2025학년도 6평 대비 SEL:ON 모의고사

정답 및 해설

SEOL:NAME

설레임 모의고사팀 2024

정 답 표

번호	정답	배점	번호	정답	배점	번호	정답	배점
1	①	2	9	③	4	17	12	3
2	⑤	2	10	③	4	18	50	3
3	①	3	11	②	4	19	48	3
4	③	3	12	④	4	20	179	4
5	④	3	13	①	4	21	36	4
6	②	3	14	①	4	22	30	4
7	⑤	3	15	②	4			
8	④	3	16	6	3			

출제 및 검토

이경민 서울대 수학교육과 23
윤석민 서울대 수학교육과 23
김시현 서울대 수학교육과 24

검토에 도움을 주신
팔차선 무단횡단, 수학 푸는 어피치
님께 다시금 감사드립니다.

대표 문항

〈 검토진이 뽑은 BEST 문항 〉

12, 14, 15, 21

〈 맞혔더라도 해설을 꼭 봐야 하는 문항 〉

7, 12, 14, 15, 20, 21

※ 모든 문항의 해설에서 중요한 부분, 강조할 부분은 **진한 글씨**로 표시하였습니다. 해설 보실 때 참조하시기 바랍니다.

공통과목 해설

1 정답 ①

$$\sqrt[3]{8}\times 4^{-\frac{1}{2}}=2\times\frac{1}{2}=1$$

2 정답 ⑤

$f'(x)=3x^2-2x+2$ 이므로 $f'(2)=10$

3 정답 ①

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ 이므로 $\sin^2\theta-\cos^2\theta=\frac{1}{3}$ 과 연립하면

$\sin^2\theta=\frac{2}{3}$, $\cos^2\theta=\frac{1}{3}$ 이다.

이때, $\tan^2\theta=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=2$ 이고, $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ 이므로 $\tan\theta=-\sqrt{2}$

4 정답 ③

그림에서 $\lim_{x\to1}f(x)+\lim_{x\to3-}f(x)=0+3=3$ 이다.

5 정답 ④

첫 번째 식을 정리하면 $\sum_{n=1}^{8}a_n-\frac{8\times9}{2}=10$ 에서 $\sum_{n=1}^{8}a_n=46$

두 번째 식을 정리하면 $\sum_{n=1}^{7}a_n+7=15$ 에서 $\sum_{n=1}^{7}a_n=8$

따라서 $a_8=\sum_{n=1}^{8}a_n-\sum_{n=1}^{7}a_n=38$

6 정답 ②

점 P의 위치를 $x(t)$ 라 하면,

$x(t)=x(0)+\int_0^t v(t)dt$ 이므로

$$x(t)=t^3+t^2-5t+5$$

곧, 원점으로부터 점 P까지의 거리는 $|x(t)|$ 인데,
$v(1)=0$ 에서 $x(t)$ 가 $t=1$ 일 때 극소이고, $x(1)>0$ 이므로
$t\ge0$ 에서 $x(t)>0$ 이고, $t=1$ 일 때 거리의 최솟값은 2가 된다.

7 정답 ⑤

$f(0)$과 $f(2)$의 부호가 다르므로 **사잇값의 정리**에 의해 열린구간 $(0, 2)$에서 $f(x)=0$이 되도록 하는 실수 x가 존재한다.

한편, a, b가 모두 자연수이므로 가능한 a의 값은 1이다.

($b=1$이면 $a<1$이어야 하므로 자연수 조건에 모순이다.)

$f(x)=(x-1)(x-b)$에 대하여

$f(0)=b$, $f(2)=2-b$이므로 방정식

$$b(2-b)=-48$$

$$b^2-2b-48=(b+6)(b-8)=0$$

을 풀면 $b=-6$ 또는 8인데, b가 자연수이므로 $b=8$

따라서 $b-a=8-1=7$

8 정답 ④

$2^x=t$라 하자. 이때, 주어진 방정식이 두 **양의 실근**을 가지므로 $x>0$에서 $t>1$이다.

곧, 주어진 방정식을 정리하면

$$t^2-8t+n=0$$

인데, 이 방정식이 1보다 큰 서로 다른 두 실근을 가진다.

두 실근을 각각 α, β라 하자.

근과 계수의 관계에 의해 $\alpha+\beta=8$이고,

$\alpha>1$이므로 $\beta<7$, 반대로 $\beta>1$이므로 $\alpha<7$이다.

즉, $1<\alpha<7$이다. 또한,

$$\alpha\beta=\alpha(8-\alpha)=-\alpha^2+8\alpha=-(\alpha-4)^2+16$$

이므로 $1<\alpha<7$에서 $7<\alpha\beta\le 16$

이 중 $\alpha=\beta=4$, 곧, $\alpha\beta=16$인 경우는 **중근이므로 서로 다른 두 실근을 가지지 않게 된다.**

따라서 n으로 가능한 정수는 $8, 9, 10, \cdots, 15$의 8개

9 정답 ③

$x>0$에서 $|2^x-1|=2^x-1$이므로

이 구간에서 $(2^x+1)-|2^x-1|=2$이다.

곧, 두 점 B, C의 x좌표가 같으므로 $\overline{BC}=2$이다.

이때, 삼각형 ABC의 넓이가 3이므로

$$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}=3$$

곧, $\overline{AB}=3$이다.

점 A의 x좌표를 $t\,(t<0)$라 하자.

그러면 **두 점 A, B의 y좌표가 같으므로**

$$|2^t-1|=|2^{t+3}-1|$$

절댓값 안의 두 식의 부호가 같으면 해가 존재하지 않으므로

$$-2^t+1=2^{t+3}-1$$

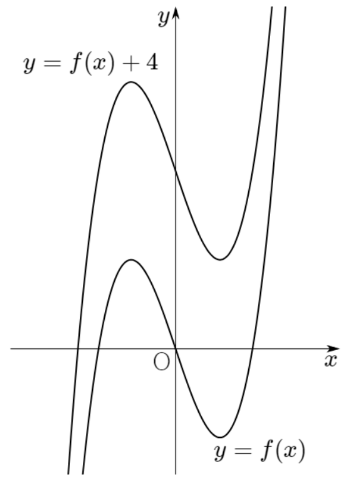
$2=9\times 2^t$, 곧, $2^t=\dfrac{2}{9}$이고,

점 A의 y좌표는 $\left|\dfrac{2}{9}-1\right|=\dfrac{7}{9}$

10 정답 ③

$f'(x)=3x^2-3$이므로 $x=-1$에서 극소, $x=1$에서 극대이다.

