2025

피직솔루션

PHSICSOLUTION

역학 풀이의 완성을 위한 마지막 단계

에라둔

2025 피직솔루션

CONTENTS | 목차

시작하기 전에

물리라는 과목은 역사적으로 역학 파트에서 고난도 계산 문항이 출제 되어 왔고 이에 대한 어려움을 겪는 분들이 많아 왔습니다. 물론 여러 시행착오를 겪고 나면 오히려 역학 파트에 재미를 느끼시는 분들도 있으나 반대로 그러한 시행착오를 겪는 과정에서 적잖은 스트레스를 받는 분들도 많습니다. 본 교재는 그러한 시행착오 과정을 줄이고 고난도 역학 문제 풀이 과정을 간소화, 최적화를 원하시는 분들을 위해 작성되었습니다.

마음 같아선 기본적인 내용부터 차근차근 다루고 싶으나, 시간 관계상 기본 개념은 간결하게 다루고 이를 바탕으로 파생되는 문항 풀이를 위한 개념 및 비례식을 이용한 문항 풀이 적용에 대해 다루었습니다. 계산 문항에 어려움을 겪는 분들이라면 본 교재가 좋은 교보재가 될 것이라 자부합니다.

다만, 학습 이전에 몇 가지 말씀드리고 싶은 사항이 있습니다.

첫째로 본 교재를 학습하기 전에 반드시 **기본적인 개념 이해 및 기출 문항을 1회독**을 하시기를 권장 드립니다. 기본적인 개념 이해가 되어 있지 않다면 내용이 다소 벅찰 수 있으며 기출 문항을 풀지 않은 상태라면 **본인의 풀이 변화를 느끼기 어려울것**이기 때문입니다. 만약 이 두 가지가 충족이 되지 않은 상황이라면 충족시킨 뒤에 본 교재를 다시 학습해주시기를 부탁드리겠습니다.

둘째로 본 교재에서 지향하는 풀이 방식이 낯설더라도 꼭 시도라도 해보시면 좋겠습니다. 저는 여러분들의 계산 스타일을 잘 모르지만 아마 본 교재에서 지향하는 풀이 방식은 여러분들과는 많이 다를 것입니다. 일반적인 풀이가 **정량적 계산**을 지향한다면 본 교재는 **비율적 계산**을 지향하기 때문입니다. 아마 풀이 방식이 낯설거나 한편으로는 어려울 수 있습니다. 하지만 익숙해지고 나면 상당히 쾌적한 풀이 및 문항 해석 능력을 느끼실 수 가지실 수 있을 것입니다.

셋째로 본 교재 내용을 기반으로 **사설 문항들을 풀어보시기를 권장 드립니다.** 어차피 여러분은 결국엔 처음 보는 문항을 풀게 될 것이기에 기출이 아닌 새롭게 나오는, 풀어보지 않은 문항들에 대해 이론을 적용해보는 것이 매우 중요합니다. 따라서 본 교재 학습이 끝났다면 N제, 사설 모의고사 등에 대하여 적용하여 비율적 계산을 체화해보시기 바랍니다.

오랜만에 이렇게 교재를 작성하니 긴장이 되면서도 최대한 많은 내용을 담고자 고민하는 이 시간이 즐겁습니다. 본 교재를 통해 얼마나 많은 분들이 학습하실지는 모르겠으나 적어도 이 교재를 보시는 모든 분들은 이 내용들을 통해 만족하실만한 결과가 있으셨으면 좋겠습니다. 오류 제보 및 질문사항은 본 교재를 다운로드 하신 오르비, 포만한에서 댓글로 남겨주시거나 아래 이메일로 연락주시면 답변드리도록 하겠습니다. 감사합니다.

- 2024년 9월, 에라둔(이건영) 올림 -

(lee36love@naver.com)

* 본 교재에는 학습 과정에 도움이 될만한 기출 문항들을 수록하였습니다. 문항 코드는 시행년/월/번호 순으로 이루어져 있습니다. 예를 들어 2023학년도 수능 11번은 20221111로 표기하였습니다.

비례식의 원리

CHAPTER

00

1. 비례식의 기본 특성

본 교재는 물리학 학습 이전에 비례식에 대해서 배울 것이다. 뜬금없이 무슨 비례식인가라고 생각할 수 있으나 비례식을 이용하면 문제 풀이 과정에서 여러 장점을 얻게 된다. 첫째로 여러 문제 상황, 조건 등을 직관적으로 파악하기에 매우 수월해지며 둘째로 계산을 획기적으로 단순화할 수 있다. 특히나 실제 출제되는 문항들을 보면 **~는 ~의 몇 배이다, A의 질량은 $2m$, B의 질량은 $3m$이다**처럼 비율 관계를 나타내는 경우가 많다. 이러한 상황 속에서 비례식을 이용하는 것은 많은 이점을 줄 것이다. 앞으로 본 교재에서는 이론 및 문항 풀이를 가급적이면 비례식을 이용하여 서술해나갈 것이다. 1단원을 하기 이전에 간단한 튜토리얼을 하는 느낌으로 학습해보도록 하자.

0.1.1 비례식의 특징

두 개 이상의 어떠한 값들의 비율을 나타낸 것을 비례식이라 한다. 예를 들어 $a=2$, $b=0.5$라면 이 둘의 비율은 $a:b=2:0.5$라고 쓸 수 있고, 보기 쉽게 2씩 곱하여 $a:b=4:1$라고도 쓸 수 있다. 이처럼 비례식에 대하여 비례식에는 0이 아닌 어떤 수를 곱하든 상관없다는 사실은 익히 알고 있을 것이다. 우리는 앞으로 비례식끼리 사칙연산을 수행할 것이다. 어떻게 계산이 이루어질까? 어떠한 연산 ★에 대해서 아래와 같이 떠올릴 수 있을 것이다.

$$\begin{array}{r|ccccc} & a & : & b & : & c \\ \bigstar & a' & : & b' & : & c' \\ \hline \multicolumn{6}{c}{a \bigstar a' : b \bigstar b' : c \bigstar c'} \end{array}$$

n번째 숫자는 n번째 숫자끼리 연산 ★을 하는 모습을 나타낸 것이다.

두 비례식에 대하여 어떠한 연산 ★를 한다는 것은 위처럼 첫 번째 숫자는 첫 번째 숫자끼리, n번째 숫자는 n번째 숫자끼리 연산을 해준 것을 의미한다. 그렇다면 위와 같은 연산 방식은 늘 성립할까? $a:b=1:2$, $a':b'=2:3$ 면 $a+a':b+b'=3:5$라고 할 수 있을까? **아쉽게도 그럴 수 없다.** 간단한 반례로 $a=1, b=2, a'=4, b'=6$면 $3:5$가 아닌 $5:8$이 나오니 말이다. 그러나 특정 **연산, 상황**에 대해서는 위와 같은 계산이 성립하는데 미리 말하자면 곱셈, 나눗셈에 대해서는 늘 성립하고 덧셈, 뺄셈에 대해서는 특정 상황에 대해 성립한다. 이에 대해 조금 자세히 알아보도록 하자.

(1) 비례상수 : $\mathrm{A}:\mathrm{B}=\mathrm{a}:\mathrm{b}$, $\mathrm{A}=\mathrm{ak}$, $\mathrm{B}=\mathrm{bk}$ 일 때 상수 k를 $\mathrm{A}:\mathrm{B}=\mathrm{a}:\mathrm{b}$의 비례상수라 한다. 비례식을 구성하는 숫자가 **비율이 아닌 실제값으로 나타내기 위해 곱해야 하는 어떠한 상수**를 의미한다.
: $\mathrm{A}=8$, $\mathrm{B}=12$일 때 $\mathrm{A}:\mathrm{B}=2:3$이다. 이 때 2와 3에 각각 4를 곱해주면 A, B의 값이 나오므로 비례식 $\mathrm{A}:\mathrm{B}=2:3$에 대한 비례 상수 $k=4$다.

◆ **예시** : $\mathrm{A}=20$, $\mathrm{B}=30$이고 $\mathrm{A}:\mathrm{B}=2:3$이다. 비례식 $\mathrm{A}:\mathrm{B}=2:3$에 대한 비례 상수 k는 10이다.

(2) 비례식간의 곱셈, 나눗셈 : **곱셈, 나눗셈**으로 이루어진 관식에 대한 계산은 비례식에서도 동일하게 적용된다.

증명

$A:B=a:b$, $A':B'=a':b'$ 이고 비례상수는 각각 k, k'이라 하자. $(k, k'\neq 0)$
이 때 $AA':BB'=aa'kk':bb'kk'=aa':bb'$이다.

만약 비례상수가 0일 경우에는 자연스레 AA'과 BB'이 0이므로 마찬가지로 성립한다.

: 예를들어 $F=m\times a$라는 관계식이 있다면 F비율 $=m$비율 $\times a$비율도 동일 하게 성립한다. 이는 앞으로 물리학에서 배울 여러 관계식들에 대한 계산을 간소화하는데 매우 유용하게 쓰일 예정이며 본 교재의 기본 베이스가 되는 내용이다.

◆ **예시** : 평균속력×시간=이동거리 이므로 (평균속력 **비율**) × (시간 **비율**) = (이동거리 **비율**) 도 성립한다.

◆ **예시** : 속도변화량×시간=가속도 이므로 (속도변화량 **비율**) × (시간 **비율**) = (가속도 **비율**) 도 성립한다.

(3) 비례식간의 덧셈, 뺄셈 : 일반적으로 비례식간의 덧셈 및 뺄셈은 불가능하나 비례상수가 동일할 경우는 가능하다.
: 간단한 예로 $a=30,\ b=40,\ c=10,\ d=15$라고 했을 때 $a:b=3:4,\ c:d=2:3$이다. 이 두 비례식의 구성 숫자들을 순서대로 더할 경우 $a+c:b+d=(3:4)+(2:3)=(3+2):(4:3)\neq 7:5$와 같이 성립하지 않는다. 그러나 비례식끼리의 덧셈 뺄셈이 성립하는 경우는 대표적으로 두가지가 존재한다.

연산하는 비례식들에 대한 비례상수가 모두 동일할 경우

증명	$A:B=a:b,\ A':B'=a':b'$, 두 비례식에 대한 비례상수는 k로 동일하다 하자 $(k\neq 0)$ 이 때 $A\pm A':B\pm B'=(a\pm a')k:(b+b')k=a\pm a':b\pm b'$ (비례상수 k 소거됨)

◆ **예시 :** $a:b=3:4.\ c:d=1:2$이고 비례상수 $k=10$으로 동일하다면 $a+c:b+d=4:6=2:3$이다.
: 이유는 간단하다. $a,\ b,\ c,\ d$의 실제 값이 30, 40, 10, 20이고 이들에 대해 덧셈을 하든 뺄셈을 하든 10(비례상수 k)으로 묶이며 이들은 비례식을 세워도 어차피 소거되기 때문이다.

한쪽이 0:0일 경우 (두 비례식에 대한 덧셈에서)

증명	$A:B=a:b,\ A':B'=0:0,\ A:B$에 대한 비례상수는 k이다. 이 때 $A\pm A':B\pm B'=ak+0:bk+0=a:b$

◆ **예시 :** $a:b=0:0.\ c:d=1:2$이면 $a+c:b+d=1:2$이다.
: 마찬가지로 어느 한쪽이 $0:0$이면 이에 대해서 덧셈, 뺄셈을 해도 자기 자신이 나오기 때문에 성립한다. 어찌보면 0:0이라는 비례식에 대한 비례상수는 k가 어느숫자든 상관없기 때문이라 볼 수 있다. 만약 두 비례식이 아닌 세 비례식 중 어느 한 비례식이 0:0인 경우엔 어떻게 될까? 앞서 말했듯 연산하는 비례식들에 대한 **비례상수가 모두 동일할 경우** 덧셈 뺄셈이 성립하다고 하였다. 즉, 세 비례식 중 어느 한 비례식이 0:0이라면 나머지 두 비례식의 비례상수가 동일하다면 상관 없다. 이를 다르게 말하면 0:0이라는 비례식은 더하든 빼든 아무런 영향을 주지 않는다는 의미이기도 하다.

0.1.2 비례식의 계산 방식

앞에서 비례식끼리는 일반적으로 곱셈, 나눗셈이 가능함을 배웠다. 이를 종이에 쓰면서 풀 때에는 다음과 같은 방식으로 쓰도록 하자.

(1) 비례식의 곱셈 : 비례식끼리 곱셈을 할 경우엔 앞에서부터 순차적으로 곱해주는 방식을 취한다.

$$(a:b:c)\times(a':b':c') = aa':bb':cc' \text{ 또는 } \times\begin{array}{|ccccc} a & : & b & : & c \\ a' & : & b' & : & c' \\ \hline aa' & : & bb' & : & cc' \end{array}$$

◆ **예시** : $(3:5:8)\times(1:2:3) = 3\times1:5\times2:8\times3 = 3:10:24$로 계산이 가능하다.
개인적으로는 우측처럼 세로로 써주면 계산할 때 피로감이 덜하며 검토하기도 수월하여 선호하는 편이다.

(2) 비례식의 나눗셈 : 비례식끼리 나눗셈을 할 경우엔 앞에서부터 순차적으로 나눠주는 방식을 취한다.

$$(a:b:c)\div(a':b':c') = \frac{(a:b:c)}{(a':b':c')} = \frac{a}{a'}:\frac{b}{b'}:\frac{c}{c'}$$

◆ **예시** : $(3:5:8)\div(1:2:3) = \frac{(3:5:8)}{(1:2:3)} = \frac{3}{1}:\frac{5}{2}:\frac{8}{3} = 18:15:16$으로 계산이 가능하다.
풀이 과정을 보면 비례식 통째로 분모, 분자에 두는 것이 가능하다. 그리고 이를 합칠 때에는 : 가 합쳐진다고 보면 아마 이해하기 편할 것이다. 필자는 곱셈이든 나눗셈이든 세로로 쓰는 것을 선호한다. (가로로 쓰면 시선이 좌우로 왔다 갔다 하느라 계산 과정에서 실수가 발생하는 경우가 많음) 추가로 $(a:b)\div(a':b') = \frac{(a:b)}{(a':b')} = ab':a'b$와 같이 숫자가 2개인 비례식끼리 나눠줄 경우에는 분수 형태가 나올텐데 이 때 아래에서 윗방향으로 대각선으로 곱해주듯 계산해주면 훨씬 편안하다. (a와 b', a'와 b를 곱해주듯)

아마 지금까지 배운 내용이 어렵지는 않을 것이다. 단지 익숙하지 않을것이며 익숙하지 않기 때문에 간단한 계산도 조금은 삐걱댈 것이다. 한번 간단한 예제를 통해 비례식간의 계산을 익혀보도록 하자.

예제

◆ **예제 1** : $(3:5)\times(1:6) =$

◆ **예제 2** : $(3:6:5)\times(2:9:12) =$

◆ **예제 3** : $(2:3)\div(5:3) =$

◆ **예제 4** : $(1:3:4)\div(8:6:3) =$

풀이

- **예제 1** : $(3:5)\times(1:6)=3:30=1:10$
- **예제 2** : $(3:6:5)\times(2:9:12)=6:54:60=1:9:10$
- **예제 3** : $(2:3)\div(5:3)=\dfrac{(2:3)}{(5:3)}=\dfrac{2}{5}:1=2:5$
- **예제 4** : $(1:3:4)\div(8:6:3)=\dfrac{(1:3:4)}{(8:6:3)}=\dfrac{1}{8}:\dfrac{1}{2}:\dfrac{4}{3}=3:12:32$

이렇게 비례식간의 곱셈 나눗셈을 하고나면 **가장 간단한 정수비로 나타내주는 과정**을 거치게 될 것이다. 위의 **예제 1**, **예제 2**풀이를 보면 $3:30$과 $6:54:60$을 $1:10$, $1:9:10$으로 단순화 하게 된다. 이렇게 비례식간의 곱셈 ,나눗셈을 할 때에는 계산 후에 단순화를 하는 경우도 있으나 계산 과정에서도 단순화를 진행할 수 있다. 다만, 단순화의 방법은 곱셈을 할 때와 나눗셈을 할 때 조금 다르다.

(3) 비례식의 곱셈 과정에서의 단순화 : 비례식간 곱셈에서숫자를 0이 아닌 어떠한 상수 k로 한번 나눠줄 때 N번째 숫자를 제외한 나머지 수도 k로 한번씩 나누어 단순화가 가능하다.

$$(a:b:c)\times(a':b':c')=aa':bb':cc'=\frac{aa'}{k}:\frac{bb'}{k}:\frac{cc'}{k}=\frac{1}{k}(aa':bb':cc')$$

(어느 비례식인지와 관계 없이 첫 번째, 두 번째, N번째 수를 모두 k로 한번씩 나눠주어야 성립한다)

풀이

- **예제 1** : $(3:5)\times(1:6)=(1:5)\times(1:2)=1:10$
- **예제 2** : $(3:6:5)\times(2:9:12)=(1:6:5)\times(2:3:4)=(1:3:5)\times(1:3:2)=1:9:10$

예제 1은 $3:5$와 $1:6$에서 첫 번째 숫자 3, 두 번째 숫자 6을 미리 3으로 미리 나눠 단순화를 진행하였고 예제 2에서는 $3:6:5$와 $2:9:12$에서 3, 9, 12를 3으로 나눠주고 이후 2, 6, 4를 2씩 미리 나눠 단순화를 진행한 것이다. 당연한 이야기지만 k씩 나눠준다는 것은 k씩 곱해줄때도 성립함을 의미한다.

이러한 단순화는 나눗셈에서도 가능하다. 다만 방법이 조금 다르다.

(4) 비례식의 나눗셈 과정에서의 단순화 : 비례식간 나눗셈에서 숫자를 0이 아닌 어떠한 상수 k로 한번 나눠줄 때 또 다른 N번째 숫자에 대해 k로 한번 나누어 단순화가 가능하다.

$$(a:b:c)\div(a':b':c')=\left(\frac{a}{a'}:\frac{b}{b'}:\frac{c}{c'}\right)=\left(\frac{ak}{a'k}:\frac{b}{b'}:\frac{c}{c'}\right)$$

(나눗셈에서는 N번째 숫자를 k로 한번 나눠줬다면, 또다른 N번째 숫자도 k로 한번 나눠주어야 성립한다.)

풀이

- **예제 3** : $(2:3)\div(5:3)=(2:1)\div(5:1)=2:5$
- **예제 4** : $(1:3:4)\div(8:6:3)=(1:1:4)\div(8:2:3)=\frac{1}{8}:\frac{1}{2}:\frac{4}{3}=3:12:32$

예제 3 풀이를 보면 2:3의 3을 3으로 나눠주면서 5:3의 3도 3으로 나눠 계산을 단순화 한 것이다. **예제 4**는 $1:3:4$의 3을 3으로 나눠줌과 동시에 $8:6:3$의 6도 3으로 나누어 단순화한 것을 나타낸 것이다.

이러한 계산 과정속의 단순화는 나눗셈보다는 곱셈에서 많이 유용한 편이다. 이러한 단순화가 익숙해진다면 비례식간의 계산이 보다 쉬워질 것이다. 다만, 이것이 익숙하지 않다면 그냥 계산을 일괄적으로 한 뒤 마지막 최종 결과물을 단순화해도 무방하다. 익숙하지 않다면 그냥 최종 계산 후 단순화하는 것을 권장한다.

(5) 비례식의 역수비 : $a:b$와 $a:b:c$의 역수비는 각각 $b:a$, $\frac{1}{a}:\frac{1}{b}:\frac{1}{c}=bc:ca:ab$이다.

물리 문항에서는 상당수의 문제가 두 물체에 대한 비교를 물어본다. 이 경우 $1:1$을 어떠한 비례식 $a:b$로 나눠주는 경우가 많은데 엄밀하게는 역수비라고 표현하는 것이 맞으나 예외적으로 $a:b$의 역수비는 편하게 반대비 $b:a$라 칭하겠다.

- **예시** : $1:1$을 $3:2$로 나눠주면 반대비인 $2:3$이 나온다.

0.1.3 비례식의 확장

(1) 관계식의 비례식 변환 : $k_1a = k_2b$이면 $a:b=k_2:k_1$이다. (단, $a\neq 0, b\neq 0$ 이다.)

$$k_1a = k_2b = k_3c\text{이면 } a:b:c=\frac{1}{k_1}:\frac{1}{k_2}:\frac{1}{k_3}\text{이다. (단, } a\neq 0, b\neq 0, c\neq 0 \text{ 이다.)}$$

조금 보기 쉽게 비례식으로 표현해보자면 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$k_1a = k_2b \text{ 는 } (k_1:k_2)\times(a:b)=1:1$$
$$k_1a = k_2b = k_3c \text{ 는 } (k_1:k_2:k_3)\times(a:b:c)=1:1:1$$

간단한 예로 $2m_A=3m_B$이면 $m_A:m_B=3:2$이고. $2a=3b=4c$면 $a:b:c=6:4:3$이다. 같다 라는 것은 1:1이다 와 동일한 표현이니 $2m_A:3m_B=1:1=(2:3)\times(m_A:m_B)$ 이므로 $m_A:m_B=\frac{1:2}{2:3}=3:2$ 라고 쓸 수 있는 것이다.

두 번째 예시는 $2a:3b:4c=1:1:1=(2:3:4)\times(a:b:c)$ 면 이므로 $a:b:c=\frac{1:1:1}{2:3:4}=6:2:3$

같다는 표현을 단순히 등호가 아니라 1:1이라는 표현으로 바꿔 생각하면 비례식을 이용한 계산식을 세우기에 훨씬 수월하다. 이처럼 우리는 동일한 어떤 식을 다르게 표현하는것도 익숙해지면 좋다. 예를 들어 "$3a$는 $4b$의 2배이다."를 어떻게 표현할 수 있겠는가? $3a:4b=2:1$을 떠올릴 줄 알아야 하며 $(3:4)\times(a:b)=2:1$로 쪼개서 떠올릴줄도 알아야 한다. 그래야 관계식을 비율로 쪼개 계산하기 수월한 형태로 만들 수 있기 때문이다. 간단한 예제를 통해 관계식을 비례식으로 쪼개 계산해보도록 하자.

예제

$a:b$ 또는 $a:b:c$를 구하시오.

- 예제 1 : $3a$는 $4b$의 8배이다.
- 예제 2 : $4a:3b:5c=2:3:4$이다.

풀이

- 예제 1 : $(a:b)\times(3:4)=8:1$, $a:b=\dfrac{8:1}{3:4}=32:3$
- 예제 2 : $(1:3:4)\div(8:6:3)=(1:1:4)\div(8:2:3)=\dfrac{1}{8}:\dfrac{1}{2}:\dfrac{4}{3}=3:12:32$

(2) 관계식에서의 상수의 무시 : 곱셈, 나눗셈으로 이루어진 관계식에 대해 비례식 계산을 할 경우엔 상수를 무시해도 무방하다.

간단한 예를 들면 삼각형의 넓이는 밑변×높이×0.5이다. 만약 두 삼각형 A, B의 넓이 비율을 구해야 한다면 우리는 어떻게 식을 세우겠는가? 두 삼각형의 밑변의 비율, 높이의 비율, 0.5의 비율을 곱해주면 된다. 그러나 어떠한 동일한 상수의 비율은 1:1을 의미하며 1:1은 곱하든, 나누든 아무런 변화를 주지 않기 때문에 무시하여도 무방하다. 따라서 두 삼각형의 밑변의 비율과 높이의 비율을 곱해주면 자연스레 넓이의 비율이 도출될 것이다.

이 내용들을 배우는 이유는 앞서 설명했듯 계산 과정을 단순화 하기 위해서이다. 하지만 실제 문제 조건은 어떠한 문장으로 표현이 될것이며, 우리는 이러한 문장을 비례식으로 바꿔 계산해나가야 한다. 우리의 일상과 친근한 상황들에 대하여 비례식 계산을 통해 답을 도출해보도록 하자.

예제

- 예제 1 : 두 아르바이트의 시급은 2:3, 노동 시간은 7:6이다. 총 급여 비율을 구하시오.
- 예제 2 : 두 물건의 판매 가격은 개당 2:3, 구매 수량은 5:3이다. 필요 금액 비율을 구하시오.
- 예제 3 : 사과와 배의 개당 가격은 3:4이다. 동일한 금액으로 구매 가능한 사과와 배의 개수 비율을 구하시오.

풀이

- **예제 1** : 총 급여는 시급과 시간의 곱한값과 같다. 따라서 (2:3)에 (7:6)을 곱한 14:18=7:9이다
- **예제 2** : 필요 금액은 가격과 수량의 곱이다. 따라서 (2:3)에 (5:3)을 곱한 10:9이다.
- **예제 3** : 구매 가능한 수량은 금액을 가격으로 나눠준 값이다. 따라서 동일한 금액(1:1)으로 구매 가능한 수량은 1:1을 가격비율인 3:4로 나눠준 4:3이다.

그동안 정량적 계산 위주로 하다가 비례식으로 계산을 하려고 하면 조금 익숙하지 않을 것이다. 그러나 적응만 한다면 강력한 무기가 될 수 있으니 천천히 적응해보도록 하자.

2. 비례식의 연결

비례식을 구성하는 값은 단순히 비율만을 알려줄 뿐 실제값을 알려주지는 않는다. 이러한 특성으로 인하여 우리는 서로 다른 두 비례식에 대하여 임의의 값들의 비율을 즉각적으로 구할 수 없다. 예를 들어 $a:b=2:3$, $c:d=4:5$라고 해보자. 이 비례식에서 a와 d를 나타내는 값은 각각 2와 5이다. 그러나 이를 통해 a와 d의 비율이 2:5라고 단정지을 수는 없다. 이는 두 비례식에 대한 비례 상수가 다르기 때문이다. 이처럼 우리는 비례식을 구하는 과정에서 비례상수가 일치하지 않아 즉각적으로 어떠한 값을 비교하기 어려울 수 있다. 이를 해결하기 위해 비례식의 연결을 배워보도록 하자.

0.2.1 공통 문자를 통한 연결

$$a:b=2:3,\ b:c=4:3$$

위 비례식에서 a와 c에 해당되는 값은 2, 3이다. 그렇다면 $a:c=2:3$일까? 아니다. 우리가 $a:c$를 구하기 위해서는 이 둘의 실제값을 구한 뒤에 비율을 구해주어야 한다. 다르게 말하면 주어진 두 비례식의 비례 상수가 1이 되게끔 적당한 수를 곱해주고 나서야 비교가 가능함을 의미한다. 하지만 꼭 비례상수가 1이 아니여도 동일하기만 해도 즉시 비교가 가능하다는 사실을 알 수 있다. 따라서 $a:b$와 $b:c$의 비례상수를 동일하게 맞춰준다면 우리는 바로 $a:c$를 구하는 것이 가능하다. 이처럼 비례 상수를 동일하게 만들어주는 것을 본 교재에서는 **비례식을 연결한다**라고 표현한다.

두 비례식에서 b에 해당하는 값이 각각 3, 4인데 비례식에 어떠한 상수를 곱해서 b를 동일하게 맞춰주어야 한다(같은 b니까) 두 비례식에 대해 각각 4와 3을 곱해주면 아래와 같이 된다.

$$a:b=8:12,\ b:c=12:9$$

이제는 b가 동일해졌으니 우리는 $a:b:c=8:12:9$라고 쓸 수 있으며 $a:c=8:9$임을 알 수 있다. 두 비례식에 대해 4, 3을 곱하여 비례상수를 동일하게 맞춰주었는데 4와 3이라는 숫자는 어떻게 도출된 것인가? 우리는 비례 상수가 동일하다면 같은 b 나타내는 값이 동일해야한다 라는 조건을 이용한 것이다. 이처럼 서로 다른 비례식을 연결하기 위해서는 두 비례식에 대한 어떠한 조건을 이용해야한다.

비례식을 연결하기 위해서는 비례식에 각각 어떠한 상수를 곱하여 비례 상수를 일치시켜줘야한다. 앞의 예시를 표현하면 다음과 같다.

$$(3:4)\times \text{상수비} = 1:1,\ \text{상수비} = 4:3$$

이는 b를 구성하는 값인 3과 4에 어떠한 상수를 각각 곱하여 동일하게 맞춰주었음을 의미하며 곱해줘야 하는 상수의 비율이 4:3이라는 결과를 나타낸 것이다. 그래서 앞에서 두 비례식에 각각 4와 3을 곱하여 비례상수를 일치시켜준 것이다.

0.2.2 추가 조건을 통한 연결

이번엔 조금 다른 예시를 들어보도록 하겠다.

$a:b=2:3,\ c:d=4:3,\ b:c=5:3$이다. $a:b:c:d$는?

위 문항은 $a:b$와 $c:d$를 연결하라는것과 동일한 문항이다. 따라서 우리는 $a:b$와 $c:d$에 각각 어떠한 상수를 곱하여 $b:c=5:3$을 만족시켜야 한다. 따라서 b,c를 구성하는 3, 4에 어떠한 상수를 각각 곱하여 5:3으로 맞춰주어야 한다.

$$(3:4)\times \text{상수비} = 5:3,\ \text{상수비} = \frac{5:3}{3:4} = 20:9$$

따라서 두 비례식 $a:b$와 $c:d$에 대해 각각 20, 9를 곱해주면 다음과 같다.

$$a:b:c:d = 40:60:36:27$$

이젠 a~d에 대한 비율을 자유롭게 구할 수 있을 것이다. 물론, 비례식의 연결은 사실 물리보다는 화학에서 더 많이 쓰이는 편이기는 하나 알아두도록 하자. 간단한 예제를 준비하였다. 간혹 귀찮아서 그냥 숫자 끼워맞추기 식으로 푸는 경우가 있는데 상수비를 구하는 과정을 거쳐 풀어 비례식 계산에 적응하도록 하자. 끼워맞추기 숫자가 다소 복잡할 수 있다.

예제

$a:b:c:d$를 구하여라

- 예제 1 : $a:b=3:4, c:d=5:4, \quad a:d=4:7$
- 예제 2 : $a:b=5:3, c:d=2:1, \quad a:c=3:4$시오.

풀이

◆ 예제 1 : 3과 4에 어떠한 상수비를 곱하여 4:7이 도출되어야 한다. 따라서 상수비는 $\frac{4:7}{3:4}$로 16:21고 $a:b:c:d=48:64:105:84$다.

◆ 예제 2 : 5와 2에 어떠한 상수비를 곱하여 3:4가 도출되어야 한다. 따라서 상수비는 $\frac{3:4}{5:2}$로 $3:10$고 $a:b:c:d=15:9:20:10$다.

3. 정량값의 계산

0.3.1 배율에 따른 계산값의 변화

$a:b=2:3$이라 해보자. 그렇다면 a는 몇인가? 당연하게도 우리는 알 수 없다. 이처럼 우리는 비례식을 이용하여 문제를 풀어나갈것이나 실제값을 물어보는 문항도 있을터이다. 이 때 우리는 $a:b$의 구성요소인 2와 3에 어떠한 값을 곱하여 실제값으로 변환해주어야 하며 이는 해당 비례식의 비례상수를 1로 맞춰준다는 의미이다. $a:b=2:3$를 실제값으로 바꿔주기 위해서는 어떠한 조건이 추가로 필요할 것이다. 이러한 조건은 여러 가지가 있겠지만 대표적으로 많이 나오는 유형은 합, 차, 곱으로 주어지는 경우가 많다. 한번 아래 예제를 풀어보도록 하자.

예제

$a:b=2:3$이다. 각 상황별 a의 값과 b의 값을 구하시오.

◆ 예제 1 : $a+b=20$

◆ 예제 2 : $|a-b|=10$.

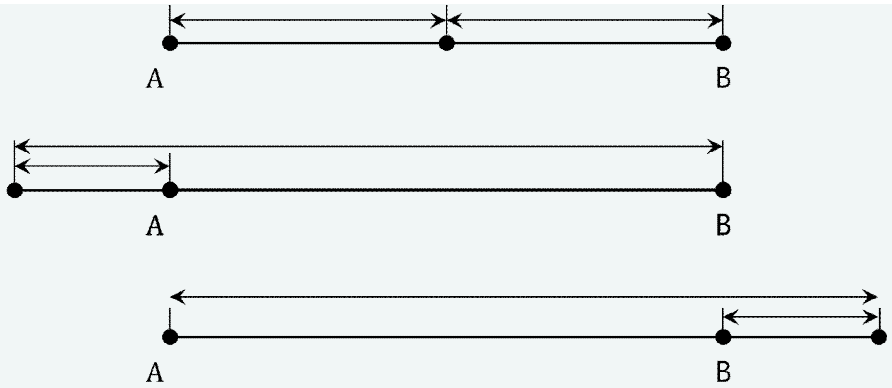
◆ 예제 3 : $ab=54$

답을 구해보았는가? 정답은 (a, b)순으로 (8, 12), (20, 30), (6, 9)이다. 사실 위 문항을 푸는 것은 어렵지 않을 것이다. $a=2k, b=3k$로 두면 당연히 풀릴테니 말이다. 그러나 조금 더 친근하게 다가가 보도록 하자.

$a:b=2:3$에서 2와 3의 합은 5, 차는 1이다. 이 2와 3을 n배 해주면 합, 차 모두 n배가 될 것이다. 그래서 문제를 풀 때는 합이 5인데 실제론 4배인 20이므로 4씩 곱하여 (8, 12)를 도출하고, 차가 1인데 실제론 10배인 10이므로 10씩 곱하여 (20, 30)을 도출하는 것이 보다 편할 것이다. 그렇다면 곱 조건은 어떻겠는가? $a=2k, b=3k$로 두면 $ab=6k^2$이니 이 경우에는 숫자를 n배 해주면 곱해준 값은 곱해준값의 제곱배로 늘어날 것이다. (만약 ab가 아니라 ab^2처럼 세 번 곱하는 방식이라면 세제곱이 될것이며 n번 곱하는 꼴이면 n제곱이 될 것이다.) 따라서 2와 3의 곱은 6인데 실제로는 9배인 54므로 9에 루트를 씌운 3을 각각 곱하여 (6,9)를 도출하는 것이 정량적 계산보다 편할 것이다.

0.3.2 내분점과 외분점

비례식도 생소할텐데 내분점과 외분점까지 나오니 당황스럽겠지만, 그래도 비례식을 사용할 때 내분점과 외분점은 빼놓을래야 빼놓을 수 없는 개념이다. 외분점과 내분점이 무엇인지는 알 것이다. 하지만 이 공식은 아마 잊은 사람들도 많을것이라 생각한다. 내분점과 외분점은 합과 차의 특성만 알고 있다면 쉽게 구할 수 있다. 각 구성요소들을 n배 해주면 이들의 합, 차 역시 n배가 된다. 이를 이용하면 외분점과 내분점을 쉽게 구하는 것이 가능하다.



그림은 각각 내분점, 외분점(좌측), 외분점(우측)을 나타낸 것이다. 포인트는 내분점으로부터 두 점까지의 거리의 합이 곧 두 점 사이의 거리이며, 외분점으로부터 두 점까지의 거리의 차가 곧 두 점 사이의 거리이다. 필자는 내분점과 외분점을 구할 때 아래와 같은 방법을 사용한다.

(1) 내분점

- 거리의 비율이 $a:b$라면 이에 대해 $a+b$로 나눠 $\frac{1}{a+b}(a:b)$로 바꿔준다.
- 두 점 사이의 거리가 k라면 이에 k를 곱하여 $\frac{k}{a+b}(a:b)$로 나타낸다.
- 이는 비례상수가 1인 두 점까지의 거리 비율이며 내분점으로부터 각 점까지의 거리는 $\frac{ak}{a+b}, \frac{bk}{a+b}$이다.
  (합은 k이면서 비율은 a:b가 자연스레 나온다.)

(2) 외분점 (좌측 기준)

- 거리의 비율이 $a:b$라면 (단, $a<b$) 이에 대해 차 $b-a$로 나눠 $\frac{1}{b-a}(a:b)$로 바꿔준다.
- 두 점 사이의 거리가 k라면 이에 k를 곱하여 $\frac{k}{b-a}(a:b)$로 나타낸다.
- 이는 비례상수가 1인 두 점까지의 거리 비율이며 내분점으로부터 각 점까지의 거리는 $\frac{ak}{b-a}, \frac{bk}{b-a}$이다.
  (차는 k이면서 비율은 a:b가 자연스레 나온다.)

이러한 정량적 계산 과정이 중요한 이유는 비율만을 계산하다가 문항에서 비율이 아닌 실제 값이 필요한 경우 당황할 수 있기 때문이다. 이럴 때는 당황하지 말고 문항에서 실제 값과 관련된 조건이 있는지 찾아본 뒤 이를 통해 실제값을 도출해주면 된다.

물론, 이러한 풀이를 문항에 적용하기 위해서는 앞으로 여러 과정을 거쳐야 할 것이다. 한번 맛보기로 간단한 예제를 통해 비례식을 통한 문제 풀이를 해보도록 하자. 아마 개념학습이 되어있다면 풀 수 있을 것이다.

예제

예제 1 : 두 물체 A와 B는 등가속도 운동을 통해 점점 빨라지고 있다. 두 물체에 작용하는 알짜힘의 비율은 각각 3:5이며 같은 시간 동안 증가한 속력의 크기는 1:2이다. 두 물체의 질량 비율은?

예제 2 : 두 물체 A와 B는 질량이 $1:2$, 운동에너지는 $2:9$이다. 두 물체의 속력 비율은?

예제 3 : 고정된 점전하 A, B가 있다. A와 B의 $a:b$ 내분점에 존재하는 점전하 C가 두 점전하 A, B에 의해 정지해 있을 때 A와 B의 전하량의 비율은?

풀이

예제 1 : 두 물체의 증가한 속력의 크기 $\triangle v$는 가속도와 시간에 비례한다.
조건에서 같은 시간(1:1)동안 증가한 속력의 크기가 1:2 이므로 가속도의 크기는 1:2이다.

가속도 a는 힘의 크기에 비례, 질량에 반비례한다. 따라서 $\frac{3:5}{\text{질량비}}=1:2$이고

질량비는 $\frac{3:5}{1:2}=6:5$이다.

예제 2 : 두 물체의 질량 m의 비율은 1:2, 운동에너지의 비율 즉, 상수를 제외한 mv^2은 2:9이다.

따라서 $\frac{mv^2\text{비}}{m\text{비}}=v^2\text{비}=\frac{2:9}{1:2}=4:9$로 v의 비율은 $2:3$이다.

예제 3 : 어떠한 두 점전하 사이에 작용하는 힘의 크기는 $\frac{q_1q_2}{r^2}k$로 점전하의 크기에 비례하고 거리의 제곱에 반비례 한다. 점전하 C는 A, B에 의한 전기력의 크기가 같으며 이는 1:1을 의미한다.

따라서 점전하 C의 전하량의 크기를 q_c라 하면 $1:1=\frac{(q_c\text{비율})\times(q\text{비율})}{a^2:b^2}\times k\text{비율}=\frac{q\text{비율}}{a^2:b^2}$

전하량의 비는 $a^2:b^2$이다.

