제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

홀수형

5지선다형

같포순

23. 5개의 문자 x, x, y, y, z를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는? [2점]

① 10 ② 20 ③ 30 ④ 40 ⑤ 50

㉮ $\frac{5!}{2!\cdot 2!} = \boxed{30}$

간단한 확률계산

24. 두 사건 A, B는 서로 독립이고

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{1}{4}, \quad \mathrm{P}(A^C) = 2\mathrm{P}(A)$$

일 때, $\mathrm{P}(B)$의 값은? (단, A^C은 A의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{5}{8}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{7}{8}$

두 사건 A, B가 독립이므로 $P(A)P(B) = P(A \cap B)$ 이다.
곧 $P(A)P(B) = \frac{1}{4}$ 이고, $P(A^c) = 1 - P(A) = 2P(A)$ 이므로 $P(A) = \frac{1}{3}$

$\therefore \frac{1}{3}P(B) = \frac{1}{4}$에서 ㉮ $P(B) = \boxed{\frac{3}{4}}$

만든 놈: crazy_hansuckwon
수만휘: 한석원의눈물
오르비: 모의고사손풀이올리는계정

여사건 놓치지 말자!

25. 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6이 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 있다. 이 6장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 임의로 나열할 때, 양 끝에 놓인 카드에 적힌 두 수의 합이 10 이하가 되도록 카드가 놓일 확률은? [3점]

① $\frac{8}{15}$ ② $\frac{19}{30}$ ③ $\frac{11}{15}$ ④ $\frac{5}{6}$ ⑤ $\frac{14}{15}$

구하는 경우 케이스가 너무 많음!
⇒ 여사건 ~

여사건 : 양 끝 숫자합 11

4!
∴ 5 □ □ □ □ 6
6 □ □ □ □ 5

⇒ 6! (전체 경우의 수) − 2×4!

㉠ $\frac{6!-2\times4!}{6!} = \frac{\cancel{4\times3\times2\times1}\times(6\times5-2)}{6\times5\times\cancel{4\times3\times2\times1}}$

$= \frac{28}{30}$

$= \boxed{\frac{14}{15}}$

생긴건 생소할 수 있어도 뭐...

26. 4개의 동전을 동시에 던져서 앞면이 나오는 동전의 개수를 확률변수 X라 하고, 이산확률변수 Y를

$$Y=\begin{cases} X & (X\text{가 } 0 \text{ 또는 } 1\text{의 값을 가지는 경우}) \\ 2 & (X\text{가 } 2 \text{ 이상의 값을 가지는 경우}) \end{cases}$$

라 하자. $\mathrm{E}(Y)$의 값은? [3점]

① $\frac{25}{16}$ ② $\frac{13}{8}$ ③ $\frac{27}{16}$ ④ $\frac{7}{4}$ ⑤ $\frac{29}{16}$

확률변수 X의 확률분포를 구해보면 이항분포에 의해

X	0	1	2	3	4
$P(X=i)$	$\frac{{}_4C_0}{2^4}$	$\frac{{}_4C_1}{2^4}$	$\frac{{}_4C_2}{2^4}$	$\frac{{}_4C_3}{2^4}$	$\frac{{}_4C_4}{2^4}$

이다.

곧 이산확률변수 Y의 정의에 의해
Y는 $\frac{{}_4C_0}{2^4}$의 확률로 0, $\frac{{}_4C_1}{2^4}$의 확률로 1, 나머지 확률로 2의 값을 갖는다.
$\frac{1}{16}$ $\frac{4}{16}$ $\frac{11}{16}$

∴

Y	0	1	2
$P(Y=i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{11}{16}$

곧 ㉠ $E(Y) = 0\times\frac{1}{16} + 1\times\frac{4}{16} + 2\times\frac{11}{16}$

$= \boxed{\frac{13}{8}}$

만든 놈: crazy_hansuckwon
수만휘: 한석원의눈물
오르비: 모의고사손풀이올리는계정

이딴게 27번?

27. 정규분포 $N(m, 5^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 49인 표본을 임의추출하여 얻은 표본평균이 $\overline{x}$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $a \le m \le \frac{6}{5}a$이다. $\overline{x}$의 값은? (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $P(|Z| \le 1.96) = 0.95$로 계산한다.) [3점]

① 15.2 ② 15.4 ③ 15.6 ④ 15.8 ⑤ 16.0

모표준편차 = 5, 표본의 크기 49이므로
신뢰도 95%의 신뢰구간은

$\underbrace{\overline{x} - 1.96\frac{5}{\sqrt{49}}}_{a} \le m \le \underbrace{\overline{x} + 1.96\frac{5}{\sqrt{49}}}_{\frac{6}{5}a}$ 이다.

$\therefore \frac{6}{5}\left(\overline{x} - 1.96 \times \frac{5}{7}\right) = \overline{x} + 1.96 \times \frac{5}{7}$ 이므로

$\overline{x} = 11 \times 1.96 \times \frac{5}{7}$ ② $\overline{x} = \boxed{15.4}$

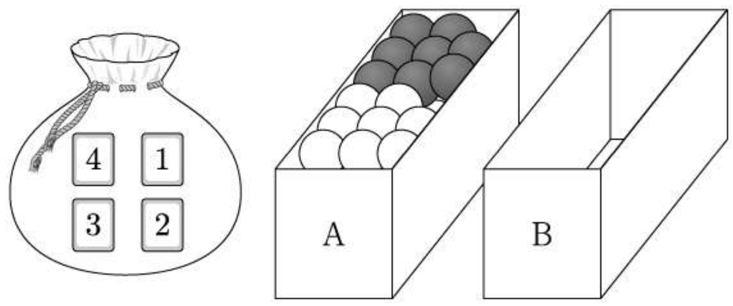
조건 단순화 ⊕ 조건부확률은 차근차근

28. 하나의 주머니와 두 상자 A, B가 있다. 주머니에는 숫자 1, 2, 3, 4가 하나씩 적힌 4장의 카드가 들어 있고, 상자 A에는 흰 공과 검은 공이 각각 8개 이상 들어 있고, 상자 B는 비어 있다. 이 주머니와 두 상자 A, B를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주머니에서 임의로 한 장의 카드를 꺼내어 카드에 적힌 수를 확인한 후 다시 주머니에 넣는다.
>
> 확인한 수가 1이면 상자 A에 있는 흰 공 1개를 상자 B에 넣고,
>
> 확인한 수가 2 또는 3이면 상자 A에 있는 흰 공 1개와 검은 공 1개를 상자 B에 넣고,
>
> 확인한 수가 4이면 상자 A에 있는 흰 공 2개와 검은 공 1개를 상자 B에 넣는다.

이 시행을 4번 반복한 후 상자 B에 들어 있는 공의 개수가 8일 때, 상자 B에 들어 있는 검은 공의 개수가 2일 확률은? [4점]

① $\frac{3}{70}$ ② $\frac{2}{35}$ ③ $\frac{1}{14}$ ④ $\frac{3}{35}$ ⑤ $\frac{1}{10}$



길게 뭐가 쓰여있지만 결국 간단하게 정리하면

$\frac{1}{4}$ 확률로 ○
$\frac{2}{4}$ 확률로 ○●
$\frac{1}{4}$ 확률로 ○○● 이다.

곧 옮기는 공의 개수가 각각 1, 2, 3개이다.
⇒ 4회의 시행으로 8개를 옮겨야 하므로 8을 4개의 자연수로 분할하면
① (3, 3, 1, 1), ② (3, 2, 2, 1), ③ (2, 2, 2, 2) 이다.

i) (3, 3, 1, 1)
$\frac{4!}{2!\,2!} \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{6}{4^4}$

ii) (3, 2, 2, 1)
$\frac{4!}{2!} \times \left(\frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{2}{4}\right)^2 \times \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{2^2 \times 12}{4^4}$

iii) (2, 2, 2, 2)
$\left(\frac{2}{4}\right)^4 = \frac{2^4}{4^4}$

(계산의 편의를 위해 분모 통일)

그 중 검은 공이 2개인 경우는 i)뿐이므로

구하는 확률은 $\dfrac{\frac{6}{4^4}}{\frac{6+48+16}{4^4}} = \boxed{\frac{3}{35}}$

만든 놈: crazy_hansuckwon
수만휘: 한석원의 눈물
오르비: 모의고사손풀이올리는계정

단답형

차근차근 세보면 쉽다. 주의! $\begin{cases} a \le c \le d \\ b \le c \le d \end{cases}$ 가 같은 조건이라고 냅다 $({}_6H_3)^2$ 하지는 말자.

29. 다음 조건을 만족시키는 6 이하의 자연수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수를 구하시오. [4점]

$a \le c \le d$이고 $b \le c \le d$이다.

$a, b \le c \le d$ 이므로 c를 기준으로 생각하자.

i) $c=6$

$d=6$ 확정, $a, b \le 6$만 만족하면 되므로 6^2가지 경우의 수

$\Rightarrow 1 \times 6^2$

ii) $c=5$

$d=5, 6$ 가능, $a, b \le 5$ 만족 : 5^2가지

$\Rightarrow 2 \times 5^2$

⋮

이와 같은 과정을 반복하면 총 경우의 수는

$1 \times 6^2 + 2 \times 5^2 + 3 \times 4^2 + 4 \times 3^2 + 5 \times 2^2 + 6 \times 1^2$인데

그냥 다 계산해서 더해도 되고, $\sum_{k=1}^{6} k(7-k)^2$으로 계산해도 된다.

㉠ $\boxed{196}$

30연도 식을 수 있다는 것을 수능에서 보여줌

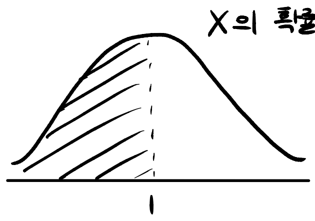
30. 양수 t에 대하여 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(1, t^2)$을 따른다.

$$\mathrm{P}(X \le 5t) \ge \frac{1}{2}$$

이 되도록 하는 모든 양수 t에 대하여 $\mathrm{P}(t^2 - t + 1 \le X \le t^2 + t + 1)$의 최댓값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 값을 k라 하자. $1000 \times k$의 값을 구하시오. [4점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.6	0.226
0.8	0.288
1.0	0.341
1.2	0.385
1.4	0.419

X의 확률분포 그래프

$X \sim N(1, t^2)$을 따르므로 

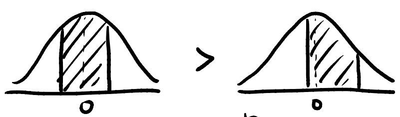
$P(X \le 5t) \ge \frac{1}{2}$를 만족하려면 $5t \ge 1$, 즉 $t \ge \frac{1}{5}$이어야 한다.