두 곡선 $y=f(x)$, $y=f(x)+4$를 그리면 다음과 같다.



이때, $\displaystyle\lim_{h\to 0+}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\ge 0$에서 **함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하거나 상수함수**이다. 곧, $g(-1)\le g(1)$인데,

$$g(-1)\ge f(-1)=2,\ g(1)\le f(1)+4=2$$

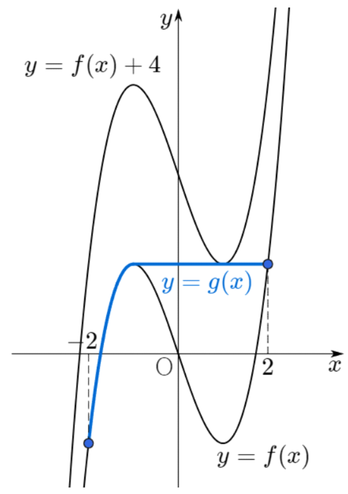
이므로 $2\le g(-1)\le g(1)\le 2$이기 때문에

닫힌구간 $[-1, 1]$에서 $g(x)=2$임을 얻는다.

한편, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=2$는 두 점 $(-1, 2)$, $(2, 2)$에서 만나기 때문에 함수 $g(x)$의 적분값이 최소가 되기 위해

닫힌구간 $[-1, 2]$에서 $g(x)=2$이고,

닫힌구간 $[-2, -1]$에서 $g(x)=f(x)$이면 된다.



$$\int_{-2}^{2}g(x)dx=\int_{-2}^{-1}f(x)dx+\int_{-1}^{2}2dt$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{3}{2}x^2\right]_{-2}^{-1}+[2t]_{-1}^{2}$$

$$=\left(-\frac{5}{4}+2\right)+6$$

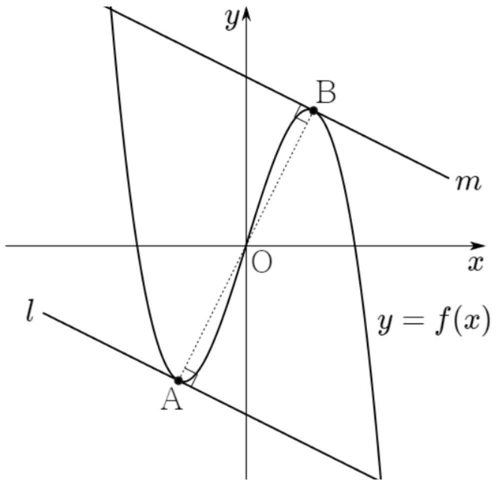
$$=\frac{27}{4}$$

11 정답 ②

직선 l과 직선 m이 만나면 두 직선의 교점에서 두 점 P, Q 사이의 거리의 최솟값이 0이 된다.

따라서 직선 l과 직선 m은 평행하다.

피타고라스의 정리에 의해 $\overline{AB}=2\sqrt{5}$인데, 점 A, B가 각각 직선 l, m 위에 있고, 두 점 P, Q 사이의 거리의 최솟값이 $2\sqrt{5}$이므로 **점 A와 B는 두 직선 l, m 사이의 거리가 최소가 되도록 하는 두 점이다.**



즉, 두 직선 l, m과 직선 AB는 직교한다.
이때, 직선 AB의 기울기가 2이므로 두 직선 l, m의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이 되고, 곧, $f'(-1)=f(1)=-\frac{1}{2}$이다.
$f(x)$의 최고차항의 계수를 a라 하자.
그러면 $f'(x)=3a(x-1)(x+1)-\frac{1}{2}$이므로

$$f(x)=ax^3-\left(3a+\frac{1}{2}\right)x+C \ (C\text{는 상수})$$

라 둘 수 있다. 점 A, B의 좌표를 대입하자.

$$f(-1)=-a+\left(3a+\frac{1}{2}\right)+C=2a+\frac{1}{2}+C=-2$$

$$f(1)=a-\left(3a+\frac{1}{2}\right)+C=-2a-\frac{1}{2}+C=2$$

두 식을 연립해서 풀면 $a=-\frac{5}{4}$, $C=0$이므로
$f(x)=-\frac{5}{4}x^3+\frac{13}{4}x$이고, $f'(0)=\frac{13}{4}$

12 정답 ④

만일 a_n, a_{n+1}, a_{n+2}의 부호가 모두 양수이면

$$b_n=a_n-2a_{n+1}+a_{n+2}=0$$

마찬가지로 a_n, a_{n+1}, a_{n+2}의 부호가 모두 음수이더라도

$$b_n=-a_n+2a_{n+1}-a_{n+2}=0$$

한편, $b_{m+8}\times b_{4m}\neq 0$이므로 **$a_{m+8}$, a_{m+9}, a_{m+10}의 부호가 모두 같을 수는 없으며 같은 원리로 a_{4m}, a_{4m+1}, a_{4m+2}의 부호는 모두 같을 수 없다.** ⋯ ㉠
이때, $a_n<0$인 자연수 n의 최댓값을 p라 하자.
그러면 ㉠에서 $n\le p-2$일 때 $b_n=0$, $n\ge p+1$일 때 $b_n=0$이므로 **$b_n\neq 0$이 되는 n의 값은 $p-1$, p 뿐이다.**
이때, $b_{m+8}\times b_{4m}=4$이면 $b_{m+8}\neq 0$, $b_{4m}\neq 0$이며,
m이 자연수이므로 $m+8\neq 4m$이다. 따라서
$m+8=p-1$이고 $4m=p$이면 : $m=3$, $p=12$
$m+8=p$이고 $4m=p-1$이면 : 자연수 m이 존재하지 않는다.
따라서 $m=3$, $p=12$이다.

$$\begin{aligned} b_{11}&=|a_{11}|-2|a_{12}|+|a_{13}| \\ &=-a_{11}+2a_{12}+a_{13} \\ &=2a_{12}+2d \\ &=2a_{13}(\ge 0) \end{aligned}$$