만약 위 예제에 대하여 비슷하게 풀이를 하였다면 이제 본 교재를 학습할 준비가 되었을 것이다. 만약 아직 본 풀이가 익숙하지 않다면 다시 한번 복습 후 다음 파트를 학습할 것을 권장한다.

요약 아래의 특성들을 이용하여 이후 내용들을 전개해 나갈것이니 점검하도록 한다.

1) 비례식 간의 연산은 다음과 같은 방식을 따른다.

$$\begin{array}{r|ccccc} & a & : & b & : & c \\ \bigstar & a' & : & b' & : & c' \\ \hline & \multicolumn{5}{c}{a \bigstar a' : b \bigstar b' : c \bigstar c'} \end{array}$$

위 방식의 계산은 곱셈, 나눗셈에 대하여 성립하며, 덧셈, 뺄셈은 비례상수가 동일 한 경우에 성립한다. 또한 계산하고자 하는 비례식이 두 개일 경우 덧셈 뺄셈은 어느 한쪽 비례식이 0:0일 경우에 성립한다.

2) 1:1, 1:1:1과 같은 비례식은 곱셈과 나눗셈에 영향을 주지 않으며 0:0, 0:0:0은 덧셈과 뺄셈에 영향을 주지 않는다.

3) 곱셈, 나눗셈으로 이루어진 관계식에 대한 계산은 비례식간의 계산에서도 동일하게 적용된다. 이 때 관계식에 존재하는 상수는 비례식간의 계산에서 1:1로 취급되므로 제외하여도 상관없다. (삼각형의 넓이 공식 앞에 붙는 0.5처럼)

4) 비례식간의 곱셈 과정에서는 첫 번째 수부터 n번째 수까지 동일한 수로 나눠주어 단순화가 가능하다.
예 : (2 : 4 : 5) × (3 : 6 : 4) = (1 : 2 : 5) × (3 : 6 : 2) = 3 : 12 : 10

5) 비례식간의 나눗셈 과정에서는 동일한 N번째 수에 대해 동일한 수로 한번씩 나눠주어 단순화가 가능하다.
예 : (2 : 4 : 5) ÷ (3 : 6 : 4) = (2 : 2 : 5) ÷ (3 : 3 : 4) = 8 : 8 : 15
- 물론 위와 같은 단순화는 익숙하지 않으면 계산 후 최종 계산 결과를 단순화하여도 상관없다.

6) 1:1에 대하여 어떠한 비례식을 나눈 것을 역수비라 표현하며 구성요소가 두 개일 경우 편의상 반대비라 칭한다.

7) 동일하다(등호)는 1:1로 변환이 가능하다.

8) $k_1a = k_2b$ 는 $(k_1 : k_2) \times (a : b) = 1 : 1$로 변환이 가능하고, $k_1a = k_2b = k_3c$ 는 $(k_1 : k_2 : k_3) \times (a : b : c) = 1 : 1 : 1$로 변환이 가능하다.

9) 서로 다른 비례식은 비례상수가 동일 하지 않으면 어떠한 값들의 비율을 바로 구하는 것이 불가능 하며 이러한 비례식들의 비례상수를 일치시키는 것을 비례식을 연결 한다 라고 표현한다. (본 교재 한정)

10) 비례상수를 일치시키기 위해서는 비례식에 각각 어떠한 상수를 곱하여 어떠한 조건을 만족하는 방향으로 식을 세워 곱해주어야 하는 상수의 비를 구하도록 한다.

11) 비율을 실제값으로 변환하기 위해서는 문제상에서 주어진 조건을 바탕으로 추론하며 주로 합차 또는 곱의 조건이 일반적으로 출제된다. 합차 조건의 경우 비례식 구성요소의 합차가 실제값과 몇 배 차이 나는지 구하여 해당 배수를 곱한다. 곱 조건의 경우 비례식 구성요소의 곱이 실제값과 몇 배 차이나는지 구한 뒤 n제곱근을 씌워 이를 곱한다.

12) 내분점과 외분점을 구할 때에는 값들을 n배 하면 합, 차도 n배가 뒤는 특성을 이용하여 구하도록 한다.

0단원 내용이 익숙하신가요, 아니면 낯설게 느껴지시나요? 과거에 제가 가르쳤던 수험생들도 항상 첫 시간에 비례식을 배울 때 갸우뚱하곤 했는데 아마 여러분도 비슷한 생각이실 것 같습니다. 하지만 비례식과 관련된 개념은 우리가 앞으로 배울 내용의 기반이 되므로 반드시 숙지해 주시기 바랍니다. 그래야 이후에 배우는 내용들을 더 쉽게 이해할 수 있습니다.

역학 기본 개념들은 이미 질리도록 학습하셨을 것입니다. 하지만 그 개념을 통해 도출되는 관계식과 풀이법은 기존에 알던 것과 조금 다를 것입니다. 우리는 앞으로 대부분의 문항들을 **비례식**을 이용해 풀어갈 것입니다! 처음에는 익숙하지 않더라도, 익숙해지면 상당히 신선한 풀이를 경험하실 수 있을 것이라 확신합니다. 너무 급하지 않게, 기존 풀이에 새로운 무기를 더한다는 느낌으로 학습해주시면 좋을 것 같습니다. 경우에 따라선 이걸 주 무기로 사용하시는 분들도 계시겠지만요!

본 교재는 비례식을 제외하고 총 세 가지 챕터로 구성되어 있습니다.

첫 번째 챕터에서는 기본 개념에서 도출되는 **비례 관계**들을 배우고 간단한 예제들을 통해 비례식의 계산을 문항에 천천히 적용해 볼 것입니다. 어쩌면 실력이 출중하신 분들이라면 첫 번째 챕터만 보고도 전반적인 풀이를 개선할 수 있을겁니다.

두 번째 챕터에서는 역학에서 자주 나오는 상황들에 대한 해석 방식과 관점을 다루어 여러분들이 문항을 보다 다양한 관점에서 볼 수 있도록 유도할 것입니다.

마지막 챕터에서는 기출 문항을 본 교재 내용을 바탕으로 새롭게 풀어보며 이론을 적용 할 것입니다. 아마 기출을 풀어보면서 기존 풀이와의 차이를 느끼는것도 꽤나 재미있을겁니다.

오랜만에 이렇게 교재를 작성하니 긴장이 되면서도 최대한 많은 내용을 담고자 고민하는 이 시간이 즐겁습니다. 본 교재를 통해 얼마나 많은 분들이 학습하실지는 모르겠으나 적어도 이 교재를 보시는 모든 분들은 이 내용들을 통해 만족하실만한 결과가 있으셨으면 좋겠습니다. 오류 제보 및 질문사항은 본 교재를 다운로드 하신 오르비, 포만한에서 댓글로 남겨주시면 답변드리도록 하겠습니다. 감사합니다.

역학과 비례식

CHAPTER

01

역학과 비례식

본 교재는 앞서 말했듯 기본적으로 물리학 I에 대해 전반적인 학습이 이루어진 사람을 대상으로 작성된 교재이므로 기본 개념들은 빠르게 다루고 넘어갈 것이다. 그래도 한번 읽어보면서 기본 개념들을 상기시키도록 하자. 개념 학습 과정에서는 앞서 언급한 비례식의 원리를 바탕으로 서술할 것이다.

(1) 이동 거리와 변위

물리에서 운동이란 시간이 지남에 따라 물체의 위치가 변하는 것을 의미한다. 이때 물체가 이동한 **경로의 길이**를 이동 거리, **최종적인 물체의 위치 변화량**을 변위라 한다. 이동 거리는 방향 없이 크기만 존재하나 변위는 크기와 방향 모두 존재한다.

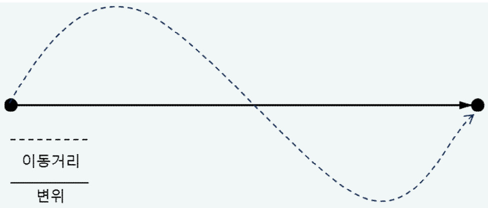


그림 1

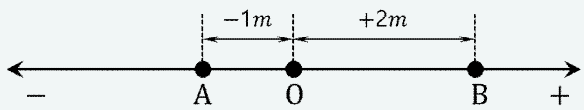


그림 2

그림 1처럼 물체가 점선(곡선)을 따라 이동하였다면 점선의 길이는 이동 거리, 실선의 길이는 변위의 크기를 나타낸다. 만약 점선이 아닌 실선을 따라 이동하였다면 이동 거리와 변위의 크기는 모두 실선의 길이로 동일하다. 따라서 물체는 직선운동을 하면 이동 거리와 변위의 크기가 동일하다.

그림 2는 두 물체 A, B가 시작점 O로부터 각각 왼쪽, 오른쪽으로 1m, 2m 이동한 모습을 나타낸 것이다. 이 때 B의 변위를 +2m이라 한다면 A의 변위는 −1m이라 할 수 있다. 이처럼 변위는 방향을 포함하는 물리량이기 때문에 변위에는 −가 붙는 것 또한 가능하다. 우리가 실질적으로 역학 문항을 푸는 과정에서 **최종적인 위치**에 대한 식을 세울 때에는 대부분 변위가 사용 된다.

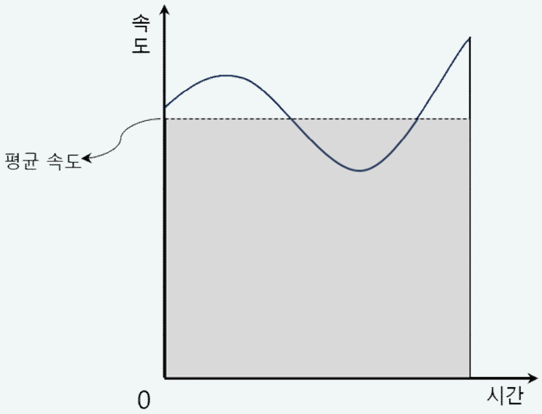
(2) 속력과 속도

단위 시간동안 물체의 이동 거리와 변위를 각각 속력, 속도라 부르며 보통 m/s의 단위를 사용한다. 속력은 단위 시간 동안의 이동거리이므로 음수가 될 수 없으나 속도는 변위이므로 음수가 될 수 있다. 이 때 속도의 부호는 운동 방향을 의미한다.

(3) 평균 속력과 평균 속도

어떤 물체가 오른쪽으로 10m 이동 후 왼쪽으로 5m 이동하기까지 총 5초가 걸렸다 하자. 5초 동안 물체의 이동 거리는 15m, 변위는 5m이다.(오른쪽을 +라 하였을 때) 이 때 이 물체의 평균 속력, 평균 속도는 이동거리와 변위를 5초로 나눠준 3m/s, 1m/s라 할 수 있다. 이처럼 우리는 어떠한 시간 범위에 대하여 이동 거리, 변위를 걸린 시간으로 나눠 구해준 평균값을 평균 속력, 평균 속도라 한다.

우리는 세 과목의 총 점수가 240점이면 평균은 80점, 대충 **과목당 80점씩 받았구나 라고** 표현하곤 한다. 마찬가지로 평균 속력, 평균 속도는 물체가 대충 해당 시간 범위에서 1초당(단위시간) 이만큼 이동했네, 이만큼 위치가 변했네 로 해석하여도 무관하다. 물론, 실제로 물체가 그렇게 운동을 한 것은 아니지만 결론적인 이동 거리(속력), 변위(속도)를 분석하는 과정에서는 이와 같이 해석하여도 무방하다.



(실선과 점선 아래의 면적은 동일.)

이동거리비 = 평균 속력비 × 걸린 시간비
변위비 = 평균 속도비 × 걸린 시간비

평균을 산출한 시간 범위에 대하여
평균 속력(속도)로 일정하게 운동하였다고 가정해도
이동거리, 변위 분석에는 문제가 없다.

이처럼 어떠한 시간 영역에 대하여 평균속력, 평균속도에 걸린 시간을 곱하면 각각 이동거리, 변위가 나오는데 이는 곱셈으로 이루어진 관계식이므로 비례식끼리도 성립한다.

예제

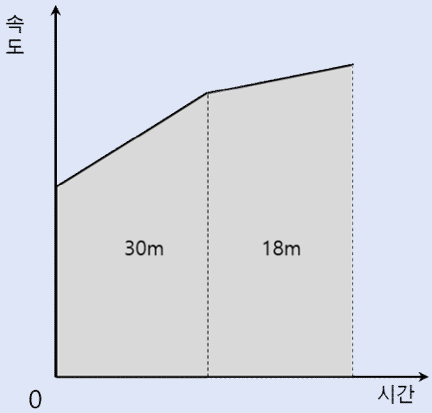
예제 1 : 두 물체 A, B의 평균 속력은 2:3, 걸린 시간은 3:5이다. 이동 거리의 비율은?
풀이 : 이동 거리는 평균 속력과 걸린 시간의 곱이므로 (2:3) × (3:5) = (6:15) = 2:5

예제 2 : 등속도 운동을 하는 두 물체 A, B가 동일한 거리를 이동하는데 걸린 시간이 2:3이다. 두 물체의 평균 속력의 비율은?
풀이 : 이동 거리가 1:1, 걸린 시간이 2:3이므로 평균 속력은 (1:1) ÷ (2:3) = 3:2

(3)-1 평균의 평균

어떤 반에서 남학생의 평균 점수는 70점, 여학생의 평균 점수는 80점이다. 그렇다면 이 반의 평균 점수는 75점인가? 아니다. 이 반의 평균 점수는 학생의 총 점수를 총 학생수로 나눠주어야 한다. 그렇다면 어떠한 물체의 두 영역에 대한 평균 속력이 각각 10m/s, 18m/s라면 두 영역을 합친 영역에서의 평균 속력은 어떻게 될까? 이 역시 마찬가지로 두 영역에 대한 전체 거리를 전체 시간으로 나눠주어야 한다. 그렇다면 한번 예시를 들어보도록 하겠다.

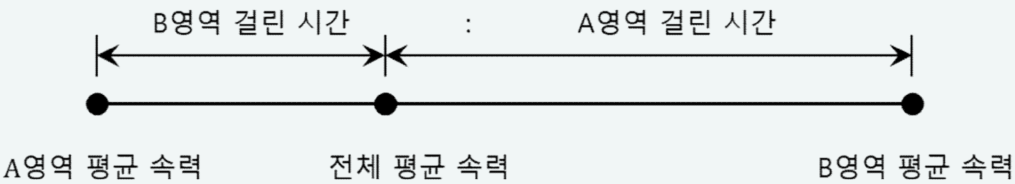
예제



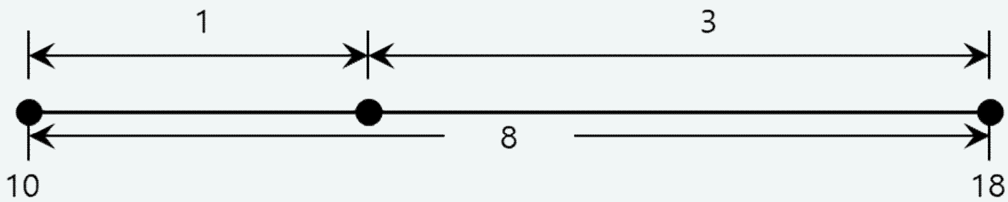
30m, 18m를 이동하는 동안의 평균 속력이 각각 10m/s, 18m/s 라면 전체 평균 속력은 어떻게 되겠는가?

위 문항을 못 푸는 사람은 없을 것이다. 걸린 시간이 각각 3초, 1초임을 계산 후에 48m를 4초로 나눠주면 그만이기 때문이다. 이처럼 두 개의 평균을 대상으로 평균을 구한다는 것은 어떤 의미인지 알아보도록 하자.

$$\text{평균 속력} = \frac{A\text{영역 평균속력} \times A\text{영역 걸린시간} + B\text{영역 평균속력} \times B\text{영역 걸린시간}}{A\text{영역 걸린시간} + B\text{영역 걸린시간}}$$



위 식을 자세히 보면 각 영역의 평균 속력을 **걸린 시간의 반대비의 내분점**을 의미함을 알 수 있다. 이와 같은 계산 방식은 농도가 다른 소금물 두 개를 섞었을때의 농도를 구하는것과 동일한 원리이다. (농도가 각각 10%, 16%인 소금물을 부피 1:2로 섞으면 10%와 16%의 2:1 내분점이 14%가 되는것과 동일)



그래서 필자의 경우에는 위와 같은 문항을 풀 때 거리비 5:3을 속력비 5:9로 나눠 시간비 3:1을 구한 뒤 10과 18에 대하여 3:1의 반대비 1:3 내분점인 12를 산출하는 방식으로 푸는 것을 선호한다. 그러나, 아마 많은이들은 내분점을 구하는 공식을 아마 많이 잊었을 수 있기에 필자는 아래와 같은 방식을 권장한다.

1과 3의 비례상수를 1로 맞춰주었을 때 이 둘의 합은 8이 되어야 한다. 1과 3의 합은 4이니 2배를 해주면 8이 될 것이다. 이는 2:6으로 내분점은 12가 된다. 필자는 내분점 공식보다는 위와 같이 계산하는 것을 선호한다.

위 방식은 **두**영역에 대한 평균을 낼 때의 이야기이다. 만약 세 영역이라면 두 영역을 평균내고, 이를 다시 나머지 영역과 평균을 내는 것으로 가능하나, 위와 같은 방식의 계산은 두 영역에 대해서만 사용할 것을 권장한다. 가속도 파트를 배운 뒤 관련 문항을 조금만 풀어보도록 하겠다.

(4) 가속도

단위 시간당 물체의 속도가 얼마나 변했는지를 나타내는 물리량으로 속도의 변화량을 걸린 시간으로 나눠 계산한다. 일반적으로 물체의 속도는 m/s를, 시간은 s단위를 사용하므로 가속도의 단위는 일반적으로 m/s^2이 사용된다. 가속도가 0이면 속력이 일정하고 이를 등속도 운동이라 부른다. 가속도가 일정한 운동을 등가속도 운동이라 한다.

$$\text{가속도} = \frac{\text{속도 변화량}}{\text{걸린 시간}} = \frac{\text{나중 속도} - \text{처음 속도}}{\text{걸린 시간}} \quad (\text{단위는 } m/s^2)$$

$$\text{가속도비} = \frac{\text{속도 변화비}}{\text{걸린 시간비}}$$

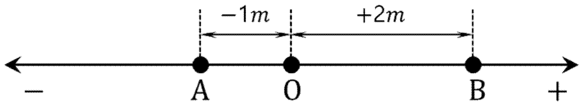
(5) 나중 속도

$$\text{나중속도} = \text{처음속도} + \text{가속도} \times \text{걸린시간} \quad v_2 = v_1 + at$$

$$(v_1 = 0\text{이면 } v_2\text{비} = a\text{비} \times t\text{비}),\ (v_2 = 0\text{이면 } v_1\text{비} = a\text{비} \times t\text{비})$$

가속도 공식은 위와 같이 정리할 수 있다. 나중속도의 비가 (처음속도의 비 + 가속도비*걸린시간비)가 아님에 유의한다. 두 비례식의 비례상수가 동일하다는 보장이 없기 때문이다. 단, v_1, v_2 중 하나가 0일 경우에는 위와 같은 비례식 사용이 가능하다. 0:0은 어느 상수를 곱하든 실제값이기 때문이다.(7페이지 참고) 위 비율관계를 이해하면 여러모로 용이하다. 정지된 두 물체가 t초 뒤 속력 비율이 곧 가속도 비율이 될것이며, t_1초, t_2초 뒤의 속력 비율을 알면 이 비율을 t_1:t_2 로 나눠 가속도 비율을 구하는 것이 가능하다.

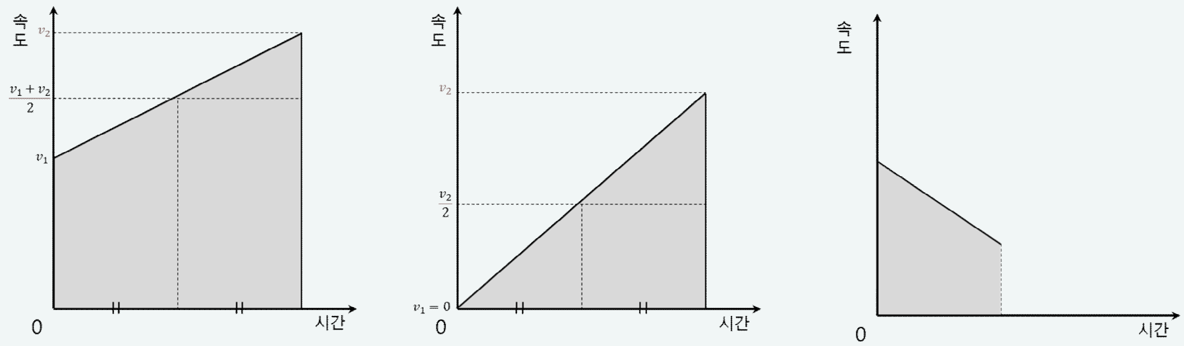
● 변위, 속도, 가속도의 방향, 부호



위 그림은 앞서 변위에 대하여 설명할 때 방향과 부호에 대하여 나타낸 그림이다. 변위, 속도, 가속도 이 셋은 모두 방향에 따른 부호가 모두 동일 하다. 위 그림은 오른쪽은 +, 왼쪽은 −로 정의하였으므로 물체가 오른쪽으로의 변위, 속도, 가속도의 부호는 모두 +로 정의된다. 우리가 속력이 증가하면 운동 방향과 가속도의 방향이 동일하다는 것은 부호가 동일하다는 의미이며 이는 $v_2 = v_1 + at$라는 식을 통해서도 알 수 있다. 그러나 필자는 식을 쓸 때 $v_2 = v_1 + at$로 딱 정하기보다는 가속도 방향을 본인이 있다면 a라는 미지수 자체를 양수라 생각한 뒤 $v_2 = v_1 - at$ 또는 $v_2 = v_1 + at$로 표현하여 식 자체에 대해 방향성을 눈에 보이게 하는 것을 선호하는 편이다. 물론 어느 방식을 사용하든 상관없다. $v_2 = v_1 + (-2) \times t$ 나 $v_2 = v_1 - 2 \times t$나 결론적으로는 같기 때문이다. 어느 방법을 택하든 그게 그거다! 하지만 개인적으론 식을 봤을 때 방향성이 직관적으로 보이는 것이 편하다고 느끼기 때문에 이와 같은 방법을 선호한다.

(6) 등가속도 운동과 평균 속도

우리는 어떠한 영역에 대하여 속도가 변하는 물체의 이동 거리, 시간 등을 용이하게 계산하기 위하여 평균 속도를 구하곤 한다. 아래는 등가속도 운동을 하는 물체의 v-t 그래프를 나타낸 것이다.



상황 1　　　상황 2　　　상황 3

물체가 등가속도 운동을 할 때 어떠한 영역에 대한 평균 속도는 처음 속도(v_1)와 나중 속도(v_2)의 평균으로 계산된다. 만약 처음 속도가 0이면 평균 속도는 나중 속도의 절반, 나중 속도가 0이면 평균 속도는 처음 속도의 절반이다. 또한 물체의 속도가 평균 속도와 동일한 **시점**은 **중간 시점**이다. **중간 지점**과 혼동하지 않도록 한다.

각 상황별 이동거리는 다음과 같이 계산이 가능하다.

상황 1 : $s = \frac{v_1 + v_1 + at}{2}t = v_1 t + \frac{1}{2}at^2$

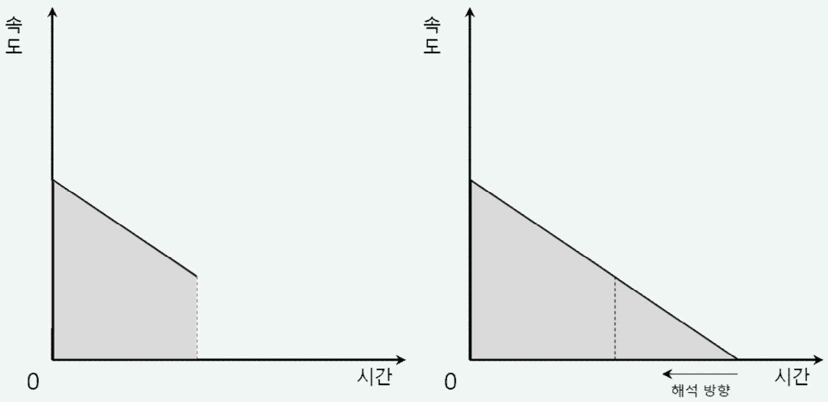
상황 2 : $s = \frac{v_1 + v_1 + at}{2}t = \frac{1}{2}at^2 \; (s\text{비} = a\text{비} \times t^2\text{비})$

상황 3 : $s = \frac{v_1 + v_1 - at}{2}t = v_1 t - \frac{1}{2}at^2$

모든 등가속도 운동 영역에 대해서 우리는 평균 속도에 시간을 곱하면 물체의 위치 변화를 구할 수 있다. 이 때 상황 2처럼 처음 속도가 0일 경우 변위의 크기는 가속도와 시간의 제곱에 비례한다. 따라서 상황 2처럼 운동할 때 변위의 크기 비율은 가속도비율에 시간 제곱 비율을 곱하여 구하는 것이 가능하다.

(6)-1 기준점과 시간 해석 방향

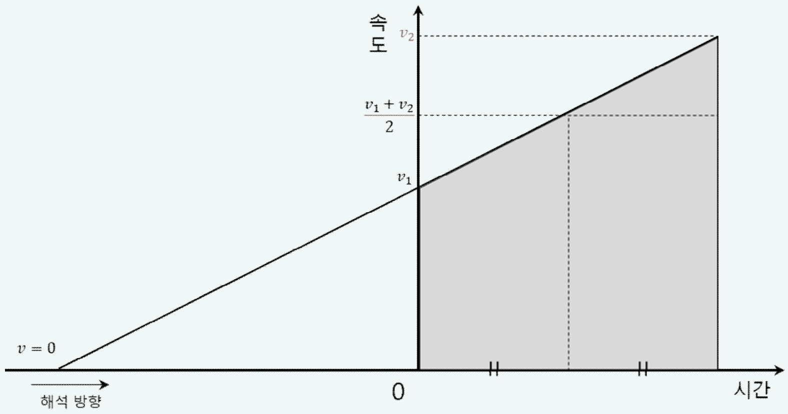
그러나 상황 1, 상황 3의 경우에는 단순히 식만 보았을 때에는 덧셈, 뺄셈 으로 인하여 비례 관계를 도출하기 쉽지 않다. 이 경우에는 그래프를 연장 시켜 비례 관계를 도출하는 것이 가능하다. 상황 3의 그래프를 연장 시킬 경우 다음과 같이 연장하는 것이 가능하다.



상황 3 : $s = \frac{v_1 + v_1 - at}{2}t = v_1 t - \frac{1}{2}at^2$

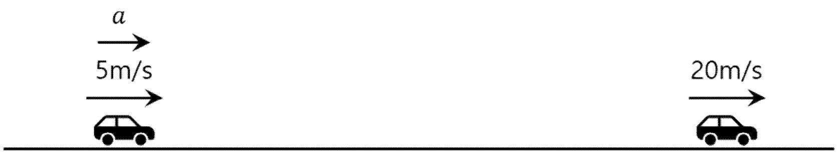
위는 상황 3 그래프의 연장선 및 앞서 설명한 상황 3에서의 변위 s를 구하는 식이다. 여기서 포인트는 t의 기준점이 바로 원점이라는 것이다. 일반적으로, 우리는 그래프를 통해 s를 구할 때 t의 기준을 자연스레 원점을 기준으로 한다. 그러나 t의 기준을 어느시점으로 하는지는 우리의 자유이다. 예를 들어 t=0 ~ t=10초 동안의 이동거리를 계산하나, t=10초부터 역재생하여 t=0까지의 이동거리를 계산하나 그게 그것이지 않은가? 따라서 상황 3같은 경우에는 연장선에 존재하는 v=0인 지점을 기준으로 역방향으로 운동을 해석하여도 전혀 무방하다.

위 이론의 포인트는 우리가 **시간 t의 흐름에 따른 운동을 분석 할 때에는 t의 기준점을 우리가 마음대로 정해도 무관함을 의미한다.** 이 때 우리가 비례관계를 쉽게 유도 하기 위해서는 속력이 0인 어떠한 지점을 기준으로 운동을 해석하는 것이 좋다. 그러면 자연스레 등가속도 운동에 대하여 우리는 가속도 비율에 시간 제곱 비율을 곱하여 변위를 구할 수 있기 때문이다. 이는 상황 1에서도 적용이 가능하다.

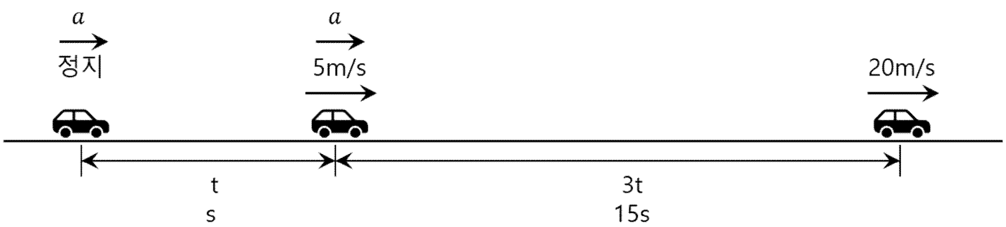


$$\text{상황 1 :}\ s=\frac{v_1+v_1+at}{2}t=v_1t+\frac{1}{2}at^2$$

위 그림은 상황 1, 그리고 변위 s에 대한 식이다. 위 그래프 역시 일반적으로는 비례 관계를 유도하기가 어렵다. 허나, 이에 대한 연장선을 그어 속력이 0인 지점을 기준으로 운동을 해석한다면 마찬가지로 이동거리를 가속도와 시간제곱의 비율을 통해 계산하는 것이 가능하다. 이 때 v=0인 지점을 구하는 것은 경우에 따라 다르겠지만 일반적으로는 가속도와 어떠한 지점에서의 속도를 알면 v=0인 시점을 구하는 것이 가능하다.



간단한 예로, 위 상황처럼 어떠한 물체가 등가속도 운동을 하여 속력이 5m/s에서 20m/s로 증가하였다고 하자. 그렇다면 이 때 우리는 v=0인 포인트를 어떻게 잡으면 되겠는가? 5m/s보다 왼쪽 지점에 대하여 v=0 포인트를 잡고 $\triangle v=at$를 이용하면 된다.



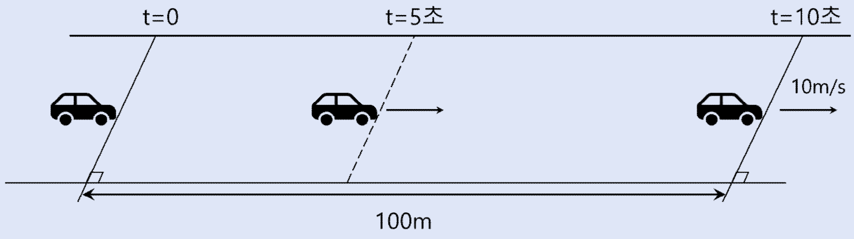
속력이 0인 지점을 잡았다면, 해당 시점을 기준으로 속력 변화가 1:4이니 t, 4t라고 둘 수 있으며 이동 거리는 s, 16s라고 잡을 수 있다. 물론 비례식을 쓰지 않아도 된다. 경우에 따라 위와 같은 풀이가 식을 썼을 때 더 복잡하게 되는 경우도 있다. 그러나 괜찮다. 어차피 비례식은 하나의 주력 무기일 뿐 이러한 비례 관계를 이용했을 때 더 복잡할것같으면 그래프 개형 또는 정량적 계산을 통해 풀어도 무방하니 말이다.

간단하게 비례 관계를 적용하여 몇 가지 문제를 풀어보며 비례관계를 연습해보도록 하자.

예제

20150902

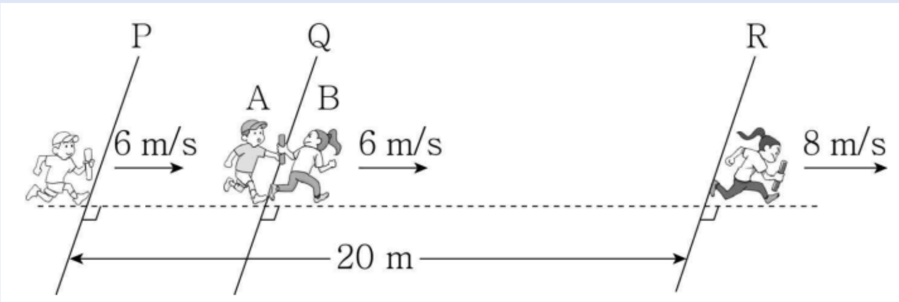
그림과 같이 직선 도로에서 t=0일 때 기준선 P에 정지해 있던 자동차가 출발하여 t=10초일 때 기준선 Q를 속력 10m/s로 통과한다. 자동차는 t=0부터 t=5초까지, t=5초부터 t=10초까지 각각 등가속도 운동을 한다. P에서 Q까지의 거리는 100m이다. t=5초일 때, 자동차의 속력은? (단, 자동차는 도로와 평행한 직선 경로를 따라 운동한다.)



예제

20181003

그림은 학생 A, B가 동일한 직선상에서 이어달리기를 하는 모습을 나타낸 것이다. 기준선 P를 속력 6m/s로 통과하여 등속도 운동하는 A가 기준선 Q에서 B에게 바통을 넘겨주면, B는 Q부터 기준선 R까지 등가속도 운동한다. Q, R에서 B의 속력은 각각 6m/s, 8m/s이다. A가 P를 통과할 때부터 B가 R를 통과할 때까지 걸린 시간은 3초이고 P와 R 사이의 거리는 20 m이다.

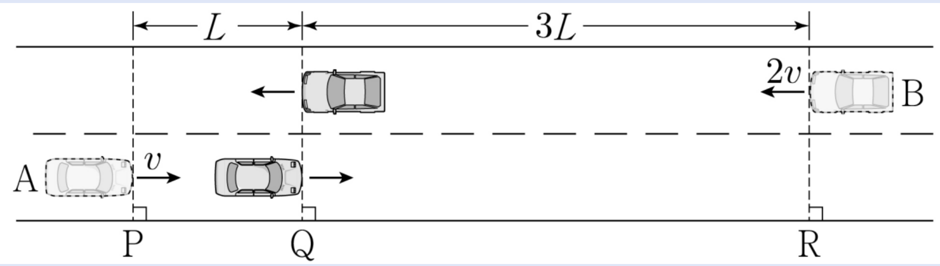


Q와 R사이의 거리는? (단, A, B의 크기는 무시한다.)

예제

20210612

그림과 같이 등가속도 직선 운동을 하는 자동차 A, B가 기준선 P, R을 각각 v, 2v의 속력으로 동시에 지난 후, 기준선 Q를 동시에 지난다. Q를 동시에 지날 때 A, B의 이동 거리는 각각 L, 3L이고 A, B의 가속도의 크기와 방향은 서로 같다. A가 기준선 Q를 지날 때의 속력은?



풀이

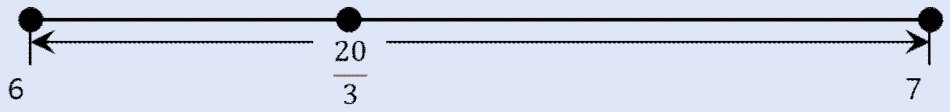
20150902

t=5초 전후 구간에 대하여 시간 비율은 1:1이다, 총 100m를 이동하는 데에 걸린 시간이 10초이므로 전체 평균 속력은 10m/s이다. 이는 t=5초 전후 구간에 대한 평균을 다시 평균 냈을 때 10m/s가 나온다는 의미이다. 양 구간의 시간 비율이 1:1이니 양 구간의 평균 속력의 중간값이 10m/s임을 의미한다. t=5초일 때의 속력을 v라고 하면 $(\frac{0+v}{2}+\frac{v+10}{2})=20$(평균 공식에서 양변에 2를 곱한식) 이를 풀면 $v=15$로 t=5초에서의 속력은 15m/s이다.

풀이

20181003

구간 PQ와 QR에서의 평균 속력은 6m/s, 7m/s이다. 총 걸린 시간은 3초이므로 전체 평균 속력을 계산해보면 $\frac{20}{3}m/s$ 이다.



각 구간의 평균속력을 평균 냈더니 이는 2:1 내분점이며 이는 시간비율이 1:2임을 의미한다. 따라서 구간 QR의 거리는 2초간 운동하였으므로 14m이다.

풀이

20210612

A의 나중 속력을 $v+k$라 하자. B의 나중속력은 가속도의 방향과 크기가 A와 동일하므로 $2v-k$라고 할 수 있다. 동일한 시간동안의 A, B의 이동거리가 1:3이므로 처음속력과 나중속력의 합 역시 1:3이다. 따라서 $(v+v+k):(2v+2v-k)=1:3,\ 4v-k=6v+3k,\ 4k=-2v,\ k=-0.5v$

Q에서 A의 속력은 $v+k$이므로 $0.5v$이다.

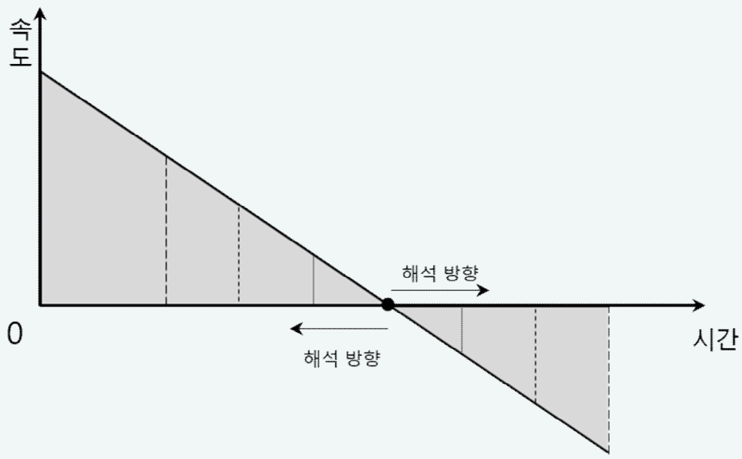
이 때, 검산을 해주면 처음속력, 나중속력의 합은 A, B가 1.5:4.5=1:3이므로 이는 문항 조건에서의 이동거리비와 동일하다.

아직은 익숙하지 않을 것인데 당연하다. 점점 더 많은 개념을 다루고 많은 예제를 풀면 차근차근 익숙해질것이니 참고 따라와주기를 바란다.

(7) 등가속도 운동의 대칭성

등가속도 운동은 여러 가지 상황이 존재한다. 빗면에 가만히 둔 운동, 일정한 힘을 가하는 운동, 위로 던진 자유 낙하 운동 등이 있다. 이처럼 등가속도 운동 과정에서 속력이 0인 지점이 존재할 경우에는 속력이 0인 지점을 기준으로 해석하면 이점이 굉장히 많다.