이때 $P(t^2 - t + 1 \le X \le t^2 + t + 1)$을 표준화하면

$P\left(\frac{t^2 - t}{t} \le Z \le \frac{t^2 + t}{t}\right)$

$= P(t - 1 \le Z \le t + 1)$의 최댓값을 구해야 한다.

표준정규분포는 평균, 즉 0을 기준으로 구간이 최대한 모여있을수록 큰 값을 가지는데

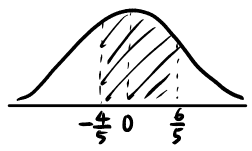
(ex) 

)

그렇게 하려면 $t=0$, 곧 $P(t-1 \le Z \le t+1) \Rightarrow P(-1 \le Z \le 1)$일 때 이론상 최대이다.

하지만 문제에서 $t \ge \frac{1}{5}$이므로 이를 반영해 계산해보면 $t = \frac{1}{5}$일 때 최대임을 안다.

(왜? 주어진 구간은 t를 기준으로 ± 1 씩의 구간, 즉 t가 평균에 최대한 가까워야 함)

$\therefore$ $t = \frac{1}{5}$이고, 주어진 상황은 

이므로

구하는 최댓값은 $P\left(-\frac{4}{5} \le Z \le \frac{6}{5}\right)$이다.

㉠ $P\left(0 \le Z \le \frac{4}{5}\right) + P\left(0 \le Z \le \frac{6}{5}\right)$

$= 0.288 + 0.385$

$= 0.673 = k$ 이므로 $1000k = \boxed{673}$

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「선택과목(미적분)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

만든 놈: crazy_hansuckwon
수만휘: 한석원의 눈물
오르비: 모의고사 손풀이 올리는 계정

제 2 교시

수학 영역(미적분)

홀수형

5지선다형

풀이대로 푼 친구들 있죠? ㅋㅋ

23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{\ln(1+5x)}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{5}$　② $\frac{2}{5}$　③ $\frac{3}{5}$　④ $\frac{4}{5}$　⑤ 1

$\lim\limits_{x\to 0}$ 이므로 $x\neq 0$이고, 분자/분모를 각각 x로 나눠주면

준 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\ln(1+3x)}{3x}\cdot 3}{\frac{\ln(1+5x)}{5x}\cdot 5}=\boxed{\frac{3}{5}}$

매개변수 미분법. 술술 지렸다

24. 매개변수 $t\,(t>0)$으로 나타내어진 곡선

$$x=\ln\left(t^3+1\right),\quad y=\sin\pi t$$

에서 $t=1$일 때, $\dfrac{dy}{dx}$의 값은? [3점]

① $-\frac{1}{3}\pi$　② $-\frac{2}{3}\pi$　③ $-\pi$　④ $-\frac{4}{3}\pi$　⑤ $-\frac{5}{3}\pi$

x와 y를 각각 t에 대해 미분하면

$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{3t^2}{t^3+1}$, $\dfrac{dy}{dt}=\pi\cos\pi t$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{(t^3+1)\pi\cos\pi t}{3t^2}$ 이므로 $t=1$을 대입하면

준 $\dfrac{dy}{dx}=\boxed{-\frac{2}{3}\pi}$

(당연히 $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ 각각의 식에 먼저 $t=1$을 대입해도 무방!)

만든 놈: crazy_hansuckwon
수만휘: 한석원의눈물
오르비: 모의고사손풀이올리는계정

역함수미분 ⊕ 로그미분법 ⊕ 부연설명 꼭 읽어보시길

25. 양의 실수 전체의 집합에서 정의되고 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 있다. $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이고, $g'(x)$는 양의 실수 전체의 집합에서 연속이다.
↘ 부연설명 다음 page
모든 양수 a에 대하여

$$\int_1^a \frac{1}{g'(f(x))f(x)}dx = 2\ln a + \ln(a+1) - \ln 2$$

이고 $f(1)=8$일 때, $f(2)$의 값은? [3점]

① 36 ② 40 ③ 44 ④ 48 ⑤ 52

f와 g는 미분가능하고, 서로 역함수 관계에 있으므로 역함수의 미분법에 의해

$f'(x) = \dfrac{1}{g'(f(x))}$ 이다.

곧 $\int_1^a \frac{1}{g'(f(x))f(x)}dx = \int_1^a \frac{f'(x)}{f(x)}dx$

$= [\ln|f(x)|]_1^a$

$= \ln|f(a)| - \ln|f(1)|$ 이고, $f(1)=8$ 이므로

$\Rightarrow \ln|f(a)| - 3\ln 2$ 이다.

$\therefore \ln|f(a)| - 3\ln 2 = 2\ln a + \ln(a+1) - \ln 2$

$\Rightarrow \ln|f(a)| = 2\ln a + \ln(a+1) + 2\ln 2$

$= \ln(4a^2(a+1))$ (모든 양수 a에서 $4a^2(a+1) > 0$)

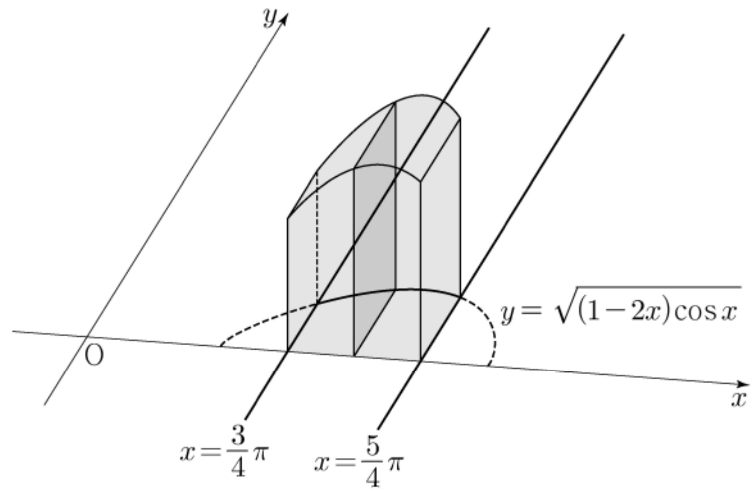
이 때, f의 역함수 g의 정의역이 양수이므로 f의 치역도 양수이다.

$\Rightarrow f(a) > 0$ 이므로 $|f(a)| = f(a)$

곧 $f(a) = 4a^2(a+1)$ 에서 ㉮ $f(2) = \boxed{48}$

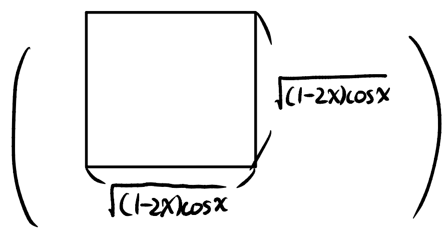
입체 정적분, 계산 좀 귀찮아도 뭐 금방해야죠

26. 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{(1-2x)\cos x}$ $\left(\frac{3}{4}\pi \le x \le \frac{5}{4}\pi\right)$와 x축 및 두 직선 $x=\frac{3}{4}\pi$, $x=\frac{5}{4}\pi$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는? [3점]



① $\sqrt{2}\pi-\sqrt{2}$ ② $\sqrt{2}\pi-1$ ③ $2\sqrt{2}\pi-\sqrt{2}$
④ $2\sqrt{2}\pi-1$ ⑤ $2\sqrt{2}\pi$

단면이 모두 정사각형
$\Rightarrow$ 단면의 넓이 $(1-2x)\cos x$



곧 $\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi}(1-2x)\cos x\,dx = [(1-2x)\sin x]_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi} + 2\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi}\sin x\,dx$ (부분적분)

$= [(1-2x)\sin x]_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi} - 2[\cos x]_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi}$

cosx가 x=π 대칭인거 이용하면 조금이나마 시간 단축 ㄱㄴ

$= \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\frac{5}{2}\pi\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\frac{3}{2}\pi\right)\right\} - 2\times 0$

$= 2\sqrt{2}\pi - 2$

㉮ $\boxed{2\sqrt{2}\pi-2}$

25번 부연설명

만든 놈: crazy_hansuckwon
수만휘: 한석원의눈물
오르비: 모의고사손풀이올리는계정

※ 문제 조건이 과한 조건이 아닌지 생각하시는 분들을 위해 ~

⇒ $g(x)$가 미분가능하다 → $g'(x)$는 연속이다 보장! 이라고 생각하시는 분 있으신가요?

그래서 '아니 이미 $g'(x)$는 연속함수인게 확정인데 굳이 연속조건을 왜 또 주지?' 라고 생각하신 분들이 계시다면 잘못 알고 계신겁니다.

정확히는 $g(x)$ 미분가능 $\underset{\text{O}}{\overset{\text{X}}{\rightleftarrows}}$ $g'(x)$ 연속 입니다.

지금까지의 손풀이에서는 그냥 두 조건이 필요충분조건인 것처럼 썼는데, 이는 매번 설명하는 것도 불가능하고 해서 그랬던 거고 실제는 그렇지 않습니다.
문제에서 정확히 짚어줘서 드디어 이 내용을 쓸 기회가 생겼네요.

물론, 거의 대부분의 '고등학교' 수학 문제에서는 상관이 없는게 맞습니다.
문제가 '$g'(x)$의 좌극한과 우극한 중 하나라도 존재하지 않을때' 발생하고,
대부분의 문제는 $g'(x)$의 좌극한과 우극한이 모두 정의되니까요.

뭔 개소리인가 싶으시면 아주 유명한 예시를 하나 보여드리겠습니다.

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

의 함수를 봅시다. (물론 수II의 교육과정은 X)

① $f'(0)=\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$ (미분계수 존재 : 미분가능!)

② $f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$ 에서 $\lim_{x\to 0}f'(x)$는 존재하지 않습니다. (연속 X)

따라서 굳이 문제에서 도함수가 연속이라는 추가 조건을 준거고,
그렇구나 하고 문제푸시면 됩니다.

