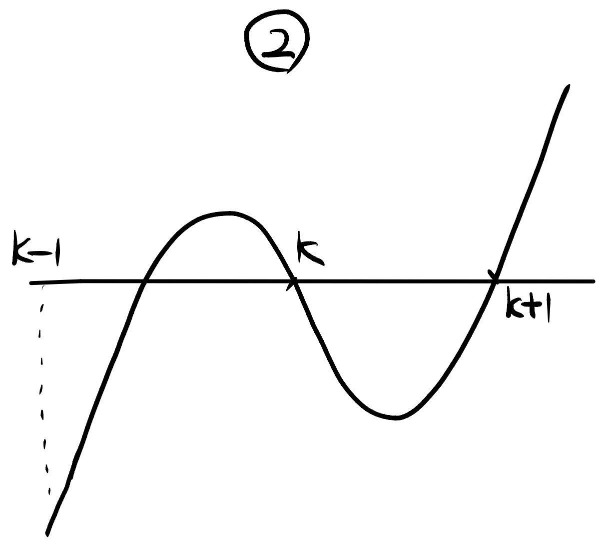
⇒ 위의 내용을 종합하면 그래프 개형은 대충 둘 중 하나와 같다.

> ※ 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
>
> ○ 이어서, 「선택과목(확률과 통계)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

22번 이어서 … ①

만든 놈: crazy_hansuckwon
수만휘: 한석원의눈물
오르비: 모의고사손풀이올리는계정

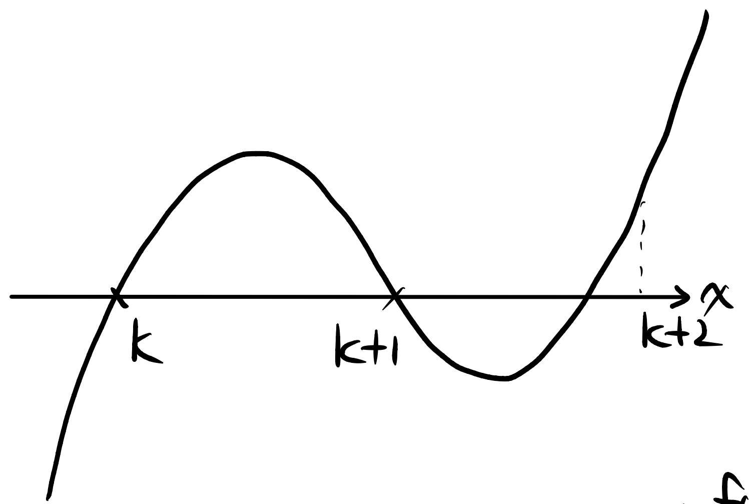




Case ①

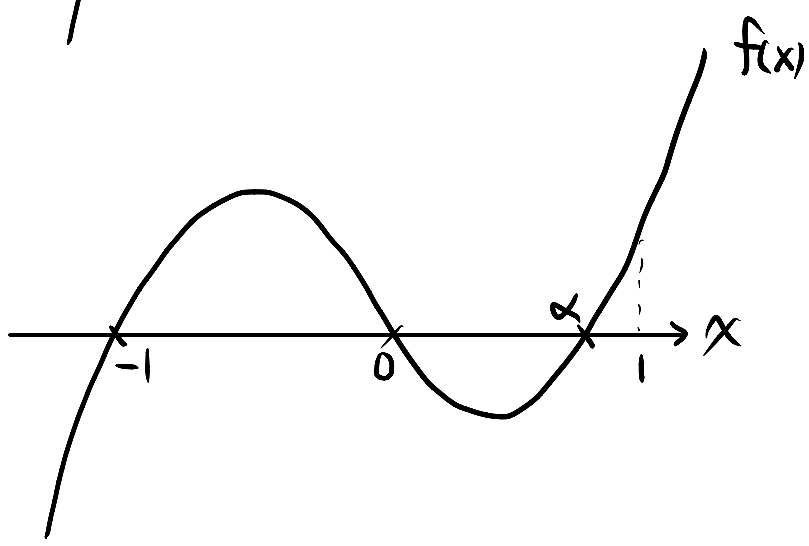
이 때, 만약 $f(k+2)<0$ 이라면 또 $[k-1, k]$와 동일한 문제가 발생하므로
$f(m)=0$, $f(m+1)=0$ 인 $k+2<m$ 인 정수 m이 존재해야 하는데, 불가능하다.
$\therefore f(k+2) \geq 0$

$\Rightarrow$



에서 $f'(0)<0$ 이므로 $k+1=0$ 이다.