상황 3



상황 3의 연장선

앞서 설명한 상황 3의 연장선은 우측 그림과 같다. 위 그래프는 속도-시간 그래프이니 면적의 크기는 이동거리를, x축을 기준으로 위아래의 넓이는 서로 다른 부호의 의미를 가지게 될 것이다. 또한 위 그래프는 v=0인 지점을 기준으로 점대칭을 이루게 되며 이는 다음을 의미한다.

- 속력이 0인 시점을 기준으로 t초 전과 후는 위치 및 속력이 모두 동일하며 방향이 반대이다.
- 가속도가 동일한 영역에 대하여 속력이 동일할 경우 위치 또한 동일하다.
- 속력이 0인 시점을 기준으로 이동거리는 해당 시점으로부터 해석하였을 때 가속도와 시간 제곱에 비례한다.

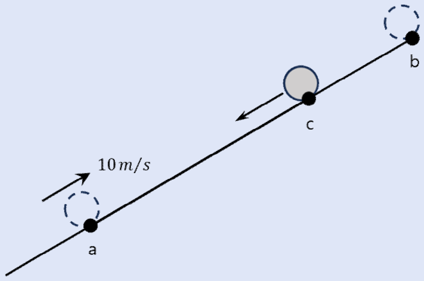
쉽게 말해 속력 v로 지나간 곳은 속력 v로 되돌아 오며 속력이 동일하면 위치 또한 동일한 마치 데칼코마니와 같은 모습을 보여준다. 이러한 이유로 우리는 여러 운동 상황들에 대하여 v=0인 지점을 잡으면 비례 관계를 이용하여 문항을 풀기 굉장히 용이하다.

이와 같은 대칭성과 관련된 문항을 몇 개 보도록 하겠다.

예제

20140919(수정)

그림은 물체가 마찰이 없는 빗면의 점 a를 지나 점 c를 통과하여 최고점 b에 도달한 후, 다시 c를 지나는 순간의 모습을 나타낸 것이다. 물체가 a에서 c까지 올라가는데 걸린 시간은 c에서 b까지 올라가는데 걸린 시간의 3배이다.



물음에 답하시오. (단, 물체의 크기와 공기저항은 무시한다.)

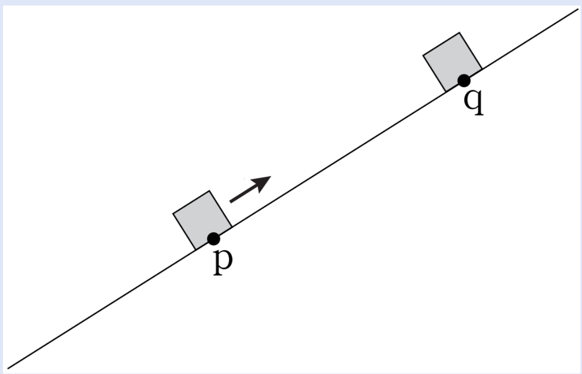
1) c에서의 속력은 몇인가?

2) a와 c 사이의 거리는 b와 c사이 거리의 몇배인가?

예제

20141118(수정)

그림은 빗면을 따라 올라가는 물체가 점 p를 지나가는 순간을 나타낸 것이다. 물체가 점 p, q를 올라가는 순간의 속력은 3:1이다.



물음에 답하시오. (단, 물체의 크기와 공기저항은 무시한다.)

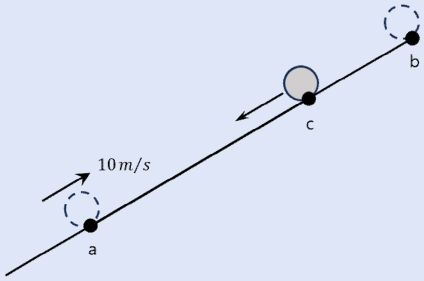
1) 물체가 최고점 O에 도달한 후 점 q, p에 도달하기까지 걸리는 시간은 몇 대 몇인가?

2) 최고점 O에서 q, q에서 p까지의 거리는 몇 대 몇인가?

3) p를 지나 p로 돌아오기까지 걸린 시간이 9초일 경우 최고점 O에서 q까지 걸리는 시간은?

풀이

20140919(수정)
이처럼 물체의 속력이 0인 지점이 존재한다면 이를 기준으로 비례 관계를 이용함과 동시에 대칭성을 이용하는 것이 용이합니다. 점 a를 10m/s로 지났다면 내려올 때에도 10m/s 지나가듯 동일 위치에선 동일 속력, 반대 방향임을 명심해두도록 합니다.



위 상황은 점 b에서 최고점이므로 b를 기준으로 해석하면 비례 관계를 쓸 수 있습니다. 문항 조건에서 구간 bc, ac에서 걸린 시간이 1:3이라고 나와있습니다.

1) c에서의 속력은 몇인가?
점 b로부터 c, a까지 걸린 시간비는 1:4이며 초기 속력이 0이므로 b, c에서의 속력은 걸린 시간에 비례합니다. 따라서 속력 역시 1:4이며 a에서 10m/s이므로 c에서 2.5m/s입니다.

2) a와 c 사이의 거리는 b와 c사이 거리의 몇배인가?
점 b로부터 a, c까지 걸린 시간은 1:4이므로 이동 거리는 1:16입니다. 따라서 a,c사이 거리는 bc사이 거리의 15배임을 알 수 있습니다.

풀이

20141118(수정)
p와 q에서의 속력이 3:1이라는 조건이 나와있습니다. 이는 최고점 O로부터 q, p까지 걸리는 시간이 1:3임을 의미하며 거리는 1:9임을 알 수 있습니다.

1) 물체가 최고점 O에 도달한 후 점 q, p에 도달하기까지 걸리는 시간은 몇 대 몇인가?
q, p에서의 속력이 1:3이므로 걸린 시간 역시 1:3입니다.

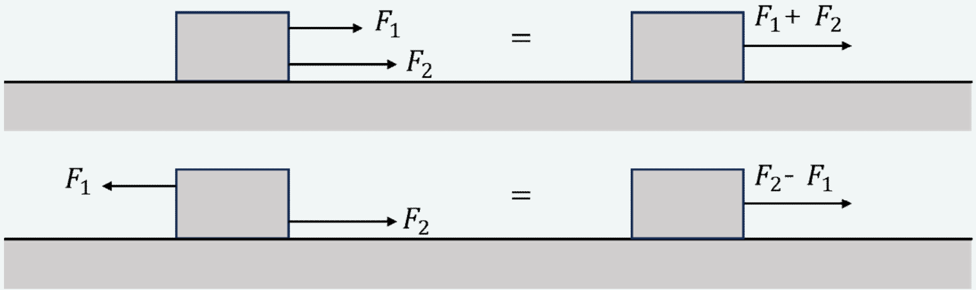
2) 최고점 O에서 q, q에서 p까지의 거리는 몇 대 몇인가?
최고점 O로부터 q, p까지의 거리는 시간비가 1:3이므로 1:9입니다. 따라서 O에서 q, q에서 p까지의 거리는 1:8임을 알 수 있습니다.

3) p를 지나 p로 돌아오기까지 걸린 시간이 9초일 경우 최고점 O에서 q까지 걸리는 시간은?
최고점 O로부터 q, p까지 걸린 시간은 1:3입니다. p를 지나 p로 돌아오기 까지 걸린 시간은 O에서 p까지 걸린 시간의 2배(대칭성)이므로 1:3이라 함은 각각 1.5초, 4.5초를 의미합니다.
따라서 O에서 q까지 걸리는 시간은 1.5초입니다.

아직까지 우리가 배운 내용이 $s = vt$, $\triangle v = at$ 정도 뿐인지라 많이 어렵지는 않을 것이다. 이제 가속도 a에 영향을 주는 질량과 힘, 이들에 대한 연관성에 대해 배워보도록 하자.

(8) 힘

힘이란 물체의 형태, 운동상태를 변화시키는 어떠한 요인으로 1kg의 물체를 1m/s^{2}으로 가속시키는데 필요한 힘의 크기를 1N(뉴턴)이라 한다. 이 때 물체에 작용하는 힘이 여러개일 때 이를 합쳐 하나의 힘으로 나타낼 수 있는데 이를 **물체에 작용하는 알짜힘** 이라 한다.



같은 방향의 힘과 반대 방향의 힘의 합력

힘과 힘을 더할 때 두 힘의 방향이 동일하면 이를 더하고, 반대 방향이면 빼서 하나의 힘으로 표현이 가능하다.

어떠한 물체에 작용하는 힘을 구하고자 할 때에는 해당 물체**만** 잘라서 보면 해석하기 편할 것이다. 보통 물리를 처음 할 때 어떠한 물체에 작용하는 힘들을 분석하는 과정에서 많이들 헷갈려하는 경우가 많은데 당황하지 말고 그 물체**만** 바라보는 것이 해석에 용이하다. 자세한건 후술토록 하겠다.

(9) 뉴턴 운동 제 2법칙(가속도 법칙)

물체에 힘을 주면 힘의 방향으로 가속 운동을 하며 이 때의 가속도는 힘의 크기에 비례하고 질량에 반비례 한다. 힘이 2배, 3배, 4배가 되면 가속도는 2배, 3배, 4배가 되고 질량이 2배, 3배, 4배가 되면 가속도는 1/2배, 1/3배, 1/4배가 된다.

$$F = ma$$

F는 물체에 작용하는 알짜힘을 의미하며 F와 a의 방향은 동일하다. 이 때 이 둘의 방향성(부호)를 제외한다면 아래와 같은 비율 관계를 도출하는 것이 가능하다.

$$\text{알짜힘의 크기 비율} = \text{질량 비율} * \text{가속도의 크기 비율}$$

예 : 질량이 2:3인 물체에 대해 작용하는 알짜힘의 크기가 1:3이라면 가속도는 몇 대 몇인가?

$$\frac{1:3}{2:3} = \frac{1}{2} : 1 = 1:2$$

예 : 질량이 3:5인 두 물체의 가속도가 4:5라면 두 물체에 작용하는 알짜힘의 크기는 몇 대 몇인가?

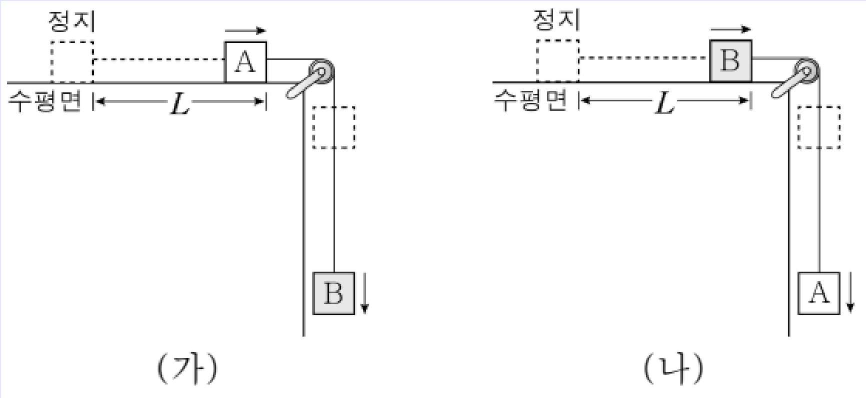
$$(3:5) \times (4:5) = 12:25$$

가속도 법칙까지 배웠으니 간단한 예제와 함께 비례식을 이용한 계산을 해보도록 하자.

예제

20200304

그림 (가), (나)는 물체 A, B를 실로 연결한 후 가만히 놓았을 때 A, B가 L만큼 이동한 순간의 모습을 나타낸 것이다. (가), (나)에서 A, B가 L만큼 운동하는 데 걸린 시간은 각각 t_1, t_2이다. 질량은 B가 A의 4배이다.



t_1 : t_2 는? (단, 실의 질량, 모든 마찰과 공기 저항은 무시한다.)

어렵지 않은 문제다. 그래도 비례식으로 차근차근 풀어보도록 하자.

풀이

동일한 거리 1:1을 이동하는데 걸린 시간비가 t_1 : t_2이므로 평균 속력비 = $\frac{1:1}{t_1:t_2}$

초기 속력이 0일 때 평균 속력은 나중속력의 절반이므로 평균 속력비는 곧 나중 속력비이다.

따라서 나중 속력비 = $\frac{1:1}{t_1:t_2}$

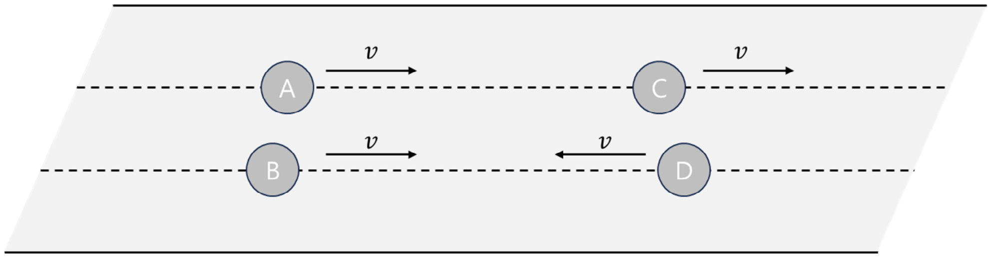
이 때 나중속력비는 가속도와 시간의 곱에 비례하므로 $\text{가속도비} \times (t_1:t_2) = \frac{1}{t_1:t_2}$

가속도는 전체 알짜힘에 비례하고 전체 질량에 반비례 하므로

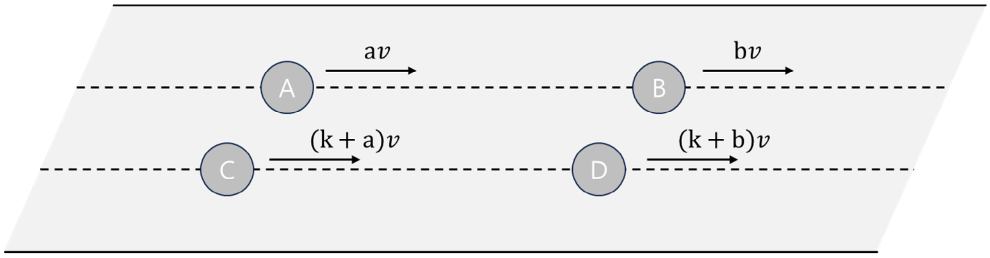
$$\frac{m_b:m_a}{1:1} \times (t_1:t_2) = (4:1) \times (t_1:t_2) = \frac{1}{t_1:t_2},\ \ (t_1:t_2)^2 = 1:4,\ t_1:t_2 = 1:2$$

위 문항 풀이 과정을 보면 알겠지만 각 요소들에 무엇에 비례하는지를 알면 계산 과정에서 비율을 묶어서 계산하기 때문에 굉장히 쾌적하다. 앞으로도 이런 관계를 계속 유도해가며 비례식을 적재적소에 사용할 것이다.

(9)-1 상대속도



위 그림은 속력 v로 등속도 운동을 하고있는 물체들을 나타낸 것이다. A가 B를 바라봤을 때는 아마 정지한것처럼 보일것이며, C가 D를 바라봤을 때는 속력 $2v$로 운동하는 것으로 보일 것이다. 이처럼 물체의 속력은 관찰자의 운동 상태에 따라 방향, 크기가 다르게 보일 것이다. 이처럼 어떠한 관찰자의 입장에서 보이는 어떠한 대상의 속도를 우리는 상대속도 라고 부른다. 이 때 위처럼 평행한 방향으로 운동하는 물체에 대하여 상대속도를 구할 때에는 두 물체의 속도를 빼서 구하게 되는데 이 경우 생각보다 많은 사람들이 부호, 방향 등에 혼란을 겪어 제대로 사용하지 못하는 경우가 많다. 이 상대속도에 대하여 조금 자세히 알아보도록 하자.



(편의상 a<b라 가정하겠다.)

그림은 평행한 방향으로 운동하는 A~D를 나타낸 것이다. A 입장에서 B의 속력은 아마 $(b-a)v$로 느껴질 것이다. C, D는 각각 A, B의 속도에서 kv를 각각 더해준 것이다. C 입장에선 D의 속력이 마찬가지로 $(b-a)v$로 느껴질 것이다. 이 말이 무엇을 의미하느냐 하면 각 물체의 속도에 **동일한 속도**를 더해줄 경우 어떠한 관찰자의 시점에서 다른 물체를 보았을 때 느껴지는 속도는 **변하지 않음**을 의미한다. 우리가 익히 알고있는 상대속도는 일반적으로 A의 속도에서 B의 속도를 빼준다 로 배우지만 이를 다르게 표현하면 A, B에 대하여 B의 속도를 동일하게 가감하여 B의 속도를 0으로 만든다와 동일한 의미이다. 본 문서에서는 상대 속도와 관련된 개념을 아래와 같이 서술하겠다.

각 물체들의 속도에 대하여 동일한 속도를 가감하여도 각 물체들의 입장에서 느껴지는 상대방의 속도는 변하지 않는다.

그렇다면 이러한 상대속도가 중요한 이유는 무엇인가? 초등학생시절 풀어봤을법한 간단한 예제를 주도록 하겠다.

예제	운동회에서 철수는 영희보다 100m 앞질러있으며, 철수와 영희는 각각 10m/s, 15m/s로 등속도 운동을 하고 있다. 영희가 철수를 앞지르는데 걸리는 시간은 무엇인가?

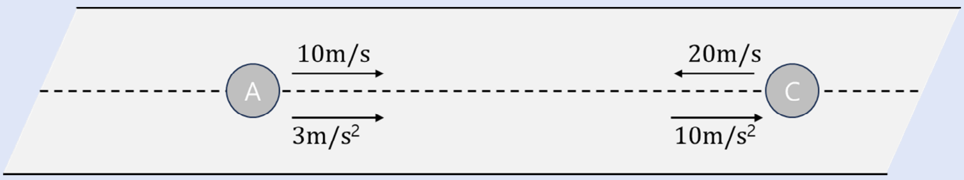
풀이?	걸리는 시간을 t초라 하면 철수의 이동거리는 10t m, 영희의 이동거리는 15t m 로 영희가 철수를 앞지르기 위해서는 철수보다 100m를 더 이동해야한다. 따라서 10t + 100 = 15t (15-10)t = 100, t=20 으로 20초가 걸린다.

아마 위 문항을 풀지 못하는 사람은 없을 것이다. (없어야 한다) 아마 초등학생 때 위 문항을 푼 사람들 중에서는

본인도 모르게 사이 거리를 속력의 차로 나눠 바로 20m를 구한적이 있을 것이다. 상대속도는 이와 같이 물체와 물체 사이 간격을 분석할 때 용이하다. 그러나, 우리가 초등학생 때 잘만 사용하던 상대속도를 물리에서는 잘 활용하지 못하는 이유가 무엇인가? 바로 가속도, 그리고 방향 때문이다.

단순히 등속도 운동을 한다면 속력을 보고, 방향을 체크하여 더할지, 빼줄지만 체크하면 되는데 이러한 사고 과정과는 달리 물리에서는 운동 방향이 변하기에 방향을 체크한다는 사고를 적용하기 애매모호하게 느껴지기 때문이다. (직관성이 떨어져서) 앞으로는 위와 같은 상대속도 개념을 적용할 때 아래와 같은 과정을 거친다면 누구나 쉽게 사용 가능할 것이다. 간단한 예제와 함께 문항을 풀어보도록 하자.

예제

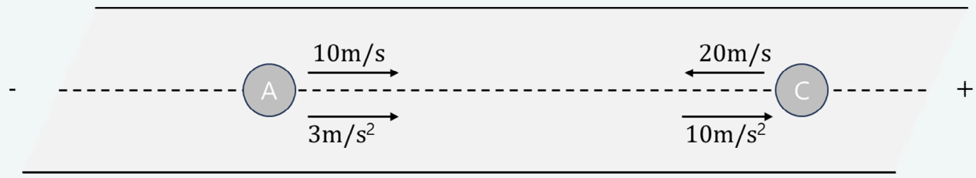


그림은 t=0 때 두 물체 A, C의 운동 속력과 방향, 가속도의 크기와 방향을 나타낸 것이다. t=0 때 두 물체 사이의 거리는 50m이다. 두 물체는 언제 충돌하는가? (단, 물체의 크기는 무시한다)

상대속도는 모든 물체에 대한 속도의 가감을 동시에 진행해주는 것이다. 아래와 같이 단계를 밟도록 하자.

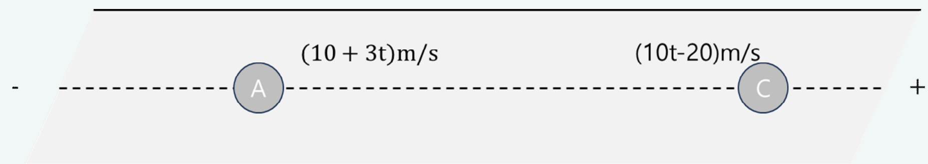
상대 속도의 적용 과정.

1) 방향에 따른 부호 설정



좌와 우, 위와 아래에 대한 부호를 설정하도록 한다. 필자의 경우 평면에서는 우측을 +, 좌측을 −로 두는 것을 선호한다.

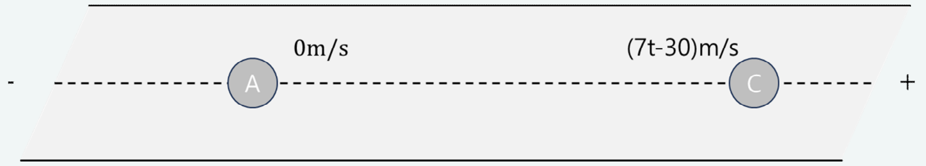
2) 물체의 속도 설정



우리는 이미 오른쪽을 +, 왼쪽을 −로 두었으며 이에 따라 속도를 표기한다면 더 이상 물체에 화살표로 표기를 하지 않아도 무관하다.

앞서 말했듯, 우리가 일반적으로 상대 속도를 적용하는 과정에서 거부감, 또는 직관성의 부족으로 인해 적용하지 못하는 이유는 가속도 때문이다. 따라서 위와 같이 방향에 따른 부호를 정하고 이에 따른 속도를 정확히 표기만 하여도 상대속도를 훨씬 사용하기 수월해진다.

3) 가감하여 한쪽을 0으로 고정



양쪽 물체에 동일한 속도를 더하여 한쪽을 0으로 고정시키도록 한다. 위 그림은 가감하여 A와 C를 각각 0으로 맞춰준 모습을 나타낸 것이다.

4) 정지된 물체에 대하여 다른 물체의 변위 계산

C를 정지 상태로 만들었다면 A의 변위가 오른쪽(+)으로 50m가 나와야 하므로 $\frac{30+30-7t}{2}t=+50$ 라는 식이 나와야 한다.

반대로 A를 정지 상태로 만들었다면 C의 변위가 왼쪽(-)으로 50m가 나와야 하므로 $\frac{-30-30+7t}{2}t=-50$ 라는 식이 나와야 한다. 이 둘은 완벽하게 부호만 바뀐 식임을 알 수 있다.

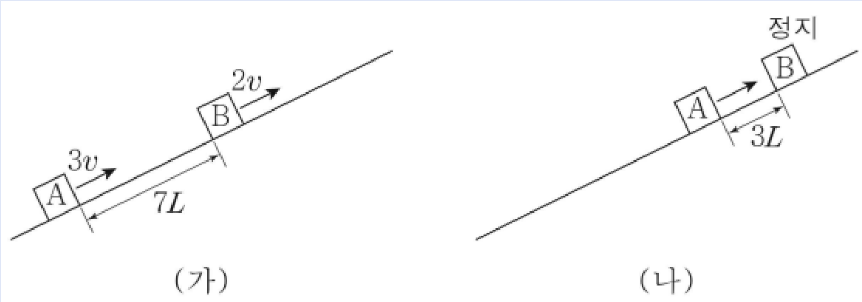
계산을 한번 해보면 $7t^2-60t+100=(7t-25)(t-5)=0$, $t=\frac{25}{7}, t=5$ 따라서 두 물체는 $\frac{25}{7}$초 때 충돌함을 알 수 있다. 근이 2개가 나오는데, 두 물체가 동일한 직선이 아닌 평행한 서로 다른 직선을 운동한다면 저 두 시점 때 두 물체는 스쳐지나가게 될 것이다.

이러한 상대 속도는 동일한 가속도를 가지는 구간에 대해서, 특히나 동일한 빗면에 대해 운동을 하는 경우 많이 유용하다. 이러한 이유로 보통 **동일 빗면이면 상대속도가 일정하다** 정도만 암기를 하는 경우도 많지만, 위와 같은 방식으로 접근한다면 헷갈리지 않고 더욱 폭넓게 활용 가능하니 염두해두도록 하자. 이와 관련된 문항을 몇 개 풀어보도록 하겠다.

예제

20240517

그림 (가)는 마찰이 없는 빗면에서 등가속도 직선 운동하는 물체 A, B의 속력이 각각 3v, 2v일 때 A와 B 사이의 거리가 7L인 순간을, (나)는 B가 최고점에 도달한 순간 A와 B 사이의 거리가 3L인 것을 나타낸 것이다. 이후 A와 B는 A의 속력이 v_A일 때 만난다.

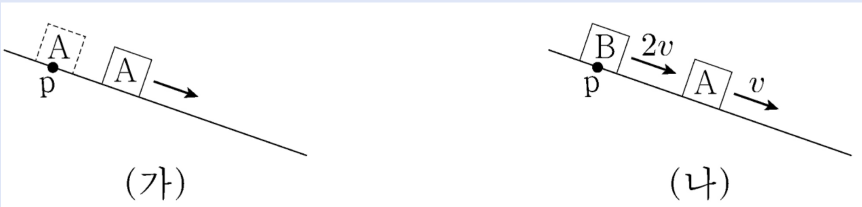


v_A는? (단, 물체의 크기는 무시한다.

예제

20221114

그림 (가)는 빗면의 점 p에 가만히 놓은 물체 A가 등가속도 운동하는 것을, (나)는 (가)에서 A의 속력이 v가 되는 순간, 빗면을 내려오던 물체 B가 p를 속력 2v로 지나는 것을 나타낸 것이다. 이후 A, B는 각각 속력 v_A, v_B로 만난다.



$\frac{v_B}{v_A}$는? (단, 물체의 크기, 모든 마찰은 무시한다.)

풀이

20240517

윗방향을 +로 두고, 가속도의 크기를 a라고 한다면 각 물체의 속도는 아래와 같다.

$$A : 3v - at, B : 2v - at$$

이를 각각 가감하여 B를 정지상태로 만들면 다음과 같다.

$$A : v, \quad B : 0$$

따라서, (가)로부터 시간 t가 지난 후의 모습이 (나)라면 가까워진 거리가 4L이므로 $vt = 4L$이다. 시간 t 동안 속력이 2v가 변하였으므로 A의 속력은 v가 된다.

(나)로부터 시간 T 뒤에 충돌한다면 $vT = 3L$이므로 $T = \frac{3}{4}t$이다.

시간 t 동안 속력이 2v가 변하였으므로 시간 T 동안에는 $\frac{6}{4}v$가 변하게 된다.

따라서 충돌할 때 A의 속력은 v에서 1.5v를 빼줘야 하므로 빗면 아랫 방향으로 0.5v이다.

풀이

20221114

(나)가 A가 출발한지 t_0후의 모습이라 해보자. 빗면에서의 가속도를 a라 한다면 (나)시점으로부터 시간 t 이후의 A, B의 속도는 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$A : v+at \quad B = 2v+at \quad (at_0 = v)$$

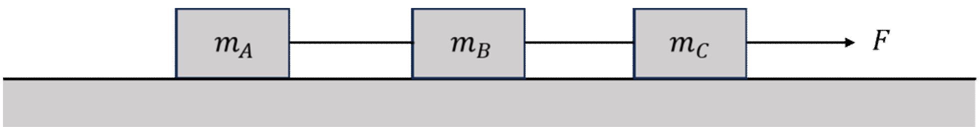
두 물체의 속도에 동일한 값을 가감하여 A의 속도를 0으로 만들면 A, B의 속도는 각각 0, v이다. (나) 이후로 시간 t 이후 충돌하기 위해서는 B가 속력 v로 A, B 사이 거리만큼 이동해야한다.(상대 속도 시점으로 보았을 때)

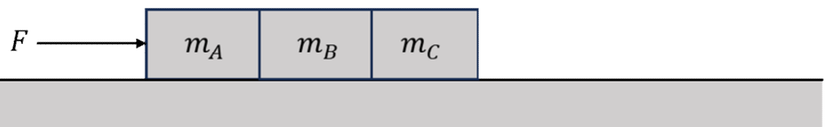
이 거리는 A가 시간 t_0동안 이동한 거리이므로 A의 평균 속력 0.5v 조건을 이용하면 $0.5vt_0$이다. 따라서 정지한 A에 대해 B가 이동한 거리 $vt = 0.5vt_0$기 위해서 $2t = t_0$여야 한다.

시간 t_0 동안 A의 속력이 v 증가하였으므로 (나) 이후 $t = \frac{1}{2}t_0$동안에는 A, B의 속력은 $0.5v$씩 증가 해야한다. 따라서 $v_A = v+0.5v, v_B = 2v+0.5v$로 $\frac{v_B}{v_A} = \frac{2.5}{1.5} = \frac{5}{3}$이다.

일부러 상대 속도를 일치 시키는 과정까지 서술하였으나, 동일 빗면이면 아마 상대속도가 금방 눈에 들어올 것이다. 물론, 상대 속도를 사용 가능한 상황은 빗면과 같이 가속도가 동일한 상황 외에도 여러 가지 상황이 있을 수 있다. 따라서, 단순히 빗면에선 상대속도가 일정하다 라는 조건을 알아두는 것 역시 유용하나, 폭넓게 사용 가능하도록 상대속도 식을 서술하는 과정을 정석적인 방법으로도 이해해두길 바란다.

(9)-2 알짜힘의 분산





위와 같이 연결된 물체, 또는 결합된 물체에 대하여 힘 F를 가할 때 물체가 받는 알짜힘은 어떻게 될까? 전체 알짜힘이 F이므로 전체 물체의 가속도의 크기는 $\frac{F}{m_A+m_B+m_C}$일것이며 $F = ma$로 인하여 각 물체가 받는 알짜힘의 크기는 각각의 질량을 곱해준 $\frac{F}{m_A+m_B+m_C}m_A, \frac{F}{m_A+m_B+m_C}m_B, \frac{F}{m_A+m_B+m_C}m_C$ 이다. 이 셋을 더하면 F가 된다. 이를 다르게 표현하면 아래와 같다.

연결된 물체(동일한 가속도를 공유하는)에 작용하는 알짜힘은 각 물체들에 대하여 **질량 비율로 분산된다.**

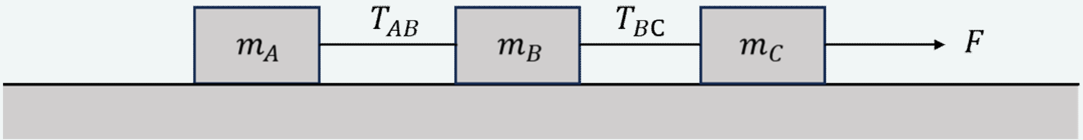
전체 알짜힘이 F일 때 질량이 m_A인 물체가 받는 알짜힘 $F_A = \frac{m_A}{\triangle m}F$

따라서 어떠한 물체가 받는 알짜힘은 **전체 알짜힘과 해당 물체의 질량에 비례, 전체 질량에 반비례 한다.**

예를 들어 질량이 2kg, 3kg, 5kg로 연결된 물체에 대하여 전체 알짜힘 20N이 작용한다면 질량 비율 2:3:5로 각각 4N, 6N, 10N으로 분산됨을 의미한다.

(9)-3 물체의 단일화

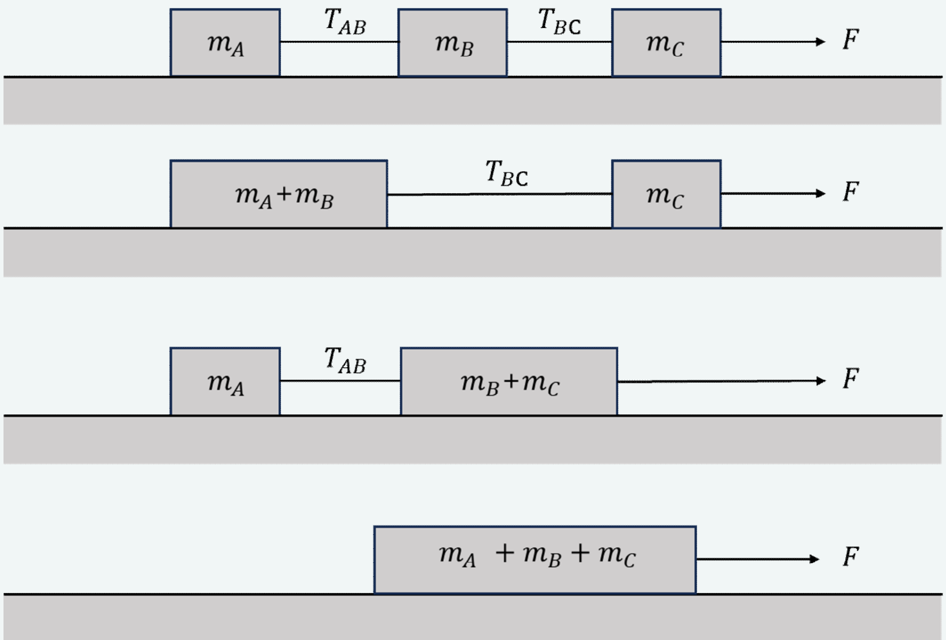
위 논리를 바탕으로 장력을 구해보면 아래와 같다.



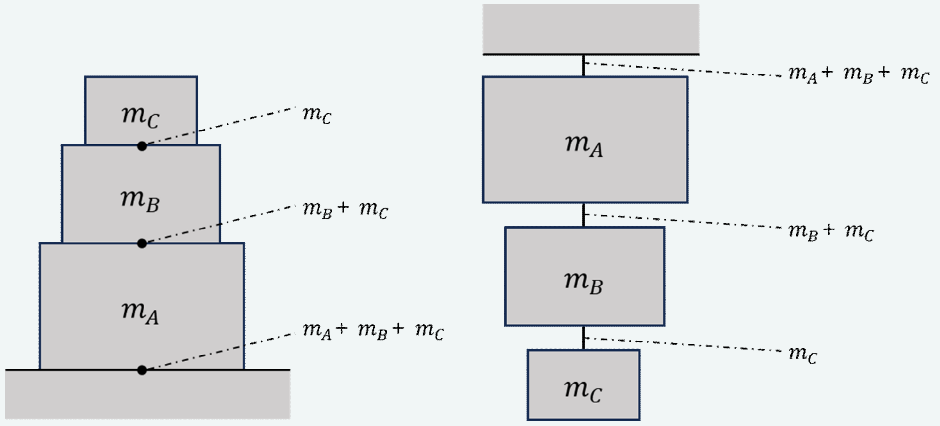
T_{AB}는 m_A가 받는 알짜힘이므로 $T_{AB} = \frac{m_A}{\triangle m}F$

m_B가 받는 알짜힘 $\frac{m_B}{\triangle m}F = T_{BC} - T_{AB}$, $T_{BC} = T_{AB} + \frac{m_B}{\triangle m}F = \frac{m_A + m_B}{\triangle m}F$

여기서 구한 T_{BC}의 식 모양을 보았을 때 어떻게 보면 질량이 $m_A + m_B$인 물체에 작용하는 알짜힘과 동일하게 보인다. 이 말은, **알짜힘을 분석하는 과정에서 연결된 물체를 합쳐도 무방함**을 의미한다. 이를 그림으로 표현하면 다음과 같다.



이러한 단일화는 연결하는 물체가 아닌, 정지된 물체에도 동일하게 적용이 가능하다. 예를 들면 수평면에 놓인, 실에 매달려있는 물체들에 대해서도 적용이 가능하다.



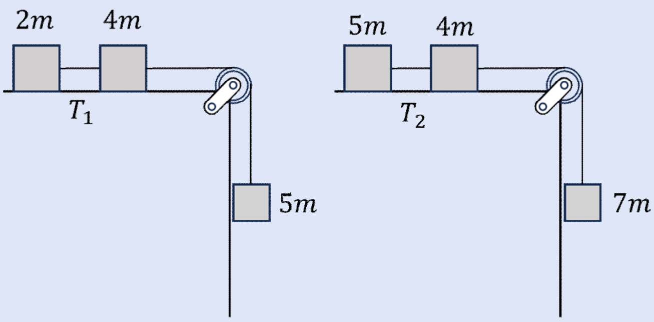
각 지점, 줄에서 작용하는 중력과 장력 (g 생략)

그림은 지점별 수직항력, 또는 장력을 표현한 것이다. 이처럼 어떠한 두 물체 사이에 상호작용하는 힘을 생략하고 이를 하나의 물체로 합쳐서 해석하여도 작용하는 알짜힘의 분석에는 차이가 없다.

알짜힘의 분산은 물체가 받는 알짜힘을 파악하고 이에 따른 각 물체별 힘을 분석 하는데에 도움이 된다. 더 나아가 이러한 관계식은 뒤에서 배울 에너지 파트에서도 용이하게 작용한다. 이는 뒤에서 배울 퍼텐셜 에너지, 운동 에너지가 각각 중력, 알짜힘에 영향을 받는데 자세한 건 뒤에서 다루도록 하고 일단은 간단한 예제를 통해 알짜힘의 분산을 연습해보도록 하자.

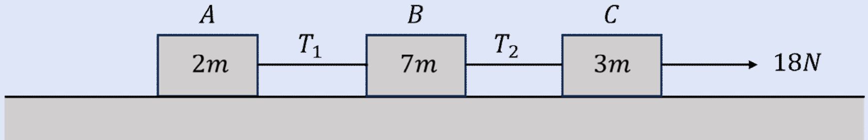
예제1

그림은 물체가 실로 연결된 상태로 가만히 두자 운동하는 모습을 나타낸 것이다. 장력 T_1 : T_2를 구하시오. (단, 모든 마찰은 무시한다.)



예제2

그림은 질량이 각각 2m, 5m, 3m인 실로 연결된 A, B, C가 18N의 힘으로 당겨져 오른쪽으로 운동중인 모습을 나타낸 것이다. 두 실에 걸리는 장력 T_1, T_2를 구하시오.



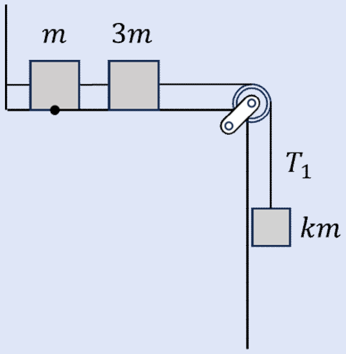
(단, 모든 마찰은 무시한다.)