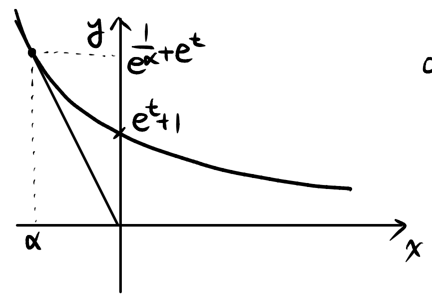
그래도 위 내용은 알아두세요!

최근에 나온 27번 중 제일 어려운듯. 매개변수 잡고 꾸역꾸역 계산

27. 실수 t에 대하여 원점을 지나고 곡선 $y=\frac{1}{e^x}+e^t$에 접하는 직선의 기울기를 $f(t)$라 하자. $f(a)=-e\sqrt{e}$를 만족시키는 상수 a에 대하여 $f'(a)$의 값은? [3점]

① $-\frac{1}{3}e\sqrt{e}$ ② $-\frac{1}{2}e\sqrt{e}$ ③ $-\frac{2}{3}e\sqrt{e}$ ④ $-\frac{5}{6}e\sqrt{e}$ ⑤ $-e\sqrt{e}$

문제 상황을 그려보면



이므로 t가 변하면 α도 변한다.

⇒ 매개변수 설정!

원점을 지나는 접선이므로

$(0,0)\sim(\alpha, \frac{1}{e^\alpha}+e^t)$까지의 평균변화율 = $(x=\alpha)$에서의 순간변화율 이용

⇒ $\dfrac{\frac{1}{e^\alpha}+e^t}{\alpha}=-e^{-\alpha}=f(t)$ 이다.

⇒ $\frac{1}{e^\alpha}+e^t=-\frac{\alpha}{e^\alpha}$ 이므로 $-\frac{\alpha+1}{e^\alpha}=e^t$ 여기서 두 가지 풀이가능!

sol1) 꾸역꾸역 t를 α에 대한 식으로 바꾸고 미분

$-\frac{\alpha+1}{e^\alpha}=e^t$에서 $t=\ln\left(-\frac{\alpha+1}{e^\alpha}\right)$이다.

∴ $f\left(\ln\left(-\frac{\alpha+1}{e^\alpha}\right)\right)=-e^{-\alpha}$

곧 $f(a)=-e\sqrt{e}$를 만족하는 경우는 $\alpha=-\frac{3}{2}$인 경우다. $\left(a=\ln\left(-\frac{-\frac{3}{2}+1}{e^{-\frac{3}{2}}}\right)=\frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}}\right)$

양변을 미분하면

$-\frac{\alpha}{\alpha+1}f'\left(\ln\left(-\frac{\alpha+1}{e^\alpha}\right)\right)=e^{-\alpha}$ 이므로 $\alpha=-\frac{3}{2}$을 대입하면

㉠ $f'\left(\frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}}\right)=f'(a)=\boxed{-\frac{1}{3}e\sqrt{e}}$

sol2) 이 상태에서 α로 미분

$f(t)=-e^{-\alpha}$의 양변을 α로 미분하면 $\frac{dt}{d\alpha}f'(t)=e^{-\alpha}$ 이다.

또한, $e^t=-\frac{\alpha+1}{e^\alpha}$의 양변을 α로 미분하면 $\frac{dt}{d\alpha}e^t=\alpha e^{-\alpha}$ 이다.

곧 $\alpha f'(t)=e^t$ 에서 $f'(t)=\frac{e^t}{\alpha}$이다.

이 때 마찬가지로 $f(a)=-e\sqrt{e}$를 만족하는 a는 $\alpha=-\frac{3}{2}$일 때이므로

$e^t=-\frac{\alpha+1}{e^\alpha}$에 $\alpha=-\frac{3}{2}$을 대입하면 t를 구한다.

→ t와 α를 모두 구했으니 ㉠ $f'(a)=\frac{e^t}{\alpha}$도 구할 수 있다.

계산 생략~

$y=t$와의 교점을 보길래 당연히 역함수일 줄 알았는데 아님... 문제 잘 냈듯

28. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이고, $x<0$일 때 $f(x)=-4xe^{4x^2}$이다. 모든 양수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수는 2이고, 이 방정식의 두 실근 중 작은 값을 $g(t)$, 큰 값을 $h(t)$라 하자.
두 함수 $g(t)$, $h(t)$는 모든 양수 t에 대하여

$$2g(t)+h(t)=k\ (k\text{는 상수})$$

를 만족시킨다. $\int_0^7 f(x)\,dx=e^4-1$일 때, $\frac{f(9)}{f(8)}$의 값은? [4점]

① $\frac{3}{2}e^5$ ② $\frac{4}{3}e^7$ ③ $\frac{5}{4}e^9$ ④ $\frac{6}{5}e^{11}$ ⑤ $\frac{7}{6}e^{13}$

$x<0$일때 $f(x)=-4xe^{4x^2}$이므로 $f'(x)=-4e^{4x^2}(1+8x^2)$

⇒ 감소함수

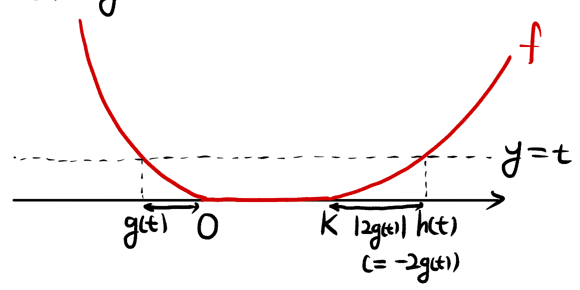
이때 $f(x)=t$ (t는 양수)의 서로 다른 실근의 개수가 항상 2개임에 주목하자.

$x<0$일 때 $f(x)$는 감소함수이므로 $f(x)=t$ $(x<0)$의 실근은 1개

⇒ $x\geq 0$일 때도 마찬가지로 $f(x)=t$ $(x\geq 0)$의 실근 1개여야 함

∴ $x\geq 0$에서 $f(x)$는 증가함수

또한, $2g(t)+h(t)=k$로 일정하다는 조건에서 다음과 같이 그래프를 그릴수 있다.



$\left(\because\ h(t)=k-2g(t)\right.$ 에서 $g(t)<0$ 이므로 $|g(t)|=-g(t)$이고 곧 $\left.h(t)=k+|2g(t)|\text{ 이다.}\right)$

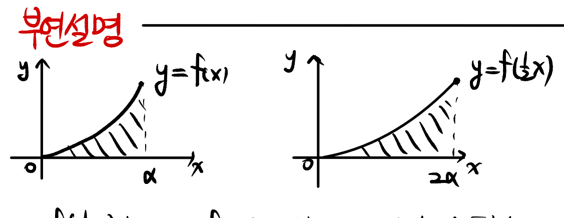
곧, $x<0$에서의 $|g(t)|$만큼의 길이가 그대로 $x>k$에서는 $|2g(t)|$만큼의 길이가 되므로

$x<0$에서의 $f(x)$를 좌우로 2배 늘린 그래프와 $x>k$에서의 그래프와 모양이 동일함

(단, 모양이 같다는건 평행/대칭이동했을 때 겹쳐질 수 있는 것을 의미한다.)

∴ 적분값에도 그대로 적용되므로 $2\int_{g(t)}^{0} f(x)dx=\int_{k}^{h(t)} f(x)dx$ 이다.

↓ 부연설명



$y=f(\frac{1}{2}x)$는 $y=f(x)$를 좌우로 2배 늘린 함수

곧 $\int_0^\alpha f(x)dx$ 와 $\int_0^{2\alpha} f(\frac{1}{2}x)dx$를 비교하면

$\int_0^{2\alpha} f(\frac{1}{2}x)dx$에서 $\frac{1}{2}x=t$로 치환적분했을 때

$\int_0^{2\alpha} f(\frac{1}{2}x)dx=2\int_0^\alpha f(t)dt$ 임을 안다.

곧 $2\int_0^\alpha f(x)dx=\int_0^{2\alpha} f(\frac{1}{2}x)dx$이고,

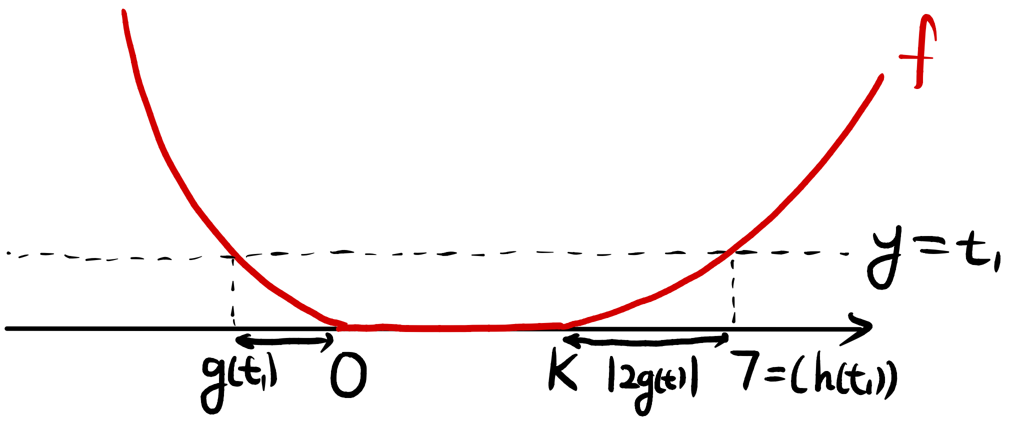
이는 문제상황과 동일

다음 page

만든 놈: crazy_hansuckwon
수만휘: 한석원의눈물
오르비: 모의고사손풀이올리는계정

28번 이어서

곧 $\int_0^7 f(x)dx = e^4-1$을 이용하기 위해 $h(t_1)=7$을 만족하는 $y=t_1$을 잡자.



$\Rightarrow \int_0^7 f(x)dx = \int_k^7 f(x)dx$

$= \int_k^{h(t_1)} f(x)dx$ 이고, 이는 곧 $2\int_{g(t_1)}^0 f(x)dx$와 같다.