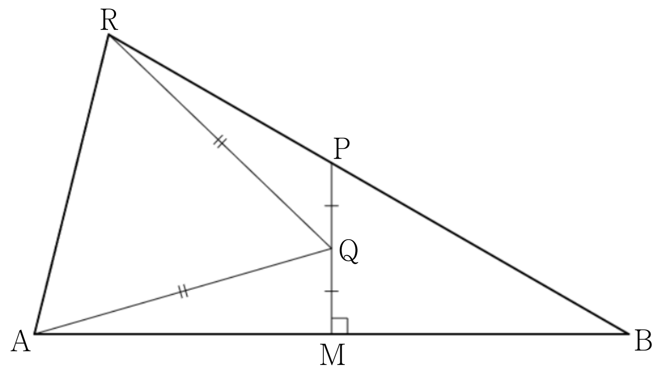
$$\begin{aligned} b_{12}&=|a_{12}|-2|a_{13}|+|a_{14}| \\ &=-a_{12}-2a_{13}+a_{14} \\ &=-2a_{13}+2d \\ &=-2a_{12}(>0) \end{aligned}$$

따라서

$$b_{11}\times b_{12}=-4a_{12}a_{13}=4$$

곧, $a_{12}a_{13}=-1$인데, **a_{12}와 a_{13}이 모두 정수이며 수열 $\{a_n\}$의 공차가 자연수**이므로 $a_{12}=-1$, $a_{13}=1$이고 $\{a_n\}$의 공차는 2이다.
이때, $m=3$이므로 $a_{2m}=a_6=-13$

13 정답 ①



선분 BQ를 그었을 때, 직선 MQ가 선분 AB의 수직이등분선이므로

$$\overline{QA}=\overline{QB}=\overline{QR}$$

따라서 점 Q로부터 세 점 A, B, R에 이르는 거리가 같으므로 **점 Q는 삼각형 ABR의 외심**이다.
곧, 선분 QR의 길이는 삼각형 ABR의 외접원의 반지름의 길이이다.
삼각형 PQR에서 사인법칙에 의해 삼각형 PQR의 외접원의 반지름의 길이는 $\frac{\overline{RQ}}{2\times\sin(\angle RPQ)}$인데,
삼각형 ABR의 외접원의 넓이가 삼각형 PQR의 외접원의 넓이의 3배이기에 두 외접원의 반지름의 길이비는 $\sqrt{3}:1$이다.
곧, $\overline{RQ}$가 삼각형 ABR의 외접원의 반지름이므로 삼각형 PQR의 외접원의 반지름의 길이는 $\frac{\sqrt{3}}{3}\overline{RQ}$

$\frac{\overline{RQ}}{2\times\sin(\angle RPQ)}=\frac{\sqrt{3}}{3}\overline{RQ}$이므로

$$\sin(\angle RPQ)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

곧, $\angle RPQ>\frac{\pi}{2}$이므로 $\angle RPM=\frac{2\pi}{3}$, 곧, $\angle BPM=\frac{\pi}{3}$

$$\overline{PM}=\frac{\overline{BM}}{\tan(\pi/3)}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=2 \ (\because\ \overline{AB}=4\sqrt{3}\text{이고 M은 중점})$$

이때, 점 Q가 $\overline{PM}$의 중점이므로 $\overline{MQ}=\overline{PQ}=1$이다.
즉, **피타고라스의 정리**에 의해

$$\overline{QB}=\overline{QA}=\overline{QR}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+1}=\sqrt{13}$$

삼각형 PQR에서 코사인법칙에 의해

$$\overline{PQ}^2+\overline{PR}^2-2\times\overline{PQ}\times\overline{PR}\times\cos\frac{2\pi}{3}=\overline{QR}^2$$

$$\overline{PR}^2+1+2\times 1\times\overline{PR}\times\frac{1}{2}=13 \ \cdots \ ㉡$$

$$\overline{PR}^2+\overline{PR}-12=0 \Rightarrow (\overline{PR}+4)(\overline{PR}-3)=0$$

곧, $\overline{PR}=3$이다.

14 정답 ①

① 함수 $f(x)$의 불연속점과 따라가는 개형 파악

함수 $|f(x)|$는 $x=1$을 제외한 모든 점에서 곡선 $y=x^2-4x+k$의 개형과 동일하다. (단, k는 상수)

한편, $\lim_{h \to 0} \frac{|f(t+h)|-|f(t-h)|}{2h}=2t-4$의 값이 모든 실수 t에 대하여 존재하고, **함수 $f(x)$가 오직 $x=1$에서만 불연속이기 때문에 함수 $|f(x)|$는 $x \neq 1$에서 미분가능하다.**

이때, $\lim_{h \to 0} \frac{|f(t+h)|-|f(t-h)|}{2h}=2t-4$이므로

$t \neq 1$인 모든 실수 t에 대하여 $\frac{d}{dt}|f(t)|=2t-4$이고,

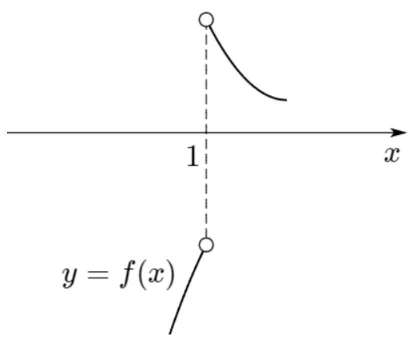
$t \neq 1$일 때 $|f(t)|=t^2-4t+k$이다. (k는 상수)

한편, 모든 실수 t에 대하여 $|f(t)| \geq 0$이므로 $k \geq 4$이다.

이때, $f(0)<0$이며, 열린구간 $(-\infty, 1)$에서 함수 $f(x)$가 연속이므로 이 구간에서 $f(x)=-x^2+4x-k$이다.

또한, 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 불연속이며, $f\left(\frac{3}{2}\right)>0$이므로

$x \neq 1$, $x \leq 2$에서의 함수 $f(x)$의 그래프를 개략적으로 그리면 다음과 같다.