$T_1 =$

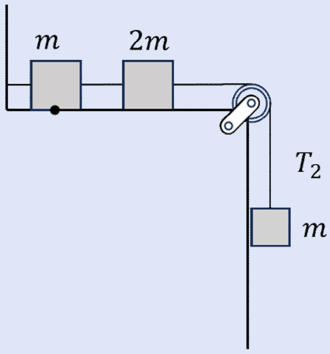
$T_2 =$

예제3

그림은 실로 연결된 물체들이 벽면에 연결된 실에 의해 정지해 있는 모습을 나타낸 것이다. t=0 때 (가)에서 벽면에 연결된 실이 끊어지고, $t=t_0$때 (나)에서 벽면에 연결된 실이 끊어진다. t=0부터 $t=2t_0$ 까지 물체가 이동한 거리는 (가)가 (나)의 8배이고, 물체가 이동할 때 도르레 아래에 연결된 물체에 연결된 실에서 측정된 장력은 각각 T_1, T_2이다. 질문에 답하시오.
(단, 모든 마찰과 저항은 무시하며 중력가속도는 g이다.)



(가)



(나)

(1) k를 구하시오.

(2) T_1, T_2를 구하시오.

예제1 풀이

T_1과 T_2는 각각 질량이 2m, 5m인 물체가 받는 알짜힘과 동일하다.

전체 알짜힘은 5:7, 알짜힘을 받는 물체의 질량은 2:5, 전체 질량은 11:16이다.
따라서 알짜힘 $T_1 : T_2 = \frac{(5:7)\times(2:5)}{11:16} = \frac{2:7}{11:16} = 32:77$
(이전에 말했듯, 분수는 항상 아래에서 위로 대각선으로 곱해야 헷갈리지 않는다.)

예제2 풀이

전체 알짜힘은 18N이며 물체의 질량비는 2:7:3이다. 2+7+3은 12이며 실제 힘의 합은 18N이다.
따라서 비례상수를 1로 만들어주기 위해 $\frac{18N}{12} = 1.5N$를 곱해주면 각 물체가 받는 알짜힘은 각각 3N : 10.5N : 4.5N 이다. (합 18N)

T_1은 질량이 2m인 물체가 받는 알짜힘으로 3N

질량이 7m인 물체가 받는 알짜힘은 $T_2-T_1=T_2-3N=10.5N$, $T_2=13.5N$
또는 질량이 3m인 물체가 받는 알짜힘은 $18N-T_2=4.5N$, $T_2=13.5N$

예제3 풀이

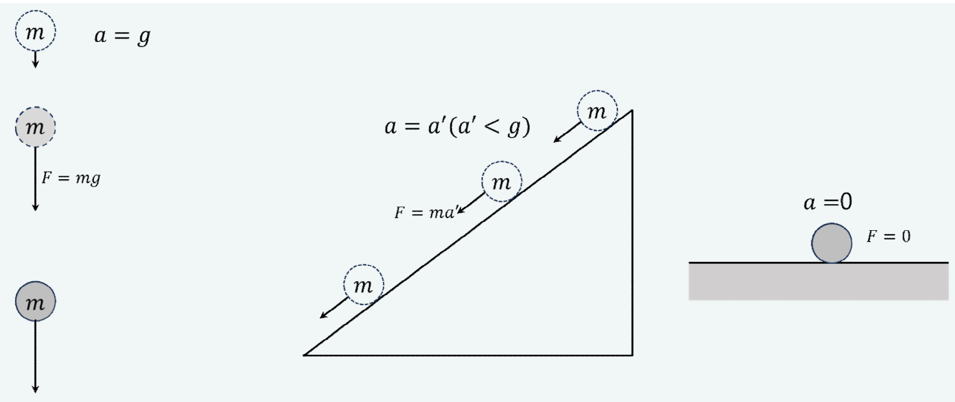
(1) (가)와 (나)에서 물체가 이동한 시간은 각각 $2t_0$, t_0 으로 2:1이다.
초기속도가 0인 물체가 이동한 거리는 가속도와 시간 제곱에 비례한다.
이동거리가 8:1이므로 $(2:1)^2 \times$ a비 = 8:1, a비 = 2:1
a는 전체 알짜힘 F에 비례, 전체 질량에 반비례 하므로 $2:1 = \frac{k:1}{k+4:4} = \frac{k}{k+4}:\frac{1}{4}$

$\frac{k}{k+4} = \frac{1}{2}, k = 4$

(2) 도르레 아래에 연결된 물체가 받는 알짜힘을 구해보도록 하자.
(가) : km = 4m으로 전체 알짜힘 $4mg$ 중 $\frac{4m}{m+3m+4m} = \frac{1}{2}$을 분배받으므로 $2mg$이다.
(나) : mg 중 $\frac{m}{m+2m+m} = \frac{1}{4}$를 분배 받으므로 $0.25mg$이다.

(가)는 4mg에서 T_1을 뺀 값이 2mg 이므로 T_1 = 2mg 이다.
(나)는 mg에서 T_2를 뺀 값이 0.25mg 이므로 T_2 = 0.75mg 이다.

(10) 중력 가속도와 무게

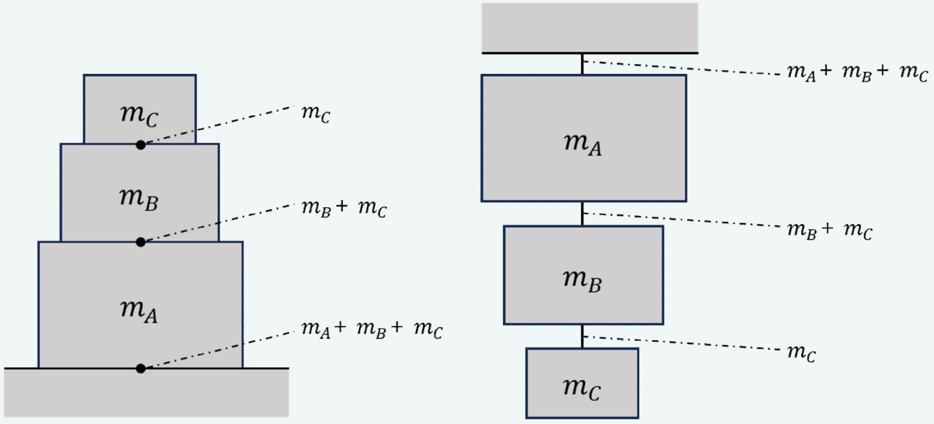


자유 낙하 운동　　　빗면 운동　　　평지에 놓인 모습

물체는 자유낙하 운동시 모든 마찰, 저항이 없으면 질량과 관계없이 동일한 가속도를 가지게 되는데 이를 중력 가속도 g라고 한다. 앞서 다룬 $F=ma$에 대입하면 $F=mg$로 물체가 받는 힘의 크기를 구할 수 있는데 이를 **무게**라 한다. 물체는 공중이 아닌 빗면에 두어도 질량과 관계없이 동일한 가속도를 가지며 이 때의 가속도는 빗면의 각도에 따라 g보다 작은 어떠한 일정한 가속도를 가지게 된다. 평지에 놓여 있을 때에는 가속운동을 하지 않는다.

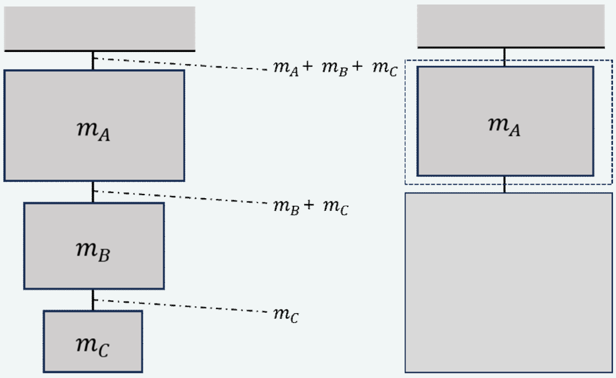
우리는 빗면이 가파를수록 가속도가 크다는 사실을 이미 알고 있다. 실제로 각도를 알면 가속도 계산이 가능하다! 하지만 물리학 1에서는 그냥 자유낙하 운동시 가속도는 중력가속도와 동일, 빗면 운동의 경우 빗면이 가파를수록 가속도가 크다 정도만 알면 무방하다. 추가로 물체가 받는 중력은 빗면으로 인하여 사선 방향으로, mg보다 작게 작용하여 g보다 작은 가속도 a'으로 운동한다는 사실 정도는 알아두도록 하자.

(11) 장력과 수직항력



각 지점, 줄에서 작용하는 중력과 장력 (g 생략)

장력은 실에 작용하는, 연결된 물체를 당기는 방향으로 작용하는 어떠한 힘을, 수직항력은 어떠한 접촉점에 대하여 수직 방향으로 작용하는 힘을 의미한다. 수직항력과 장력은 단순히 생각하였을 때에는 해당 지점에 각각 저울과 용수철저울이 있다고 생각하면 보다 생각하기 수월할 것이다. 이 두 힘은 물리를 처음 공부할 때 힘의 분석에서 많은 이들의 골머리를 앓게 하는 것 같다. 힘을 분석할 때에는 그냥 해당 물체**만**보는 습관을 들이는 것을 권장한다.



오른쪽 그림은 왼쪽 그림을 그냥 가리고 질량이 m_A인 물체 주변을 점선으로 표기한것인데, 이 점선이 곧 우리가 질량이 m_A인 물체에 작용하는 힘을 볼 때의 시선이다. 어떠한 물체에 작용하는 알짜힘을 분석하기 위해서는 해당 물체에 대해 접촉된 요소를 보는 것이다. (물론 더 나아가서는 전기력과 같이 접촉하지 않아도 작용하는 힘도 따져 줘야한다.) 결론적으론 가려진 부분에 무엇이 존재하건 해당 물체에 작용하는 힘은 연결된 두 실의 장력, 그리고 해당 물체에 작용하는 중력이니 말이다. 단, 그 연결된 힘에 대한 단서를 외부 조건을 통해 유추하는 것일 뿐이다.

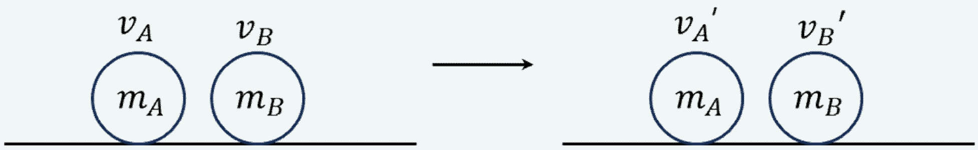
사실 그리 대단한 내용은 아니지만, 위와 같은 시선을 습관화 한다면 뒤에서 다룰 에너지 파트가 조금 더 친근하게 느껴지리라 생각한다.

(12) 운동량 p

질량이 m인 물체가 속도 v로 운동할 때 질량, 속도의 곱을 운동량이라 한다. 속도를 곱한다는 것은 운동량 자체는 방향성을 띄며, 물리학1에서는 이 방향성을 +와 −로 표기한다. 운동량은 속도에 영향을 받으니 자연스레 힘에도 영향을 받을것이며, 힘에도 영향을 받으니 자연스레 다른 물체와의 충돌에도 영향을 받게될 것이다. 어떠한 물체의 운동량의 변화는 $\triangle p = m\triangle v$로 계산이 가능하다. 앞서 말했듯 운동량은 질량과 **속도**의 곱이다. 오른쪽으로 $2v$의 속력으로 운동하던 물체가 충돌 후 왼쪽으로 $2v$의 속력으로 운동한다면 $|\triangle v| = 4v$로 계산되어야 한다. 그래서 필자는 어떠한 물체의 운동량을 표기할 때에는 방향을 같이 표현하는 것을 선호하며, 부호 설정은 오른쪽을 +, 왼쪽을 − 로 설정하는 것을 선호한다.

(12)-1 운동량 보존 법칙

물체와 물체가 충돌할 때 충돌한 물체들의 총 운동량은 유지된다. 만약 두 물체가 서로 충돌한다면 아래와 같이 표현 가능할 것이다.



두 물체 A, B의 충돌 전 속도를 v_A, v_B 충돌 후 속도를 $v_A{}'$, $v_B{}'$ 질량을 m_A, m_B이라 하자. 충돌 전, 후 두 물체의 운동량의 합이 동일 하며 이를 토대로 다음과 같은 같이 유도할 수 있다.

$$m_A v_A + m_B v_B = m_A v_A{}' + m_B v_B{}'$$

$$m_A(v_A - v_A{}') = m_B(v_B{}' - v_B), \quad m_A|v_A - v_A{}'| = m_B|v_B - v_B{}'|$$

$$m_A : m_B = |v_B - v_B{}'| : |v_A - v_A{}'| = (v_B - v_B{}') : -(v_A - v_A{}') =$$

- 두 물체가 충돌하는 과정에서 속도 변화량의 크기는 반대 질량비이다.
- 속도 변화의 방향은 서로 반대이며 힘을 받는 방향으로 속도가 변한다.
  (작용 반작용으로 서로 변화 방향이 반대)

예 : 질량이 각각 3m, m인 두 물체가 충돌할 때 속도 변화 크기는 1:3이며 변화 방향은 서로 반대이다.

(13) 충격량과 운동량

물체에 힘을 가할 때 힘을 받은 정도를 어떻게 표현 가능할까? **10N의 힘을 3m 이동하는 동안 받았다**처럼 거리와 연관을 지을 수도 있고 **3초 동안 받았다**처럼 시간에 연관을 지을 수도 있을 것이다. 충격량은 시간에 연관을 지은 것으로, 물체가 받은 충격량의 크기는 힘과 시간의 곱으로 나타내진다. 힘은 속도에 영향을 주고 시간 t동안 힘 F를 일정하게 줄 경우 다음과 같은 관계식이 성립한다. (물1에서는 속도의 방향과 힘의 방향이 평행한 경우에 대해서만 다룰 것이다.)

$$Ft = m\triangle v, \quad F\text{비율} \times t\text{비율} = m\text{비율} \times \triangle v\text{비율}$$

(이 때, 속도의 변화 방향은 힘의 방향과 동일하다)

마찬가지로, 곱셈으로 이루어진 관계식이므로 위와 같이 비율간 계산도 성립한다. 두 물체가 크기가 2:3인 힘을 시간 5:4 동안 받는다면 운동량의 변화는 (2:3)과 (5:4)를 곱한 5:6으로 계산이 가능하다. 만약 이를 질량 m 비율로 나누어 준다면 속도 변화 비율도 구할 수 있을 것이다.

(14) 일

앞서 우리는 힘을 시간에 연관지은 충격량을 배워보았다. 힘을 시간이 아닌 거리에 연관을 지은 것을 우리는 일이라고 하며 힘과 이동 거리의 곱으로 나타내진다.

$$W = Fs$$

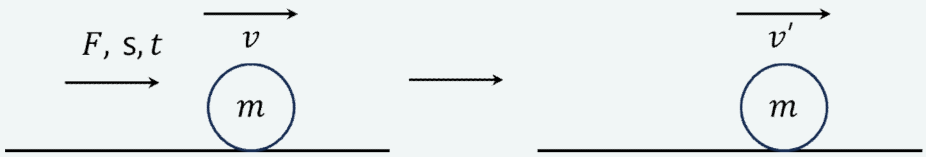
$$W\text{비} = F\text{비} \times s\text{비}$$

이 때 W의 단위는 J, F와 s는 각각 N, 초를 사용한다.

여기서 중요한 점은 s가 이동 거리이냐 변위이냐에 따라 해석하는 방향이 달라진다. 이는 운동 에너지에 대해서 좀 더 배운 뒤에 다루도록 하겠다. 일단은 간단하게 정의 정도만 알아두도록 하자.

(15) 운동 에너지 (E_k)

뉴턴의 운동 법칙에 의해 아래와 같은 유도가 가능하다.



질량이 m, 속력이 v인 물체에 힘 F 를 이동 거리 s, 시간 t동안 가하자 속력이 v'이 되었다 하자.
$s = vt$와 $F = ma$에 의해 아래의 식을 작성할 수 있다.

$$s = \frac{1}{2}(v + v')t, \quad F = m\frac{v' - v}{t}$$

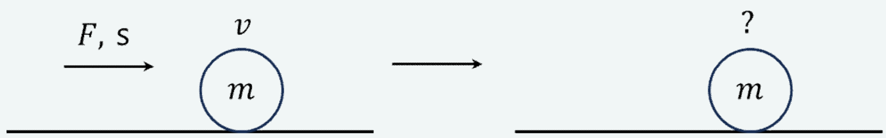
두 식을 곱해주면 다음과 같다.

$$Fs = \frac{1}{2}m(v'^2 - v^2) = \triangle\frac{1}{2}mv^2$$

결과적으로는 Fs만큼 물체의 $\frac{1}{2}mv^2$값이 변하였는데 이를 물체의 운동 에너지라 한다.

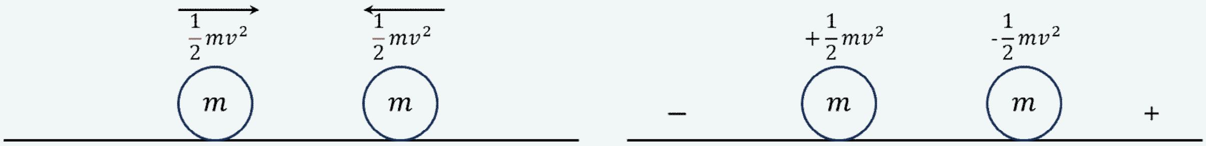
운동 에너지는 모양새를 보면 알겠지만 **양수**다. $\frac{1}{2}$, m, v^2 모두 양수이니 말이다. 그런데 운동 에너지에 **부호**를 붙여주면 어떨까? $+\frac{1}{2}mv^2$, $-\frac{1}{2}mv^2$처럼 말이다! 갑자기 양수인 운동 에너지에 마이너스를 붙인다니 무슨 소리인가 싶을 것이다. 하지만 운동 에너지에 부호를 붙여 해석을 한다면 보다 폭넓은 사고가 가능할 것이다. 다음 내용을 보도록 하자.

(15)-1 운동 에너지의 부호



그림은 질량이 m, 속력이 v인 운동 에너지가 $\frac{1}{2}mv^2$인 물체에 힘 F 를 오른쪽 방향으로, 이동 거리 s만큼 가하는 모습을 나타낸 것이다. 물체의 처음 운동 방향은 모르고 속력만 알고 있다. 그렇다면 **나중 운동 에너지를 구하는 것이 가능한가? 알 수 없다.** 물체의 운동 방향이 오른쪽이냐 왼쪽이냐에 따라 속력 v가 증가할 수도, 감소할 수도 심지어 정지할 수도 있으니 말이다. 한가지 더, 일의 양 Fs에서 s가 이동 거리일 때와 변위일 때 어떠한 차이를 가

지는지 생각해보았는가? 이번 파트에서는 이를 명확하게 알고자 한다. 그 전에 본 교재 학습 과정에서 운동 에너지를 표현할 때 다음과 같이 표현할 것을 권장한다.



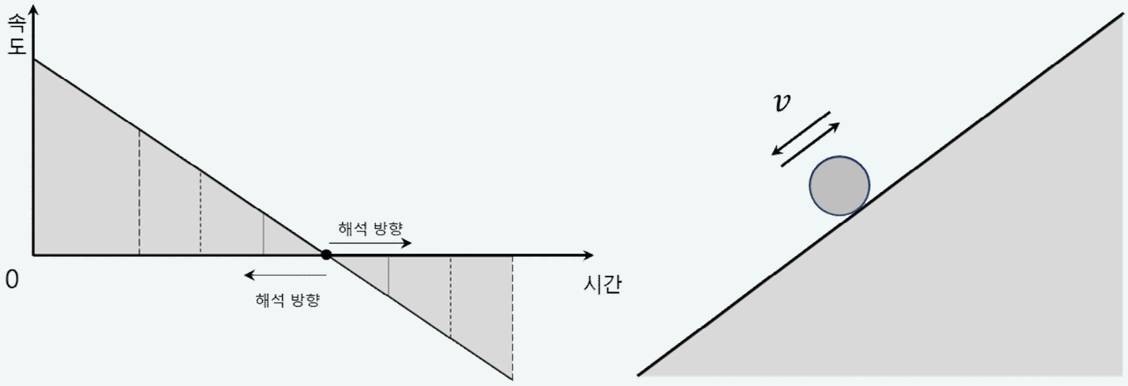
물체의 운동 방향에 따른 운동 에너지의 표기.

운동 방향을 화살표로 표현하여도 되고, 부호로(오른쪽 +) 표현하여도 된다. 단지, 본인 스타일에 따라 편한 것을 고르면 된다. 필자는 화살표로 표현을 하고, 계산할 때에는 부호를 사용하는 것을 선호한다.

(15)-2 운동 에너지의 이동 거리, 변위적 해석

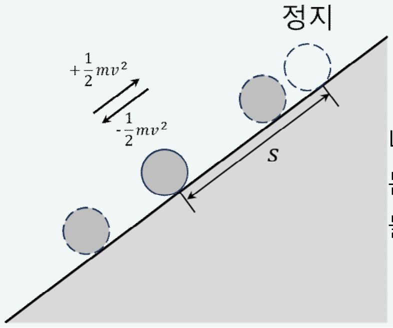
$$\frac{1}{2}mv^2 \qquad\qquad Fs$$

이번 파트 에서는 물체에 작용하는 알짜힘 F가 이동 거리, 변위와 함께 운동 에너지에 어떤 식으로 영향을 주는지 알아볼 것이다. 조금 빠른 이해를 위해 이전에 다루었던 그래프를 한번 가져오겠다.



왼쪽은 앞에서 배운 방향이 바뀌는 운동의 대칭성을 그래프로 표현한 것, 오른쪽은 이를 그림으로 표현한 것이다. 속력 v로 올라가는 지점은 다시 속력 v으로 내려옴을 나타낸 것이다.

등가속도 운동을 할 때 위와 같이 속력이 v인 두 시점은 위치가 같으니 변위는 0, 속력의 변화도 0이므로 운동 에너지의 변화 역시 0이다. 그렇다면, 방향을 고려한 운동 에너지를 표현하면 어떤 모습인지, 이를 바탕으로 어떠한 결과가 도출되는지 보자.

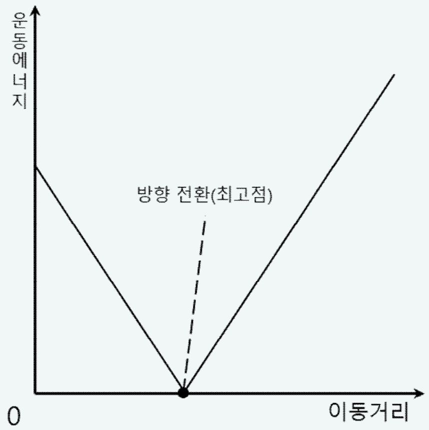


빗면 위와 아래를 각각 +, -로 정의하고 이에 따른 운동 에너지의 부호를 나타낸 것이다. 속력이 v, 0인 두 지점 사이의 거리는 s이고, 물체에 작용하는 알짜힘은 빗면 아랫 방향으로 중력 F가 작용한다. 방향을 고려하였을 때 물체에 작용하는 힘은 $-F$다.

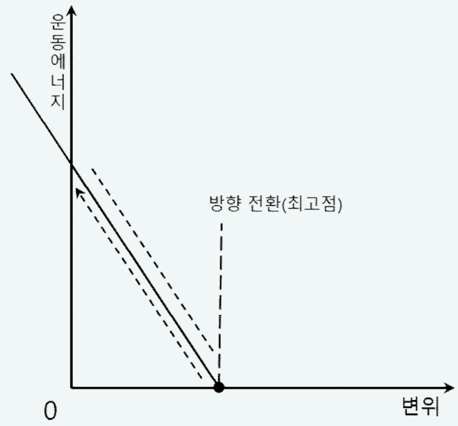
우리가 방향에 따른 부호를 붙일 수 있는 값들은 **변위, 운동 에너지, 힘** 세가지 정도가 되겠다. 일단은 부호를 붙여준 운동 에너지를 보자. 올라갈 때, 정지했을 때, 내려갈 때 순으로 물체의 운동 에너지는 $\frac{1}{2}mv^2$, 0, $\frac{1}{2}mv^2$이지만, 방향까지 고려하면 $+\frac{1}{2}mv^2$, 0, $-\frac{1}{2}mv^2$라고 쓸 수 있다. 그럼 질문을 하나 해보려 한다.

속력 v로 올라갈 때와 내려갈 때 운동 에너지의 변화는 0인가? mv^2인가?

운동 에너지의 변화량은 0 인가? 아니면 mv^2인가? 물론, 우리가 책에서 배운 내용대로라면 운동 에너지의 변화는 0이다. 그런데, 방향을 고려해보면 mv^2이라고 말하는 것도 충분히 가능하지 않을까? 우리는 지금부터 이러한 해석에 대해 다뤄볼 것이다. 위 그림처럼 물체가 빗면 위로 올라가다가 정지 후 내려오는 과정에서 운동 에너지의 변화를 변위, 이동 거리에 따라 그래프로 나타낸다면 아래와 같다.

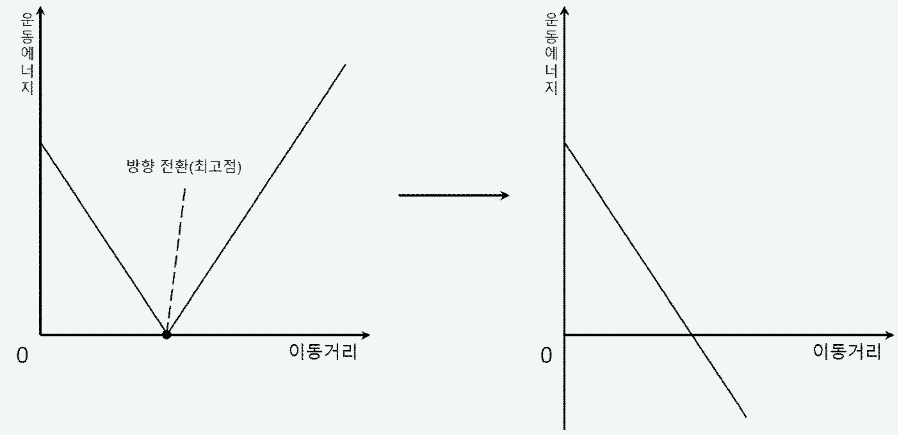


운동에너지 – 이동거리 그래프



운동에너지 – 변위 그래프

물체가 이동함에 따라 **운동에너지 – 이동거리 그래프**는 그래프 역시 좌측에서 우측으로 그려진다. 이 때 그려지는 그래프는 방향 전환이 이루어지는 점을 기준으로 좌우 대칭이며 이는 등가속도 운동에서의 속력의 대칭성을 나타내준다. 물체가 이동함에 따라 **운동에너지 – 변위** 그래프는 변위 0에서 최고점까지(좌측 → 우측)는 운동에너지 – 이동거리 그래프와 동일하나 이후 그래프의 개형은 다시 최고점에서 변위 0으로(우측 → 좌측) 그려지며 이는 물체가 올라갈 때 그려진 그래프와 일치한다.(그래프의 작성 방향이 점선으로 나타낸 화살표 방향이다!) 위 두 그래프는 모두 운동 대칭성을 보여주는 그래프라 할 수 있다. 그러나, 왼쪽 그래프는 그래프가 진행됨에 따라 운동에너지를 계산하기가 조금 불편해보인다. 차라리 그래프를 다음과 같이 바꿔서 해석해보는건 어떨까?

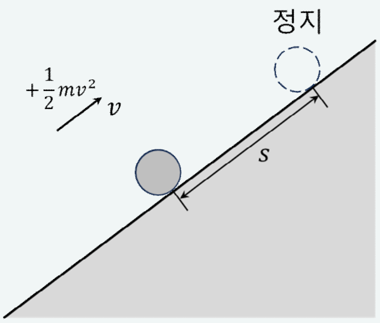


운동에너지 - 이동거리 그래프
(부호 X)

운동에너지 - 변위 그래프
(부호 O)

차라리 왼쪽같은 개형보다 오른쪽 같은 개형을 보는 것이 더 수월하지 않을까? 실제로 오른쪽 방식으로 해석하면 운동 에너지의 값을 계산 하기도, 운동 방향을 파악하기도 편하다. 따라서 우리는 s가 이동 거리일 때와 변위일 때 어떤식으로 해석을 하면 좋을지 알아보도록 할 것이다.

일단 $W = Fs$를 계산하는 과정에서 s가 이동 거리면 아래와 같이 해석할 수 있다.



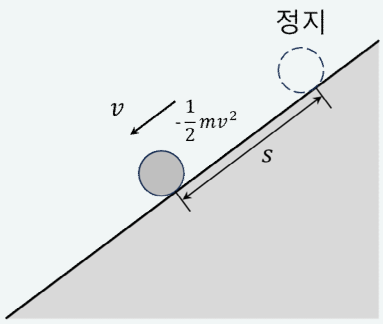
올라가다가 정지하는 구간

올라가는 시점의 운동 에너지 = $+\frac{1}{2}mv^2$

방향을 고려한 힘 = $-F$ (빗면 아래)

이동 거리로 구한 일 = $-Fs$ $(s>0)$

나중 운동 에너지 = $+\frac{1}{2}mv^2 - Fs = 0$



정지했던 물체가 내려오는 구간

정지하는 시점의 운동에너지 = 0

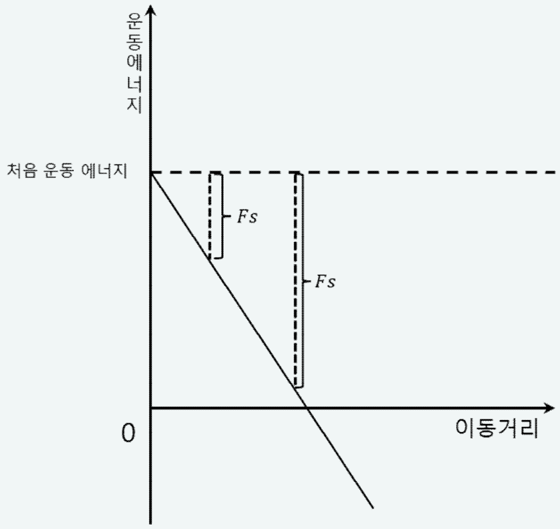
방향을 고려한 힘 = $-F$

이동 거리로 구한 일 = $-Fs$

나중 운동 에너지 = $0 - Fs = -\frac{1}{2}mv^2$

양쪽에서 구해진 Fs의 값은 $\frac{1}{2}mv^2$으로 동일하게 나오는 모습을 볼 수 있다.

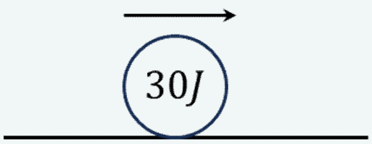
이처럼 우리가 운동 에너지, 힘에 부호를 부여하고 일을 해석할 때 **이동 거리**를 기반으로 하면 **방향까지 고려된 운동 에너지의 변화**가 나오게 된다. 이는 운동 에너지에 방향을 포함하였을 때 이동거리에 따른 운동에너지의 변화가 Fs로 반영이 되기 때문이다.



이동거리 s가 증가함에 따라 운동 에너지가 Fs만큼 감소하는 모습. 이동 거리가 증가함에 따른 방향을 고려한 운동에너지의 변화량은 가해지는 힘과 이동거리에 비례한다. 따라서 아래와 같은 관계식이 유도된다.

부호 고려 운동에너지의 변화량 비 = 알짜힘 비 × 이동거리 비

간단한 예제를 통해 이동 거리를 통한 운동 에너지를 계산해보도록 하자.



그림은 수평면에서 오른쪽으로 운동중인 물체의 모습을 나타낸 것이다. 물체의 운동 에너지는 30J이며 모든 마찰과 저항은 무시한다. 상황별 물체의 운동 에너지를 구하여라.

(일단, 오른쪽을 +라 하면 운동 에너지는 +30J이라 할 수 있겠다.)

(1) 왼쪽 방향으로 힘 10N을 1m 이동하는 동안 가하였다.
: 힘을 −10N라 하면 이동 거리에 따른 일의 양은 −10J로 20J이 된다.

(2) 왼쪽 방향으로 힘 10N을 3m 이동하는 동안 가하였다.
: 힘을 −10N라 하면 이동 거리에 따른 일의 양은 −30J로 0J이 된다. (정지)

(3) 왼쪽 방향으로 힘 10N을 5m 이동하는 동안 가하였다.
: 힘을 −10N라 하면 이동 거리에 따른 일의 양은 −50J로 −20J이 된다. (방향 전환)

(4) 오른쪽 방향으로 힘 10N을 5m 이동하는 동안 가하였다.
: 힘을 +10N라 하면 이동 거리에 따른 일의 양은 +50J로 +70J이 된다.

일반적으로, 운동에너지는 양수로만 취급하기에 상황 분석 과정에서 이동 방향이 한눈에 들어오지 않는데, 위와 같

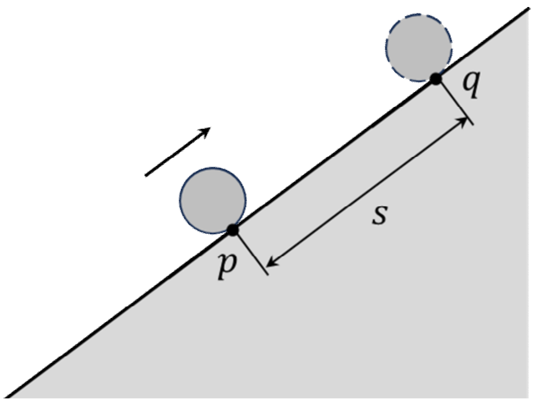
은 해석을 이용하면 에너지 분석 과정에서도 보다 상황 파악하기가 용이하다.

힘, 운동 에너지에 부호를 붙인 뒤 이동 거리로 일의 양을 구하면
방향을 고려한 운동 에너지의 변화가 나온다.

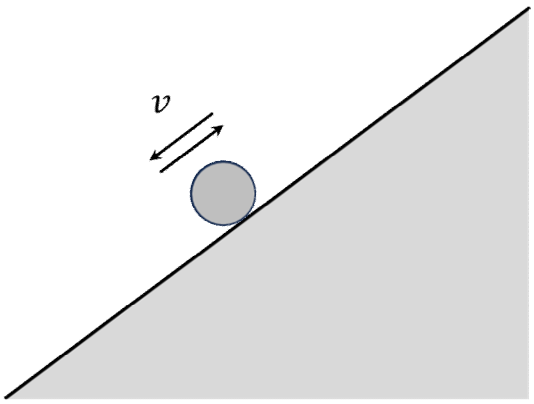
우리는 에너지를 배우기 이전에 가속 운동에서의 대칭성에 대하여 배웠는데, 운동 에너지를 이동거리에 따라 해석을 하게 되면 대칭성과 계산 방식이 유사하여 보다 적응하기가 쉬울 것이다.

이번에는 변위에 따른 운동 에너지의 변화에 대해 알아보기 이전에 간단한 아래 질문에 대해 생각해보자.

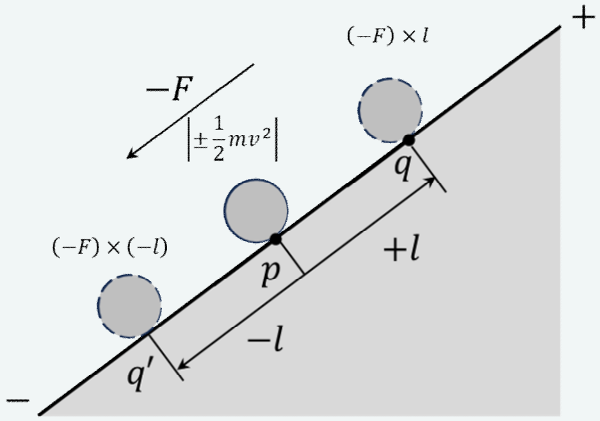
처음 위치로부터 나중 위치까지 작용한 힘, 변위를 알면 물체의 운동 방향은 특정 가능한가?



그림은 물체가 점 p를 지나 이후 점 q에 위치한 모습을 나타낸 것이다. 이 과정에서 물체는 중력만을 받고 있다. 만약 물체가 받고 있는 힘의 크기, 변위 s에 대한 정보를 알고 있다면 점 q에서 물체의 운동 방향은 특정 가능한가?



알 수 없다. (물론 p보다 q가 아래일 때 처럼알 수 있는 경우도 있다) 운동의 대칭성으로 인하여 어떠한 지점에서의 물체의 속력은 올라갈 때, 내려갈 때 모두 동일하다. 문제는 p로부터 점 q를 올라가는 순간이나, 내려가는 순간이나 까지의 변위는 같다. 하지만 방향은 반대이므로 단지 변위와 힘에 대한 정보를 알아도 위와 같은 상황에서는 운동 방향의 특정이 불가능하다. 이것이 변위와 이동거리의 차이이다. 이동거리로 해석 할 때에는 힘과 이동거리를 알면 초기 운동에너지에 일의 양을 더하여 계산된 운동 에너지는 방향이 자연스레 포함이 된다. 하지만 변위일 경우에는 불가능하다는 것이다. 그렇다면 변위에 따른 운동 에너지의 해석은 어떠한 특징이 있는가?



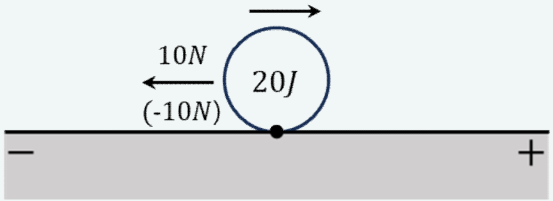
점 p에서의 운동 에너지 $\left|\pm\frac{1}{2}mv^2\right|$를 기준으로 물체가 위, 아래로 거리 l만큼 이동하였을 때
p로부터 q, q'까지의 변위는 각각 $+l$, $-l$고
운동 에너지의 변화는 각각 $-Fl$(감소), $+Fl$(증가) 이다.

우리는 p보다 위에 있는 어떠한 지점에 대하여 운동 에너지를 알아도 운동 방향을 특정할 수 없다. 이는, 변위를 바탕으로 일의 양을 계산 해야 할 때에는 부호를 제외해야함을 의미한다. 따라서, 시작점 p에서의 운동에너지는, 우리가 익히 배워왔던 부호가 없는 $\frac{1}{2}mv^2$를 그대로 사용하며, 변위에 따른 일의 양은 운동에너지의 **크기변화**에 영향을 끼침을 알 수 있다. 마치 p로 부터 거리가 같은 두 지점 q, q'까지의 운동 에너지 **크기변화**가 동일한것처럼 말이다. 이 때 크기 변화의 방향은 힘, 변위의 방향으로 계산이 가능하다.

q까지의 힘의 방향은 -, 변위는 +이므로 운동에너지의 변화는 −이다. q' 까지의 힘의 방향은 -, 변위는 −이므로 운동에너지의 변화는 +이다. 이는 우리가 이전에 배운 힘의 방향과 운동 방향이 동일하면 속력이 증가한다는 뉴턴의 운동 법칙과 상응한다. 따라서, 변위에 따른 운동에너지의 해석은 아래와 같이 정리할 수 있다.