∴ $2\int_{g(t_1)}^0 -4xe^{4x^2}dx = e^4-1$

$\Rightarrow 2\times\left[-\frac{1}{2}e^{4x^2}\right]_{g(t_1)}^0$

$\Rightarrow 2\left(-\frac{1}{2}e^0+\frac{1}{2}e^{4\{g(t_1)\}^2}\right)$

$\Rightarrow e^{4\{g(t_1)\}^2}-1$ 이므로 $\{g(t_1)\}^2=1$

∴ $g(t_1)=-1$ (∵ $g(t_1)<0$)

따라서 $g(t_1)=-1$, $h(t_1)=7$ 이므로 $2g(t_1)+h(t_1)=k$ 에서 $k=5$이다.

∴ $f(9)=f(5-2g(t_2))$ 에서 $g(t_2)=-2$이고, 곧 $f(-2)$이다.
$f(8)=f(5-2g(t_3))$ 에서 $g(t_3)=-\frac{3}{2}$이고, 곧 $f(-\frac{3}{2})$이다.

㉠ $\frac{f(9)}{f(8)} = \frac{f(-2)}{f(-\frac{3}{2})} = \frac{8e^{16}}{6e^9}$

$= \boxed{\frac{4}{3}e^7}$

만든 놈: 인스타 crazy_hansuckwon
수만휘: 한석원의눈물
오르비: 모의고사손풀이올리는계정

단답형

등비수열의 곱/나눗셈 → 새로운 등비수열!

29. 첫째항과 공비가 각각 0이 아닌 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 각각 수렴하고

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) \times \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right),$$

$$3 \times \sum_{n=1}^{\infty} |a_{2n}| = 7 \times \sum_{n=1}^{\infty} |a_{3n}|$$

이 성립한다. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{2n-1}+b_{3n+1}}{b_n} = S$일 때, $120S$의 값을 구하시오. [4점]

두 수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$의 (초항을 a_1, b_1 / 공비를 r_1, r_2) 로 두자.

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 모두 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty} a_n$, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

$\Rightarrow -1 < r_1, r_2 < 1$

① $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) \times \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right)$

먼저, 수열 $\{C_n\} = a_n b_n$을 생각하면

$\{C_n\}$은 초항이 $a_1 b_1$, 공비가 $r_1 r_2$인 등비수열이다.

($\because$ $a_n = a_1 r_1^{n-1}$, $b_n = b_1 r_2^{n-1}$에서 $a_n b_n = a_1 b_1 \cdot (r_1 r_2)^{n-1}$)

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \frac{a_1 b_1}{1-r_1 r_2}$이므로 우변과 비교하면 $\frac{a_1 b_1}{1-r_1 r_2} = \frac{a_1}{1-r_1} \cdot \frac{b_1}{1-r_2}$

$\therefore$ $1 - r_1 r_2 = (1-r_1)(1-r_2)$

$\Rightarrow 2r_1 r_2 = r_1 + r_2$

② $3 \times \sum_{n=1}^{\infty} |a_{2n}| = 7 \times \sum_{n=1}^{\infty} |a_{3n}|$

우선, a_{2n}은 공비가 r_1^2이므로 무조건 양수임에 초점.

$\Rightarrow$ 모든 항의 부호가 같음

$\Rightarrow$ 절댓값을 씌운다 하더라도 결국 전체에 (−)붙냐 안붙냐 차이.

그에 반해 a_{3n}은 공비가 r_1^3이므로 $r_1 > 0$이면 양수, $r_1 < 0$이면 음수.

곧 케이스 분류를 해보자. (다음 page)

이제껏 봐도 문제 유형은 많이 본 30번 유형인데... 난이도는 30번이라기엔 너무 쉬움

30. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가

$$f'(x) = |\sin x| \cos x$$

이다. 양수 a에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식을 $y = g(x)$라 하자. 함수

$$h(x) = \int_0^x \{f(t) - g(t)\}\, dt$$

가 $x = a$에서 극대 또는 극소가 되도록 하는 모든 양수 a를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자. $\frac{100}{\pi} \times (a_6 - a_2)$의 값을 구하시오. [4점]

절댓값은 결국 0을 기준으로!

$$f'(x) = \begin{cases} \sin x \cos x & (\sin x \geq 0,\ 곧\ 2n\pi \leq x \leq (2n+1)\pi,\ n은\ 정수) \\ -\sin x \cos x & (\sin x < 0,\ 곧\ (2n+1)\pi < x < 2n\pi,\ n은\ 정수) \end{cases}$$

또한, $f'(x)$를 적분하여 $f(x)$를 구하면 다음과 같다.

($\cos x = t$로 두고 치환적분 / $\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$로 두고 적분) 모두 가능하지만 아래 방법을 추천

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4}\cos 2x + C_1 & (2n\pi < x < (2n+1)\pi,\ n은\ 정수) \\ \frac{1}{4}\cos 2x + C_2 & ((2n+1)\pi < x < 2n\pi,\ n은\ 정수) \end{cases}$$ 이다.

이때 $f(x)$는 실수전체에서 미분가능하므로 연속이다.

$\Rightarrow n = 0$ 대입하면 $-\frac{1}{4} + C_1 = \frac{1}{4} + C_2$ 이어야 하므로 $C_2 = C_1 - \frac{1}{2}$

이제부터 두 가지 풀이가 가능하다.

다음 page

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「선택과목(기하)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

29번 이어서

만든 놈: crazy_hansuckwon
수만휘: 한석원의눈물
오르비: 모의고사손풀이올리는계정

i) $a_1>0,\ r_1>0$

이 경우, $a_2>0$ 이므로 $\{a_{2n}\}$의 모든 항은 양수 : $|a_{2n}|=a_{2n}$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}|a_{2n}|=\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}$

$=\dfrac{a_1r_1}{1-r_1^2}$

또한, $a_3>0$ 이므로 $\{a_{3n}\}$의 모든 항은 양수 : $|a_{3n}|=a_{3n}$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}|a_{3n}|=\sum_{n=1}^{\infty}a_{3n}$

$=\dfrac{a_1r_1^2}{1-r_1^3}$

$\therefore \dfrac{3a_1r_1}{1-r_1^2}=\dfrac{7a_1r_1^2}{1-r_1^3}$ 이므로 $\dfrac{3}{\cancel{(1-r_1)}(1+r_1)}=\dfrac{7r_1}{\cancel{(1-r_1)}(1+r_1+r_1^2)}$

$\Rightarrow 7r_1+7r_1^2=3+3r_1+3r_1^2$

$\Rightarrow 4r_1^2+4r_1-3=0$

$\begin{matrix}2 & -1\\ 2 & 3\end{matrix}$

$\therefore r_1=\frac{1}{2}\quad (0<r_1<1)$

$r_1=\frac{1}{2}$을 $2r_1r_2=r_1+r_2$에 대입하면 $\frac{1}{2}=0$ 이므로 모순

ii) $a_1<0,\ r_1>0$

i)과 거의 동일. 모든 항의 부호만 반대이므로 $|a_{2n}|=-a_{2n}$

또한, $a_3<0$ 이므로 마찬가지로 $|a_{3n}|=-a_{3n}$

$\therefore$ $|a_{2n}|$과 $|a_{3n}|$ 모두 부호만 반대가 되었으므로 i)과 동일한 결과가 된다.

iii) $a_1>0,\ r_1<0$

$a_2<0$ 이므로 a_{2n}의 모든 항은 음수 : $|a_{2n}|=-a_{2n}$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}|a_{2n}|=-\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}$

$=-\dfrac{a_1r_1}{1-r_1^2}$

또한, $a_3>0,\ a_6<0,\ a_9>0\cdots$ 이므로 (+), (−)가 번갈아 등장

$\Rightarrow$ 절댓값을 씌우면 모두 양수이므로 $\{a_{3n}\}$의 공비는 $-r_1^3$와 같다.

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}|a_{3n}|=\dfrac{a_1r_1^2}{1+r_1^3}$

$\therefore -\dfrac{3a_1r_1}{1-r_1^2}=\dfrac{7a_1r_1^2}{1+r_1^3}$ 이므로 $\dfrac{-3}{\cancel{(1+r_1)}(1-r_1)}=\dfrac{7r_1}{\cancel{(1+r_1)}(1-r_1+r_1^2)}$

$\Rightarrow 7r_1-7r_1^2=-3+3r_1-3r_1^2$

$\Rightarrow 4r_1^2-4r_1-3=0$

$\begin{matrix}2 & 1\\ 2 & -3\end{matrix}$

$\therefore r_1=-\frac{1}{2}\quad (-1<r_1<0)$

$r_1=-\frac{1}{2}$을 $2r_1r_2=r_1+r_2$에 대입하면 $r_2=\frac{1}{4}$ 이므로 ㄱㅊ.

iv) $a_1<0,\ r_1<0$

이 경우에도 i)과 ii)의 관계와 동일하다.

초항의 부호가 바뀌더라도 공비가 동일하니까 결국 의미가 없는 것.

곧 $r_2=\frac{1}{4}$ 이고, 이를 이용해 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{b_{2n-1}+b_{3n+1}}{b_n}$ 를 계산해보자.

ex. $\{S_n\}=1,\ \{T_n\}=-1$ 이면
$\sum_{n=1}^{\infty}(S_n+T_n)=0$ 이지만
$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\infty,\ \sum_{n=1}^{\infty}T_n=-\infty$

물론 두 수열 $\{S_n\},\{T_n\}$에 대해 $\sum_{n=1}^{\infty}(S_n+T_n)$이 수렴한다고 해서 막 $\sum_{n=1}^{\infty}S_n$과 $\sum_{n=1}^{\infty}T_n$으로 쪼개서 $\sum_{n=1}^{\infty}S_n+\sum_{n=1}^{\infty}T_n$으로 계산하면 안되지만,

이 경우는 $\left\{\frac{b_{2n-1}}{b_n}\right\},\left\{\frac{b_{3n+1}}{b_n}\right\}$ 모두 수렴하는 등비수열임을 알기에 쪼개서 더해도 된다.