$\Rightarrow$



이 경우 $f(x)=(x+1)x(x-\alpha)$ $(0<\alpha<1)$ 이고,
미분하면 $f'(x)=x(x-\alpha)+(x+1)(x-\alpha)+(x+1)x$ 에서 $f'\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4}$을 대입하면

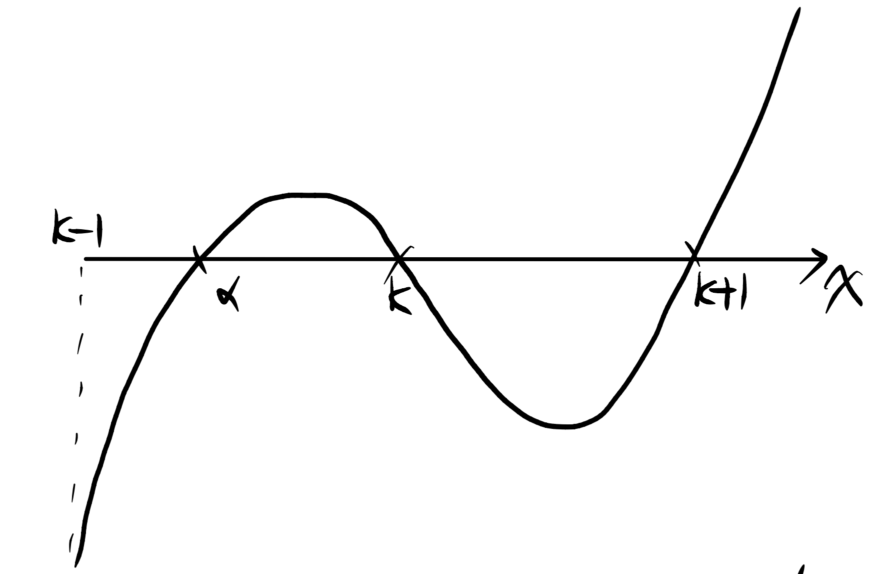
$$-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4}-\alpha\right)+\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{4}-\alpha\right)+\frac{3}{4}\times\left(-\frac{1}{4}\right)$$
$$\Rightarrow \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}+\alpha\right)-\frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}+\alpha\right)-\frac{3}{16}$$

$\therefore \alpha=-\frac{1}{8}$ 이므로 $(0<\alpha<1)$ 이라는 조건에 모순.

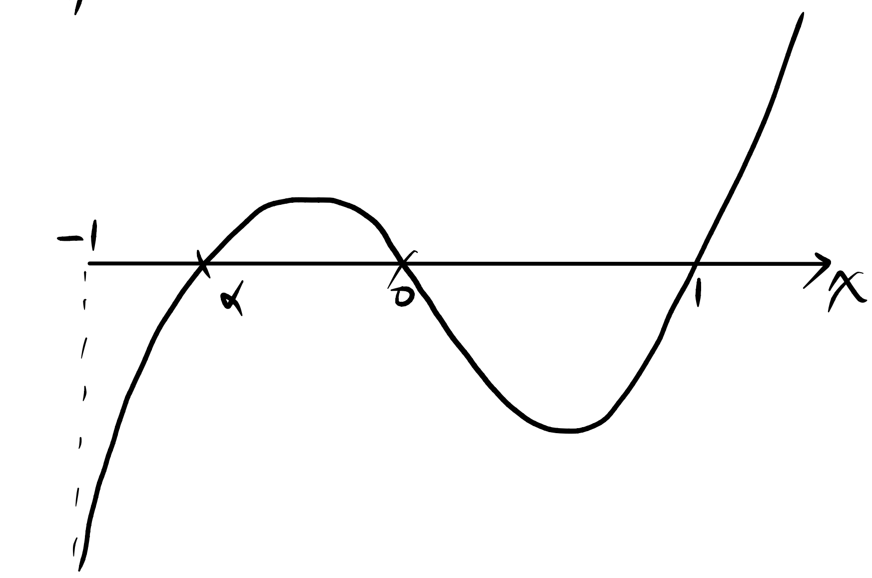
만든 놈: crazy_hansuckwon
수만휘: 한석원의눈물
오르비: 모의고사손풀이올리는계정

Case ②

마찬가지로 생각해보자.

⇒ 

에서 $f'(0)<0$ 이므로 $k=0$ 이다.

⇒ 

곧 함수를 $f(x)=x(x-1)(x-\alpha)$ $(-1<\alpha<0)$으로 둘 수 있다.
미분하면 $f'(x)=(x-1)(x-\alpha)+x(x-\alpha)+x(x-1)$ 이고 $f'\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4}$ 대입.

$$\Rightarrow -\frac{5}{4}\left(-\frac{1}{4}-\alpha\right)-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4}-\alpha\right)-\frac{1}{4}\left(-\frac{5}{4}\right)$$
$$\Rightarrow \frac{5}{4}\left(\frac{1}{4}+\alpha\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}+\alpha\right)+\frac{5}{16}=-\frac{1}{4}$$

∴ $\alpha=-\frac{5}{8}$ 이므로 일단 주어진 범위는 만족.

$f'\left(\frac{1}{4}\right)$ 또한 계산해보면 $f'\left(\frac{1}{4}\right)<0$ 을 만족한다.

∴ $f(x)=x(x-1)\left(x+\frac{5}{8}\right)$ 이므로 ㉠ $f(8)=8\times7\times\left(8+\frac{5}{8}\right)$
$=7\times(64+5)$
$=\boxed{483}$