힘, 변위에 부호를 붙인 뒤 변위로 일의 양을 구하면
운동 에너지 변화량과 변화 방향이 산출된다.

즉, 우리가 일의 양을 이동 거리로 해석을 한다면 운동 에너지에 부호를 추가하여 해석하며, 변위로 해석을 한다면 부호 없이 크기 변화에 주목 해야함을 의미한다. 다음 페이지의 표는 이를 직관적으로 확인하기 위해 운동하는 물체에 대하여 일정한 힘을 주었을 때 이동거리, 변위에 따른 운동에너지의 변화를 나타낸 것이다.



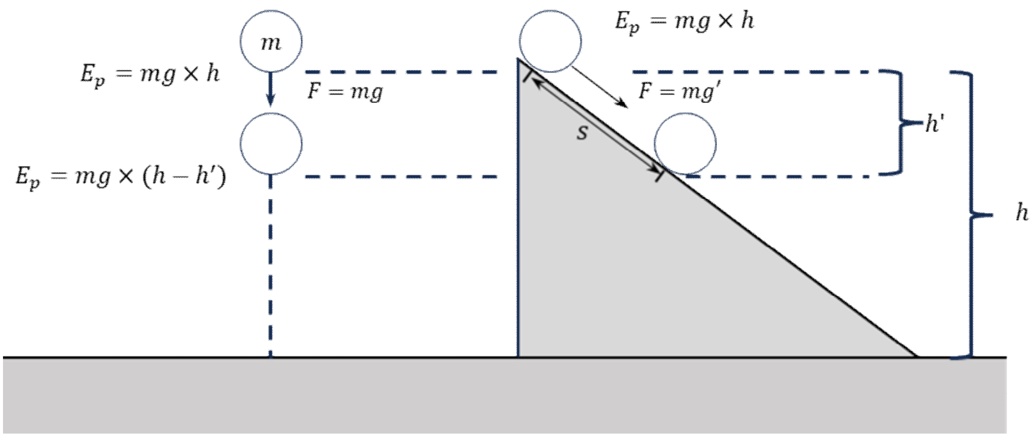
변위, 이동거리에 따른 에너지 변화는 다음과 같다.

이동거리 (m)	0	1	2	3	4	5	6
일의 양 (J)	0	−10	−20	−30	−40	−50	−60
운동 에너지 (J) (부호)	20	10	0	−10	−20	−30	−40

변위 (m)	0	+1	+2	+1	0	−1	−2
일의 양 (J)	0	−10	−20	−10	0	+10	+20
운동 에너지 (J) (부호 X)	20	10	0	10	20	30	40

위 표를 보면 알 수 있듯, 어느쪽을 택하든 운동 에너지의 절댓값은 동일하게 계산된다. 다만, 일을 계산하는 과정에서 s가 이동거리이냐, 변위이냐 에 따라서 초기 운동 에너지에 부호를 포함 시킬지, 시키지 않을지가 다르고, 이에 따른 결과값에 방향이 포함되느냐, 절댓값이 계산되느냐의 차이이다. 이 두 방식의 차이를 명확하게 알아두도록 하자.

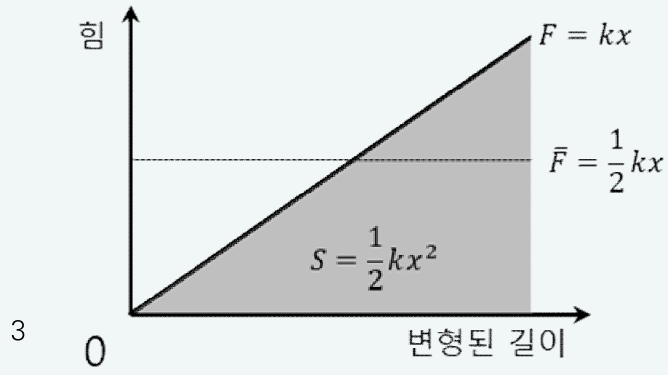
(16) 중력 퍼텐셜 에너지



중력 퍼텐셜 에너지라 하면 익히 mgh라는 익숙한 식으로 알 것이다. 하지만 Fs를 배웠으니 앞으로는 $mg \times h$처럼 힘과 거리의 곱으로 보는 것이 좋을 것이다. 중력 퍼텐셜 에너지라 하면 중력에 의해 물체가 기준점까지 운동했을 때 물체가 가지게 되는 운동 에너지의 값이라 할 수 있으며 중력에 의해 높이 h'만큼 내려 온다면 물체의 운동 에너지는 **중력이 한 일의 양인** mgh'이 된다. 여기서 포인트라면 이는 수직 방향으로의 자유 낙하 운동 뿐만 아니라 빗면에 가만히 두어도 성립한다. 단지 가속도의 크기만 다를 뿐이다. 이 경우에는 빗면 방향으로의 중력 mg'과 빗면 방향으로의 이동 거리 s의 곱이 mgh'과 동일 하다. 물론, 이처럼 각도에 따른 빗면 운동에서의 가속도는 물리학 1 에서는 배우지는 않는다! 다만, 빗면 방향으로의 이동거리와 중력의 곱이 mgh'와 동일하구나 정도는 알아두면 좋다.

(17) 탄성 퍼텐셜 에너지

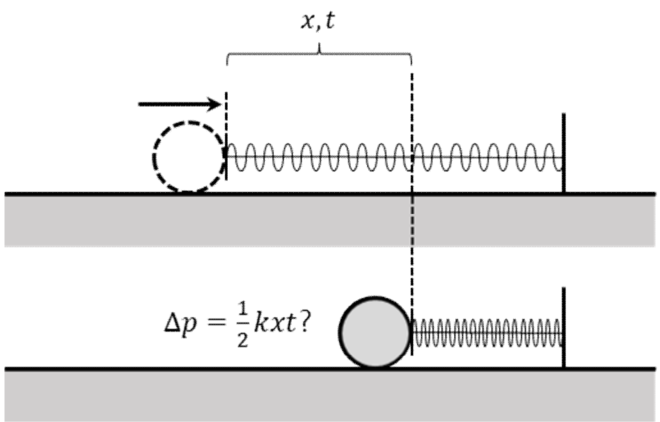
물리학 1에서 탄성 퍼텐셜 에너지는 용수철이 압축 되거나 늘어남에 따라 저장되는 에너지를 의미하는데 이전에 용수철의 늘어난 길이, 또는 압축된 길이에 따른 용수철의 특징에 대해 알아야 한다.



용수철은 압축되고 늘어남에 따라 밀어내고 당기는 특성을 가진다. 이때의 힘은 용수철이 변형된 길이에 비례하고 이 때 단위 길이당 발생하는 용수철의 힘을 용수철 상수 k라 한다. 용수철의 변형된 길이가 x일 때 용수철에 저장되는 에너지의 크기 $S=\frac{1}{2}\times x\times kx=\frac{1}{2}kx^2$로 계산되며 이 때 발생하는 평균 힘의 크기는 **거리를 기준으로 산출하였을 때** $\frac{1}{2}kx$이다. 따라서 아래와 같은 관계식이 성립한다.

저장된 에너지의 비율 = (변형 길이 비)^2 × 용수철 상수 비
예 : 어떠한 용수철에 대하여 압축된 길이가 1:2면 저장된 에너지는 1:4이다.

평균 힘의 비율 = (변형된 길이 비) × 용수철 상수 비
예 : 어떠한 용수철에 대하여 압축된 길이가 1:3이면 평균 힘도 1:3이다.
(평균힘 1:3에 길이비 1:3을 곱하여 에너지비율이 1:9가 계산 된다.)



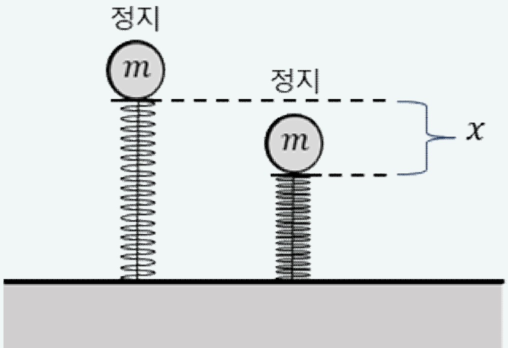
평균 힘에 대해 주의점이 하나 있다면, 위 그림처럼 운동하는 물체에 의해 용수철이 압축되는 과정에서 걸린 시간이 t일 때 물체의 운동량이 충격량 공식에 의하여 평균 힘 $\frac{1}{2}kx$에 시간 t를 곱한 $\frac{1}{2}kxt$만큼 변한다는 사고를 해서는 안 된다. 앞에서 다룬 평균 힘 $\frac{1}{2}kx$는 거리 x에 대하여 평균을 낸 것이지 t에 대하여 평균을 낸 것이 아니기 때문

이다. 간혹 이렇게 해석하는 경우를 몇 번 봤는데, 위와 같이 해석하는 일은 없도록 하자.
위치 에너지와 운동 에너지는 탄성 퍼텐셜 에너지로 변환되기도 한다. 예를 들어 우리가 트램펄린 위에 올라가면 아래로 늘어나게 되는데, 이는 낮아진 높이에 해당하는 만큼의 퍼텐셜 에너지가 탄성 퍼텐셜 에너지로 저장되는 모습이라 볼 수 있다.

위치 에너지 뿐만 아니라 운동 에너지도 탄성 퍼텐셜 에너지의 형태로 저장되는 것이 가능하다. 지면과 수평한 방향으로 운동중인 물체가 벽면에 고정된 용수철에 닿으면 용수철을 압축 시키다가 정지하게 되는데 이 역시 운동 에너지가 탄성 퍼텐셜 에너지의 형태로 저장되는 모습이라 볼 수 있다.

이처럼 탄성 퍼텐셜 에너지에 어떤 에너지가 저장되는지 직관적으로 보인다면 너무나도 좋을 것이다. 이러한 직관력은 시간을 투자하면 자연스레 늘어나기는 하겠지만 그러기란 쉽지 않다. 이럴 때는 대해 물체의 시점에서 $W=Fs$를 떠올리면 보다 쉽게 떠올릴 수 있다. 어떠한 물체의 운동 상태(속도)은 알짜힘에 영향을 받으며 이러한 알짜힘의 분석을 할 때 에는 **해당 물체와의 접촉된 요소를 보도록 한다.**

(1) 퍼텐셜 에너지 ↔ 탄성 퍼텐셜 에너지



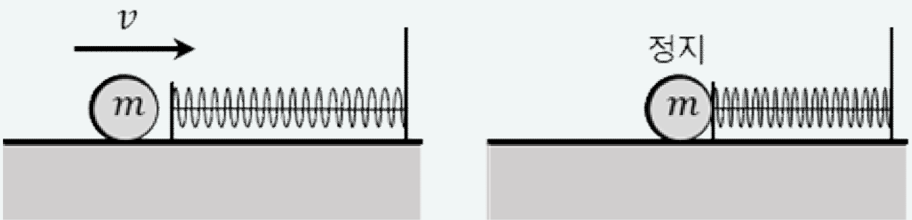
그림은 용수철 위에 가만히 둔 물체가 용수철을 길이 x만큼 압축하고 정지한 모습을 나타낸 것이다. 물체에 작용하는 힘은 중력과 탄성력, 그리고 운동 에너지의 크기 변화는 0이다. 이는, Fs값이 0임을 의미한다.

따라서 평균 탄성력을 $\frac{1}{2}kx$라 한다면 $W=Fs=(mg-\frac{1}{2}kx)x=0, mgx=\frac{1}{2}kx^2$이다.

이 때 $\frac{1}{2}kx^2$은 탄성 퍼텐셜 에너지로 위치 에너지 변화 mgx가 탄성 퍼텐셜 에너지의 형태로 저장되었음을 알 수 있다.

직관적으로 보이지 않는다면 이처럼 물체를 대상으로 E_k와 Fs와의 관계를 이용하면 좋다.

(2) 운동 에너지 ↔ 탄성 퍼텐셜 에너지

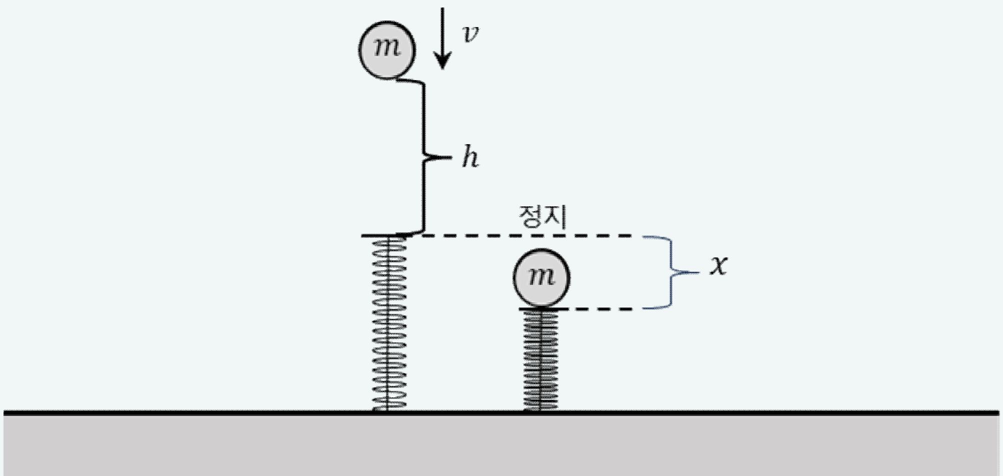


그림은 질량이 m, 속력이 v인 물체가 용수철을 x만큼 압축하고 정지한 모습을 나타낸 것이다. 물체에 작용하는 힘은 탄성력, 그리고 운동 에너지의 크기 변화는 0이다. 이는, Fs값이 $\frac{1}{2}mv^2$임을 의미한다.

따라서 평균 탄성력을 $\frac{1}{2}kx$라 한다면 $W = Fs = (\frac{1}{2}kx)x = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv^2$이다. 이 때 $\frac{1}{2}kx^2$은 탄성 퍼텐셜 에너지로 운동 에너지 $\frac{1}{2}mv^2$이 탄성 퍼텐셜 에너지의 형태로 저장되었음을 알 수 있다.

운동 에너지와 중력 퍼텐셜 에너지가 같이 저장되는 모습은 아래와 같이 떠올릴 수 있겠다.

(3) 퍼텐셜 에너지, 운동 에너지 ↔ 탄성 퍼텐셜 에너지



그림은 질량이 m, 속력이 v인 물체가 높이 h동안 자유 낙하 운동을 하다가 용수철을 x만큼 압축하고 정지한 모습을 나타낸 것이다. 높이 h동안 물체는 중력 mg만을 받고, 압축 길이 x 동안에는 $mg - \frac{1}{2}kx$를 받는다. (아랫 방향을 +, 윗방향을 −로 정의한것이다!) 처음 운동 에너지는 $\frac{1}{2}mv^2$, 나중 운동 에너지는 0이므로

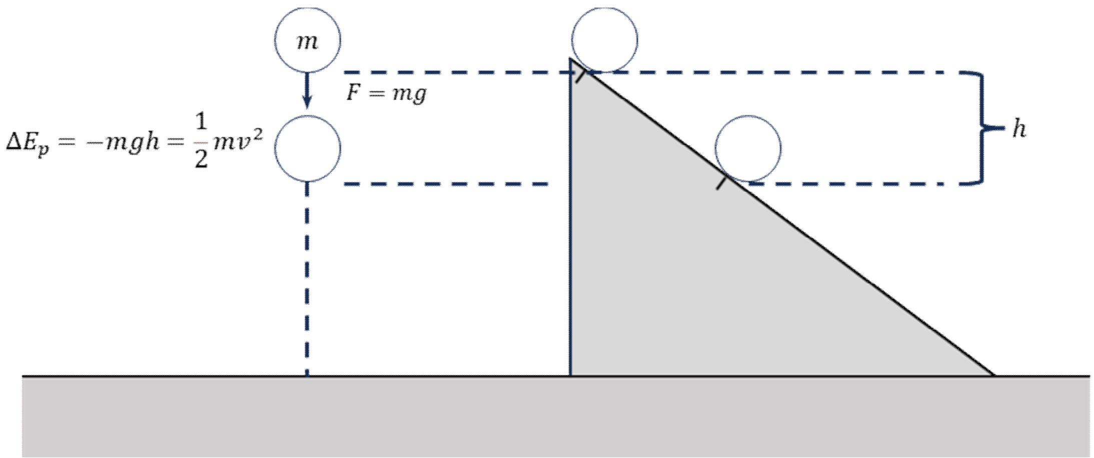
$$\frac{1}{2}mv^2 + mgh + (mg - \frac{1}{2}kx)x = 0$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + mg(h+x) = \frac{1}{2}kx^2$$

이는 운동 에너지와 높이 $h+x$에 해당하는 위치 에너지가 탄성 에너지의 형태로 저장된 모습이다.

이는 우리가 앞에서 배운 **접촉 요소를 통한 알짜힘의 분석**과 **이동 거리, 변위에 따른 운동 에너지의 변화**를 활용하는 것으로 이를 위해 앞에서 이 두가지를 배운 것이다. 처음에는 어떤 에너지가 어떤 형태로 저장되는지 직관적으로 잘 보이지 않는 것이 당연하다. 이러한 해석을 조금씩 하다 보면 점점 에너지의 저장이 직관적으로 보이기 시작할 것이다.

(18) 역학적 에너지의 보존



위 그림은 중력에 의해 자유낙하 운동하는 물체의 중력 퍼텐셜 에너지가 mgh 감소함에 따라 운동 에너지가 mgh 증가하였음을 나타내는 모습이다. 따라서, 아래와 같은 관계식 유도가 가능하다.

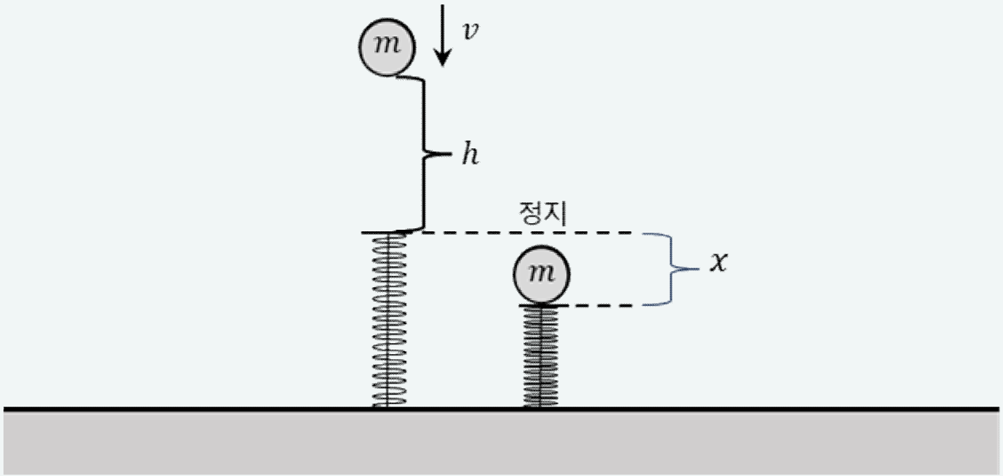
$$\left|\triangle\frac{1}{2}mv^2\right| = |\triangle mgh|,\ \left|\triangle\frac{1}{2}v^2\right| = |\triangle gh|$$

$$\triangle v^2 \propto -\triangle h$$

이는 높이가 증가하면 속력은 감소, 높이가 감소하면 속력은 증가함을 의미하며
이 때 속력 제곱의 변화량은 높이 변화량에 비례함을 의미한다.

예 : 높이가 h 변하는 동안 속력 제곱이 v^2 증가하였다면 높이가 $2h$ 변하는 동안에는 속력 제곱이 $2v^2$이 증가한다.

위 관계식은 초기 속력이 0인 물체가 가속 운동하는 과정에서 이동 거리가 시간 제곱에 비례하는것과도 연관이 있다. 운동 시간 비가 1:3이면 거리비가 1:9가 되며, 이는 높이 변화 비도 1:9이니 감소한 높이도 1:9이다. 그런데 운동 시간 비가 1:3이라는 것은 속력 변화 비도 1:3이므로 속력 제곱 변화비도 1:9이다. 이는 앞서 언급한 속력 제곱의 변화가 높이 변화에 비례함을 보여주고 있다.



$$\frac{1}{2}mv^2 + mg(h+x) = \frac{1}{2}kx^2,\ \ \triangle E_{운} + \triangle E_{중} + \triangle E_{탄} = 0$$

(위 상황은 $\triangle E_{운} < 0, \triangle E_{중} < 0, \triangle E_{탄} > 0$))

위 상황은 어떻게 보면 높이 h 동안에는 중력 퍼텐셜 에너지가 운동 에너지로 가고 높이 x 동안에는 운동 에너지와 퍼텐셜 에너지가 탄성 에너지의 형태로 저장되는 모습으로도 볼 수 있겠다.

이에 따라 자연스레 운동 에너지와 퍼텐셜 에너지의 총합이 일정하게 보존되는데 이를 역학적 에너지 보존 법칙이라 한다. 다르게 말하면 운동 에너지는 퍼텐셜 에너지와 교환 됨을 의미하는데 이는 중력 퍼텐셜 뿐만 아니라 탄성 퍼텐셜 에너지에도 동일하게 적용된다. 이러한 모습은 앞에서 다룬 퍼텐셜 에너지의 전환 과정에서도 볼 수 있다.

에너지 파트에서는 17처럼 알짜힘이 한 일의 양을 바탕으로 $W = Fs$식을 세우는 것, 이를 바탕으로 에너지의 전환 과정을 직관적으로 파악하는 것 둘다 중요하니 꾸준한 연습을 해두도록 하자.

전반적으로 역학 파트에서 필요한 개념들을 모두 다루었다. 아마 전반적인 개념 및 비례 관계들을 이제 알게 되었을 텐데 chapter 2에서는 예제들과 함께 조금 더 깊은 내용을 다뤄보도록 할 것이다. 혹시나 chapter 2를 학습 하는 과정이 매끄럽지 않다면 chapter 1을 다시 하고 다시 학습하길 바란다.

상황 해석

1. 비 에너지

2. 에너지

CHAPTER

02

0. 도입

앞서 물리량들에 대한 비율 관계를 알아보았으나 이를 적용하는 연습은 거의 하지 않았다. 챕터 2에서는 기출 예제를 통한 개념 체화 및 조금 더 깊은 개념을 알아볼까 한다. 비 에너지($W=Fs$ 미포함), 에너지($W=Fs$ 포함) 두 개의 파트로 나누어 서술할 것이며 앞으로 본 교재 내용을 기반으로 문항을 푸는 기본적인 방향성은 아래와 같은 방향을 따를 것을 권장한다.

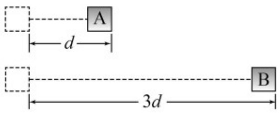
1. 문항에서 글로 표현된 조건은 비율로 나타낸다.
2. 1에서 도출된 비율만으로 풀이가 불가능 할 경우 문항 조건 내에서 또 다른 비율이 도출되는지 확인한다.

위 방향성은 필자가 이전에 과외를 할 때 늘 하던 말인데 어찌 보면 굉장히 당연한 말이다. 주어진 조건만으로 풀리지 않는다면 숨겨진 조건을 찾아 내는 것이 당연하지 않은가? 그러나 이를 염두해둔다면 문항을 풀다가 풀리지 않을 경우 본인이 무엇을 해야할지 명확해지기에 푸는 과정에서 스트레스가 덜하다. 따라서, 본 교재에서는 문항을 풀이 할 때 글로 표현된 조건, 추론해야 하는 조건 두가지로 나누어 문항 해설을 진행할 것이다.

일단 간단한 기출 예제들을 비례식을 이용하여 에피타이저 느낌으로 풀어보도록 하자. 꼭 비례식으로 풀어보자.

20170701

1. 그림은 시간 $t=0$일 때 동시에 출발하여 같은 시간 동안 물체 A, B가 각각 거리 d, $3d$ 만큼 직선 운동한 것을 나타낸 것이다. A가 d만큼 운동하는 동안 A와 B의 평균 속력은 각각 v_A, v_B 이다.

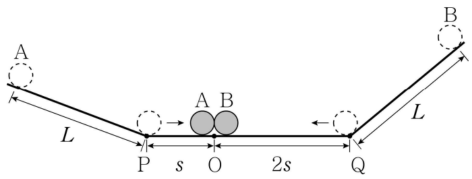


$v_A : v_B$ 는? (단, A, B의 크기는 무시한다.)

① 1 : 1 ② 1 : 2 ③ 1 : 3 ④ 2 : 1 ⑤ 3 : 1

20141014

14. 그림과 같이 왼쪽 빗면에 A를 가만히 놓고 잠시 후 오른쪽 빗면에 B를 가만히 놓았더니, A, B는 점 P, Q를 동시에 통과하여 수평면의 점 O에서 만났다. A, B는 빗면에서 각각 시간 t_A, t_B 동안 등가속도 운동하여 거리 L을 이동하였고, 수평면에서 등속 직선 운동하여 각각 s, $2s$를 이동하였다.



이에 대한 옳은 설명만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, 물체의 크기는 무시한다.) [3점]

< 보 기 >

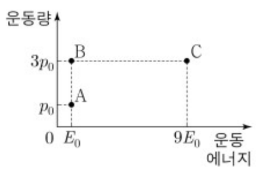
ㄱ. 충돌 직전의 속력은 B가 A의 2배이다.
ㄴ. 빗면에서 가속도의 크기는 B가 A의 2배이다.
ㄷ. $t_A : t_B = 2 : 1$이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

20240914

14. 그림은 입자 A, B, C의 운동량과 운동 에너지를 나타낸 것이다.

이에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?



<보 기>

ㄱ. 질량은 A가 B보다 크다.
ㄴ. 속력은 A와 C가 같다.
ㄷ. 물질파 파장은 B와 C가 같다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

20160706 (알짜힘의 분산)

6. 그림 (가)와 (나)는 수평면 위에 놓여 있는 물체 A와 B를 실로 연결한 후 (가)에서는 B에 수평 방향으로 크기가 F인 힘을, (나)에서는 A에 수평 방향으로 크기가 $2F$인 힘을 작용하는 것을 나타낸 것이다. A와 B의 질량은 각각 m_A, m_B이다.

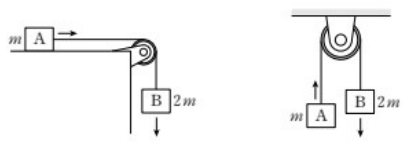
(가) (나)

(가)와 (나)에서 실이 B에 작용하는 힘의 크기가 같을 때, $m_A : m_B$는? (단, 모든 마찰, 공기 저항 및 실의 질량은 무시한다.)

① 1:1 ② 1:2 ③ 2:1 ④ 2:3 ⑤ 3:2

20131108 (알짜힘의 분산)

8. 그림 (가), (나)와 같이 물체 A, B가 실로 연결되어 각각 등가속도 운동을 하고 있다. A, B의 질량은 각각 m, $2m$이고, (가)에서 A는 마찰이 없는 수평면에서 운동한다.



(가) (나)

이에 대한 설명으로 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은? (단, 중력 가속도는 g이고, 실의 질량, 도르래의 마찰과 공기 저항은 무시한다.) [3점]

〈보 기〉

ㄱ. A의 가속도의 크기는 (가)에서가 (나)에서의 2배이다.
ㄴ. B가 받는 알짜힘의 크기는 (가)에서가 (나)에서의 2배이다.
ㄷ. (가)에서 실이 B를 당기는 힘의 크기는 $2mg$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

빠른 정답

3 / 4 / 2 / 3 / 3

20170701 (정답 : 3번)

A, B의 이동 시간은 같으므로 1:1이다.
시간 1:1 동안의 이동거리는 1:3이므로 평균 속력의 비율은 $\frac{1:3}{1:1}=1:3$이다.

20141014 (정답 : 4번)

지면에서의 두 물체는 등속도 운동을 한다.
이동 시간은 1:1이며 이동거리가 1:2이므로 P, Q에서의 속력은 $\frac{1:2}{1:1}=1:2$이다. (ㄱ 정답)
내려막길에서 두 물체의 나중 속력은 $1:2$이고, 처음에 정지하였으므로 두 물체의 평균 속력비도 마찬가지로 $1:2$이고 속도 변화 역시 $1:2$이다.
내리막길 거리가 $1:1$인데 평균 속력비가 $1:2$이므로 걸린 시간은 $\frac{1:1}{1:2}=2:1$이다. (ㄷ 정답)
걸린 시간이 $2:1$인데 속도 변화가 $1:2$이므로 가속도는 $\frac{1:2}{2:1}=1:4$이다. (ㄴ 오답)

20240914 (정답 : 2번)

A, B, C의 운동량, 운동에너지를 비율로 표기하면 $mv=1:3:3$, $mv^2=1:1:9$이다.
(운동에너지의 $\frac{1}{2}$는 비율에 영향을 주지 않으므로 빼도 무방하다.)
각 비례식끼리 통째로 약분을 해주면

$$\frac{mv^2}{mv}=v=\frac{1:1:9}{1:3:3}=1:\frac{1}{3}:3=3:1:9,$$

$$\frac{mv}{v}=m=\frac{1:3:3}{3:1:9}=\frac{1}{3}:3:\frac{1}{3}=1:9:1$$

ㄱ. 질량은 1:9:1로 B가 A의 9배이다. (오답)
ㄴ. 속력은 3:1:9로 C가 A의 3배이다. (오답)
ㄷ. 물질파 파장은 운동량에 반비례 하므로 $\frac{1}{mv}=\frac{1}{1:3:3}=3:1:1$로 B, C가 같다. (정답)

20160706 (알짜힘의 분산) (정답 : 3번)

문제 상에서 장력의 크기는 곧 A가 받는 알짜힘이다.
따라서, (가), (나)에서 A가 받는 알짜힘은 1:1이다.
A가 받는 알짜힘은 A의 질량, 전체 알짜힘에 비례하고 전체 질량에 반비례한다.
A의 질량이 1:1, 전체 질량이 1:1이므로 전체 알짜힘은 전체 질량의 역수비(두개니까 반대비)이다.
따라서 $m_A:m_B$는 알짜힘 1:2의 반대비인 2:1이다.

20131108 (알짜힘의 분산)

물체가 받는 알짜힘은 **전체 알짜힘**과 물체의 질량에 비례하며, 전체 질량에 반비례 한다.
ㄱ. 가속도의 크기는 전체 알짜힘에 비례, 전체 질량에 반비례 한다.
전체 알짜힘은 2:1이고 (2mg와 mg), 전체 질량은 1:1이므로 (3m과 3m)
가속도의 비는 $\frac{2:1}{1:1}=2:1$로 (가)에서가 (나)에서의 2배이다. (정답)

ㄴ. (가), (나)에서 B의 질량은 1:1, 전체 알짜힘은 2:1, 전체 질량은 1:1이므로
B가 받는 알짜힘의 크기는 $\frac{(1:1)(2:1)}{1:1}=2:1$로 (가)에서가 (나)에서의 2배이다. (정답)

ㄷ. B가 받는 알짜힘은 전체 알짜힘의 $\frac{2}{3}$이므로 각각 $\frac{4mg}{3}$, $\frac{2mg}{3}$이고 방향은 아래다.
따라서 장력의 크기는 (가)에서 $\frac{2}{3}mg$, (나)에서 $\frac{4}{3}mg$이다. (오답)

잘 풀어보았는가? 이처럼 문항 내에서 주어지는 단서들은 비율로 주어지는 경우가 많다. 예를 들면 질량 m, $3m$라는 조건은 질량의 비율이 1:3인것처럼 말이다. 우리는 앞으로 문항 내의 단서들을 비례식으로 표현할 것이다. 비례식 풀이시에는 아래와 같은 표기를 준수하도록 하자.

1. **같다**는 1:1을 의미하며 1:1은 1로 줄여 표기하여도 무관하다.

예 : 동일한 거리를 이동하는데 걸린 시간은 $a:b$이다. 따라서 평균 속도 비 = $\frac{1:1}{a:b} = \frac{1}{a:b}$

2. A가 B의 k배이다 식의 표현은 A:B=k:1 꼴로 바꿔 표기한다.

예 : A의 퍼텐셜 에너지 증가량은 B의 운동에너지 증가량의 $\frac{5}{4}$배이다 → $A_p : B_k = 5:4$

3. 어떠한 물리량들에 대한 비율을 작성할 경우 상수는 제외하여도 무관하다.
예 : A와 B의 퍼텐셜 에너지는 4:5이다 → mgh비 = mh비 = 4:5

4. 비례식 앞에 상수를 붙여 곱셈으로 표기하여도 무관하다.
예 : $4(5:3) = 20:12$

(사실이렇게 정리해주지 않아도 익히 따라할법한 내용이나, 혹시나 모르는 마음에 노파심에 간단하게 정리해보았다.)

우리는 단서를 비율로 표현하고나면, 이들끼리 곱셈, 나눗셈을 하여 다른 물리량을 구하기도 하고, 3번 문항처럼 비례식끼리 통째로 곱하거나 나누어 특정 물리량을 소거하기도 한다. 또한, 4, 5번 문항처럼 서로 다른 두 상황에 대하여 계산을 한 번에 진행하기도 할 것이다. 이처럼 비례식을 활용 하여 계산을 하면 마치 **문항을 통째로 푸는듯한 느낌**을 받을 수 있을 것이다. 아마 그것이 비례식 계산의 묘미가 아닐까 싶다. 서론이 길었으니 이제 본 파트를 진행하며 비례식을 써보도록 하자.

1. 비 에너지

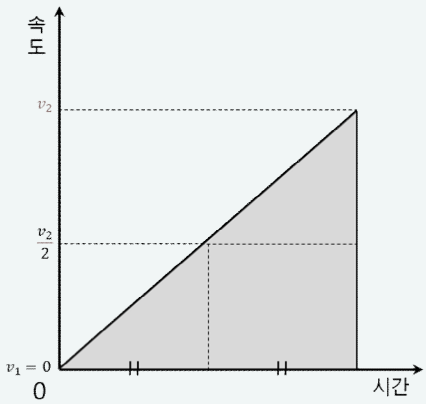
이번 파트에서는 $W = Fs$와 관련하여 에너지를 제외한 운동 역학 파트를 다뤄보려 한다. 주로 사용하는 개념은 다음과 같다.

1. $v = 0$을 기준으로 물체의 이동 거리는 가속도와 시간 제곱에 비례한다.
2. 물체가 받는 알짜힘은 전체 알짜힘, 질량에 비례하고 연결된 물체들의 전체 질량에 비례한다.
3. 상대 속도 적용시에는 방향에 따른 부호 설정 - 속도 표기 - 가감하여 0 고정 - 계산 순으로 진행한다.
4. 물체의 운동 해석시 t의 기준과 방향은 자유롭게 하여도 무방하다.

시작하자.

2.1.1 가속 운동의 대칭성

본 파트는 $v = 0$인 지점이 있는 모든 등가속도 운동이 존재하는 예제들에 대해서 다룰 것이다. 대칭성을 다루기 이전에 $v_1 = 0$인 경우를 먼저 학습할것인데, 이는 대칭성이 곧 $v_1 = 0$인 두 운동을 결합한 형태이기 때문이다. 따라서, $v_1 = 0$인 운동에 대해서 먼저 학습하다가 이후 대칭성을 다루도록 하겠다.

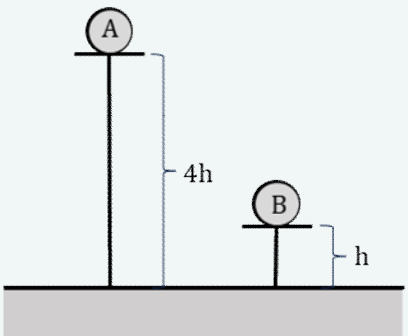


$$(s = \frac{v_1 + v_2}{2}t = \frac{v_1 + v_1 + at}{2}t = \frac{1}{2}at^2)$$

초기 속력이 0인 등가속도 운동은 이동 거리가 가속도의 크기와 시간 제곱에 비례한다. 이는 이동 거리의 비율이 가속도 비와 시간 제곱비를 곱한것과 동일함을 의미한다.

이동 거리 비 = 가속도 비 × (시간 비)^2

라고 말하면, 보통은 시간 비에 따라 이동 거리의 비를 구하려 할 것이다. 하지만, 이동거리를 기반으로 걸리는 시간의 비율을 추론하는 것 또한 가능하다. 아래 그림을 보자.

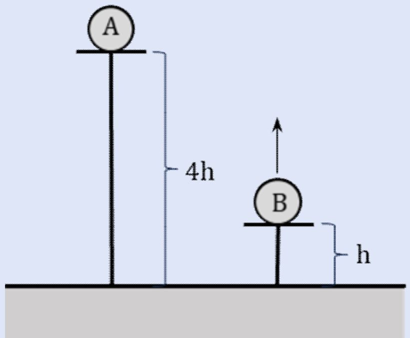


거리 비가 4:1이며 가속도가 동일하니 가만히 두었을 때 지면에 닿기까지 걸리는 시간은 2:1이다.

만약 위 그림에서 A, B를 각각 높이 $4h$, h에 둔다면 지면에 닿기까지 걸리는 시간은 어떻게 되겠는가? 두 물체의

가속도는 중력가속도 g로 **동일(1:1)** 하므로 이를 식으로 표현하면 4:1 = (1:1) × (시간 비)^{2}가 4:1 = (시간 비)^{2}고 시간 제곱 비율이 4:1이라는 의미이다. 즉, $t=0$ 때 A를 두고 $t=t_0$때 B를 두면 $t=2t_0$때 A와 B는 동시에 지면에 도달하게 될 것이다. 자, 그렇다면 위 예제를 살짝 바꿔보도록 하겠다.

예제1



그림은 A를 가만히 둠과 동시에 B를 지표면으로부터 수직 방향으로 던지는 모습을 나타낸 것이다. A와 B는 지면에 동시에 도달한다. 지표면에서 A와 B의 속력의 비율을 구하시오.

위 문항은 어떻게 풀까? 필자는 문항 조건을 먼저 비율로 표현 후, 이후 조건이 모자르다면 문항 내에 글로 표현되지 않은 조건을 찾아 비율로 나타낸 뒤 푸는 것을 좋아한다. 위 문항에서 조건은 다음과 같다.

표현된 조건
[조건 1] 두 물체의 이동 시간은 같으므로 1:1이다.
[조건 2] 두 물체의 변위는 4:1이다.

추론한 조건
[조건 1]과 [조건 2]에 의해 두 물체의 평균 속도 비율은 4:1이다.
[조건 3] 이동 시간은 1:1인데 가속도는 1:1이므로 속도 변화도 1:1이다.

이처럼 문항을 바라볼 때에는 글로 표현된 조건을 먼저 나열하고, 이를 바탕으로 추론 가능한 조건을 찾는 것을 기본 방향으로 하도록 한다. 그러나 문항을 살짝만 바꿨을 뿐인데 뭔가 어렵지 않은가? 이는 우리가 이전까지 다뤘던 예제들은 푸는 과정에서 **비례식 안에 미지수가 들어가지 않기 때문**이다. (일부러 그런 문항들을 배치했었다.) 앞으로는 비례식 내에 미지수를 넣는것도 해봐야한다. 위 조건을 바탕으로 문항은 다음과 같이 풀 수 있다.