① $\left\{\dfrac{b_{2n-1}}{b_n}\right\}$: 초항 $\frac{b_1}{b_1}=1$, 공비 $\frac{r_2^2}{r_2}=r_2=\frac{1}{4}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{b_{2n-1}}{b_n}=\dfrac{1}{1-\frac{1}{4}}=\dfrac{4}{3}$

② $\left\{\dfrac{b_{3n+1}}{b_n}\right\}$: 초항 $\frac{b_4}{b_1}=r_2^3=\frac{1}{64}$, 공비 $\frac{r_2^3}{r_2}=r_2^2=\frac{1}{16}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{b_{3n+1}}{b_n}=\dfrac{\frac{1}{64}}{1-\frac{1}{16}}=\dfrac{1}{60}$

곧 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{b_{2n-1}+b_{3n+1}}{b_n}=\dfrac{4}{3}+\dfrac{1}{60}=S$ 이므로

㉮ $120S=160+2$

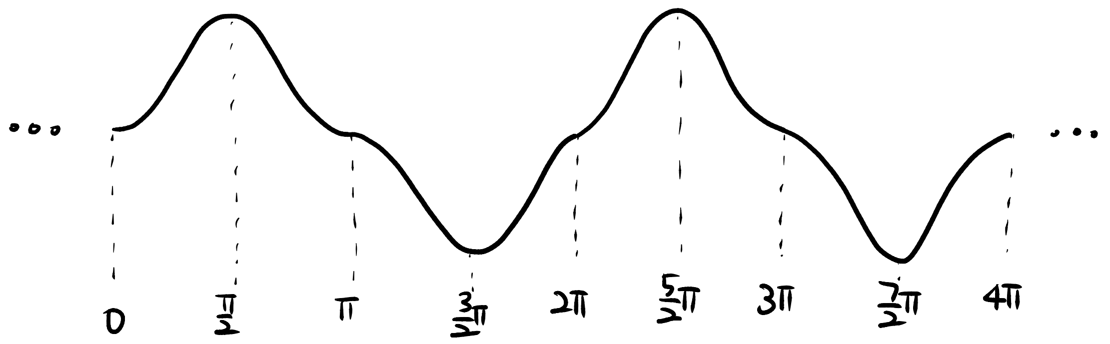
$=\boxed{162}$

30번 이어서 … ①

만든 놈: crazy_hansuckwon
수만휘: 한석원의눈물
오르비: 모의고사손풀이올리는계정

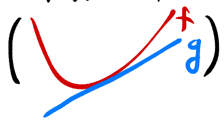
Sol.) f(x) 이용

f(x) 그래프를 그리면 다음과 같다.



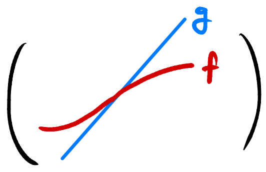
$h(x)=\int_0^x \{f(t)-g(t)\}dt$ 이므로 ① $h(0)=0$, ② $h'(x)=f(x)-g(x)$를 알 수 있는데,

곧 h(x)가 극점이 되는 지점은 f(x)-g(x)의 부호 변동점, 즉 f(x)와 g(x)의 대소관계가 바뀌는 지점이다.
그런데 g(x)는 f(x)의 접선이므로 일반적으로는 대소관계가 바뀌지 않는다. ex) (



)

⇒ (a, f(a))는 변곡점이어야 함! (



)

① $y=-\frac{1}{4}\cos 2x+C_1$ ($2n\pi<x<(2n+1)\pi$, n은 정수) 의 변곡점

이 경우, 미분한 식 $\sin x\cos x$ 은 이미 알려져 있으므로 한 번 더 미분하면 $\cos^2 x-\sin^2 x$ 이므로 $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 일 때 부호변동 발생 ∴ 변곡점
⇒ $x=\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi, 2\pi+\frac{\pi}{4}, 2\pi+\frac{3}{4}\pi \cdots$ ($2n\pi+\frac{\pi}{4}$, $2n\pi+\frac{3}{4}\pi$ (n은 정수))

② $y=\frac{1}{4}\cos 2x+C_2$ ($(2n+1)\pi<x<2n\pi$, n은 정수)의 변곡점

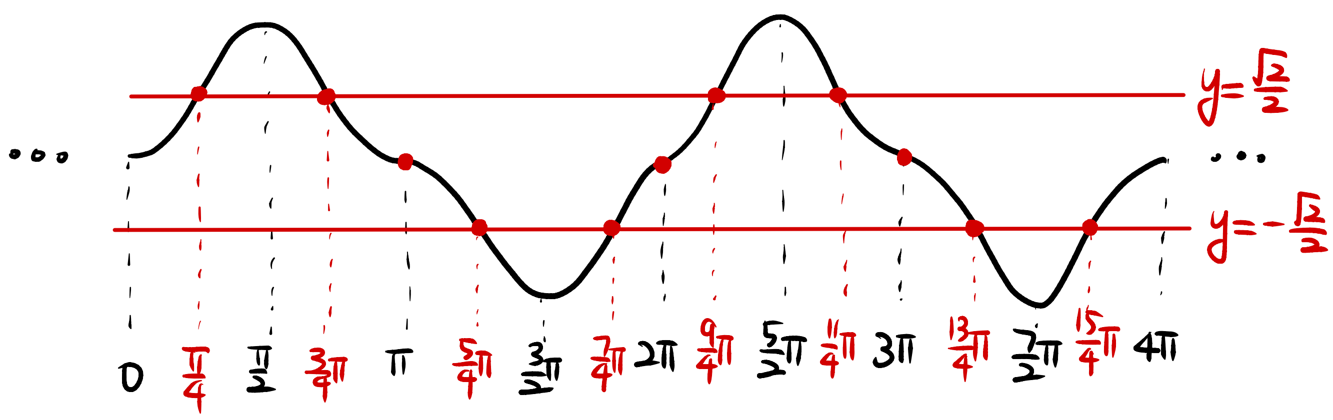
동일하게 생각하면 $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 을 만족하는 지점에서 변곡점.
⇒ $x=\frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi, 2\pi+\frac{5}{4}\pi, 2\pi+\frac{7}{4}\pi \cdots$ ($2n\pi+\frac{5}{4}\pi$, $2n\pi+\frac{7}{4}\pi$ (n은 정수))

③ $y=-\frac{1}{4}\cos 2x+C_1$ 과 $y=\frac{1}{4}\cos 2x+C_2$ 의 경계지점

$y=-\frac{1}{4}\cos 2x+C_1$ 는 $x=\pi$ 주변에서 아래로 볼록
$y=\frac{1}{4}\cos 2x+C_2$는 〃 위로 볼록
하므로 연결지점인 $x=\pi$도 변곡점.

→ 주기함수의 성질에 의해 $x=n\pi$ (n은 정수) 모두 변곡점

곧 변곡점을 쭉 표기해보면



곧 양수 a에 대해
$a_1=\frac{\pi}{4}$, $a_2=\frac{3}{4}\pi \cdots a_6=2\pi$ 이다.

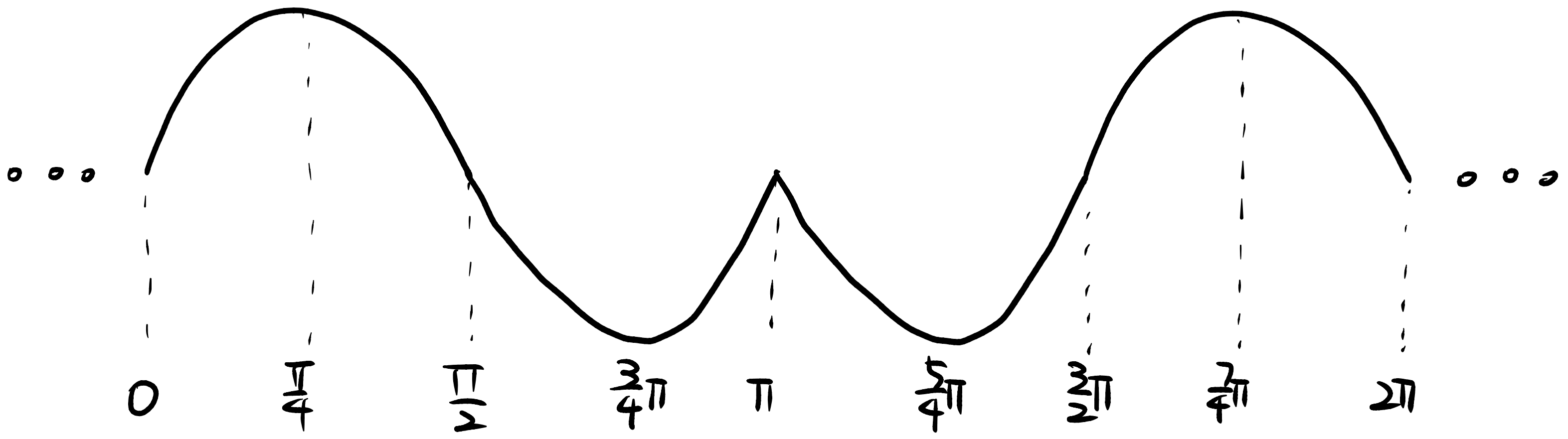
∴ ㉠ $\frac{100}{\pi}(a_6-a_2)=\frac{100}{\pi}\times(2\pi-\frac{3}{4}\pi)$
$=\boxed{125}$

30번 이어서 … ②

만든 놈: crazy_hansuckwon
수안회: 한석원의 눈물
오르비: 모의고사손풀이올리는계정

sol$_2$) 적분까지 안가고 그냥 $f(x)$ 선에서 해결

$f'(x)$ 그래프를 그려보면 다음과 같다.



마찬가지로 $h'(x)=f(x)-g(x)$ 에서
$h(x)$는 $f(x)$와 $g(x)$의 대소관계가 바뀌는 점에서 극점을 가진다. ⇒ $f(x)$의 변곡점! (여기까지는 sol$_1$)과 동일)

곧 이는 $f(x)$의 극점과 동일하고, $x=\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi, \pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi, 2\pi \cdots$ 임을 바로 안다.

$\frac{3}{4}\pi \to a_2$, $\frac{7}{4}\pi \to a_6$

$\therefore$ ㉠ $\frac{100}{\pi}(a_6-a_2)=\boxed{125}$

만든 놈: crazy_hansuckwon
수만휘: 한석원의눈물
오르비: 모의고사손풀이올리는계정

제 2 교시

수학 영역(기하)

홀수형

5지선다형

중점 : 평균

23. 좌표공간의 두 점 A$(a, -2, 6)$, B$(9, 2, b)$에 대하여 선분 AB의 중점의 좌표가 $(4, 0, 7)$일 때, $a+b$의 값은? [2점]

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

$\frac{a+9}{2}=4$, $\frac{6+b}{2}=7$ 이므로 $a=-1$, $b=8$

㉠ $a+b=\boxed{7}$

접점이 주어졌을 때의 접선의 방정식

24. 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{6}=1$ 위의 점 $(\sqrt{3}, -2)$에서의 접선의 기울기는? (단, a는 양수이다.) [3점]

① $\sqrt{3}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ④ $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{5}$

접점의 좌표가 주어졌으므로 접선의 방정식을 구할 수 있다.