② 열린구간 $(1, \infty)$에서 $f(x)=x^2-4x+k$이 불가능함을 증명

이때, 열린구간 $(1, \infty)$에서 $f(x)=x^2-4x+k$이면 $x>1$에서

$$f(x+4)-f(x)=8x$$

이기 때문에 방정식 $f(x)=f(x+4)$이 이 구간에서 해를 가지지 않는다.

또한, 열린구간 $(-3, 1)$에서는 $f(x)$와 $f(x+4)$의 부호가 달라 방정식 $f(x)=f(x+4)$가 해를 가지지 않는다.

마지막으로 열린구간 $(-\infty, -3)$에서는 열린구간 $(x, x+4)$에서 함수 $f(x)$가 증가함수이므로 방정식 $f(x)=f(x+4)$가 해를 가지지 않는다.

한편, 위의 범위들에서 포함되지 않은 $x=-3$, $x=1$일 때 조건 (나)를 만족시키는 경우, 즉, $f(-3)=f(1)$, $f(1)=f(5)$를 동시에 만족하는 것은 불가능하다. $f(-3)$과 $f(5)$의 부호가 다르기 때문이다.

즉, $f(-3)=f(1)=f(5)$이 불가능하므로 방정식 $f(x)=f(x+4)$은 최대 한 개의 실근만을 가질 수 있다.

이는 조건 (나)에 모순이다.

③ $f(x)$가 열린구간 $(1, \infty)$에서 부호가 바뀌고 함수 분석

따라서 함수 $f(x)$는 열린구간 $(1, \infty)$에서 적어도 한 번 부호가 변화해야 한다.

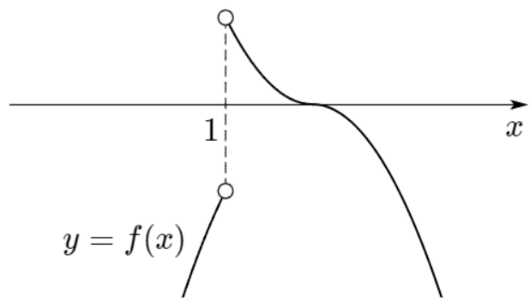
조건 (가)를 만족시키면서 부호를 변화시키려면 $x>1$에서 $f(x)=0$인 실수 x가 존재해야 한다.

함수 $|f(x)|$가 $x \neq 1$인 모든 점에서 함수 $y=x^2-4x+k$의 개형과 동일하면서 **$x>1$에서 $f(x)=0$인 실수 x가 존재하려면 함수 $f(x)$의 그래프가 x축에 접해야 한다.**

$$\frac{D}{4}=(-2)^2-k=0$$

$$\therefore\ k=4$$

곧, $x \neq 1$에서 함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



④ 마무리 계산

정리하면 함수 $f(x)$는

$1<x<2$에서 $f(x)=x^2-4x+4$

$x<1$, $x \geq 2$에서 $f(x)=-(x^2-4x+4)$이므로

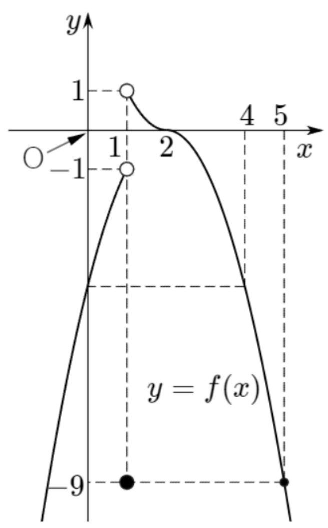
이차함수의 대칭성에 의해 $f(0)=f(4)$

조건 (나)를 만족시키려면 $f(1)=f(5)$이므로

$$f(1)=-(5^2-4\times5+4)=-9$$

곧, 구하는 값은

$$f(1)+f(3)=(-9)+(-1)=-10$$



15 정답 ②

① a_{m+1}, a_{m+2}의 값 결정

$$\sum_{n=1}^{m+2} a_n - \sum_{n=1}^{m} a_n = 62-54=8$$

이므로 $a_{m+1}+a_{m+2}=8$이다.

만일 $|a_{m+1}|<3$이면 $a_{m+2}=a_{m+1}+2$이므로

$$a_{m+1}+a_{m+2}=2a_{m+1}+2=8$$

에서 $a_{m+1}=3$인데, 이는 $|a_{m+1}|<3$이라는 사실에 모순이다.

따라서 $|a_{m+1}|\geq 3$이고, $a_{m+2}=\dfrac{16}{a_{m+1}}$ 이다.

한편, $a_{m+1}+a_{m+2}=a_{m+1}+\dfrac{16}{a_{m+1}}=8$에서 $a_{m+1}>0$이고,

산술-기하평균 부등식에 의해 $a_{m+1}+\dfrac{16}{a_{m+1}}\geq 8$이므로

주어진 상황은 등호가 성립하는 상황, 즉, $a_{m+1}=\dfrac{16}{a_{m+1}}$ 이다.

$a_{m+1}>0$이므로 $\boldsymbol{a_{m+1}=a_{m+2}=4}$임을 얻는다.

② 수열의 규칙성 파악

m이 충분히 큰 자연수라고 가정하자.
그러면 다음과 같이 표를 그릴 수 있다.

<table>
<tr><th>a_{m+1}</th><th>a_m</th><th>a_{m-1}</th><th>a_{m-2}</th><th>a_{m-3}</th><th>a_{m-4}</th><th>a_{m-5}</th></tr>
<tr><td rowspan="12">4</td><td rowspan="10">4</td><td rowspan="8">4</td><td rowspan="6">4</td><td rowspan="4">4</td><td rowspan="2">4</td><td>4</td></tr>
<tr><td>2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2</td><td>8</td></tr>
<tr><td>0</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2</td><td>8</td><td></td></tr>
<tr><td>0</td><td>-2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2</td><td>8</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>0</td><td>-2</td><td>-8</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2</td><td>8</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>0</td><td>-2</td><td>-8</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">2</td><td>8</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>0</td><td>-2</td><td>-8</td><td></td><td></td></tr>
</table>

이상에서 만일 $a_1=4$이면 모든 자연수 n에 대하여

$a_n=4$이 되므로 $\displaystyle\sum_{n=1}^{m}a_n$도 4의 배수여야 한다.