물체의 윗방향을 –, 아랫 방향을 +라 하자. A의 초기 속도는 0, 나중 속도는 $k(k>0)$라 하면 B의 초기 속도는 $-v\ \ (v>0)$, 나중 속도는 $-v+k$이다.
평균 속도의 비율이 4:1이므로 처음 속도와 나중 속도의 비율 역시 4:1이다.
따라서 $0+k:-v+(-v+k)=4:1,\ -8v+4k=k,\ 3k=8v,\ k:v=8:3$
나중 속도 k와 $k-v$는 k와 v에 각각 8, 3을 대입하면 8:5이다.

여기서 한가지 의문이 들 수 있다. 위 문항에서는 B를 **윗 방향**으로 던진다는 조건이 있었기에 v를 양수로 가정하고 B의 초기 속도를 $-v$로 나타냈는데 만약 B의 방향이 존재하지 않는다면 B의 속도에는 +와 – 부호를 어떻게 설정해야하는가? 그럴때는 그냥 v를 양수, 음수로 가정하지 않고 그냥 v라는 미지수로 설정 후에 문항풀이를 하여도 상관없다. 이후 v의 값을 구하여 부호를 통해 방향을 확인하면 되기 때문이다. 풀이는 아래와 같다.

A의 초기 속도는 0, 나중 속도는 $k(k>0)$라 하면 B의 초기 속도는 v , 나중 속도는 $v+k$이다.
평균 속도의 비율이 4:1이므로 $0+k:v+(v+k)=4:1,\ 8v+4k=k,\ 3k=-8v,\ k:v=-8:3$
따라서 나중 속도 k와 $v+k$는 k와 v에 각각 -8, 3을 대입하면 8:5이다.

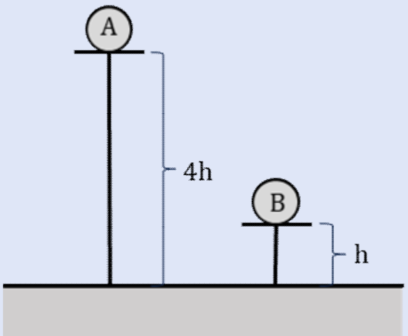
방향을 알고 있다면 미지수를 양수로 가정한 뒤 부호를 붙이고, 모른다면 그냥 그 미지수의 값을 구한 뒤 부호를 체크 하도록 한다.

가속도와 시간, 부호에 대하여

1) 물체의 가속도, 또는 운동 방향을 안다면 a와 v를 양수로 가정 후 앞에 부호를 붙여 방향표기를 한다.
2) 가속도, 또는 운동 방향을 모른다면 방향에 따른 부호를 설정 후 미지수 a와 v를 구한 뒤 부호 확인을 하자.
3) 만일, 직관을 통하여 1)처럼 양수로 가정 후 앞에 부호를 붙였으나 해당 직관이 잘못되어 본인의 가정과 실제 방향이 달라도 상관 없다. 본인의 가정을 어떻게 하든 나중에 계산된 값의 부호를 체크하면 된다.

3은 무슨말일까? 간단한 예를 들어보자.

예제2



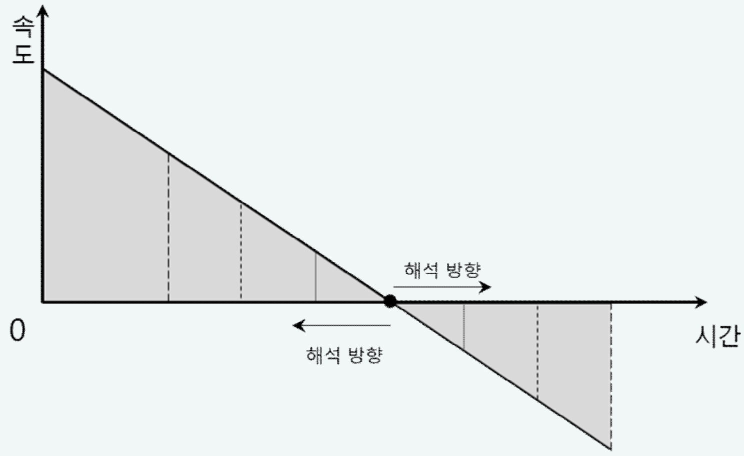
그림은 A, B가 각각 높이 $4h$, h에 위치한 것을 나타낸 것이다. A를 가만히 둠과 동시에 B는 지면과 수직 방향으로 속력 v로 출발하였다. A와 B는 지표면에 동시에 도달한다. 지표면에서 A와 B의 속력의 비율을 구하시오.

앞에서 다룬 예제에서 B의 방향만을 지운 것이다. 속도 변화량의 크기를 $k(k>0)$, 아랫방향을 +라고 해보자. 우리는 사실 위 문항의 경우 **직관**적으로 보았을 때 B의 초기 운동 방향이 위라는걸 알 수 있다. 가만히 냅둬도 걸리는 시간이 2:1인데 B를 아래로 던지면 B가 더 빨리 도착할테니 말이다. 물론, 누군가는 직관이 떨어져 B의 초기 운동이 아래라고 생각할 수 있다. B의 초기 속력을 v라 하고 $v>0$이라 가정해보도록 하자. 아래와 같은 식이 작성될 것이다.

A, B의 평균속도의 비 = 4:1
A의 처음속도 + 나중속도 = $0+k$, B의 처음속도 + 나중속도 = $v+v+k$
$k:2v+k=4:1,\ 8v+4k=k,\ 8v=-3k,\ v:k=-3:8$

다소 이상하다. 우리는 이전에 $k>0$, $v>0$이라 가정하였는데 v와 k의 부호가 반대라는 결과가 나왔으니 말이다. 이는, 우리가 앞서 직관으로 파악한 v의 방향이 틀렸음을 의미한다. 즉, B의 초기 운동 방향은 아래가 아닌 위라는것인데 이처럼 우리는 초기 운동 방향을 모를 때 방향을 몰라 당황할 수 있다. 방향을 알면 미지수를 양수로 가정하고 앞에 부호를 붙여도 되고, 설령 그 방향이 틀리더라도 방정식을 푼 뒤에 부호를 체크하여 확인이 가능하다. 본인의 직관이 뛰어나면 좋으나, 그 직관이 틀리더라도 너무 큰 걱정은 하지 말도록 하자.

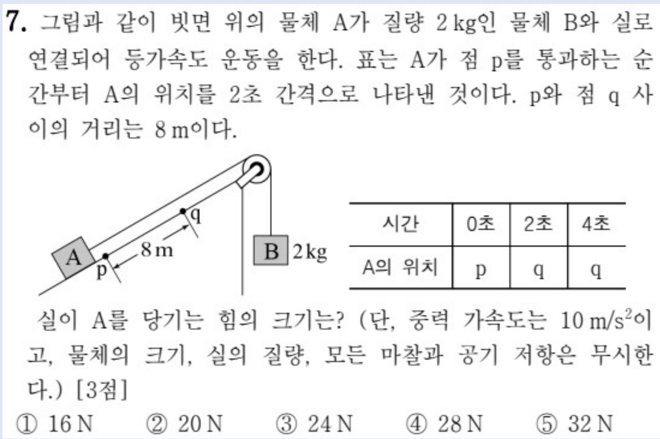
상황 3



상황 3의 연장선

위 그래프는 속력이 점점 감소하는 운동의 대칭성을 나타낸 것이다. 물체는 정지된 지점을 기준으로 t초 전후 위치, 속력이 동일하고 방향만이 반대임을 의미한다. 또 다르게 말하자면, 운동 방향이 바뀌는 물체에 대하여 동일한 지점에서의 속력이 다르다는 것은 가속도가 바뀌었다고 봐도 무방하다. 이러한 특성은 빗면을 올라가는 물체 또는 실로 연결된 채로 가속운동을 하다가 실이 끊어지는 물체 등 여러 유형에서 사용된다. 간단한 예제를 보도록 하자.

예제3



7. 그림과 같이 빗면 위의 물체 A가 질량 2 kg인 물체 B와 실로 연결되어 등가속도 운동을 한다. 표는 A가 점 p를 통과하는 순간부터 A의 위치를 2초 간격으로 나타낸 것이다. p와 점 q 사이의 거리는 8 m이다.

시간	0초	2초	4초
A의 위치	p	q	q

실이 A를 당기는 힘의 크기는? (단, 중력 가속도는 10 m/s^{2}이고, 물체의 크기, 실의 질량, 모든 마찰과 공기 저항은 무시한다.) [3점]

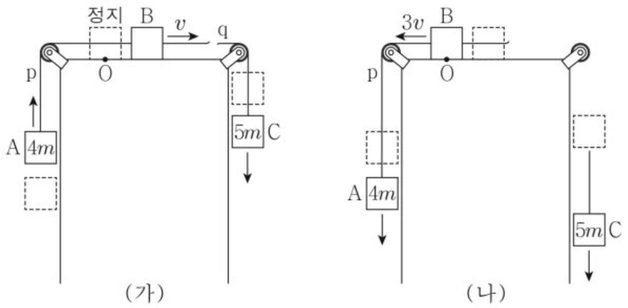
① 16 N ② 20 N ③ 24 N ④ 28 N ⑤ 32 N

20210707

p-q 구간에 대하여 평균 속력 4m/s는 중간시점 1초때의 속력과 동일하다. 또한, 대칭성으로 인하여 최고점을 기준으로 t초 전후 물체는 위치, 속력이 동일하므로 3초 때 물체는 정지한다. 1~3초동안의 속력 변화가 빗면 아랫방향으로 4m/s 이므로 가속도는 빗면 아랫방향으로 2m/s이다. 따라서 B의 알짜힘은 윗방향으로 4N이므로 장력의 크기는 24N이다. **그런데**, 우리는 대칭성을 이용하면 q로부터 최고점까지의 거리도 알 수 있다. 3초를 기준으로 q, p까지 걸리는 시간이 1:3이므로 거리비는 1:9, 이 둘 사이 거리는 8m이므로 q로부터 최고점 O까지의 거리는 1m이다. 이처럼 대칭성을 이용하면 문항을 폭넓게 이해하는 것이 가능하다. 물론, 이러한 이유로 문항을 푸는데 필요없는 단서까지 구해지기도 한다. (장점인지 단점인지 모르겠지만)

예제4

11. 그림 (가)와 같이 물체 A, B, C를 실 p, q로 연결하고 수평면 위의 점 O에서 B를 가만히 놓았더니 물체가 등가속도 운동하여 B의 속력이 v가 된 순간 q가 끊어진다. 그림 (나)와 같이 (가) 이후 A, B가 등가속도 운동하여 B가 O를 $3v$의 속력으로 지난다. A, C의 질량은 각각 $4m$, $5m$이다.



(가) (나)

(나)에서 p가 A를 당기는 힘의 크기는? (단, 중력 가속도는 g이고, 물체의 크기, 실의 질량, 마찰은 무시한다.) [3점]

① $\frac{1}{2}mg$ ② $\frac{2}{3}mg$ ③ $\frac{3}{4}mg$ ④ $\frac{4}{5}mg$ ⑤ $\frac{5}{6}mg$

20220703

(편의상 (가)에서 B의 위치를 a, 가장 오른쪽으로 이동했을 때의 위치를 b라 하겠다)

위 문항을 보면 무엇이 떠오르는가? (가) 이후로 B의 운동은 가장 오른쪽 지점 b에 대하여 대칭 운동을 하므로 B는 속력 v로 지나간 a지점을 다시 속력 v로 되돌아 온다. 이를 바탕으로 다음과 같은 단서 도출이 가능하다.

O → a와 a →에 대하여 이동 거리 비 = 1:1, 평균 속력 비 = $0+v : v+3v = 1:4$

따라서 걸린 시간 비율 = $\frac{1:1}{1:4} = 4:1$이다.

속력 변화 비 = 1:2 이므로 B의 가속도비 = $\frac{1:2}{4:1} = 1:8$이다.

이후 식을 쓰는건 두가지로 나뉜다. (가)에서 A, B, C (나)에서 A, B에 대하여 가속도 비율을 구하기 위해

전체 알짜힘 비 ÷ 전체 질량비 = $\frac{1:4}{9m+m_B : 4m+m_B} = 1:8$

$$2:1 = 9m+m_B : 4m+m_B,\ 9m+m_B = 8m+2m_B,\ m_B = m$$

라는 식을 작성하여도 된다. 아니면, 시점을 B로 맞춰 B가 받는 알짜힘이 1:4라고 판단하여 알짜힘 분산을 통해

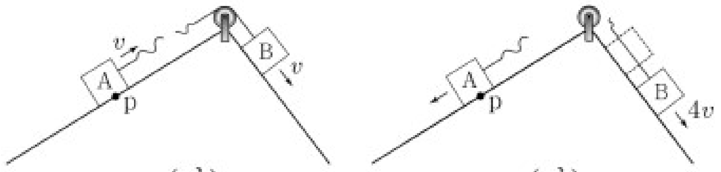
B 알짜힘 비 = $(\text{전체 알짜힘 비}) \times \frac{B\text{질량비}}{\text{전체 질량비}} = \frac{1:4}{9m+m_B : 4m+m_B} \times (1:1) = 1:8$

$$2:1 = 9m+m_B : 4m+m_B,\ 9m+m_B = 8m+2m_B,\ m_B = m$$

라고 작성하여도 무방하다. 이후, 장력의 크기는 곧 B의 알짜힘 이므로 전체 알짜힘 4mg 중 B의 질량 비율인 $\frac{1}{5}$를 곱한 $\frac{4mg}{5}$를 도출하면 된다. 그런데 보면 식이 동일한데 왜 두가지 식을 썼을까 싶은데, 이 둘은 **관점**이 다르다. 전자가 연결된 물체들에 대한 운동에 대한 관점이라면 후자는 B가 받는 알짜힘에 대한 관점이다. 후자의 경우에는 단순히 위 문항처럼 B만을 분석하는게 아니라 서로 다른 물체들에 대하여 식을 세울 때도 사용된다. 예를 들면 서로 다른 두 상황에 대한 A, C의 가속도에 대한 식을 세울 때처럼 말이다. 두가지 관점 모두 이해할 것을 권장한다.

예제5

8. 그림 (가)는 물체 A, B가 실로 연결되어 서로 다른 빗면에서 속력 v로 등속도 운동하다가 A가 점 p를 지나는 순간 실이 끊어지는 것을 나타낸 것이다. 그림 (나)는 (가) 이후 A와 B가 각각 빗면을 따라 등가속도 운동을 하다가 A가 다시 p에 도달하는 순간 B의 속력이 $4v$인 것을 나타낸 것이다.



(가) (나)

A, B의 질량을 각각 m_A, m_B라 할 때, $\frac{m_A}{m_B}$는? (단, 물체의 크기, 실의 질량, 모든 마찰은 무시한다.) [3점]

① 2 ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{4}{3}$ ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{6}{5}$

20230708

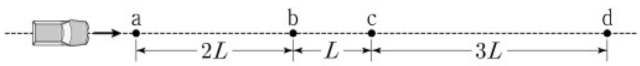
이제는 자연스레 (가) 이후 p가 최고점에 도달 후 다시 p를 속력 v로 돌아오는 것을 떠올릴것이라 믿는다. 그리고 (가) 이후 두 물체의 속도 변화가 2:3임을 도출하고, 걸린 시간이 1:1이니 가속도의 크기가 2:3인 것 자연스레 나올 것이다. (가)에서 두 물체는 등속도 운동을 했으니 알짜힘은 0니 두 물체가 빗면 방향으로 받는 중력의 크기는 1:1이다. 따라서 가속도가 2:3이라는 것은 질량이 3:2임을 의미한다.

2.1.2 가속 운동의 연장점

상당수의 문항들이 속력이 0인 지점을 기준으로 대칭임을 이용하면 여러 가지 단서를 시각적으로 구할 수 있다는 장점이 있다. 그런데 만약, 문항에서 주어진 상황에서 속력이 0인 지점이 없다면 어떡할까?

예제6

16. 그림은 자동차가 등가속도 직선 운동하는 모습을 나타낸 것이다. 점 a, b, c, d는 운동 경로상에 있고, a와 b, b와 c, c와 d 사이의 거리는 각각 $2L$, L, $3L$이다. 자동차의 운동 에너지는 c에서가 b에서의 $\frac{5}{4}$배이다.

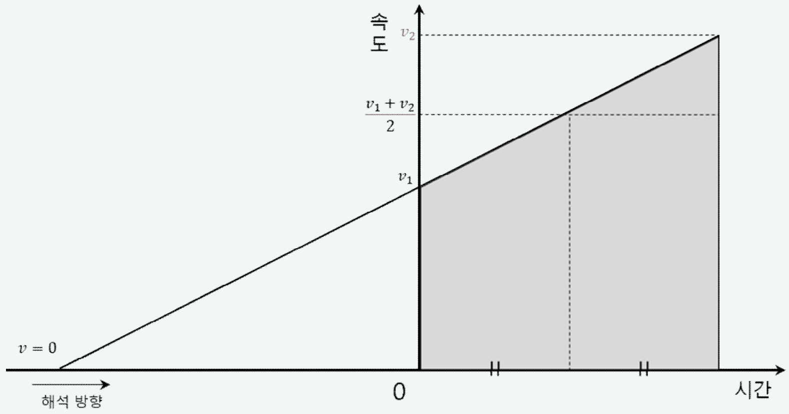


자동차의 속력은 d에서가 a에서의 몇 배인가? (단, 자동차의 크기는 무시한다.) [3점]

① $\sqrt{3}$ 배 ② 2배 ③ $2\sqrt{2}$ 배 ④ 3배 ⑤ $2\sqrt{3}$ 배

20191116

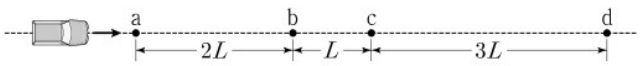
위 문항을 예로 들어, 위 문제 상황 속에서는 속력이 0인 지점이 없다. 이 경우에는 어떤 방향으로도 풀이 접근이 가능할까?



위 그래프는 앞에서 다룬 등가속도 운동 그래프를 연장 하였을 때 비례 관계 사용이 가능함을 보여준 그래프이다. 이처럼 $v=0$인 지점이 존재하지 않는다면 문제 상황을 전 또는 후로 연장하여 $v=0$인 지점을 잡고 이를 기준으로 비례식을 사용하여도 무방하다. 단, 이 경우에는 식이 복잡해지는 경우도 더러 있는데 한번 간단하게 풀리는 예도 한 번 보도록 하자. 에너지 파트긴 한데 잠시 앞당겨 예제로 써보도록 하겠다.

예제6

16. 그림은 자동차가 등가속도 직선 운동하는 모습을 나타낸 것이다. 점 a, b, c, d는 운동 경로상에 있고, a와 b, b와 c, c와 d 사이의 거리는 각각 $2L$, L, $3L$이다. 자동차의 운동 에너지는 c에서가 b에서의 $\frac{5}{4}$배이다.



자동차의 속력은 d에서가 a에서의 몇 배인가? (단, 자동차의 크기는 무시한다.) [3점]

① $\sqrt{3}$ 배 ② 2배 ③ $2\sqrt{2}$ 배 ④ 3배 ⑤ $2\sqrt{3}$ 배

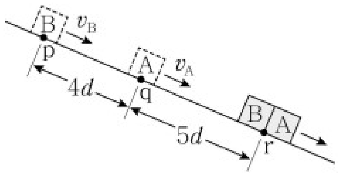
20191116

위 물체의 운동에너지는 b, c에서 4:5이다. 정지한 물체에 대하여 일정한 알짜힘이 작용하게 될 경우 물체가 가지게 되는 운동에너지는 s에 비례하게 된다. 따라서 $v=0$인 지점 O에 대하여 b, c까지의 거리는 4:5임을 의미한다. 그리고 그 차이는 b와 c 사이의 거리 L임을 의미한다. 따라서 O로부터 b, c까지의 거리는 각각 4L, 5L이며 이는 a로부터 왼쪽으로 2L 떨어진 지점이다. 물체의 이동 거리는 시간 제곱에 비례하므로 O로부터 a, d까지의 거리비 2:8=1:4이며 제곱근을 씌운 1:2가 곧 걸린 시간의 비율이다. 물체의 속력은 O로부터 이동한 시간에 비례하니 결국엔 속력도 1:2이다.

위 예제의 경우에는 문제가 참 부드럽게 풀린것같다. 하지만, v=0인 지점을 잡는다 하여 항상 쉽게 풀리는 것은 아니다. 그나마 다행인 예제를 들어보도록 하겠다.

예제7

18. 그림과 같이 빗면의 점 p에 가만히 놓은 물체 A가 점 q를 v_A의 속력으로 지나는 순간 물체 B는 p를 v_B의 속력으로 지났으며, A와 B는 점 r에서 만난다. p, q, r는 동일 직선상에 있고, p와 q 사이의 거리는 $4d$, q와 r 사이의 거리는 $5d$이다.



$\frac{v_A}{v_B}$는? (단, 물체의 크기, 모든 마찰과 공기 저항은 무시한다.)

① $\frac{4}{9}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{5}{9}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{4}{5}$

20211018

문제에서 A는 p에 가만히 뒀으니 q,r의 거리비 4:9를 통해 걸린 시간이 2:3임을 알 수 있다. 여기서 **시간 2일 때** B를 놨으며 이후 B는 **시간 1 동안** 9d를 이동한다. B가 가상의 $v=0$인 지점 O로부터 p까지 걸린 시간을 t, r까지 걸린 시간을 $t+1$이라 한다면 까지의 걸린 시간 제곱비의 차가 9임을 이용하여 $(t+1)^2-(t)^2=9$라는 식을 세울 수 있다. (, 이에 대한 근 t=4를 도출한다면, 우리는 p에서 B의 속력은 **시간 4동안** 가속되는 시간임을 알 수 있고 v_A가 **시간 2**동안 가속된 속력이니 정답은 2번임을 유추할 수 있다.

이처럼 어떠한 지점에 대하여 연장을 하면 비례식 사용이 가능하긴 하다. 다만, 단점이라면 위 예제처럼 t값이 쉽게 구해지는 경우도 있고, 복잡한 방정식이 유도되는 경우도 있다. 따라서, 필자는 위와 같은 원리를 기본 베이스로 문항을 풀기 보다는, 이와 같은 시선을 통해 문제 상에서 쉽게 도출되는 조건이 있는지 체크 정도만 하는 것을 권장한다. 위 문항을 만약 비례식으로 푼다면 어떻게 풀까?

A를 기준으로 구간 pq, qr에 대한 걸린 시간이 2:3이므로 A의 이동 시간을 3이라 한다면 B의 이동 시간은 1이라 할 수 있다. 해당 시간 영역에 대하여 두 물체의 이동 거리는 1:1이므로 평균 속력은 1:3이라 할 수 있다.
A의 처음 속력, 나중 속력은 걸린 시간비에 의해 0, $1.5v_A$일것이고, B의 처음 속력을 v_B라 하면 나중 속력은 이동시간이 1이므로 $\triangle v = at$에 따라 $v_B+0.5v_A$일 것이다. 따라서 평균속력 1:3 조건을 이용하면 답이 나온다.

$$1:3 = 1.5v_A : 2v_B + 0.5v_A,\ 4.5v_A = 2v_B + 0.5v_A,\ 2v_A = v_B$$

필자는 문제 상황에 대해 연장선을 그어 $v=0$을 기준으로 비례 관계를 유추하였을 때 도움이 될만한 단서가 있는지 정도로만 이 개념을 쓴다. 또는 머릿속으로 식을 떠올렸을 때 근을 구하기 쉬운 형태인지 판단 후 그렇지 않다면 다시 다른 비례 관계를 유도하려고 하는편이다. 대표적으로 처음속도와 나중속도의 합처럼 말이다. 이 글을 읽는 다른 사람들도 그 정도로 사용하기를 권장한다.

문제 상황을 연장하여 $v=0$인 어떠한 지점 O를 가정하여 이를 기준으로 비례식을 사용하여도 상관 없다. 다만, O로부터 각 지점까지의 거리비를 구한뒤 그 차이의 비율을 이용하게될 경우 2차 방정식 형태의 복잡한 식이 나올 수 있으니 문제 상황에서 추가적인 단서를 도출하는 정도로만 사용하도록 하자.

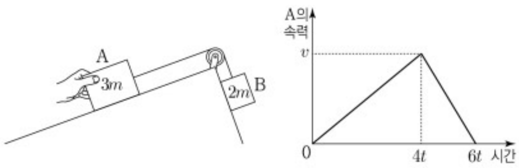
물론 식을 세워보면 대부분은 2차항이 소거되는 편이다.

2.1.3 빗면과 힘, 힘의 분산

물리학 1에서 빗면에 대한 가속도를 계산하는 방법은 배우지 않으나, 빗면에 물체를 가만히 두었을 때 물체의 가속도는 질량에 관계 없이 오직 기울기에 영향을 받는다 정도만 알아두면 된다. 따라서, 어떠한 빗면에 대하여 가속도의 크기를 a'이라 가정한다면 물체가 빗면에서 받는 중력의 크기는 ma'이라 표현 가능하다. 따라서, 물체가 빗면에 대하여 받는 중력은 질량에 비례, 해당 빗면에서의 기울기에 비례한다. 이러한 해석은 이후 에너지 파트에서도 유용하게 쓰이므로 잘 알아두도록 하자. 관련 문항을 조금 풀어보도록 하자.

예제6

16. 그림 (가)는 물체 A, B를 실로 연결하고 A를 손으로 잡아 정지시킨 모습을 나타낸 것이다. 그림 (나)는 (가)에서 A를 가만히 놓은 순간부터 A의 속력을 시간에 따라 나타낸 것이다. $4t$일 때 실이 끊어졌다. A, B의 질량은 각각 $3m$, $2m$이다.



(가) (나)

이에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, 실의 질량, 공기 저항과 모든 마찰은 무시한다.) [3점]

<보 기>

ㄱ. A의 운동 방향은 t일 때와 $5t$일 때가 같다.

ㄴ. $5t$일 때, 가속도의 크기는 B가 A의 $\frac{11}{4}$배이다.

ㄷ. $4t$부터 $6t$까지 B의 이동 거리는 $\frac{19}{4}vt$이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

20240716

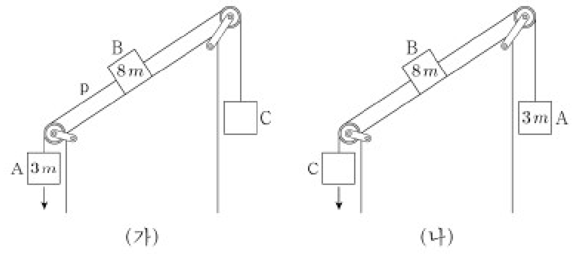
위 문항은 어떠한 방식으로 접근할까? 일단, 실이 끊어지기 전 가속도의 방향은 B의 아랫방향, 끊어진 후에는 A의 아랫 방향이다. 가속도의 비율은 $4t$ 전후 속력 변화가 1:1, 시간이 2:1이니 가속도는 1:2이며 가속도는 전체 알짜힘에 비례, 전체 질량에 반비례 한다. 따라서 $\frac{F}{5:3}=1:2$, $F=5:6$이므로 전체 알짜힘은 5:6임을 알 수 있다. (이처럼 모르는 어떠한 비율 자체를 미지수(F)로 두어도 상관 없다.) A, B의 빗면 방향으로의 중력을 각각 F_A, F_B라 하면 $F_B-F_A:F_A=5:6$, $F_A:F_B=6:11$이다. ㄱ은 가속도의 방향이 다를 뿐 운동 방향은 같으며, ㄴ은 A, B의 가속도 비율을 묻는 선지이므로 A, B의 알짜힘 6:11을 질량비 3:2로 나눠준 4:11이다.

ㄷ은 $4t$ 때 B의 속력이 v이고 이후 $6t$때의 속력을 구해야하는데 이때도 비례식을 사용할까? 나중속력은 처음속도에 at를 더하는만큼 **비례상수에 유의하며 계산 해야 한다.** B입장에서 끊기기 전 후 전체 알짜힘은 5:11이고 운동하는 물체의 질량은 5:2이므로 가속도 비율은 $\frac{5:11}{5:2}=2:11$(B가 받는 가속도의 방향이 바뀌면 −부호도 붙여줌을 유념해야한다.)이며 $4t$ 전후 시간은 $2:1$이므로 속력 변화는 $4:11=v:\frac{11}{4}v$이므로 $6t$때 B의 속력은 $\frac{15}{4}v$이다.

따라서 $4t$부터 $6t$까지 B의 이동 거리는 $\frac{v+\frac{15}{4}v}{2}\times 2t=\frac{19}{4}vt$이다.

예제7

20. 그림 (가)와 같이 물체 A, B, C가 실로 연결되어 등가속도 운동한다. A, B의 질량은 각각 $3m$, $8m$이고, 실 p가 B를 당기는 힘의 크기는 $\frac{9}{4}mg$이다. 그림 (나)는 (가)에서 A, C의 위치를 바꾸어 연결했을 때 등가속도 운동하는 모습을 나타낸 것이다. B의 가속도의 크기는 (나)에서가 (가)에서의 2배이다.



C의 질량은? (단, 중력 가속도는 g이고, 실의 질량, 모든 마찰은 무시한다.) [3점]

① $4m$ ② $5m$ ③ $6m$ ④ $7m$ ⑤ $8m$

20240620

위 문항을 비례식으로 풀어보자. 단, 비율과 실제값을 구분하여 식을 작성해야 한다. $\frac{9}{4}mg$라는 조건은 **실제값**이므로 비례식에서 $\frac{9}{4}$를 쓰기 위해서는 비례식을 쓰는 과정에서 약분하는 과정이 없어야 한다.

[조건 1] (가)와 (나)에서 B의 가속도는 1:2이다 = 전체알짜힘÷전체질량 = 전체알짜힘 = 1:2이다.
(전체 질량이 동일하므로 전체 알짜힘이 1:2라고 하여도 무방하다.)

[조건 2] 실 p 장력은 $\frac{9}{4}mg$이다. = A가 받는 알짜힘의 크기는 아래 방향으로 $\frac{3}{4}mg$이므로 가속도는 $\frac{1}{4}g$다.

문항에서 구하고자 하는값은 C의 질량이므로 C의 질량을 cm이라 하여 질량비를 $3:8:c$라 하고 받는 중력의 비율은(B는 빗면) $3:F:c$라 해보자. (미지수 설정에 겁먹지 말자.)

[조건 1]에 의하여 $3+F-c:c+F-3=1:2$이다. 편의상 $c-3=k$라 하여 $F-k:F+k=1:2$ $F:k=3:1$

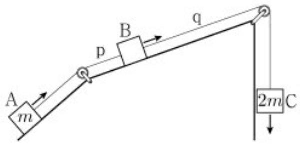
[조건 2]에 의하여 $\frac{1}{4}=\frac{F-k}{11+c}=\frac{3k-k}{11+c}=\frac{2k}{11+c}$, $11+c=8k=8c-24$, $c=5$

아마 위 문항은 비례식으로 쓰는 과정 중 [조건 2]부분이 헷갈렸을것이다. 이유가 뭘까? 우리는 물리 문항을 푸는 과정에서 무의식적으로 m이나 mg등의 문자를 **생략**하는 경우가 많은데, 이 때 생략을 한다는 것은 무엇을 의미할까? 만약 어떠한 방정식이 $A=B$꼴이며, A와 B 식 내에 모든 항이 m, g를 포함 하고 있다면 양변을 m, g로 나눠주어도 등호는 성립한다. 즉, $A=B$를 어찌보면 $(\frac{A}{mg}=\frac{B}{mg})mg$ 꼴로 변환하는 것이 바로 공통 문자를 생략하는것이라 할 수 있겠다. 위에 작성된 식을 $\frac{1}{4}=$~ 꼴로 작성할 때 $\frac{1}{4}g$가 아닌 이유 역시 A의 중력을 g를 생략하고 작성하였기에 이후 작성되는 g에 관한 식도 g를 생략해준 것이다. 문자를 생략하면 식이 간결해져서 풀이에 도움을 준다. 허나, 본인이 생략하는 행위는 전체 식을 해당 문자로 미리 소거한다는 것을 염두하도록 하자. 이를 제대로 숙지하지 않으면 비례식을 쓰는 과정에서 걸림돌이 될 수 있으니 말이다. 위 문항은 A, C가 각각 $3m$, $8m$이지만 만약 $3m$, $6m$이라 해서 중력 비율을 1:B:2라고 쓴다면 무슨 의미일까? **힘에 관한 식에 대하여 $2mg$로 미리 나눠줌을 의미한다.** 이렇게 비례식을 세워놓고 실제값 $\frac{9}{4}mg$ 조건을 그대로 사용한다면 엉뚱한 답이 나올 것이다. 항상, 공통 문자의 소거는 전체 식을 나눠주는 의미라는걸 염두 하자.

m, g를 생략하는 행위는 이후 작성하는 식 전체에 대하여 m, g로 미리 나눠줌을 의미한다.

예제8

8. 그림은 물체 A, B, C가 실 p, q로 연결되어 등속도 운동을 하는 모습을 나타낸 것이다. p를 끊으면, A는 가속도의 크기가 $6a$인 등가속도 운동을, B와 C는 가속도의 크기가 a인 등가속도 운동을 한다. 이후 q를 끊으면, B는 가속도의 크기가 $3a$인 등가속도 운동을 한다. A, C의 질량은 각각 m, $2m$이다.



이에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, 중력 가속도는 g이고, 실의 질량, 모든 마찰과 공기 저항은 무시한다.) [3점]

<보 기>

ㄱ. B의 질량은 $4m$이다.

ㄴ. $a=\frac{1}{8}g$이다.

ㄷ. p를 끊기 전, p가 B를 당기는 힘의 크기는 $\frac{2}{3}mg$이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

20230908

위 문항에서 보이는 첫 조건은 p가 끊기고 나서 A, B, C의 가속도가 6:1:1, q를 끊으면 B의 가속도가 3a라는 점이다. p를 끊었을 때와 q를 끊었을 때 B의 가속도는 1:3이다. B의 가속도 1:3 부분을 굳이 쓴 이유는, 간단하게나마 비례상수를 일치시키는 과정을 보여준 것이다.

A, B, C의 질량비를 1:b:2라 해보겠다. 이는 B의 질량을 bm이라 가정함을 의미한다. A, B가 빗면 방향으로 받는 중력의 크기는 F_A, F_B라 해보자. 여기서 이 두 힘은 m,g를 생략하도록 하겠다. 이제 문항에 나와있는 조건을 수식으로 나타내보자.

[조건 1] 처음 A, B, C는 등속도 운동을 한다 = 전체 알짜힘이 0이다 : $F_A+F_B=2$

[조건 2] p를 끊으면 A, B의 가속도는 6:1이다 : $\frac{F_A:2-F_B}{1:2+b}=\frac{2-F_B:2-F_B}{1:2+b}=\frac{1:1}{1:2+b}=6:1=\frac{1:1}{1:6}$

따라서 $b=4$이다. (ㄱ 정답)

[조건 3] p를 끊은 후, q를 끊은 후 B의 가속도는 1:3이다 : B가 받는 알짜힘이 1:3이다

= (전체 알짜힘 비) ÷ (전체 질량비)가 1:3이다 = $\frac{2-F_B:F_B}{2+b:b}=1:3=\frac{2-F_B:F_B}{3:2}$

마지막 식을 정리해주면 $1:2=2-F_B:F_B$ 이므로 $4-2F_B=F_B$, $F_A=\frac{2}{3}, F_B=\frac{4}{3}$이다.

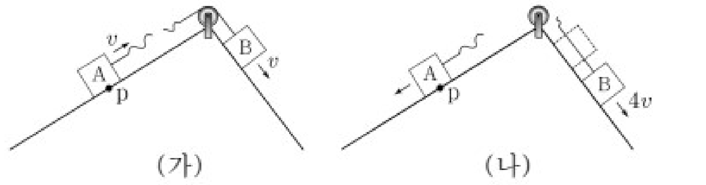
ㄴ : p를 끊은 뒤 가속도 a는 $\frac{2mg-F_B}{6m}=\frac{\frac{2}{3}mg}{6m}=\frac{1}{9}g$이다.

ㄷ : p를 끊기 전 A의 알짜힘은 0이므로 장력 p는 A의 중력과 동일한 $\frac{2}{3}mg$이다.

이번에는 서로다른 빗면에 대한 가속도의 비율을 이용하는 문항도 풀어보도록 하겠다.

예제9

8. 그림 (가)는 물체 A, B가 실로 연결되어 서로 다른 빗면에서 속력 v로 등속도 운동하다가 A가 점 p를 지나는 순간 실이 끊어지는 것을 나타낸 것이다. 그림 (나)는 (가) 이후 A와 B가 각각 빗면을 따라 등가속도 운동을 하다가 A가 다시 p에 도달하는 순간 B의 속력이 $4v$인 것을 나타낸 것이다.



A, B의 질량을 각각 m_A, m_B라 할 때, $\frac{m_A}{m_B}$는? (단, 물체의 크기, 실의 질량, 모든 마찰은 무시한다.) [3점]

① 2 ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{4}{3}$ ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{6}{5}$

20230708 (양 빗면의 가속도 비율을 이용해 풀어보자)

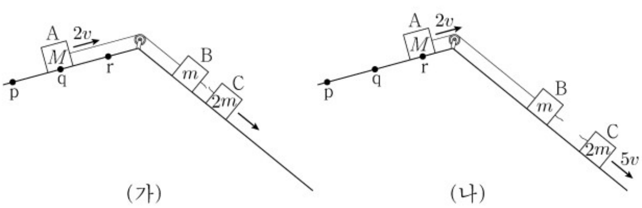
좌, 우 가속도 비율을 a 라고 써보겠다. 비례식 역시 문자로 치환하여 써도 상관 없다! 이번에도 발문을 문장별로 끊어 수식화 해보자,

[조건 1] A, B는 등속도 운동을 한다 = 양 빗면 중력이 동일하다 = 질량비와 가속도비의 곱이 1:1이다.
[조건 2] A는 p로 되돌아 온다 = 대칭성으로 인해 속력이 v이다 = 속도 변화량이 $2v$이다.
[조건 3] B의 속도는 $4v$이다 = 속도 변화량이 $3v$이다 = 양 빗면에 대한 가속도는 2:3이다.

조건 1은 비교 대상이 두 개이니 가속도비가 곧 질량 반대비이다. 가속도비가 2:3이니 질량은 3:2로 2번이 정답이 되겠다.

예제10

17. 그림 (가)와 같이 물체 A, B, C를 실로 연결하고 A를 점 p에 가만히 놓았더니, 물체가 각각의 빗면에서 등가속도 운동하여 A가 점 q를 속력 $2v$로 지나는 순간 B와 C 사이의 실이 끊어진다. 그림 (나)와 같이 (가) 이후 A와 B는 등속도, C는 등가속도 운동을 하여, A가 점 r를 속력 $2v$로 지나는 순간 C의 속력은 $5v$가 된다. p와 q 사이, q와 r 사이의 거리는 같다. A, B, C의 질량은 각각 M, m, $2m$이다.