→ $\frac{\sqrt{3}x}{a^2}+\frac{-2y}{6}=1$

또한, $(\sqrt{3},-2)$이 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{6}=1$ 위의 점이므로 대입하면 성립함

∴ $\frac{3}{a^2}+\frac{4}{6}=1$ 이므로 $a^2=9$

곧 $\frac{\sqrt{3}}{9}x-\frac{1}{3}y=1$ 이고, 정리하면 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-3$ 이다.

㉠ 접선의 기울기 $=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}}$

※ 음함수의 미분법을 안다면? (미적분)

$a^2=9$는 동일하게 구하고

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{6}=1$ 을 x에 대해 미분하면

$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{6}\cdot\frac{dy}{dx}=0$ 에서 $\frac{dy}{dx}=-\frac{6x}{a^2y}$ 이므로

$x=\sqrt{3}$, $y=-2$를 대입하면 ㉠ $\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

만든 놈: ⓘ crazy_hansuckwon
수만휘: 한석원의눈물
오르비: 모의고사손풀이올리는계정

25. 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여

$$|\vec{a}| = \sqrt{11}, \quad |\vec{b}| = 3, \quad |2\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{17}$$

일 때, $|\vec{a} - \vec{b}|$의 값은? [3점]

① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ✓② $\sqrt{2}$ ③ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

Sol₁) 내적의 성질 이용

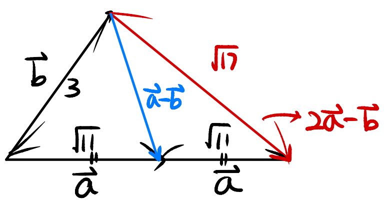
$|2\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{17}$ 의 양변을 제곱하면 $|2\vec{a}-\vec{b}|^2 = 4|\vec{a}|^2 - 4\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2$
$= 4\times(\sqrt{11})^2 - 4\vec{a}\cdot\vec{b} + 3^2$
$= 44 - 4\vec{a}\cdot\vec{b} + 9 = 17$
$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b} = 9$

곧 구하는 값 $|\vec{a}-\vec{b}|$을 제곱하면 $|\vec{a}-\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2$ 이므로
$= (\sqrt{11})^2 - 2\times 9 + 3^2$
$= 11 - 18 + 9$
$= 2$

구 $|\vec{a}-\vec{b}| = \boxed{\sqrt{2}}$ ($\because |\vec{a}-\vec{b}| > 0$)

Sol₂) 문제 상황 파악

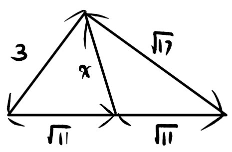
벡터를 이차원 평면에 그려보자. (이차원이라는 보장은 없으나 차원이 달라져도 답은 같겠지 뭐...)



⇒ 중선정리 사용가능! (파푸스의 정리)

↳ 이때, 그림은 $\vec{a}$와 $\vec{b}$가 이루는 각이 예각인 상황을 그렸지만 직각이나 둔각이어도 상관없다

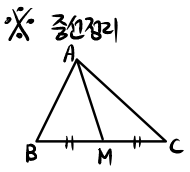
문제 상황을 간단히 표현하면



이므로

중선 정리에 의해
$3^2 + (\sqrt{17})^2 = 2((\sqrt{11})^2 + x^2)$
$\Rightarrow 9 + 17 = 2(11 + x^2)$
$\therefore$ 구 $|\vec{a}-\vec{b}| = x = \boxed{\sqrt{2}}$ $(x>0)$

(※ 중선정리

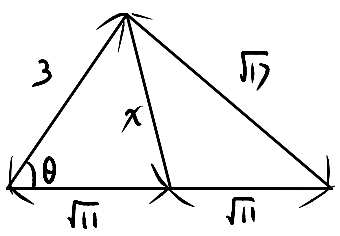


에서 $|\overline{AB}|^2 + |\overline{AC}|^2 = 2(|\overline{AM}|^2 + |\overline{BM}|^2)$)

당연히 $|\overline{CM}|^2$도 가능

Sol₂₋₂) 만약 중선정리가 기억이 안나면?

동일한 상황에서 cos Law 2번 적용하면 그만.



$\Rightarrow (\sqrt{17})^2 = 3^2 + (2\sqrt{11})^2 - 12\sqrt{11}\cos\theta$ 에서 $\cos\theta = \frac{3}{\sqrt{11}}$ 구하고

$x^2 = 3^2 + (\sqrt{11})^2 - 6\sqrt{11}\cos\theta$ 에서 $x = \sqrt{2}$ 구하면 된다.

26. 좌표공간에 평면 α가 있다. 평면 α 위에 있지 않은 서로 다른 두 점 A, B의 평면 α 위로의 정사영을 각각 A′, B′이라 할 때,

$$\overline{AB} = \overline{A'B'} = 6$$

이다. 선분 AB의 중점 M의 평면 α 위로의 정사영을 M′이라 할 때,

$$\overline{PM'} \perp \overline{A'B'}, \quad \overline{PM'} = 6$$

이 되도록 평면 α 위에 점 P를 잡는다.

삼각형 A′B′P의 평면 ABP 위로의 정사영의 넓이가 $\frac{9}{2}$일 때, 선분 PM의 길이는? [3점]

① 12 ② 15 ③ 18 ④ 21 ✓⑤ 24

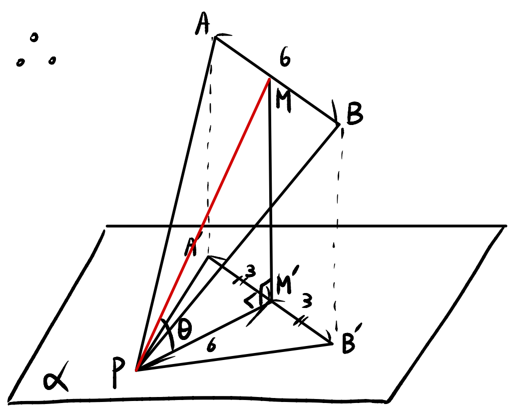
정사영 ⊕ 결국 직각△찾기!

문제의 조건을 하나하나 해석해보자.

평면 α를 xy 평면처럼 생각하면

$\overline{AB} = \overline{A'B'} = 6$ 에서 $\overline{A'B'}$이 α 위의 직선이므로 $\overline{AB}$도 α와 평행해야 한다.

$\therefore$



$\triangle A'B'P$의 평면 ABP 위로의 정사영이라고는 했지만,

결국 $\triangle A'B'P$가 평면 α 위의 도형이므로 평면 α와 평면 ABP 사이의 관계를 보자.

일단, $\triangle PMM'$에서 $\angle MPM' = \theta$로 두면 $\triangle PMM' =$ 직각△ 이므로 $\frac{\overline{PM'}}{\overline{PM}} = \cos\theta$

$\therefore \overline{PM'} = 6$ 이므로 $\overline{PM} = \frac{6}{\cos\theta}$

이 때 $\triangle A'B'P$의 넓이: $\frac{1}{2}\times6\times6 = 18$인데 평면 ABP 위로 정사영한 넓이가 $\frac{9}{2}$이므로

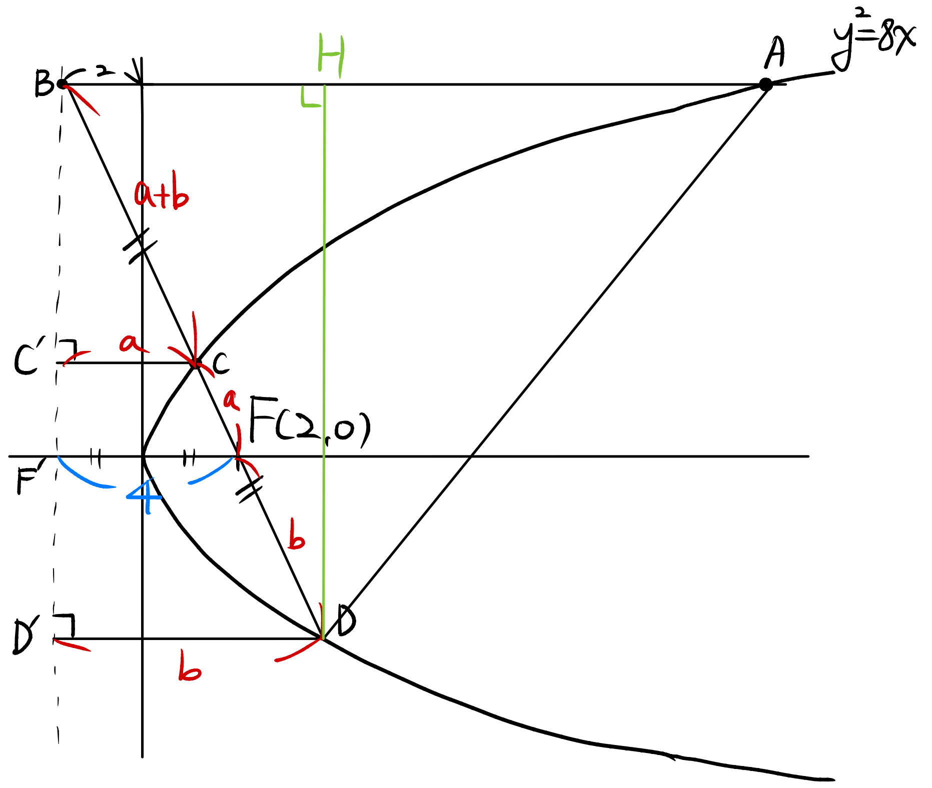
$\Rightarrow 18\cos\theta = \frac{9}{2}$ $\therefore \cos\theta = \frac{1}{4}$

곧 구 $\overline{PM} = \frac{6}{\cos\theta} = \boxed{24}$

닮음이 익숙하지 않으면 큰일남. 이차곡선에서의 닮음의 중요성

27. 초점이 F인 포물선 $y^2=8x$ 위의 한 점 A에서 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 B라 하고, 직선 BF와 포물선이 만나는 두 점을 각각 C, D라 하자. $\overline{BC}=\overline{CD}$일 때, 삼각형 ABD의 넓이는? (단, $\overline{CF}<\overline{DF}$이고, 점 A는 원점이 아니다.) [3점]