하지만 $\boldsymbol{\displaystyle\sum_{n=1}^{m}a_n=54}$**에서 54는 4로 나누어떨어지지 않기에 모순.**

곧, 위의 배열에서 a_1으로 가능한 것은
0, 2, -2, -8, 8 중 하나인데,

$a_1=-8$인 경우에는 $N\geq 4$일 때 $\left|\displaystyle\sum_{n=1}^{N}a_n\right|$이 4의 배수가 되므로

$\displaystyle\sum_{n=1}^{m}a_n$이 4의 배수가 아니기에 모순.

마찬가지로 $a_1=-2$일 때도 $\displaystyle\sum_{n=1}^{m}a_n$이 4의 배수가 될 수 없기

때문에 불가능하다.
곧, $a_1=0$ 또는 $a_1=2$ 또는 $a_1=8$이다.

③ 각 케이스별 분석

(ⅰ) $a_1=0$이면

$a_2=2$이고 3 이상의 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=4$이므로

$$\sum_{n=1}^{m}a_n=0+2+4(m-2)=54$$

방정식을 풀면 $m=15$

(ⅱ) $a_1=2$이면

2 이상의 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=4$이므로

$$\sum_{n=1}^{m}a_n=2+4(m-1)=54$$

방정식을 풀면 $m=14$

(ⅲ) $a_1=8$이면

$a_2=2$이고 3 이상의 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=4$이므로

$$\sum_{n=1}^{m}a_n=8+2+4(m-2)=54$$

방정식을 풀면 $m=13$

따라서 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 가능한 모든 m의 값의 합은

$$15+14+13=42$$

16 정답 6

$3^{2x}=3^{3x-6}$이므로 $2x=3x-6$이다.
방정식을 풀면 $x=6$

17 정답 12

주어진 극한식이 존재하기 위해 (분모)→0이면 (분자)→0이다.
따라서 $2^3-4\times2^2+a=0$이므로 $a=8$

$$\lim_{x\to2}\frac{x^3-4x^2+8}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x^2-2x-4)}{x-2}=-4$$

곧, $a-b=8-(-4)=12$

18 정답 50

주어진 함수가 실수 전체의 집합에서 연속이면
$\displaystyle\lim_{x\to b-}f(x)=\lim_{x\to b+}f(x)$이므로

$$b+a=2a$$

곧, $a=b$이다.
즉, $f(a-2)=(a-2)+a=8$이므로 방정식을 풀면

$$a=b=5$$

따라서 $a^2+b^2=50$

19 정답 48

$\sqrt{a_5-4a_3}\geq 0$, $\sqrt{a_4-2}\geq 0$에서
$\sqrt{a_5-4a_3}+\sqrt{a_4-2}=0$이려면
$a_5-4a_3=0$, $a_4-2=0$이다.
곧, $a_5=4a_3$에서 수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하면 $r^2=4$이다.
$a_4=2$인데, **$r>0$이면 $a_1>0$이므로 첫째항이 음수가 아니다.**
따라서 $r<0$이고, $r=-2$이다.
곧, $a_8=16a_4=32$ $a_7=-8a_4=-16$이므로

$$a_8-a_7=48$$

20 정답 179

① **함수 $g(t)$의 성질 분석**

주어진 방정식의 해는 x에 대한 두 방정식

$$f(x)=t,\ x^2-2x=t$$

의 서로 다른 모든 실근의 개수이다.

즉, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=x^2-2x$과 직선 $y=t$가 만나는 서로 다른 점의 개수이다.

② **$t=-1$일 때의 $g(t)$의 연속성 분석을 통해 함수 $f(x)$가 -1을 극값으로 가짐을 알 수 있음.**

$\lim_{t\to -1} g(t)\neq g(-1)$에서 함수 $g(t)$는 $t=-1$에서 불연속인데, 극한값이 존재함에 주목하자.

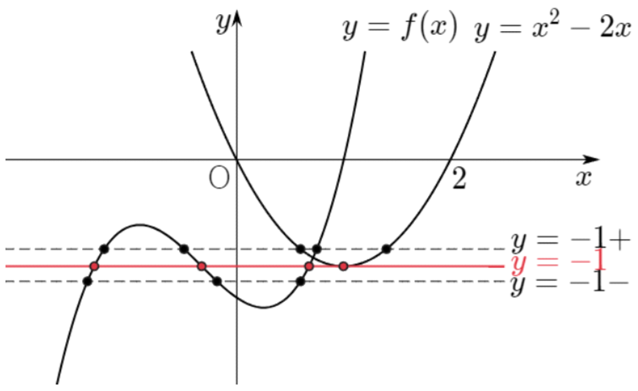
$y=x^2-2x=(x-1)^2-1$에서 함수 $y=x^2-2x$의 최솟값이 -1

즉, 곡선 $y=x^2-2x$와 직선 $y=-1+$는 두 점에서 만나고, 직선 $y=-1-$과는 만나지 않는다.

그러면 함수 $y=f(x)$가 -1을 극댓값 또는 극솟값으로 가지지 않을 때, 곡선 $y=f(x)$가 $y=-1$, $y=-1+$, $y=-1-$와 만나는 점의 개수는 모두 같다.

즉, $\lim_{t\to 1+} g(t)=2+\lim_{t\to 1-} g(t)$이 되므로

$\lim_{t\to -1} g(t)$의 값은 존재할 수 없다.



곧, 함수 $f(x)$는 -1을 극솟값 또는 극댓값으로 갖는다.

그러나 -1이 극솟값일 때, $\lim_{t\to -1-} g(t)=1$이고

$\lim_{t\to -1+} g(t)\geq 2$이므로 $\lim_{t\to -1} g(t)$의 값은 존재할 수 없다.