M은? (단, 물체의 크기, 실의 질량, 모든 마찰은 무시한다.)

① $2m$ ② $3m$ ③ $4m$ ④ $5m$ ⑤ $6m$

20221117

문장별로 끊어 수식화하자.

[조건 1] p에서 정지, q부터는 등속도 운동을 한다 = pq구간과 qr구간의 평균속도는 1:2이다.
[조건 2] pq, qr 거리는 같다 = 거리비가 1:1이다, [조건 1]로 인해 걸린 시간비는 2:1이다.
[조건 3] C의 속도는 $3v$ 증가하여 $5v$이다.
[조건 4] 실을 끊은 후 A, B는 등속도 운동을 한다 = A, B의 빗면 방향 중력이 동일하다.

[조건 3]을 다르게 말하면, pq, qr에 해당하는 시간 2:1에 대하여 C의 속도 변화가 2:3임을 의미한다. 즉, C의 가속도는 $\frac{2:3}{2:1}=1:3$이고, C에 대한 가속도이므로, 이는 곧 C가 받는 알짜힘의 비율이다. C가 받는 알짜힘은 전체 알짜힘에 비례, 전체 질량에 반비례 한다. 빗면 중력은 질량에 비례한다. A, B의 빗면 중력이 1:1, B, C의 빗면 중력이 1:2일테니 A, B, C의 빗면 중력은 비례 상수를 일치시켜주면 1:1:2이다.

따라서, C가 받는 알짜힘 비율 $1:3=\frac{2+1-1:2}{M+3:2}=\frac{1:1}{M+3:2}=\frac{1:1}{3:1}$이다.(질량비를 $M+3m:2m$이 아니라 $M+3:2$라 썼다는 것은 공통 문자 m을 생략하여 원래라면 $M=km$꼴로 계산 될 것을 $M=k$로 나오게 하는 것이다.) $M=3$ 이므로 A의 질량은 $3m$이다.

공통 문자를 생략하는게 헷갈리면, 그냥 생략하지 않아도 된다. 하지만 아마 많은 사람들이 자기도 모르게 공통 문자를 생략할 것이다. 이러한 공통 문자의 생략은 비례식을 계산하는 과정에서 간단한 정수비로 나타내는 것과 비슷하다. $3m$, $4m$을 3,4라 표현 하는것이나 6, 8을 3:4라 표현하는것이나 별반 차이가 없다! 생략하지 않아도 되나, 그래도 비례식을 이용하여 문항을 푼다면 더더욱 공통 문자 생략의 의미를 명확하게 알아두도록 하자.

2.1.4 상대 속도

우리는 아래와 같이 상대 속도의 적용 방법을 배웠다.

상대 속도의 적용 과정
1) 방향에 따른 부호 설정
2) 물체의 속도 설정
3) 가감하여 한쪽을 0으로 고정
4) 정지된 물체에 대하여 다른 물체의 변위 계산

위 방식을 따른다면 상대 속도 식을 손쉽게 세울 수 있을것이다. 이러한 상대 속도가 유용하게 사용되는 대표적인 상황이 하나 있는데, 바로 가속도의 크기와 방향이 동일한 상황이다. 물체의 가속도의 크기와 방향이 동일할 경우 두 물체간 상대속도는 어떻게 되는지 보도록 하자.

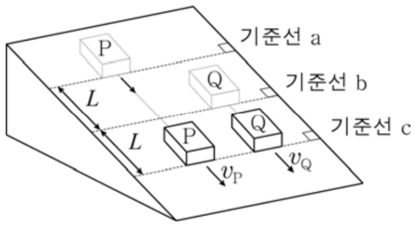
A와 B의 초기속도가 각각 v_{A0}, v_{B0}이고 가속도가 a로 동일할 때 두 물체의 나중 속도는 각각
$v_{A1}=v_{A0}+at$, $v_{B1}=v_{B0}+at$ 이다.

B의 속도를 0으로 고정하면 $v_{A1}=v_{A0}-v_{B0}$, $v_{B1}=0$

A는 정지한 B에 대하여 속도 $v_{A0}-v_{B0}$로 일정하게 운동한다.

상대 속도가 $v_{A0}-v_{B0}$라는 상수로 나온다는 것은 두 물체 사이의 거리는 일정하게 가까워지거나 멀어짐을 의미한다. (가까워지다가 만나면 동일한 속도로 멀어짐) 예를 들어 동일한 빗면에 존재하는 두 물체 A, B가 1초 동안 1m 가까워 진다면 5초 동안에는 5m 가까워진다. 이러한 특성을 이용하면 종종 풀이가 획기적으로 쉬워지는 경우가 있는데 몇가지 문항을 통해 상대속도를 적용해보도록 하자.

8. 그림과 같이 마찰이 없는 빗면 위에서 물체 P가 기준선 a를 지나는 순간 기준선 b에 있던 물체 Q를 가만히 놓았더니 P, Q가 등가속도 직선 운동하여 기준선 c를 각각 v_P, v_Q의 속력으로 동시에 통과하였다. a, b, c 사이의 간격은 L이다.



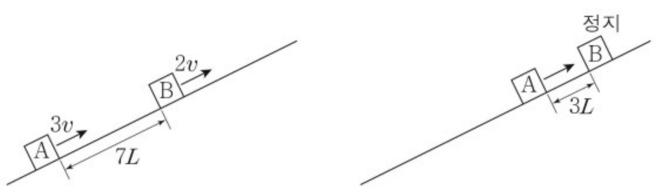
$\frac{v_P}{v_Q}$는? (단, 물체의 크기는 무시한다.) [3점]

① $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\sqrt{3}$ ⑤ 2

20161008

위 문항에서 두 물체 P와 Q는 점점 가까워지고 있다. P와 Q의 나중 속도가 각각 v_P, v_Q이므로 두 물체 사이의 거리는 단위 시간당 $v_P - v_Q$만큼 가까워질 것이다. 그리고 위 상황에서 Q는 정지했다가 나중 속도가 v_Q이므로 Q의 평균 속도는 $0.5v_Q$이다. 즉 Q가 이동한 거리와 가까워진 거리는 1:1이므로 평균 속도 $0.5v_Q$와 상대 속도 $v_P - v_Q$의 비율도 1:1이 나와야 한다. 따라서 $0.5v_Q = v_P - v_Q$, $1.5v_Q = v_P$로 답은 3번임을 알 수 있다.

17. 그림 (가)는 마찰이 없는 빗면에서 등가속도 직선 운동하는 물체 A, B의 속력이 각각 $3v$, $2v$일 때 A와 B 사이의 거리가 $7L$인 순간을, (나)는 B가 최고점에 도달한 순간 A와 B 사이의 거리가 $3L$인 것을 나타낸 것이다. 이후 A와 B는 A의 속력이 v_A일 때 만난다.



(가) (나)

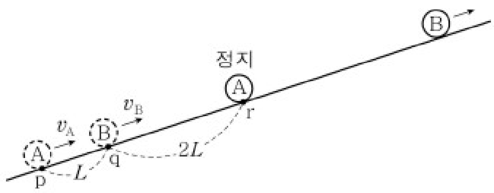
v_A는? (단, 물체의 크기는 무시한다.)

① $\frac{1}{5}v$ ② $\frac{1}{4}v$ ③ $\frac{1}{3}v$ ④ $\frac{1}{2}v$ ⑤ v

20240517

위 문항도 마찬가지로 상대속도가 일정하므로 A와 B 사이의 거리는 상대속도 v로 일정하게 가까워질 것이다. 만약 두 물체가 만나는 순간을 (다)라고 해보자. (가)-(나)와 (나)-(다)에서 걸린 시간은 가까워진 거리에 비례할테니 4:3일 것이다. 시간 4 동안 변한 속도가 $2v$이므로 (가)에서 A의 속도는 v일것이고, 시간 3 동안 변한 속도는 $1.5v$일 것이다. 따라서 (다)에서 A의 속도는 $v - 1.5v = -0.5v$이므로 (다)에서 A는 빗면 아랫방향으로 속력 $0.5v$로 운동할 것이다.

17. 그림과 같이 동일 직선상에서 등가속도 운동하는 물체 A, B가 시간 $t=0$일 때 각각 점 p, q를 속력 v_A, v_B로 지난 후, $t=t_0$일 때 A는 점 r에서 정지하고 B는 빗면 위로 운동한다. p와 q, q와 r 사이의 거리는 각각 L, $2L$이다. A가 다시 p를 지나는 순간 B는 빗면 아래 방향으로 속력 $\frac{v_B}{2}$로 운동한다.



이에 대한 옳은 설명만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, 물체의 크기, 모든 마찰과 공기 저항은 무시한다.) [3점]

< 보 기 >

ㄱ. $v_B=4v_A$이다.

ㄴ. $t=\frac{8}{3}t_0$일 때 B가 q를 지난다.

ㄷ. $t=t_0$부터 $t=2t_0$까지 평균 속력은 A가 B의 3배이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

20231017

A와 B가 점점 멀어지고 있으니 $v_A < v_B$라는 것을 알 수 있다. 시간 $t=t_0$후 속도 변화는 A를 통해 $-v_A$임을 알 수 있고, 그 동안 멀어진 거리는 L이다. 즉, 두 물체는 시간 t_0당 L씩 멀어짐을 알 수 있다. 여기서 포인트는 A가 p를 다시 지난다는 점인데 이는 물체의 대칭성으로 인해 A가 속력 v_A로 내려오는 순간이므로 속도 변화가 $-2v_A$인 순간이다. 즉, $t=2t_0$때다.

이 때 B가 아랫 방향으로 속력 $\frac{v_B}{2}$이므로 $v_B-2v_A=-\frac{v_B}{2}$, $2v_A=\frac{3v_B}{2}$, $v_A:v_B=3:4$이다. (ㄱ 오답) 그렇다면 우리는 v_A와 v_B를 각각 $3v$, $4v$라고 할 수 있겠다. A가 p를 지나 다시 p까지 돌아오기 까지 걸린 시간이 $2t_0$이고, 이동안 변한 속도의 크기가 $6v$이다. B가 q를 다시 지나기까지 걸리는 시간은 속도가 $8v$변하는데 걸리는 시간이므로 $t=\frac{8}{3}t_0$때 B가 q를 지난다. (ㄴ 정답) ㄷ 선지는 어떻게 보면 이동거리의 비율을 묻는 선지와도 동일하므로 이동거리 비율을 구하든, 평균 속력 비율을 구하든 상관 없다. 평균 속력 비율을 한번 구해보자.

일단 A는 $t=t_0$때 r에서 정지, $t=2t_0$ p에서 $3v$로 내려가므로 평균 속력은 $1.5v$이다. B는 $t=t_0$때 윗 방향으로 속력 v, $t=2t_0$때 아랫 방향으로 속력 $3v$로 이동하므로. 올라갈 때 평균속력 $0.5v$, 내려갈 때 평균속력 $1.5v$이다. 이 걸린 시간은 변한 속도에 비례하므로 1:3이고 평균 속력의 3:1 내분점을 구하면 평균속력은 $\frac{5}{6}v$이다. 따라서 평균 속력은 A가 B의 $\frac{3}{2}\div\frac{5}{6}=\frac{9}{5}$배이다.

정량적으로 계산하면 위와 같다. 그렇지만 ㄷ 선지는 다르게 생각하면 이동 거리의 비율과도 같은데 필자는 다음과 같은 풀이도 선호한다.

평균 속력은, 이동 방향이 변하지 않는다면 양 끝점에서의 속력 합에 비례한다. 즉, 양 끝점에서의 속력 합과 시간의 곱에 비례한다.

	$t=t_0$	$t=?$	$t=2t_0$
A 속도(비율)	0	-?	-3
B 속도(비율)	+1	0	-2

B가 위로 올라가는 시간을 1, 내려가는 시간을 2라 하면 A의 이동시간은 3이라 볼 수 있다. 따라서 A의 이동거리를 속력합 3에 시간 3을 곱하여 9라 한다면, B의 이동거리는 1×1+2×2=5 이므로 평균 속력은 9:5이다.

아마 역학에 익숙해질수록, 비례식에 익숙해질수록 정량적인 계산보다는 위와 같이 상수만을 적으면서 문항을 푸는 비중이 늘어날 것이다. 늘 말하지만, 뒤에 붙는 m, g, t_0등은 단지 문제상에서 비율을 나타내기 위해 필요한 문자일 뿐이다. 비율 관계를 계산하는 과정에서 위를 생략하여 숫자로 계산하는것에 익숙해져보도록 하자. (물론, $g=10m/s^2$ 같은 조건이 나올 경우에는 조심해야한다.)

14. 그림 (가)는 빗면의 점 p에 가만히 놓은 물체 A가 등가속도 운동하는 것을, (나)는 (가)에서 A의 속력이 v가 되는 순간, 빗면을 내려오던 물체 B가 p를 속력 $2v$로 지나는 것을 나타낸 것이다. 이후 A, B는 각각 속력 v_{A}, v_{B}로 만난다.

(가) (나)

$\dfrac{v_{\mathrm{B}}}{v_{\mathrm{A}}}$는? (단, 물체의 크기, 모든 마찰은 무시한다.)

① $\dfrac{5}{4}$ ② $\dfrac{4}{3}$ ③ $\dfrac{3}{2}$ ④ $\dfrac{5}{3}$ ⑤ $\dfrac{7}{4}$

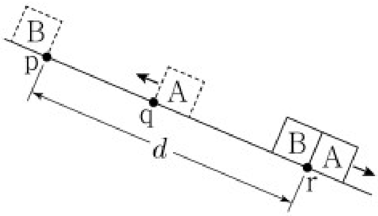
20221114

(나)에서 A의 위치를 q라 하겠다. 그렇다면 pq 사이 거리는 (가)에서 (나)까지 A가 평균 속력 $0.5v$로 이동한 거리라고 볼 수 있고, 한편으로는 B가 상대속도 v로 좁혀야 하는 거리라고도 볼 수 있다. 즉, 속력 비율이 1:2이므로 A가 내려간 시간과 (나)에서 따라잡는데 걸리는 시간은 2:1이며 이에 따라 속도 변화도 2:1이여야 한다.

(가)-(나)에서 속도변화가 v였으니 따라잡는데에는 $0.5v$여야 하므로 $v_A=1.5v$, $v_B=2.5v$이다. 딱 한 문항만 더 같이 풀어보도록 하겠다.

쉬운 문항일수록 표현된 조건으로만 문항이 풀릴 것이며, 어려운 문항일수록 추론 해야하는 조건을 도출하기가 까다로울 것이다. 그치만, 이 사실만 알아도 문항을 풀 때 본인이 무엇을 해야할지가 명확하게 정해지기 때문에 위와 같이 문제를 푸는 습관을 들이도록 하자. 위 조건을 통해 문항을 풀어보면 평균 속도 비 $(v_P-v_Q)+v_P:0+v_Q=2:1$, $2v_Q=2v_P-v_Q$, $2v_P=3v_Q$, $v_P:v_Q=3:2$로 3번이 정답임을 알 수 있다. 계속하여 조금씩 비례식에 적응해보자.

16. 그림은 빗면을 따라 운동하는 물체 A가 점 q를 지나는 순간 점 p에 물체 B를 가만히 놓았더니, A와 B가 등가속도 운동하여 점 r에서 만나는 것을 나타낸 것이다. p와 r 사이의 거리는 d이고, r에서의 속력은 B가 A의 $\frac{4}{3}$배이다. p, q, r는 동일 직선상에 있다.



A가 최고점에 도달한 순간, A와 B 사이의 거리는? (단, 물체의 크기와 모든 마찰은 무시한다.) [3점]

① $\frac{3}{16}d$ ② $\frac{1}{4}d$ ③ $\frac{5}{16}d$ ④ $\frac{3}{8}d$ ⑤ $\frac{7}{16}d$

20220916

일단 r에서의 속력이 3:4이다. 그래서 이걸 그냥 3, 4라 해보자.(어차피 비율이니 상관 없다) A는 빗면 위로 1로 이동하다가 나중에 빗면 아래로 3, B는 0이였다가 빗면 아래로 4로 이동하게된다. 속도가 4 변하는동안 걸린 시간도 4라고 해보자. 그럼 아래와 같은 표를 떠올리는 것이 가능하다.

	v	t	vt
(1)	2	4	d
(2)	1	4	x
(3)	1	1	1

(1) B가 평균 속력 2로 시간 4 동안 이동한 거리 d

(2) A, B가 상대 속도 1로 시간 4동안 좁힌 거리 x

(3) A가 속도 1이 변한 최고점까지 걸린 시간 1동안 상대속도 1로 좁힌 거리 1

(1)과 (2)에서 우리는 d와 x에 각각 8, 4라는 수를 대입시켰다. 최고점에서 A, B와의 거리를 위 표에서 계산된 비율로 구하면 $x-1=4-1=3=\frac{3}{8}d$임을 알 수 있다.

역학 문항에 점점 익숙해지면서 최종적으로 도달하게 되는 풀이의 공통점이 위처럼 공통 문자를 최대한 쓰지 않고 숫자로 풀고, 그 숫자를 공통문자와 매칭시키는 방식의 풀이가 아닐까 싶다. 다만, 그러기 위해서는 비례식, 그리고 각 물리량들의 비율 관계를 통해 비율계산을 하는것에 익숙해져야 할 것이다.

2.1.5 시간차 운동

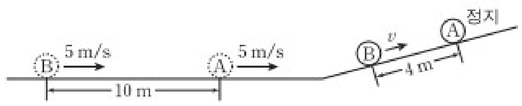
제목을 뭐라 적을까 고민하다가 시간차 운동이라 적어보았는데 먼저 시간차 운동을 본 교재에서는 아래와 같이 정의하겠다.

서로 다른 두 물체가 **모든 지점에서 속도가 서로 동일할 경우** 두 물체는 시간차 운동을 한다고 할 수 있다.
이는 A의 과거 또는 미래의 모습이 B임을 의미한다.

만약 빗면상에 존재하는 점 p에 A를 놓음과 동시에 B는 p보다 아래의 점 q를 빗면 아랫 방향으로 속력 v로 통과하였다 하자. 그리고 A는 점 q를 속력 v로 지나간다면 A와 B는 시간차 운동을 한다고 할 수 있으며, 이는 A의 미래가 곧 B임을 의미한다.

이처럼 A의 t초 후 과거/미래 가 B라는 포인트를 문항 내에서 잡으면 풀이가 줄어드는 경우가 많은데, 이는 A의 미래/과거 가 B라는 것을 이용하여 식을 세우는 것이 결국에는 A에 대한 식과 B에 대한 식을 연립하는것과 다를게 없기 때문이다. 간단한 예제를 보도록 하겠다.

20. 그림은 수평면에서 간격 10m를 유지하며 일정한 속력 5m/s로 운동하던, 질량이 같은 두 물체 A, B가 기울기가 일정한 경사면을 따라 운동하다가 A가 경사면에 정지한 순간의 모습을 나타낸 것이다. 이 순간 B의 속력은 v이고, A, B 사이의 간격은 4m이다.



이에 대한 설명으로 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은? (단, A, B는 동일 연직면 상에서 운동하며, 물체의 크기와 마찰력은 무시한다.)

〈보 기〉

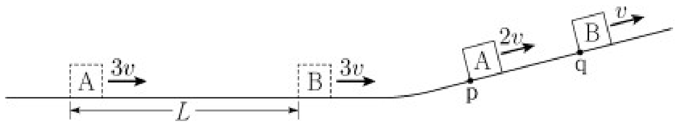
ㄱ. A가 경사면을 올라가기 시작한 순간부터 2초 후에 B가 경사면을 올라가기 시작한다.
ㄴ. A가 경사면을 올라가는 동안, A의 가속도의 크기는 2m/s^2이다.
ㄷ. v는 4m/s이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

20130920

위 문항을 보았을 때 A와 B는 모든 지점에 대하여 속도가 동일하지 않은가? B의 미래를 A라고 생각한다면 B의 2초뒤 모습이 A라는 것을 알 수 있다. 이와 같이 어느 한 물체가 다른 물체의 과거/미래 라고 생각한다면 조금 더 접근하기가 쉽다. ㄱ은 참일것다. 위 그림에서 빗면에 존재하는 B는 정지하기까지 2초가 걸릴 테고, 그동안의 평균 속력은 $\frac{4m}{2s} = 2m/s$일테니 속력 $v = 4m/s$이고 , 가속도는 $2m/s^2$임을 알 수 있다.

11. 그림과 같이 수평면에서 간격 L을 유지하며 일정한 속력 $3v$로 운동하던 물체 A, B가 빗면을 따라 운동한다. A가 점 p를 속력 $2v$로 지나는 순간에 B는 점 q를 속력 v로 지난다.



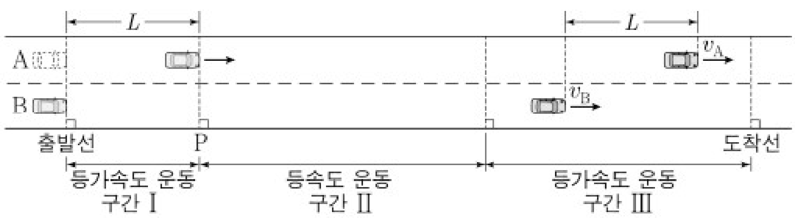
p와 q 사이의 거리는? (단, A, B는 동일 연직면에서 운동하며, 물체의 크기, 모든 마찰은 무시한다.)

① $\frac{2}{5}L$　② $\frac{1}{2}L$　③ $\frac{\sqrt{3}}{3}L$　④ $\frac{\sqrt{2}}{2}L$　⑤ $\frac{3}{4}L$

20210911

역시 이 문항도 A의 미래가 B이다. 그 시간차를 t라 해보자. A의 평면에서 평균 속력은 $3v$, 빗면에서는 $1.5v$로 평균 속력 비율이 2:1이니 이동거리도 2:1이므로 p와 q 사이 거리는 $\frac{1}{2}L$임을 알 수 있을 것이다.

18. 그림과 같이 직선 도로에서 출발선에 정지해 있던 자동차 A, B가 구간 Ⅰ에서는 가속도의 크기가 $2a$인 등가속도 운동을, 구간 Ⅱ에서는 등속도 운동을, 구간 Ⅲ에서는 가속도의 크기가 a인 등가속도 운동을 하여 도착선에서 정지한다. A가 출발선에서 L만큼 떨어진 기준선 P를 지나는 순간 B가 출발하였다. 구간 Ⅲ에서 A, B 사이의 거리가 L인 순간 A, B의 속력은 각각 v_A, v_B이다.



$\frac{v_A}{v_B}$는? [3점]

① $\frac{1}{4}$　② $\frac{1}{3}$　③ $\frac{1}{2}$　④ $\frac{2}{3}$　⑤ 1

20230618

위 문항 역시 A는 B의 미래라고 볼 수 있다. 위 문항은 공통 문자의 소거, 시간차 운동 둘을 모두 사용한다면 재미있게 풀 수 있는 문항이라 생각한다. 참고로 필자는 위처럼 p, q, r, s꼴로 어떠한 지점이 주어질 경우 각 지점별로 속력, 걸리는 시간 등을 표기해가며 푸는걸 선호한다. 그래야 검토하기도 편하니 말이다.

일단 A는 B의 시간 t후의 모습이라 해보자. 그렇다면 문항 내에서 이러한 시간차로 얻을 수 있는 단서는 두가지 정도가 있겠다. 첫째로 등가속도 운동 구간 III의 그림상 B가 L만큼 이동하는데 걸리는 시간이 t이고 v_B에서 시간 t

후의 속력이 v_A이다. 이걸 식으로 표현한다면 첫 번째 조건은 $\frac{v_A+v_B}{2}t=L$일것이고 두 번째 조건은 $v_B-at=v_B$일 것이다. 이것을 연립하면 아마 답이 나올텐데, 필자는 속력에 대해 가속도 a도 생략하고, 시간 t도 생략하고 거리에 대해 L도 생략할 것이다. 이를 식으로 표현하면 다음과 같다.

$$v_B-1=v_A \ (v_B-at=v_A),\ \frac{v_A+v_B}{2}=1 \ (\frac{v_A+v_B}{2}t=L)$$

$$v_A-v_B=-1, v_A+v_B=2$$

$$v_A=\frac{1}{2}, v_B=\frac{3}{2}$$

a와 t를 생략한다는 것은 속도 변화량을 숫자로 나타냄을 의미하고, 이에 따라 v_A와 v_B는 비례 상수가 맞춰진 어떠한 상수비로 자연스레 계산될 것이다.

어떻게 보면 시간차 운동은 상대속도를 사용 가능한 상황에서도 특수한 케이스라고 볼 수 있다. 종종 이런 유형이 출제되곤 하는데 개인적인 경험으로는 시간차 문항이 출제하기가 상대적으로 더 쉽다...! 시간차로 해석할때의 장점은 불필요한 계산이 획기적으로 줄어든다. 어찌보면 당연한게, 시간차 해석이 결국엔 A, B에 대한 식을 연립하는 것이라 동일한 요소들이 자연스레 사라진다. 따라서 A, B가 동일한 궤도를 운동한다면 두 물체가 동일한 운동을 하는지 체크 해보도록 하자.

2. 에너지

이번 파트는 $W = Fs$와 $E = mgh = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kx^2$, 에너지에 대한 내용을 다뤄보려 한다. 몇가지 선호하는 풀이 방식에 대하여 서술 할 것인데 풀이 방식 이전에 다시 한번 운동 에너지와 퍼텐셜 에너지에 대해 간단하게 알아보겠다. (정말 간단하게만 다루고 넘어갈거다!)

2.2.1 힘과 에너지의 연관성

(1) 중력 퍼텐셜 에너지 (mgh)

증가 조건 : 높이 증가
감소 조건 : 높이 감소
변화 크기 : 수직 중력 × |수직 변위| = 빗면 중력 × |빗면 변위| = 질량 × 빗면가속도 × |빗면 변위|

중력 퍼텐셜 에너지는 변위가 정해지면 그 과정과 관계없이 퍼텐셜 에너지가 정해진다. 추가로, 앞서 말했듯 물체의 중력과 높이 변화의 곱은 물체가 빗면 방향으로 받는 중력과 빗면 방향으로의 변위의 곱과 크기가 동일하다. 빗면 가속도를 a_1, a_2, a_3....라 하고 높이 h에 대한 빗면 길이를 s_1, s_2, s_3라 하면 $a_1s_1 = a_2s_2 = a_3s_3 \cdots\cdots = gh$
$as = gh$

(2) 운동 에너지 $(\frac{1}{2}mv^2)$

- 부호 미부여시
증가 조건 : v증가 = 알짜힘과 운동 방향이 동일
감소 조건 : v감소 = 알짜힘과 운동 방향이 반대
변화 크기 : $\frac{1}{2}m\triangle(v^2)$ = 알짜힘 × 변위 크기

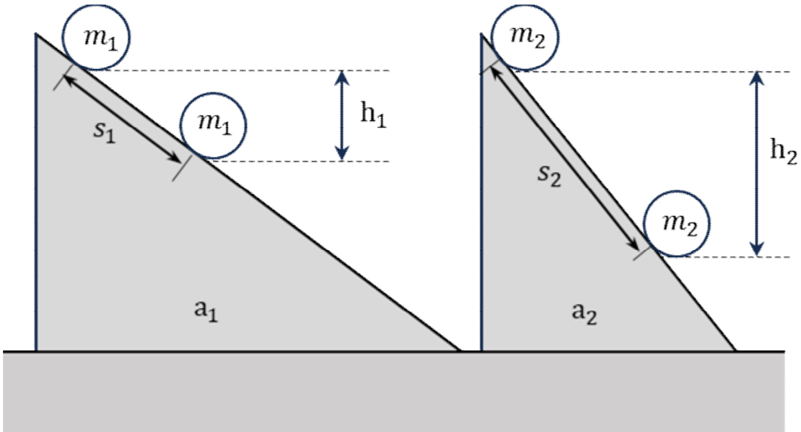
- 부호 부여시
증가 조건 : v증가 = 알짜힘과 운동 방향이 동일
감소 조건 : v감소 = 알짜힘과 운동 방향이 반대
운동 에너지에 부호 부여시 변화 크기 = 알짜힘 × 이동 거리

알짜힘 = 전체 알짜힘 × 물체 질량 ÷ 전체 질량

앞서 말했듯 필자는 운동 에너지가 $\frac{1}{2}mv^2$처럼 양수꼴이라 해도 물체의 운동 방향에 따라 부호를 붙여주는 것을 선호한다. 문항 조건에 따라 변위가 나올 수도 있고, 이동 거리가 나올 수도 있을 텐데 이를 자유롭게 이용하기 위해서 위처럼 부호 부여/미부여에 따른 차이점을 이해해두길 바란다.

(3) 역학적 에너지 $(mgh)+(\frac{1}{2}mv^2)$

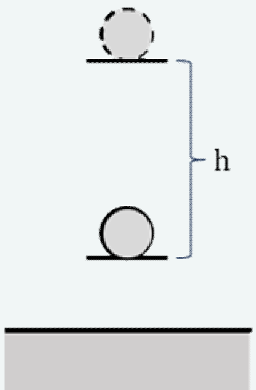
외력이 존재하지 않는 상황에 대하여 물체의 역학적 에너지는 보존된다. 이 때, 빗면에서의 운동에 대해 얘기를 해보려 한다.



위 그림은 질량이 m_1, m_2인 두 물체가 가속도가 a_1, a_2인 두 빗면에서 거리 s_1, s_2만큼 이동하고 이 때 높이 변화는 h_1, h_2임을 의미한다. 두 물체의 퍼텐셜 에너지 변화는 m_1gh_1, m_2gh_2고 이는 각각 역학적 에너지 보존 법칙에 의하여 운동 에너지도 m_1gh_1, m_2gh_2이고 이는 알짜힘이 한 일의 양이므로 결국 $m_1a_1s_1$, $m_2a_2s_2$이다.

이는, **퍼텐셜 에너지 변화비 = 질량비 × 빗면 가속도비 × 빗면 거리비**를 의미하고 양 변에 대하여 질량비를 약분하면 높이 변화비 = 빗면 가속도비 × 빗면 거리비를 의미한다. 예를 들어, 빗면 가속도 비율이 4:5라면, 동일한 높이 변화에 대한 빗면 이동 거리 비율은 5:4가 되어야 한다. ∵ 1:1=빗면 가속도비 × 빗면 거리비) 해당 개념은 뒤에서 다룰 풀이 방법에서도 사용 예정이니 기억해두도록 하자. (사실 물리학1에서 조금은 벗어나는 내용일 수 있으나 쓰면 편하니까 알아는두자,)

추가로 한가지 간단한 질문을 하겠다.



(어떠한 물체의 높이가 h 감소한 모습)

질문 : 물체의 높이가 h만큼 감소하는 과정과 관계 없이 퍼텐셜 에너지 변화는 정해져 있는가?

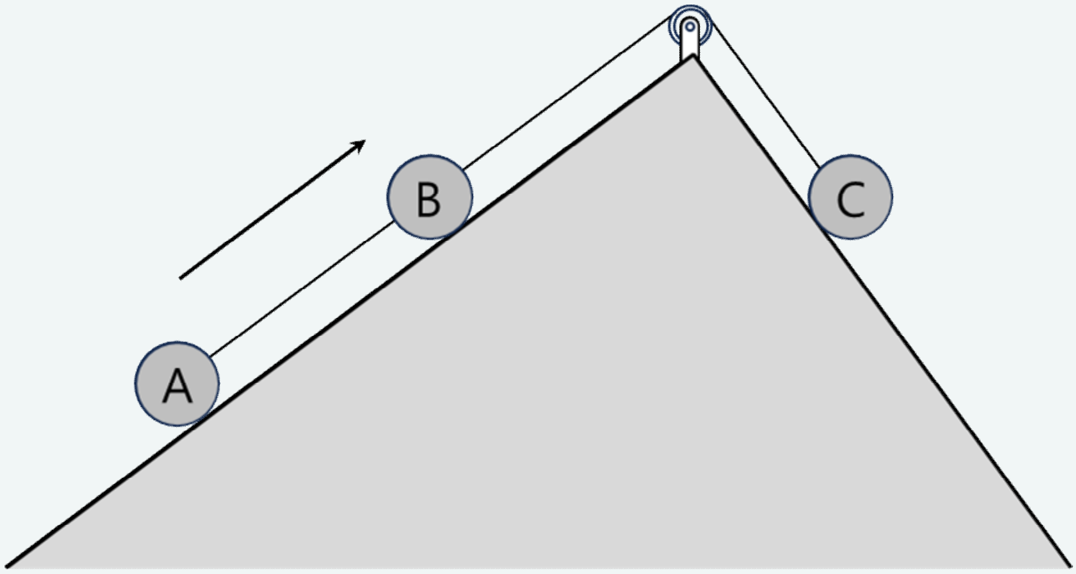
높이가 h 감소한 위 물체는 올라갔다 내려온 건지, 내려왔다 올라온 건지, 그냥 내려온 건지, 그 과정에서 속력은 일정했는지 변했는지 전혀 모른다. 이 때 퍼텐셜 에너지 변화는 과정과 상관 없이 mgh 감소한 것이 맞는가? 맞다! 높이가 h 높아지면 퍼텐셜 에너지는 mgh증가, 낮아지면 감소이다. 이 말인 즉슨 높이가 h 변하고 난 뒤의 역학적 에너지가 처음과 다르다면 이는 **중력만 작용하였을 때(자유 낙하) 가지게 되어야하는 운동에너지와 실제 해당 물체가 가지게 된 운동 에너지와의 차이**때문이라 볼 수 있다. 예를 들어 위 그림처럼 물체가 자유 낙하 운동을 하여 높이 h가 감소한 순간 운동 에너지가 $3E$로 예상된다 해보자. 그러나 실제로 이 때 운동에너지가 $3E$보다 크면 역학적 에너지는 증가, 작으면 역학적 에너지는 감소했다고 봐도 될 것이다. 따라서 역학적 에너지의 증가와 감소는 다르게 말하면 아래와 같이 정리할 수 있다.

역학적 에너지의 증가 = 동일한 높이 변화의 자유 낙하 운동과 비교 했을 때 운동 에너지가 더 큼,
역학적 에너지의 증가 = 동일한 높이 변화의 자유 낙하 운동과 비교 했을 때 운동 에너지가 더 작음.

그래서 필자는 **원래대로 라면(외력이 없다면) 운동 에너지가 3E여야 하는데 이보다 크니까 역학적 에너지는 증가하였다** 식으로 해석하는 것을 선호한다. 그렇다면 운동 에너지가 자유낙하 운동과 비교하였을 때 더 크거나 더 작은 상황은 각각 무엇을 의미하는가? 운동 에너지가 원래보다 더 크다는 것은 속력이 더 크다, 운동 에너지가 원래보다 더 작다는 것은 속력이 더 작다 라고 봐도 무방하다. 따라서 아래와 같이 다시 정리할 수 있다.

역학적 에너지의 증가 = 중력 외의 어떠한 힘(외력)에 의해 가속에 **도움**을 받음.
역학적 에너지의 증가 = 중력 외의 어떠한 힘(외력)에 의해 가속에 **방해**를 받음.

몇 가지 예시를 들어보며 알아보도록 하자.



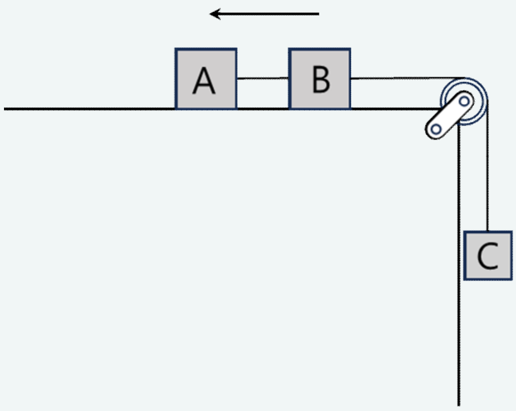
위 그림은 실로 연결된 세 물체 A, B, C가 이동중인 순간을 나타낸 것이다.
A와 B는 실로 연결된 상태로 올라가다가 정지 후 다시 내려온다.

위 상황은 A, B, C의 역학적 에너지가 어떻게 되는가? 앞서 말했듯 A, B, C가 자유 낙하 운동과 비교하였을 때 운동에 도움을 받는지 저항을 받는지를 체크해주면 된다.

A는 올라가는 동안 장력에 의해 위로 당겨진다. 즉, 장력에 의해 운동에 도움을 받는다 볼 수 있으니 역학적 에너지는 증가한다. B도 올라가는 동안 마찬가지로 장력에 의해 운동에 도움을 받는다. 하지만, 그동안 내려가는 C는 장력에 의해 운동에 방해를 받는다. 따라서 A, B가 위로 이동하는 동안 A, B의 역학적 에너지는 증가, C의 역학적 에너지는 감소한다고 해석한다.

A는 내려가는 동안 장력에 의해 위로 당겨지며 운동에 방해를 받으며 B역시 마찬가지이다. 그동안 올라가는 C는 장력에 의해 운동에 도움을 받으므로 역학적 에너지는 증가한다. 따라서 아래와 같이 정리할 수 있다.

A, B가 올라가는 동안 A, B는 역학적 에너지 증가, C의 역학적 에너지 감소 (합 0)
A, B가 내려가는 동안 A, B의 역학적 에너지 감소, C의 역학적 에너지 증가 (합 0)



위 상황에서, A, B, C의 역학적 에너지는 어떻게 변하겠는가?

각 물체가 외력이 없을 때와 비교하였을 때 도움을 받는지, 받지 않는지를 따지면 마찬가지로 역학적 에너지의 크기 변화를 쉽게 따질 수 있다.

A는 원래대로라면 왼쪽으로 등속운동을 해야하나, 장력에 의해 방해를 받고 있다. 따라서 A는 왼쪽으로 이동하는 동안 역학적 에너지가 감소한다. 이후에는 오른쪽으로 이동하며 장력에 의해 도움을 받으니 역학적 에너지가 증가한다. 이는 B 또한 마찬가지이다.

C는 올라가는 동안 장력에 의해 도움을 받으므로 역학적 에너지가 증가한다. 하지만 내려가는 동안 장력에 의해 운동에 방해를 받으므로 역학적 에너지가 감소하게 된다.