① $100\sqrt{2}$ ② $104\sqrt{2}$ ③ $108\sqrt{2}$ ④ $112\sqrt{2}$ ⑤ $116\sqrt{2}$

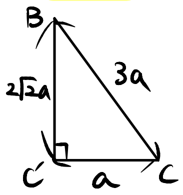


포물선의 정의에 의해

$\overline{FC}=\overline{CC'}$ 이고, 이 길이를 a로 두자.
$\overline{FD}=\overline{DD'}$ 이고, 이 길이를 b로 두자. ⇒ $\overline{BC}=\overline{CD}$ 이므로 $\overline{BC}=a+b$

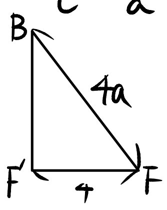
또한, $\overline{BC}=\overline{CD}$에서 점 C는 $\overline{BD}$의 중점이고 △BCC'와 △BDD'는 1:2 닮음.
∴ $\overline{CC'}:\overline{DD'}=1:2$ 이므로 $2a=b$

⇒ $\overline{BC}=\overline{CD}=a+b$
$=3a$이므로



꼴의 길이비를 갖는다. $(1:2\sqrt{2}:3)$

이때 △BFF'를 보면



꼴이므로 $a=3$임을 안다.
⇒(자동적으로 $\overline{BF'}=8\sqrt{2}$)

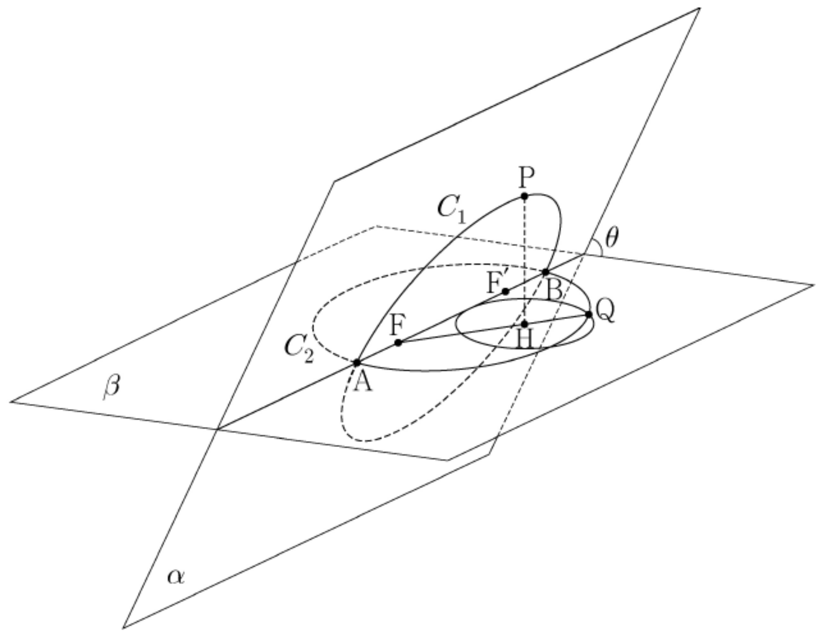
∴ △BDD'에서 $\overline{BD'}=12\sqrt{2}$ 이고, 이는 $\overline{DH}$, 즉 △ABD의 높이와 같다.
(∵ $a=3$이므로 $b=2a=6$이고 $\overline{BD'}=2\sqrt{2}b$ 이므로 $\overline{BD'}=12\sqrt{2}$)

마지막으로 $\overline{BF'}=8\sqrt{2}$ 인데 이는 점 A의 y좌표와 같고,
$y^2=8x$에 대입하면 A의 x좌표 $=16$이다.
⇒ △ABD의 밑변: $\overline{AB}=16+2=18$

㉮ $\triangle ABD=\frac{1}{2}\times18\times12\sqrt{2}=\boxed{108\sqrt{2}}$

문제 상황 이해하는데만 한세월... 흔한 이면각 문제에 이차곡선 결합

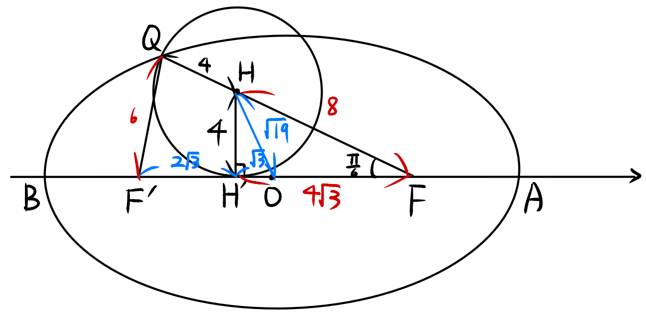
28. 그림과 같이 서로 다른 두 평면 α, β의 교선 위에 $\overline{AB}=18$인 두 점 A, B가 있다. 선분 AB를 지름으로 하는 원 C_1이 평면 α 위에 있고, 선분 AB를 장축으로 하고 두 점 F, F'을 초점으로 하는 타원 C_2가 평면 β 위에 있다. 원 C_1 위의 한 점 P에서 평면 β에 내린 수선의 발을 H라 할 때, $\overline{HF'}<\overline{HF}$이고 $\angle HFF'=\frac{\pi}{6}$이다. 직선 HF와 타원 C_2가 만나는 점 중 점 H와 가까운 점을 Q라 하면, $\overline{FH}<\overline{FQ}$이다. 점 H를 중심으로 하고 점 Q를 지나는 평면 β 위의 원은 반지름의 길이가 4이고 직선 AB에 접한다. 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은? (단, 점 P는 평면 β 위에 있지 않다.) [4점]



① $\frac{2\sqrt{66}}{33}$ ② $\frac{4\sqrt{69}}{69}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ④ $\frac{4\sqrt{3}}{15}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{78}}{39}$

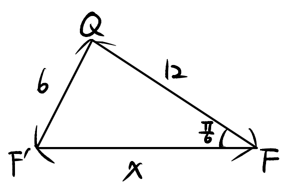
$\overline{FH}<\overline{FQ}$ 조건은 과조건이 아니라 점 H가 타원 C_2 내부에 있도록 하는 조건

문제 상황에 맞춰 그림을 그려보면 다음과 같다.
($\overline{AB}$의 중점이자 원 C_1의 중심: O)



먼저, △FHH'에서 $\angle HFH'=\frac{\pi}{6}$ 인 직각△이므로 $\overline{HF}=8$, $\overline{H'F}=4\sqrt{3}$
또한 점 Q가 타원 C_2 위의 점이므로 타원의 정의에 의해 $\overline{QF}+\overline{QF'}=18$ 이고, ∴ $\overline{QF'}=6$

곧 우리는 △QFF'에서 cos Law를 쓸 수 있다.



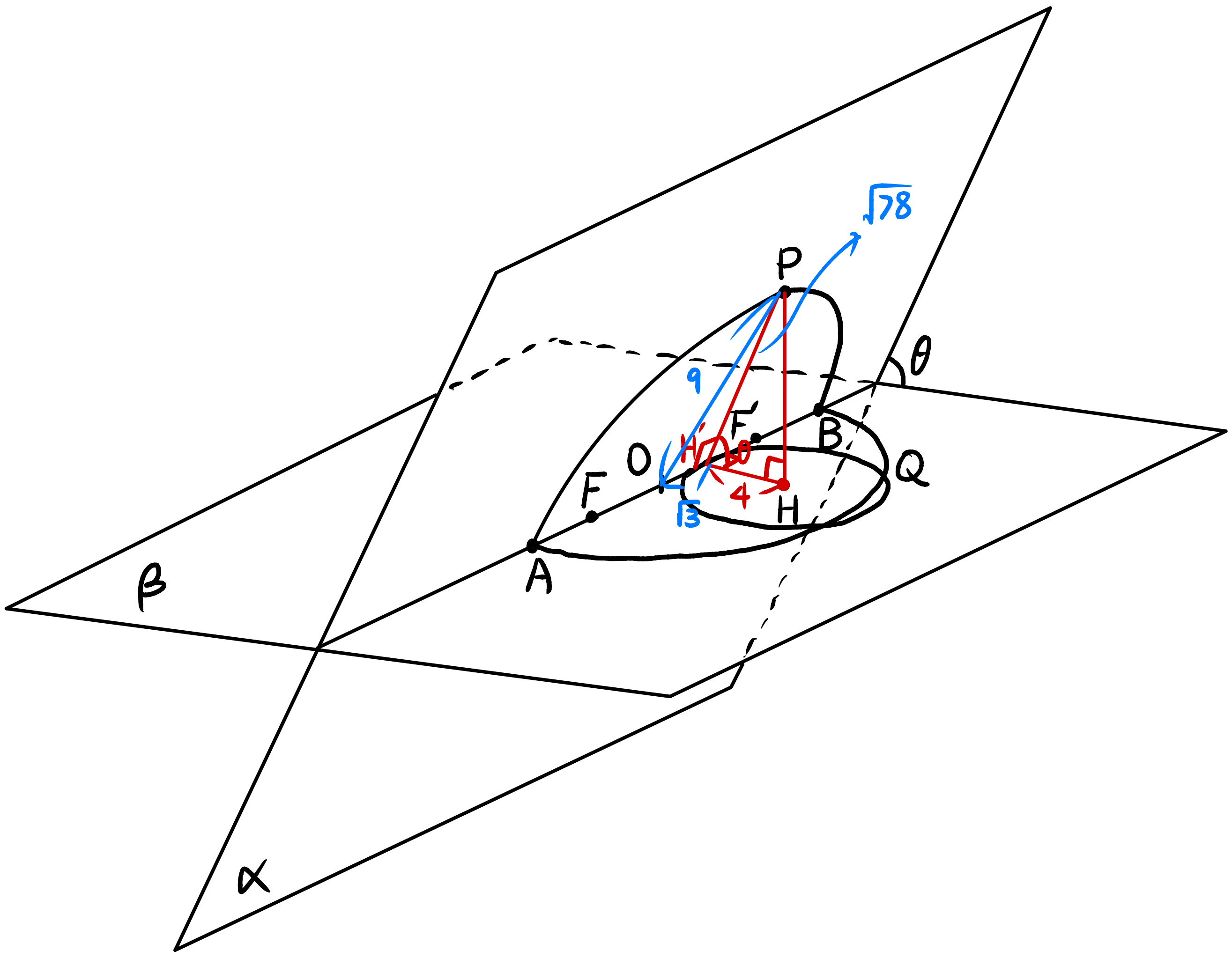
⇒ $36=144+x^2-24x\cos\frac{\pi}{6}$
⇒ $(x-6\sqrt{3})^2=0$ 이므로 $x=6\sqrt{3}$

∴ $\overline{FF'}=6\sqrt{3}$ 이므로 $\overline{FO}=\overline{F'O}=3\sqrt{3}$, 즉 $\overline{F'H'}=2\sqrt{3}$, $\overline{H'O}=\sqrt{3}$
⇒ 직각△OHH'에서 $\overline{OH}=\sqrt{19}$

이제 평면 간의 관계를 보자. (다음 page)

만든 놈: crazy_hansuckwon
수만휘: 한석원의눈물
오르비: 모의고사손풀이올리는계정

28번 이어서



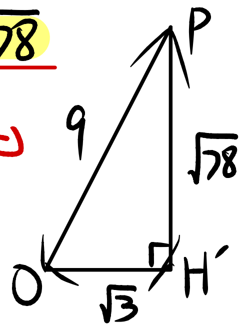
결국 이면각 θ는 각 평면에서 교선에 내린 '수선'을 찾아야 한다.