따라서 **함수 $f(x)$는 -1을 극댓값으로 가진다.**

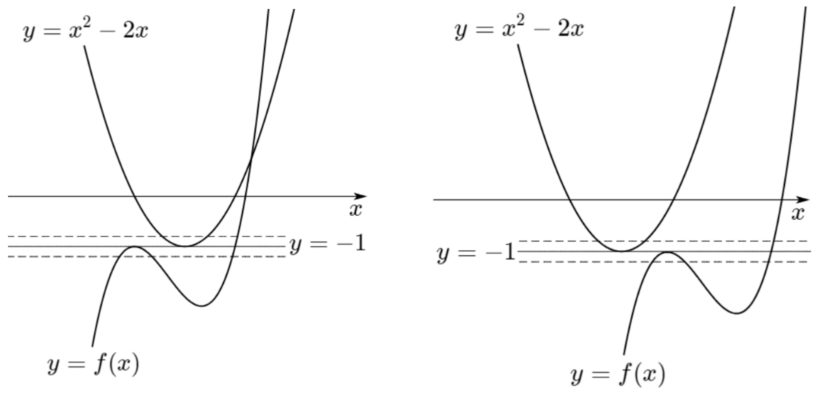
곧, 상수 a, $b\,(a<b)$에 대하여

$$f(x)=(x-a)^2(x-b)-1$$

로 둘 수 있다. … ㉠

③ **$\lim_{t\to -1} g(t)\neq g(-1)$이라는 사실은 더욱 분석할 거리가 많다.**

한편, 함수 $y=x^2-2x$가 $x=1$에서 -1을 최솟값으로 갖는데, $f(1)\neq -1$이면 다음 그림과 같이 함수 $g(t)$는 $t=-1$에서 $g(-1)=3$으로 연속이 된다.



이는 $\lim_{t\to -1} g(t)\neq g(-1)$라는 사실에 모순이므로 주어진 조건을 만족시키기 위해 $f(1)=-1$

따라서 ㉠에서 $a=1$ 또는 $b=1$ … ㉡

④ **$\lim_{t\to 3} g(t)=k$, $g(3)\neq k$일 조건 분석**

함수 $f(x)$의 극댓값이 -1이므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=3$, $y=3-$, $y=3+$가 만나는 점의 개수는 모두 동일하다.

마찬가지로 함수 $y=x^2-2x$와 직선 $y=3$, $y=3-$, $y=3+$가 만나는 점의 개수도 모두 동일하다.

그럼에도 불구하고 $\lim_{t\to 3} g(t)\neq g(3)$이려면 곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=x^2-2x$가 $y=3$인 점에서 만나야 한다.

이때, $x^2-2x=3$이면 $(x+1)(x-3)=0$이므로 $x=-1$ 또는 $x=3$

즉, $f(-1)=3$ 또는 $f(3)=3$ … ㉢

(ⅰ) ㉡에서 $a=1$이면

$f(x)=(x-1)^2(x-b)-1$

㉢에서 $f(-1)=3$이면 $4(-1-b)-1=3$이므로 $b=-2$인데,

이는 ㉠에서 $a<b$라는 사실에 모순된다.

따라서 ㉢에서 $f(3)=3$이면 $4(3-b)-1=3$이므로 $b=2$이며

이는 ㉠에서 $a<b$을 만족시킨다.

(ⅱ) ㉡에서 $b=1$이면

$f(x)=(x-a)^2(x-1)-1$

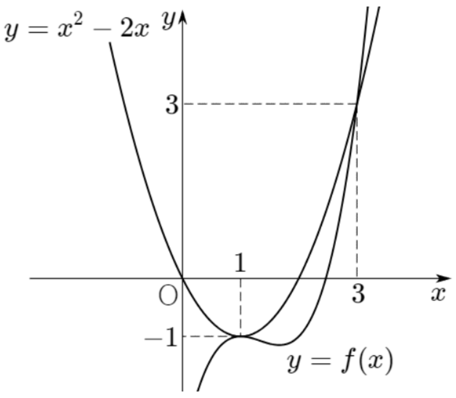
㉢에서 $f(-1)=3$이면 $-2(-1-a)^2=4$인데,

$-2(-1-a)^2\leq 0$이므로 이를 만족시키는 a가 존재하지 않는다.

$f(3)=3$이면 $2(3-a)^2-1=3$이므로 $(3-a)^2=2$이고,

$a=3\pm\sqrt{2}$인데 두 경우 모두 $a>b$이므로 ㉠을 만족시키지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $f(x)=(x-1)^2(x-2)-1$이고, 그래프는 다음과 같다.



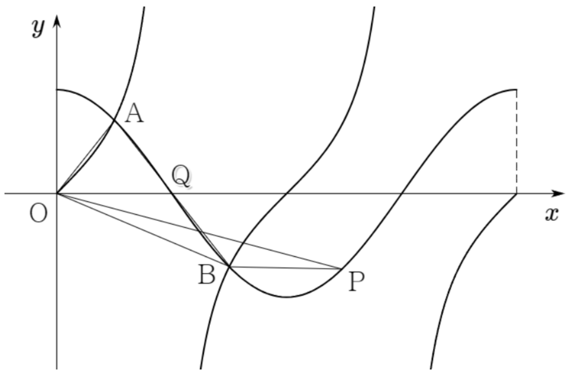
따라서 $k=\lim_{t\to -1} f(t)=3$이므로

$$f(k+4)=f(7)=6^2\times 5-1=179$$

21 정답 36

① $f(x)$와 $g(x)$의 그래프의 교점에 대한 고찰

어떤 실수 $\alpha\,(0 \le \alpha \le \pi)$에 대하여 $\cos\alpha = a\tan\alpha$라 하자.
이때, $\cos(\pi-\alpha) = a\tan(\pi-\alpha)$이므로 두 곡선
$y=\cos x$, $y=a\tan x$가 $x=\alpha$에서 만나면 $x=\pi-\alpha$에서도 만난다.
따라서 두 곡선 $y=\cos x$, $y=a\tan x$의 그래프는 다음과 같다.
$y=\cos x$가 x축과 만나는 점 중 x좌표가 양수이면서 그 값이 가장 작은 점을 Q라 하자.

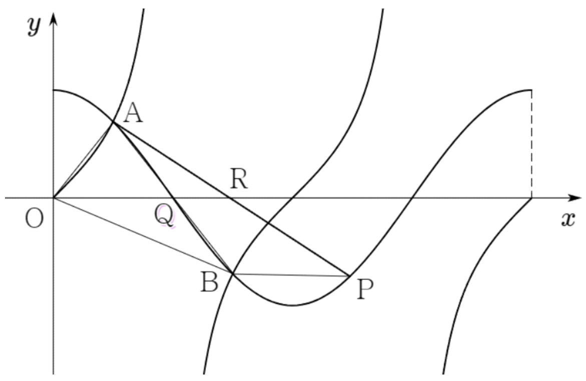


삼각함수의 그래프의 대칭성에 의해 점 A와 점 B는 점 Q에 대하여 대칭이므로 점 A와 점 B의 y좌표의 절댓값은 같다.

곧, 삼각형 ABP를 구성하는 두 삼각형인 AQP, BQP에 대하여
$\overline{\mathrm{AQ}}=\overline{\mathrm{BQ}}$, $\overline{\mathrm{PQ}}$는 공통, $\sin(\angle \mathrm{AQP})=\sin(\angle \mathrm{BQP})$
이므로 두 삼각형의 넓이가 같다.
이는 다시 말해, 삼각형 BQP의 넓이가 $\dfrac{S_2}{2}$이라는 의미이다.
이때, 주어진 조건에서 $S_2=2S_3$, 즉, $S_3=\dfrac{S_2}{2}=\triangle\mathrm{BQP}$이므로
삼각형 BQP의 넓이는 삼각형 OBP의 넓이와 같다.

② 넓이 관계를 바탕으로 두 점 B, P의 관계 분석

두 삼각형 BQP, OBP는 선분 BP를 공통인 밑변으로 가지므로 두 점 O, Q로부터 선분 BP까지의 거리가 같다.
다시 말해, 선분 BP는 직선 OQ와 평행이 되어 **두 점 B, P의 y좌표는 같다.**



$S_1=S_2$에서 삼각형 OAB와 삼각형 ABP의 넓이가 같은데,
$S_1=\triangle\mathrm{OQA}+\triangle\mathrm{OQB}$에서

$\triangle\mathrm{OQA}=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OQ}}\times\overline{\mathrm{QA}}\times\sin Q$, $\triangle\mathrm{OQB}=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OQ}}\times\overline{\mathrm{QB}}\times\sin Q$

이고,

$$S_1=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OQ}}\times\{\overline{\mathrm{QA}}+\overline{\mathrm{QB}}\}\times\sin Q$$
$$=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OQ}}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\sin Q$$

$S_2=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{BP}}\times\sin B=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{BP}}\times\sin Q$ ($\because$ 동위각)

이때, $S_1=S_2$에서

$$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OQ}}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\sin Q=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{BP}}\times\sin Q$$

$\overline{\mathrm{OQ}}=\overline{\mathrm{BP}}$인데, 점 Q의 x좌표가 $\dfrac{\pi}{2}$이므로 $\overline{\mathrm{OQ}}=\dfrac{\pi}{2}$이다.

곧, $\overline{\mathrm{BP}}=\dfrac{\pi}{2}$이고, 두 점 B, P의 y좌표가 같기 때문에 두 점은 직선 $x=\pi$에 대하여 대칭이므로 점 B의 x좌표는 $\dfrac{3}{4}\pi$이다.

점 B가 두 곡선 $y=\cos x$, $y=a\tan x$가 만나는 점이므로
$x=\dfrac{3}{4}\pi$를 대입하면

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}=-a \;\Rightarrow\; \therefore\; a=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

따라서 $72a^2=72\times\dfrac{1}{2}=36$

22 정답 30

① 박스 조건의 의미 분석

우선 $\lim\limits_{x\to k-}g(x)=\lim\limits_{x\to k+}g(x)=f(k)$이므로 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
적당한 실수 p에 대하여

$$\int_{x_1}^{x_2}g(t)dt=\int_{p}^{x_2}g(t)dt-\int_{p}^{x_1}g(t)dt$$

이므로 주어진 조건은

$$\int_{p}^{x_2}g(t)dt-\frac{x_2g(x_2)}{2}\ge\int_{p}^{x_1}g(t)dt-\frac{x_1g(x_1)}{2}$$

으로 쓸 수 있다.

곧, 함수 $\displaystyle\int_{p}^{x}g(t)dt-\frac{xg(x)}{2}$는 상수함수이거나 증가함수이다.

이때, 함수 $g(x)$가 $x\ne k$인 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x\ne k$인 모든 실수 x에 대하여

$$g(x)-\frac{xg'(x)+g(x)}{2}=\frac{g(x)-xg'(x)}{2}\ge 0$$

곧, $g(x)-xg'(x)\ge 0$이다. …… ㉠

한편, 함수 $\displaystyle\int_{p}^{x}g(t)dt-\frac{xg(x)}{2}$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=k$ 근방에서만 $g(x)-xg'(x)\ge 0$가 성립하면 $x=k$에서도 $g(x)-xg'(x)\ge 0$이 성립한다.
즉, 이 문제에서 요구하는 것은 ㉠을 만족하는 $f(3)$의 최솟값을 구하는 것이다.

② $g(x)-xg'(x)\geq 0$이 수학적으로 의미하는 바에 대한 분석

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(t,\ g(t))\ (t\neq k)$에서의 접선의 방정식이

$$y=g'(t)(x-t)+g(t)$$

이 직선의 y절편이 $g(t)-tg'(t)$이다.

즉, ㉠에서 이 값이 항상 0 이상이므로 주어진 박스 조건은

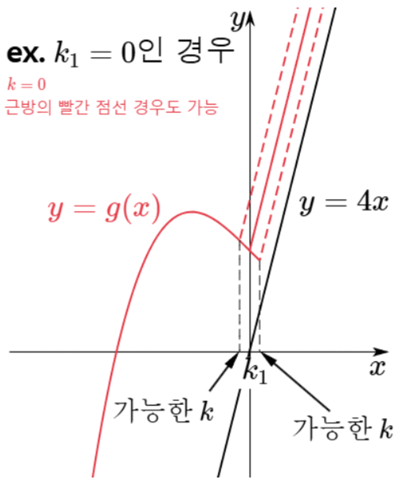
곡선 $y=g(x)$ 위의 x좌표가 k가 아닌 임의의 점에서 접선을 그어도 y절편이 0 이상

이라는 조건과 같다.

한편, $x\geq k$에서 $g(x)$가 점 $(k,\ f(k))$를 지나는 일차함수이므로 ㉠이기 위해 $f(k)\geq 4k$이다.