⇒ 평면 α에서 교선에 내린 수선: $\overline{HH'}$ 인데, $\overline{PH}$가 α에 수직이므로
삼수선의 정리에 의해 $\overline{PH'} \perp \overline{AB}$이다.

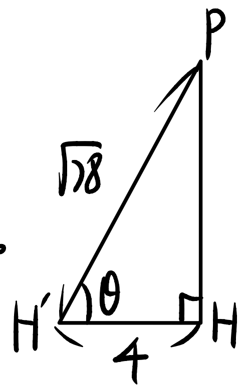
∴ $\angle PH'H = \theta$

이때 점 P는 원 위의 점이므로 $\overline{OP}=9$ (∵ 지름: $\overline{AB}=18$)

⇒ △OPH'에서 $\overline{PH'}=\sqrt{78}$



∴



에서 ㉠ $\cos\theta = \dfrac{4}{\sqrt{78}} = \boxed{\dfrac{2\sqrt{78}}{39}}$

만든 놈: crazy_hansuckwon
수만휘: 한석원의눈물
오르비: 모의고사손풀이올리는계정

단답형

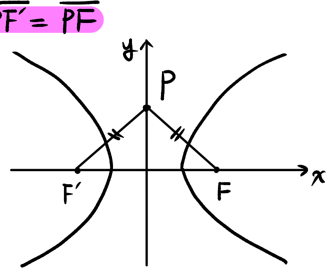
옛날 기출에 개많이 나온 유형. 이 정도는 쉽게 풀 수 있어야!

29. 양수 c에 대하여 두 점 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$을 초점으로 하고, 주축의 길이가 6인 쌍곡선이 있다. 이 쌍곡선 위에 다음 조건을 만족시키는 서로 다른 두 점 P, Q가 존재하도록 하는 모든 c의 값의 합을 구하시오. [4점]

> (가) 점 P는 제1사분면 위에 있고,
> 점 Q는 직선 PF′ 위에 있다.
>
> (나) 삼각형 PF′F는 이등변삼각형이다.
>
> (다) 삼각형 PQF의 둘레의 길이는 28이다.

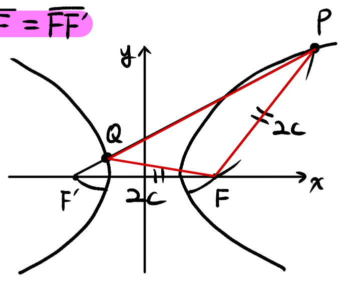
조건 (가)와 (나)를 이용해 그림을 그려보자.
조건 (나)에서 △PF′F은 이등변△인데 이등변△은 3가지 경우 존재.

i) $\overline{PF'} = \overline{PF}$



⇒ 조건 (가) 만족 불가능

ii) $\overline{PF} = \overline{FF'}$



⇒ 쌍곡선의 정의에 의해 $\begin{cases} \overline{QF} - \overline{QF'} = 6 \\ \overline{PF'} - \overline{PF} = 6 \end{cases}$

∴ $\overline{QF} = \overline{QF'} + 6$, $\overline{PF'} = \overline{PF} + 6$

곧, $\overline{PF} = \overline{FF'} = 2c$ 에서 $\overline{PF'} = 2c + 6$ 이므로

$\overline{PQ} = \overline{PF'} - \overline{QF'}$ 이다.

⇒ $\overline{PQ} = 2c + 6 - \overline{QF'}$

또한, $\overline{QF} = \overline{QF'} + 6$ 이므로

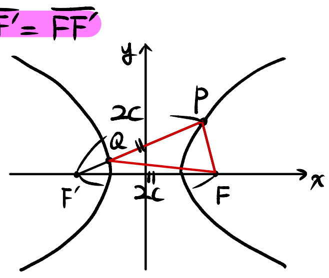
△PQF의 둘레의 길이

⇒ $(2c+6-\overline{QF'}) + (\overline{QF'}+6) + 2c$

$= 4c + 12$

$= 28$ ∴ $c = 4$

iii) $\overline{PF'} = \overline{FF'}$



⇒ 쌍곡선의 정의에 의해 $\begin{cases} \overline{PF'} - \overline{PF} = 6 \\ \overline{QF} - \overline{QF'} = 6 \end{cases}$

⇒ $\overline{PF} = 2c - 6$ 이고,

$\overline{QF'} + 6 = \overline{QF}$ 과 $\overline{QF'} + \overline{PQ} = 2c$ 를 연립하면

△PQF의 둘레의 길이

⇒ $(2c - \overline{QF'}) + (\overline{QF'} + 6) + (2c - 6)$

$= 4c$

$= 28$

∴ $c = 7$

㉮ c의 합 : $4 + 7 = \boxed{11}$

이것도 쉬움. 벡터의 분리를 통해 변수부분과 상수부분을 쪼개자.

30. 좌표평면에 한 변의 길이가 4인 정삼각형 ABC가 있다. 선분 AB를 1:3으로 내분하는 점을 D, 선분 BC를 1:3으로 내분하는 점을 E, 선분 CA를 1:3으로 내분하는 점을 F라 하자. 네 점 P, Q, R, X가 다음 조건을 만족시킨다.

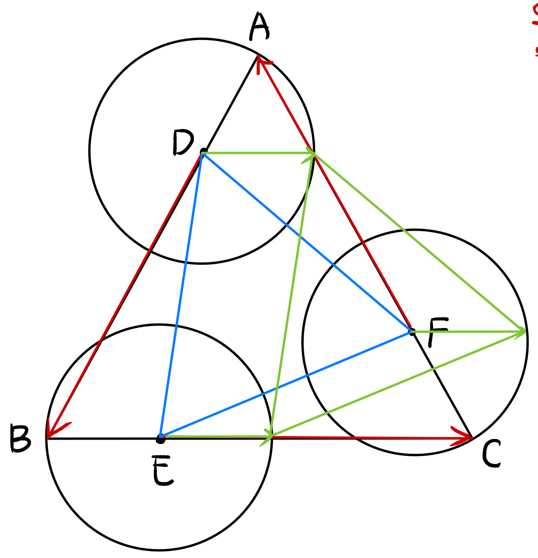
> (가) $|\overrightarrow{DP}| = |\overrightarrow{EQ}| = |\overrightarrow{FR}| = 1$
>
> (나) $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{QC} + \overrightarrow{RA}$

$|\overrightarrow{AX}|$의 값이 최대일 때, 삼각형 PQR의 넓이를 S라 하자. $16S^2$의 값을 구하시오. [4점]

조건 (가) : 점 P, Q, R은 각각 점 D, E, F를 중심으로 하고 반지름 1인 원 위의 점

수능에서 '원 위의 점'이 나오면 일반적으로 중심과 연결하는게 국룰!

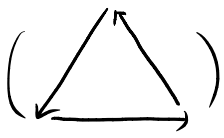
왜? 원은 존재이유가 중심임.
원을 문제에 내놓고 중심을 안쓰면 출제하는 의미X
그렇다고 100%는 아니니 맹신은 ㄴㄴ



조건 (나)에서 $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{QC} + \overrightarrow{RA}$ 의 벡터 분리 (중심 이용)

⇒ $\overrightarrow{AX} = (\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DB}) + (\overrightarrow{QE} + \overrightarrow{EC}) + (\overrightarrow{RF} + \overrightarrow{FA})$

$= \underbrace{(\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{QE} + \overrightarrow{RF})}_{\text{변수부분}} + \underbrace{(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{FA})}_{\text{상수부분}}$

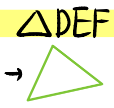
이 때 $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{FA}$ 는 그림에서 보다시피 $\vec{0}$ 이다. ()

곧 $|\overrightarrow{AX}|$가 최대라는 것은 $|\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{QE} + \overrightarrow{RF}|$가 최대라는 것인데

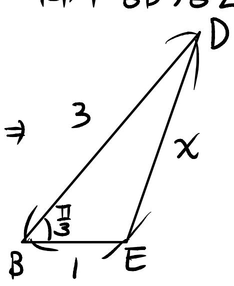
$\overrightarrow{PD}, \overrightarrow{QE}, \overrightarrow{RF}$ 모두 길이가 1이고 방향에 있어 제한이 없는 벡터이므로

최대가 되는 경우는 $\overrightarrow{PD}, \overrightarrow{QE}, \overrightarrow{RF}$ 모두의 방향이 같을 때이다.

∴ △PQR은 결국 △DEF를 그대로 평행이동한 꼴이므로 넓이도 동일하다.

(위 그림에서  →  로 평행이동된 거 참고)

따라서 정삼각형 △DEF의 넓이를 구하려면 한 변의 길이를 알아야 한다.

⇒ 

에서 cos Law : $x^2 = 9 + 1 - 6\cos\frac{\pi}{3}$ 이므로 $x = \sqrt{7}$

∴ $\triangle PQR = \triangle DEF = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (\sqrt{7})^2$ 에서 $S = \frac{7\sqrt{3}}{4}$

㉮ $16S^2 = \boxed{147}$

> ＊ 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.