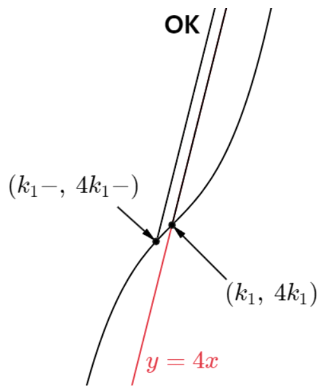
문제에서 주어진 조건을 만족시키는 실수 k의 값을 k_1이라 하자.

만일 $g(k_1)>4k_1$이면 $k=k_1$ 근방의 모든 실수 k에 대하여 ㉠을 만족시키기 때문에 그림의 예시처럼 주어진 조건을 만족시키는 실수 k가 무수히 많이 존재하게 된다.

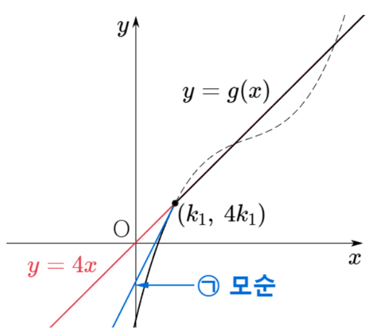


곧, 이러한 현상을 피하기 위해 $g(k_1)=4k_1$이다.

한편, $f'(k_1)<4$이면 그림과 같이 $k=k_1-$ 일 때도 ㉠이 성립하기 때문에 주어진 조건을 만족시키는 k의 개수가 1일 수 없다.

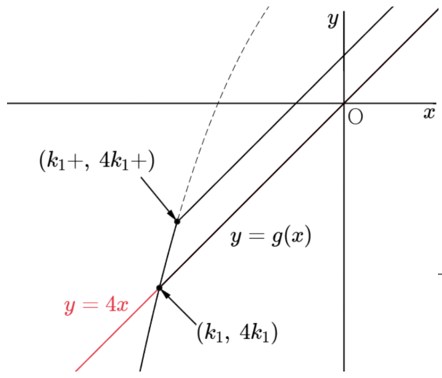


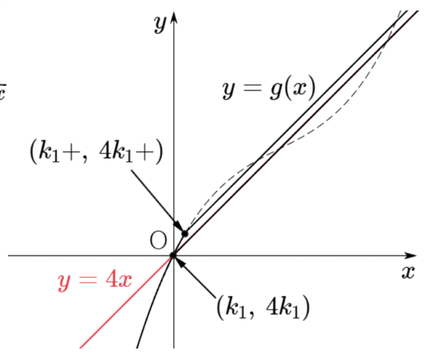
또한, $f'(k_1)>4$이면 $x=k_1-$ 일 때 ㉠이 성립하기 위하여 $k_1\leq 0$이다. 그래프의 개형과 관계없이 $f'(k_1)>4$이므로 $k_1>0$인 경우 $x=k_1-$ 일 때 접선의 y절편이 음수이기 때문이다.



이때, $k_1\leq 0$이면 그림과 같이 $k=k_1+$ 일 때도 ㉠이 성립한다.

이 역시 조건을 만족시키는 k의 개수가 1이라는 사실에 모순이다.





따라서 $f'(k_1)>4$, $f'(k_1)<4$인 경우가 모두 불가능하며

$f(k_1)=4k$, $f'(k_1)=4\ (k_1\neq 1)$이고, $f(1)=4$에서

$f(x)=(x-k_1)^2(x-1)+4x$로 두자. ($k_1\neq 1$인 것은 $f'(1)\neq 4$ 때문)

$f(3)=2(3-k_1)^2+12$이므로 k_1의 범위를 구해야 한다.

③ k_1의 범위 분석

$f(x)=(x-k_1)^2(x-1)+4x$에서

$x\geq k_1$이면 $g(x)=4x$이므로

$$g(x)-xg'(x)=4x-4x=0\geq 0$$

이 되어 박스 조건이 성립한다.

또한, $x\leq k_1$이면 $g(x)=f(x)$이므로 ㉠을 만족시키기 위해 $x\leq k_1$에서 $f(x)\leq 4x$이다.

그래프로도 직관적인 감을 잡을 수는 있지만 엄밀한 풀이를 하면

$$\begin{aligned} g(x)-xg'(x)&=\left\{(x-k_1)^2(x-1)+4x\right\}-x\left\{3(x-k_1)\left(x-\frac{k_1+2}{3}\right)+4\right\} \\ &=(x-k_1)\left\{(x-k_1)(x-1)-x(3x-k_1-2)\right\} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

이때, 이 부등식이 $x\leq k_1$에서 성립하는 것이므로 $x-k_1\leq 0$

곧, 부등식 $(x-k_1)(x-1)-x(3x-k_1-2)\leq 0$이 성립하면 된다.

식을 정리하면

$$(x-k_1)(x-1)-x(3x-k_1-2)=-2x^2+x+k_1\leq 0$$

이 식이 $x\leq k_1$에서 성립한다. …… ㉡

우선 $x=k_1$을 대입했을 때, $-2k_1^2+2k_1\leq 0$이므로

$$k_1\leq 0 \text{ 또는 } k_1\geq 1$$

④ 추려진 k_1의 범위에 따른 부등식 분석

(i) $k_1\leq 0$이면

x에 대한 함수 $y=-2x^2+x+k_1$의 대칭축이 $x=\frac{1}{4}$이므로

$x\leq 0$에서 증가함수임에 주목하자.

㉡이 성립하기 위해 $x=k_1$일 때 부등식이 성립하면 충분하다.

우리는 이미 케이스를 나누는 시점에서 $x=k_1$일 때 ㉡이 성립하도록 케이스를 나누었다.

따라서 $k_1\leq 0$이면 주어진 조건이 성립한다.

(ii) $k_1\geq 1$이면

멀리 갈 것 없이 예를 들어, $x=0$일 때 ㉡이 성립하지 않는다.

㉡의 부등식에서 $0\leq k_1$이고, $x=0$을 대입했을 때 성립하지 않기 때문이다.

(i), (ii)에서 $k_1\leq 0$이므로 $f(3)=2(3-k_1)^2+12$에서 $f(3)$의 최솟값은 $k=0$일 때 30이다.