A, B가 왼쪽으로 이동하는 동안 A, B는 역학적 에너지 감소 C의 역학적 에너지 증가 (합 0)
A, B가 오른쪽으로 이동하는 동안 A, B의 역학적 에너지 증가, C의 역학적 에너지 감소 (합 0)

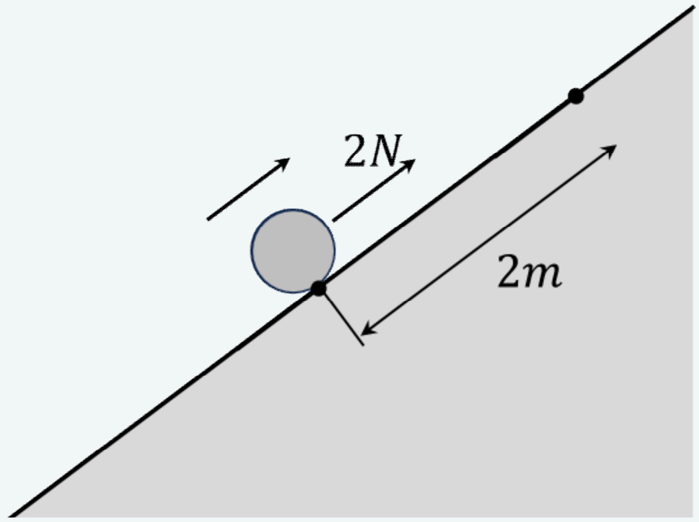
그렇다면 이 때 물체의 역학적 에너지는 얼마나 변하는가? 물체는 알짜힘 F를 받으며 변위 s만큼 이동시 운동에너지가 Fs만큼 변할 것이다. 만약 외력 F'이 함께 작용한다면 운동 에너지의 크기변화는 $|F+F'|s$가 될 것이다. 따라서 아래와 같이 정리하는 것이 가능하다.

역학적 에너지의 증가 조건 = 외력과 이동 방향이 동일 (도움)
역학적 에너지의 감소 조건 = 외력과 이동 방향이 반대 (방해)
역학적 에너지의 변화 크기 = 외력 × 이동거리 (방향 따로 체크)

예시와 함께 이해해보도록 하자.

(3) 역학적 에너지 $(mgh)+(\frac{1}{2}mv^2)$

이번 파트에서는 역학적 에너지를 중점적으로 얘기해보려 한다.



그림은 빗면 윗 방향으로 크기 2N의 외력을 받는 물체의 모습을 나타낸 것이다.
물체는 $2m$를 더 올라간 뒤 내려온다.

물체의 초기 역학적 에너지를 E_0이라 하겠다. 그렇다면 최고점까지 올라가는 과정에서 물체는 외력에 의해 운동에 도움을 받는다 할 수 있다. 따라서 최고점에서 물체의 역학적 에너지는 E_0+4J이라 할 수 있다. 반대로 최고점에서 물체가 다시 원래 위치로 돌아오는 과정에서는 외력에 의해 물체의 역학적 에너지는 $4J$ 감소하여 역학적 에너지는 다시 E_0이 된다. 뭔가 떠오르는게 있지 않은가? 가속도가 일정한 범위에 대하여 물체의 속력은 최고점으로부터 전후 대칭을 이룬다. 위처럼 외력이 일정하게 작용한다면 역시 가속도가 일정한 범위이고, 속력은 위치가 동일하면 동일하고, 위치가 동일하면 퍼텐셜 에너지 역시 동일하다. 즉, 운동 에너지가 대칭을 이루고, 역학적 에너지 역시 대칭을 이룸을 의미한다.

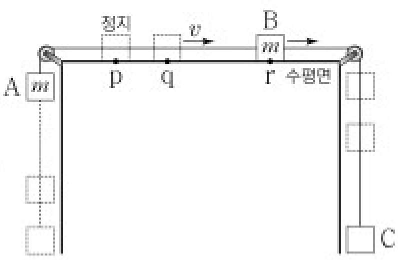
물체에 작용하는 힘이 일정한, 어떠한 가속 구간에 대하여
물체의 운동 에너지, 역학적 에너지, 퍼텐셜 에너지는 최고점을 기준으로 모두 대칭을 이룬다.

최고점을 기준으로 t초 전후는 역학적 에너지도 같고, 퍼텐셜 에너지도 같고, 운동 에너지도 같다. 또한, 역학적 에너지의 변화는 변위로도 해석이 가능하다. 중력의 방향은 빗면 아랫방향이다. 외력의 방향과 변위에 부호를 부여한 뒤 이 둘을 곱한 Fs값은 역학적 에너지의 변화를 의미한다.
위 예시를 기준으로는 F의 부호는 -, s는 그림상의 위치보다 위라면 -, 아래라면 +일 것이다. 따라서, 물체는 현재 위치보다 위면 역학적 에너지가 증가, 아래라면 감소하게 된다. 따라서 필자는 중력 퍼텐셜 에너지, 운동 에너지, 역학적 에너지를 아래와 같이 연관짓는 것을 좋아한다.

중력 퍼텐셜 에너지 : 중력
운동 에너지 : 알짜힘
역학적 에너지 : 외력

한번 몇 가지 예제를 한번 풀어보도록 하자.

19. 그림은 물체 A, B, C를 실로 연결하여 수평면의 점 p에서 B를 가만히 놓아 물체가 등가속도 운동하는 모습을 나타낸 것이다. B가 점 q를 지날 때 속력은 v이다. B가 p에서 q까지 운동하는 동안 A의 중력 퍼텐셜 에너지의 증가량은 A의 운동 에너지 증가량의 4배이다. B의 운동 에너지는 점 r에서가 q에서의 3배이다. A, B의 질량은 각각 m이고, q와 r 사이의 거리는 L이다.



B가 r를 지날 때 C의 운동 에너지는? (단, 중력 가속도는 g이고, 물체의 크기, 실의 질량, 모든 마찰은 무시한다.)

① $\frac{3}{4}mgL$ ② $\frac{4}{5}mgL$ ③ $\frac{5}{6}mgL$ ④ mgL ⑤ $\frac{4}{3}mgL$

20230719

이런 에너지 문항은 문장별로 끊어서 수식화 하고, 그 수식들로 풀리지 않으면 숨겨진 조건이 있는지 찾아보는걸 선호하는데 십중팔구는 $s=vt$꼴로 숨겨져 있는 경우가 많다.

첫 조건으로 B가 pq를 이동하는 동안 A의 중력 퍼텐셜 에너지 증가량 : A의 운동에너지 증가량 = 4:1이다. 우리는 이걸 보고 A중력과 A 알짜힘의 비율이 4:1임을 잡아내야한다. 즉, A가 받는 알짜힘은 $0.25mg$이다. 그리고 이는 C의 질량을 cm이라 할 경우 전체 알짜힘 $(c-1)mg$ 중 $\frac{m}{2m+cm}=\frac{1}{2+c}$만큼 분배받은 것이다. 따라서 이를 계산해 보면 $\frac{c-1}{2+c}mg=\frac{1}{4}mg$, $4c-4=2+c$, $c=2$이므로 C의 질량은 $2m$이다. 두 번째 조건으로 B의 운동 에너지는 r에서가 q에서의 3배라는데, 이는 p로부터 알짜힘이 한 일의 양이 1:3임을 의미하고, 이는 pq와 pr의 거리가 1:2임을 의미하므로 p와 r 사이 거리는 $1.5L$이다.

그렇다면 문항에서 구하고자 하는 B가 r을 지날 때 C의 운동에너지는 어떻게 구할까?

(1) C의 알짜힘에 거리 pr(1.5L) 을 곱한 값을 구하기

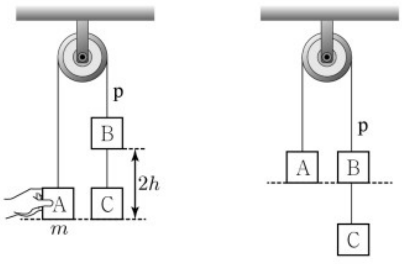
C의 알짜힘은 전체 알짜힘 mg 중 절반을 분배 받아 $0.5mg$이므로 $\frac{1}{2}mg\times\frac{3}{2}L=\frac{3}{4}mgL$

(2) A 또는 B의 운동 에너지에 2 곱하기. (속력이 동일하면 운동에너지는 질량에 비례함)

A가 받는 알짜힘이 $0.25mg$이므로 $\frac{1}{4}mg\times\frac{3}{2}L\times2=\frac{3}{4}mgL$

보통은 (1)을 택하고, (2)같은 발상은 뒤에서 사용하게 될 것이다.

19. 그림 (가)는 물체 A, B, C를 실로 연결한 후, 질량이 m인 A를 손으로 잡아 A와 C가 같은 높이에서 정지한 모습을 나타낸 것이다. A와 B 사이에 연결된 실은 p이고, B와 C 사이의 거리는 $2h$이다. 그림 (나)는 (가)에서 A를 가만히 놓은 후 A와 B의 높이가 같아진 순간의 모습을 나타낸 것이다. (가)에서 (나)로 물체가 운동하는 동안 운동 에너지 변화량의 크기는 C가 A의 3배이고, A의 중력 퍼텐셜 에너지 변화량의 크기와 C의 역학적 에너지 변화량의 크기는 같다.



(가) (나)

(나)에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, 모든 마찰과 공기 저항, 실의 질량은 무시한다.) [3점]

<보 기>

ㄱ. A의 속력은 $\sqrt{2gh}$ 이다.
ㄴ. B의 질량은 $2m$ 이다.
ㄷ. p가 B를 당기는 힘의 크기는 mg 이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

20200719

역시 조건을 잘 끊어서 읽어보자.

조건 1 : A, C의 운동 에너지 변화량의 크기는 1:3이다.

운동 에너지의 변화량의 크기는 알짜힘이 한 일의 양이며, 이는 알짜힘 의 크기가 1:3임을 의미한다. 알짜힘의 크기가 1:3이라는 것은 알짜힘의 분배를 떠올려보면 질량이 1:3이라는걸 알 수 있다.

조건 2 : A의 중력 퍼텐셜 에너지 변화량의 크기와 C의 역학적 에너지 변화량의 크기는 같다.

이는 A가 받는 중력의 크기와 C가 받는 외력(장력)의 크기가 1:1임을 의미한다. 즉, C가 받는 외력은 mg일것이고, C의 질량이 $3m$이므로 받는 알짜힘은 $2mg$임을 알 수 있다. B의 질량을 bm이라 하면 C가 받는 알짜힘의 크기는 $2=\frac{3}{4+b}(2+b)$ (m, g 생략) $8+2b=6+3b$, $b=2$이다.

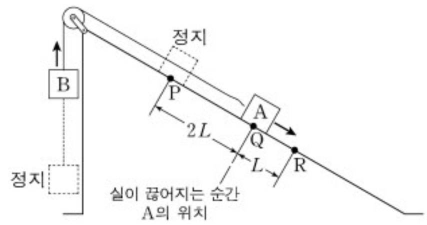
ㄱ. (나)는 (가)에서 물체가 h만큼 이동한 모습이다. C의 알짜힘이 $2mg$이므로 A의 알짜힘은 $\frac{2}{3}mg$이다. 따라서 A의 운동에너지는 $\frac{2}{3}mgh=\frac{1}{2}mv^2$, $v=\sqrt{\frac{4}{3}gh}$ 이다.

ㄴ. b의 질량은 2m이 맞다.

ㄷ. p가 B를 당기는 힘 = A를 당기는힘이며 A가 받는 알짜힘은 위로 $\frac{2}{3}mg$이다. 따라서 장력의 크기는 $\frac{5}{3}mg$다.

이처럼, 에너지 관련 문항을 보면 각 에너지 변화량의 비율을 알려주는 경우가 많다. 이 경우 각 에너지를 힘과 연관을 지어 각 힘이 한 일로 해석을 한다면 보다 접근하기가 쉬울 것이다.

20. 그림과 같이 물체 A, B를 실로 연결하고 빗면의 점 P에 A를 가만히 놓았더니 A, B가 함께 등가속도 운동을 하다가 A가 점 Q를 지나는 순간 실이 끊어졌다. 이후 A는 등가속도 직선 운동을 하여 점 R를 지난다. A가 P에서 Q까지 운동하는 동안, A의 운동 에너지 증가량은 B의 중력 퍼텐셜 에너지 증가량의 $\frac{4}{5}$배이고, A의 운동 에너지는 R에서가 Q에서의 $\frac{9}{4}$배이다.



A, B의 질량을 각각 m_A, m_B라 할 때, $\frac{m_A}{m_B}$는? (단, 물체의 크기, 마찰과 공기 저항은 무시한다.) [3점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

20180620

조건 1 : P에서 Q까지 A의 운동 에너지 증가량 : B의 퍼텐셜 증가량 = A알짜힘 : B중력 = 4:5
조건 2 : A의 운동 에너지는 Q : R= 4 : 9

조건 2는 다르게 보면 PQ, QR에서의 운동에너지 증가량이 4:5라는 의미이다. 그리고 PQ, QR에서의 거리는 2:1이므로 각 구간 A의 알짜힘 비율은 $\frac{4:5}{2:1} = 2:5$고 이는 실이 끊기기 전, 후 A의 알짜힘이다.

실이 끊기고 난 후 A가 받는 힘은 빗면 중력이다. 잠시 아래 두 비례식을 보자.

구간 PQ와 QR의 A 알짜힘 = 2:5, [조건1] PQ A알짜힘 : B 중력 = 4:5

위 두 비례식은 비례 상수가 같은가? A 알짜힘을 보니 비례상수가 다름을 알 수 있다. 맞춰주면 다음과 같다.

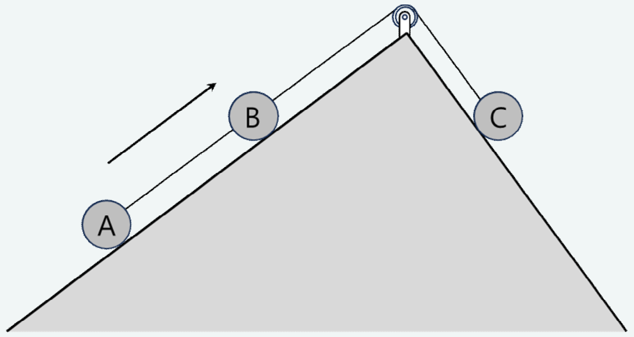
구간 PQ와 QR의 A 알짜힘 = 4:10, [조건1] PQ A알짜힘 : B 중력 = 4:5

따라서, PQ에서 A는 빗면 중력 10을 받고, B는 중력 5를 받으니 전체 알짜힘은 5다. A가 받는 알짜힘은 4이므로 A는 전체 알짜힘의 $\frac{4}{5}$를 받았으니 $\frac{m_A}{m_A + m_B} = \frac{4}{5}$이고 $m_A : m_B = 4:1$이다.

지금 문항을 풀어보면 알겠지만, 알짜힘의 분산, 각 힘별 에너지의 영향, 비례식 등등 기존에 배운 개념들이 복합적으로 사용되고 있다. 이러한 이유로 현재 내용이 잘 이해가 가지 않으면 다시 chap1로 돌아가길 바란다.

2.2.2 에너지 변화량 방정식

이번에는 연결된 물체들의 역학적 에너지 보존에 대해 다뤄보려 한다.



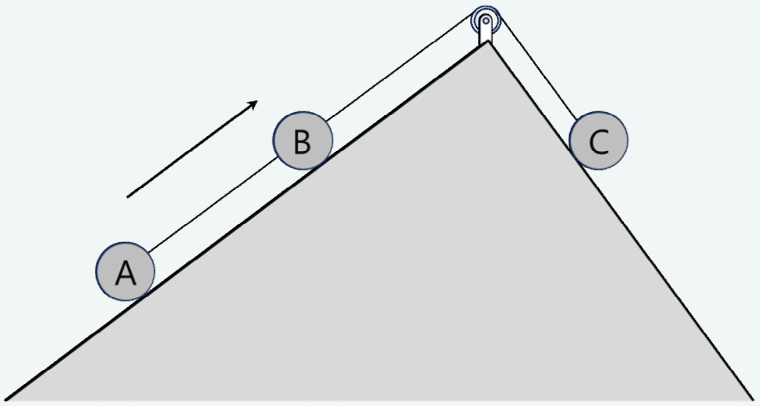
위는 A, B, C가 연결된 상태로 이동중인 모습을 나타낸 것이다. 이 때 A, B, C의 역학적 에너지의 합은 일정하다는 사실을 우리는 익히 알고 있을 것이다. 이 경우 여러 가지 풀이가 있겠지만 필자는 아래와 같이 식을 작성하는 것을 매우 선호한다. 본 교재에서는 아래와 같은 식을 에너지 변화량 방정식 이라 하겠다.

외력 없이 연결된 상태로 운동하는 A, B, C의 중력 퍼텐셜 에너지, 운동 에너지 변화량의 **크기는**
A_p, B_p, C_p, A_k, B_k, C_k로 표현 한다.

이 때 **증가한 요소들의 합 = 감소한 요소들의 합** 으로 표현할 수 있으며
이를 본 교재에서는 에너지 변화량 방정식 이라 칭한다.

이 때, 각 요소들의 증가와 감소, 변화량의 크기기는 2.2.1 내용을 따른다.

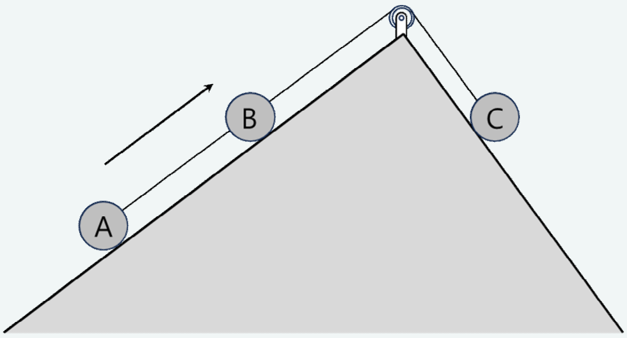
에너지 변화량 방정식을 한번 세워보도록 하자.



A를 가만히 잡은 뒤에 두었더니 화살표 방향으로 운동을 시작하였다.

위 상황의 경우 에너지 변화량 방정식을 어떻게 세울 수 있을까?

A를 잡은 뒤 가만히 두자 A, B, C는 가속 운동 하므로 운동 에너지는 **증가**하였을 것이다. A, B는 높이가 **증가**하였으므로 위치 에너지는 **증가**, C는 높이가 **감소**하였으므로 위치 에너지는 감소하였을 것이다. 따라서 에너지 변화량 방정식은 $A_k + B_k + C_k + A_p + B_p = C_p$로 작성가능하다. 몇 개 더 써보자.



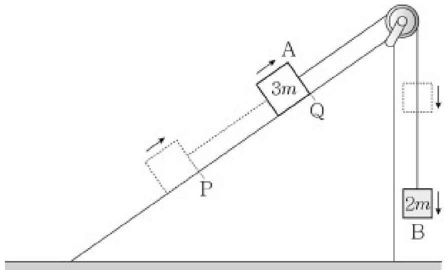
A, B는 올라가다가 나중에 **멈춘다.**
올라가는 동안의 에너지 변화량 방정식을 작성하여라

앞 상황을 살짝 바꾼 것이다. A, B, C는 속력이 감소하므로 운동 에너지는 감소한다. A, B의 위치 에너지는 증가할것이며 C의 위치 에너지는 감소할 것이다. 따라서 $A_p + B_p = C_p + A_k + B_k + C_k$이다. 만약, 세 물체가 모두 등속도 운동을 한다면? $A_k = B_k = C_k = 0$이므로 $A_p + B_p = C_p$가 될 것이다.

여기서 잠시 팁이라면, 필자는 방정식을 작성할 때 가급적 **A, B, C 순서로 작성한다.** 앞서 작성한 방정식들의 앞 문자를 보면 A, B, C 순서이다. 그래야 A, B, C의 질량 비율을 이용할 때 헷갈리지 않는다.

이처럼 연결된 상태로 외력 없이 운동하는 물체들에 대한 에너지 변화량 방정식 작성시엔 몇가지 특성이 존재한다.
(1) A_k, B_k, C_k는 물체의 알짜힘에 비례하고, 이는 질량에 비례한다.
(2) A_p, B_p, C_p는 중력과 높이 변화 또는 빗면 중력과 빗면 거리에 비례한다.
지금부터의 예제는 변화량 방정식을 통해 풀어보도록 하자.

20. 그림은 물체 A가 물체 B와 실로 연결된 채 경사면을 따라 등가속도 운동을 하는 모습을 나타낸 것이다. A, B의 질량은 각각 $3m$, $2m$이고, A가 P점에서 Q점까지 운동했을 때 B의 퍼텐셜 에너지 감소량은 B의 운동 에너지 증가량의 10배이다.



A의 가속도의 크기는? (단, 중력 가속도는 g이다.) [3점]

① $\frac{1}{10}g$ ② $\frac{1}{5}g$ ③ $\frac{2}{5}g$ ④ $\frac{1}{2}g$ ⑤ $\frac{3}{5}g$

20130320

문항 조건에서 B의 운동 에너지가 증가하므로 A도 증가한다. 따라서 $A_k + B_k + A_p = B_p$다. 이제, 문항 조건에 따라 각 요소별 숫자 맞추기를 할것인데 필자는 아래와 같이 표 형식으로작성하는 것을 선호한다.

A_k	+	B_k	+	A_p	=	B_p
	+	1	+		=	10

이제 문항 조건에 따라 숫자를 맞춰보자. 일단 B_k와 B_p는 문항 조건에 따라 1, 10이라 쓸 수 있다.

A_k	+	B_k	+	A_p	=	B_p
1.5	+	1	+		=	10

A와 B는 질량이 3:2이므로 운동에너지 변화도 3:2이므로 A_k는 3이다. 이쯤되면 떠오르는 아이디어가 있을 수 있다. 그냥 애초에 B_k랑 B_p를 2, 20으로 놓으면 더 편하지 않나? **상관없다!** 그렇게 해도 된다.

A_k	+	B_k	+	A_p	=	B_p
1.5	+	1	+	7.5	=	10

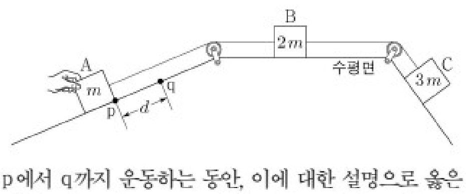
마지막으로 A_p를 구해주면 완성이다. 그렇다면 문항에서 원하는 A의 가속도의 크기는 어떻게 구할까? p값은 중력이 한 일의 양이다. 위 표를 해석하면 아래와 같이 해석하는것도 가능하다.

A_k	+	B_k	+	A_p	=	B_p
1.5	+	1	+	7.5	=	10
알짜힘		알짜힘		빗면 중력		중력
$0.3mg$		$0.2mg$		$1.5mg$		$2mg$

따라서 A의 가속도는 $\frac{0.3mg}{3m} = \frac{1}{10}g$이다.

물론, B의 퍼텐셜 에너지 감소량 : 운동에너지 증가량 = 10:1 = $2mg : 0.2mg$로 B의 알짜힘을 구해 B의 가속도를 구해도 상관은 없다. 다만, 위와 같은 방정식 풀이가 유용하게 사용되는 경우도 있으니 꼭 알아두길 바란다. 한 문항만 더 풀어보자,

19. 그림은 물체 A, C를 수평면에 놓인 물체 B의 양쪽에 실로 연결하여 서로 다른 빗면에 놓고, A를 손으로 잡아 점 p에 정지시킨 모습을 나타낸 것이다. A를 가만히 놓으면 A는 빗면을 따라 등가속도 운동한다. A가 p에서 d만큼 떨어진 점 q까지 운동하는 동안 A, C의 중력 퍼텐셜 에너지 변화량의 크기는 각각 E_0, $7E_0$이다. A, B, C의 질량은 각각 m, $2m$, $3m$이다.



A가 p에서 q까지 운동하는 동안, 이에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, 물체의 크기, 실의 질량, 모든 마찰은 무시한다.)

<보 기>

ㄱ. A의 운동 에너지 변화량과 중력 퍼텐셜 에너지 변화량은 크기가 같다.

ㄴ. B의 가속도의 크기는 $\frac{2E_0}{md}$이다.

ㄷ. 역학적 에너지 변화량의 크기는 B가 C보다 크다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄷ

20240619

A를 잡았다가 놓자 가속운동을 시작하였으므로 $A_k + B_k + C_k + A_p = C_p$다. A, B, C의 질량이 1:2:3이므로 일단 아래와 같이 표를 채워보자.

A_k	+	B_k	+	C_k	+	A_p	=	C_p
2		4		6				

(뒤에 내용 때문에 일부러 1,2,3이 아니라 2,4,6이라 적어보았다.) 문항 조건에서 A_p, C_p가 1:7임을 알려주었으니 채우면 아래와 같다.

A_k	+	B_k	+	C_k	+	A_p	=	C_p
2		4		6		**1**		**7**

지금 1, 7은 굵게 적어두었다. 위 식은 2:4:6이라는 비율과 1:7이라는 비율로 이루어져 있다. 허나, 이 두 비례식은 비례 상수가 일치하지 않아 성립하지 않으므로 비례 상수를 맞춰주는 과정이 필요하다. 이 때 필자는 비례식끼리 몰아준다. 2+4+6+**1=7**을 이항 하여 2+4+6=**7-1**로 작성하면 좌변, 우변이 2:1이다. 따라서, 좌변 우변에 1:2 비율로 곱하여 비율을 맞춰주는편이다. 1,7에 2를 곱하면 아래와 같다.

A_k	+	B_k	+	C_k	+	A_p	=	C_p
2		4		6		**2**		**14**

그리고 비율을 간단하게 만들면 아래와 같다.

A_k	+	B_k	+	C_k	+	A_p	=	C_p
$1E_0$		$2E_0$		$3E_0$		$1E_0$		$7E_0$

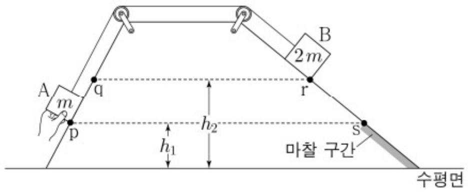
ㄱ. $A_k = A_p$인지 묻는 문항이므로 정답이다.

ㄴ. B가 받는 알짜힘을 F라 하면 $Fd = 2E_0$이다. B의 가속도는 $a = \dfrac{\frac{2E_0}{d}}{2m} = \dfrac{E_0}{md}$이다.

ㄷ. 역학적 에너지 변화량의 크기는 곧 외력의 크기이다. B 입장에서의 외력은 오른쪽 장력 - 왼쪽 장력 이고 C 입장에서의 외력은 B의 오른쪽 장력이니 역학적 에너지 변화량의 크기는 C가 더 크다.

마지막으로 딱 한 문항만 더 풀어보자.

20. 그림은 질량이 각각 m, $2m$인 물체 A, B를 실로 연결하고 서로 다른 빗면의 점 p, r에 정지시킨 모습을 나타낸 것이다. A를 가만히 놓았더니 A가 점 q를 지나는 순간 실이 끊어지고 A, B는 빗면을 따라 가속도의 크기가 각각 $3a$, $2a$인 등가속도 운동을 한다. B는 마찰 구간이 시작되는 점 s부터 등속도 운동을 한다. A가 수평면에 닿기 직전 A의 운동 에너지는 마찰 구간에서 B의 운동 에너지의 2배이다. p와 s의 높이는 h_1로 같고, q와 r의 높이는 h_2로 같다.



$\frac{h_2}{h_1}$는? (단, 실의 질량, 물체의 크기, 공기 저항, 마찰 구간 외의 모든 마찰은 무시한다.) [3점]

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{7}{4}$ ③ 2 ④ $\frac{9}{4}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

20220920

일단 처음 p, q에서 운동하는 동안 변화량 방정식은 $A_k + B_k + A_p = B_p$다. 질량비가 1:2이므로 A_k, B_k도 1:2이다. 양 빗면의 가속도는 3:2이고 질량비는 1:2, 빗면 이동거리는 동일하므로 빗면 중력은 3:4이므로 A_p, B_p는 3:4이다. 그리고 p와 k에 대한 비례 상수를 맞춰주면 아래와 같다.

A_k	+	B_k	+	A_p	=	B_p
1	+	2	+	3	=	4
1	+	2	+	9	=	12

일단, 는 q를 올라가는 순간 운동에너지가 1이므로 내려올때도 1이다. p, q사이의 퍼텐셜 에너지 차이는 A_p이므로 9다. 즉, q에서 p로 다시 내려온 시점에는 운동에너지가 10이다. 수평면에서의 운동에너지는 잘 모르겠으니 $10 + h_1$이라 하자. (여기서 h_1은 실제로 h_1의 값이 아니라 h_1에 해당하는 퍼텐셜 에너지 mgh_1을 의미한다)

B는 질량이 A의 2배이므로 p,q 사이의 퍼텐셜 에너지 차가 18이어야한다. 그런데, B_p가 12라는 것은 A가 p에서 q까지 이동 하는 동안 B는 r,s의 2/3만큼 이동하였음을 의미한다. 따라서 s에서 B의 운동에너지는 2에서 18 의 1/3에 해당하는 6을 더한 8이고 수평면에서도 8이다. 이 두배가 $10 + h_1$이므로 $h_1 = 6$이다. p와 q 사이 A의 위치 에너지 차는 A_p이므로 $h_2 - h_1 = h_2 - 6 = 9$이므로 $h_2 = 15$이다.

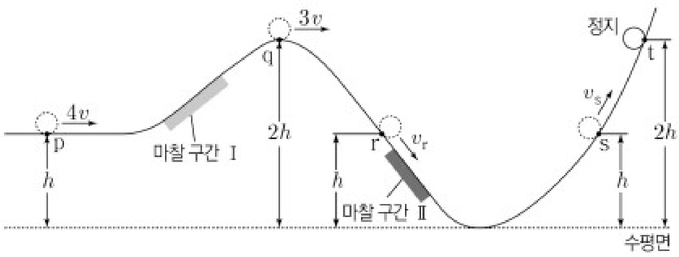
2.2.3 역학적 에너지와 비례 상수

어떠한 물체 A의 역학적 에너지는 $E_p + E_k$라 할 수 있다. 중력만 작용하여 역학적 에너지가 보존되는 A가 어떠한 궤도를 따라 운동하였고 두 점 p, q에서의 위치 에너지가 3:4, 운동 에너지가 9:5라는 조건이 있다 해보자. 이 두 비례식은 비례상수가 서로 다르기 때문에 p에서 위치 에너지와 운동 에너지의 비율을 바로 구할 수 없다. 한번 비례 상수를 맞춰보도록 하자.

E_p	E_k	합
$3k$	9	3k+9
$4k$	5	4k+5

E_p는 3:4인데 상수 k를 곱해주었다. 이유가 무엇인가? 우리는 3:4와 9:5라는 비례식의 비례상수가 다르기 때문에 맞춰주어야 하는데 맞춰주는 과정이 바로 어느 한쪽 비례식에 어떠한 상수를 곱해준 뒤 비례상수가 **같아졌다** 라는 가정을 하고 해당 상수값을 구해주는 것이다. 위 예시에서는 3:4에 k를 곱한것이며 k=4임을 손쉽게 구할 수 있다. 따라서 비례 상수를 맞춰주면 위치 에너지는 12:16, 운동 에너지는 9:5로 합 21을 맞춰줄 수 있다. 역학적 에너지 공식을 보면 알겠지만 **덧셈**이 필연적으로 나오기 마련이다. 그런데, 우리는 문항을 풀 때 높이 비율, 속력 비율, 질량 비율 등 비율을 적극적으로 이용할텐데 그럴땐 걱정하지 말고 위처럼 비율을 그대로 작성한 뒤 비례 상수를 맞춰주면 된다. 예제를 통해서 익혀보는 것이 빠르니 예제를 통해 적용해보자.

20. 그림은 높이 h인 점 p에서 속력 $4v$로 운동하는 물체가 궤도를 따라 마찰 구간 Ⅰ, Ⅱ를 지나 높이가 $2h$인 최고점 t에 도달하여 정지한 순간의 모습을 나타낸 것이다. 점 q, r, s의 높이는 각각 $2h$, h, h이고, q, r, s에서 물체의 속력은 각각 $3v$, v_r, v_s이다. 마찰 구간에서 손실된 역학적 에너지는 Ⅱ에서가 Ⅰ에서의 3배이다.



$\frac{v_r}{v_s}$는? (단, 마찰 구간 외의 모든 마찰과 공기 저항, 물체의 크기는 무시한다.) [3점]

① $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{13}}{2}$ ④ $\frac{7}{3}$ ⑤ $\sqrt{13}$

20240720

p, q, r, s, t에서 높이는 1 : 2 : 1 : 1 : 2이고 속력은 4 : 3 : v_r : v_s : 0이므로 지점별 중력 퍼텐셜 에너지와 운동 에너지의 비율은 아래와 같다.

	p	q	r	s	t
E_p	1	2	1	1	2
E_k	16	9	${v_r}^2$	${v_s}^2$	0

그러나 두 비례식은 비례상수가 다를것이기에 어느 한쪽 비례식에 상수 k를 곱하여 같아졌다고 가정하는 것이다. 딱 보니 1 : 2 : 1 : 1 : 2에 곱하는게 편할것같으니 곱해보자.

	p	q	r	s	t
E_p	$1k$	$2k$	$1k$	$1k$	$2k$
E_k	16	9	${v_r}^2$	${v_s}^2$	0

그럼 이제 우리는 최종적으로 k를 구하는 것이 숙제이다. 구간 qr과 구간 st는 역학적 에너지가 보존되는 구간이다. 따라서 qr 구간에 대해서는 $2k+9=k+{v_r}^2$, st 구간에 대해서는 $k+{v_s}^2=2k$라고 식을 세울 수 있다.

따라서 ${v_r}^2=k+9$, ${v_s}^2=k$이다.

	p	q	r	s	t
E_p	$1k$	$2k$	$1k$	$1k$	$2k$
E_k	16	9	$k+9$	$1k$	0

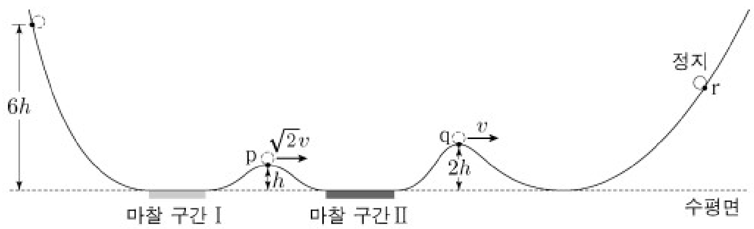
이제 마지막 조건, 역학적 에너지 손실량이 pq에서와 rs에서 1:3이므로 $7-k:9=1:3$, $k=4$입니다.

	p	q	r	s	t
E_p	4	8	4	4	8
E_k	16	9	13	4	0

검토해보니 손실량은 pq에서 3, rs에서 9로 3배가 맞다. 문항에서 원하는 $\frac{v_r}{v_s}$는 $\frac{13}{4}$에 루트를 씌운 3번이 되겠다.

이렇게 어떠한 두 비례식이 있을 때에는 한쪽에 k를 곱하고 맞춰줌을 명심하자.

19. 그림은 높이 $6h$인 점에서 가만히 놓은 물체가 궤도를 따라 운동하여 마찰 구간 Ⅰ, Ⅱ를 지나 최고점 r에 도달하여 정지한 순간의 모습을 나타낸 것이다. 점 p, q의 높이는 각각 h, $2h$이고, p, q에서 물체의 속력은 각각 $\sqrt{2}v$, v이다. 마찰 구간에서 손실된 역학적 에너지는 Ⅱ에서가 Ⅰ에서의 2배이다.



r의 높이는? (단, 물체의 크기, 공기 저항, 마찰 구간 외의 모든 마찰은 무시한다.) [3점]

① $\frac{19}{5}h$ ② $4h$ ③ $\frac{21}{5}h$ ④ $\frac{22}{5}h$ ⑤ $\frac{23}{5}h$

20230919

마찬가지로 처음 위치 O, p, q, r에 대해 비례식을 작성해보자.

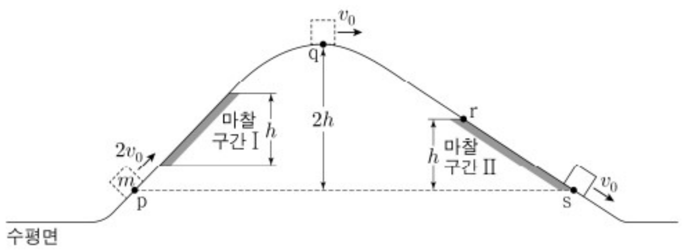
	o	p	q	r
E_p	6	1	2	???
E_k	0	$2k$	k	0

마찬가지로 상수 k를 곱할것인데 편한쪽에 곱해주면 된다. 필자는 아래에 k를 곱하면 편할것같아 아래에 곱했다. 조건에서 역학적 에너지 손실량은 op : pq = 1:2이므로 $5-2k:k-1=1:2$, $k=\frac{11}{5}$이다. 라고 계산하니 뭔가 곱하기 껄끄럽다. 그런데 E_p비례식은 그대로 냅두고 E_k에는 $\frac{11}{5}$를 곱하는거나 각각 5, 11 곱하는거나 그게 그거 아닌가? 그렇게 해보도록 하자.

	o	p	q	r
E_p	30	5	10	???=21
E_k	0	22	11	0

물음표는 21이 나왔다. $6h$에 해당하는 퍼텐셜 에너지가 30이니 21은 $6h\times\frac{21}{30}=\frac{21}{5}h$임을 알 수 있다. 지금 이 부분이 이해가 잘 가지 않는다면 chap0의 비례상수 맞추는 파트를 다시 복습하고 오길 바란다.

20. 그림과 같이 수평면에서 운동하던 질량이 m인 물체가 언덕을 따라 올라갔다가 내려온다. 높이가 같은 점 p, s에서 물체의 속력은 각각 $2v_0$, v_0이고, 최고점 q에서의 속력은 v_0이다. 높이 차가 h로 같은 마찰 구간 Ⅰ, Ⅱ에서 물체의 역학적 에너지 감소량은 Ⅱ에서가 Ⅰ에서의 2배이다.



점 r에서 물체의 속력은? (단, 마찰 구간 외의 모든 마찰과 공기 저항, 물체의 크기는 무시한다.)

① $\frac{\sqrt{5}}{2}v_0$ ② $\frac{\sqrt{7}}{2}v_0$ ③ $\sqrt{2}v_0$ ④ $\frac{3}{2}v_0$ ⑤ $\sqrt{3}v_0$

20230620

p, q, r, s에 대한 높이 0:2:1:0, 운동에너지 4:1:??:1을 표로 나타내보자.

	p	q	r	s
E_p	0	$2k$	k	0
E_k	4	1	$??=k+1$	1

q, r에선 역학적 에너지가 보존되므로 ??에 들어갈 숫자가 $k+1$임을 알 수 있다. 따라서 역학적 에너지 감소량 조건에 따라 $1:2=3-2k:2k$, $k=1$이다.

	p	q	r	s
E_p	0	2	1	0
E_k	4	1	2	1

E_k의 비율은 속력 제곱 비율이므로 속력비는 루트를 씌워 p, q, r, s 순으로 $2:1:\sqrt{2}:1$이다. 따라서 r에서의 속력은 q에서의 $\sqrt{2}$배인 $\sqrt{2}v_0$이 된다.

E_p비율과 E_k비율에 대한 비례 상수를 맞추는데 사용되는 단서는 여러 가지가 있겠지만, 보통은 역학적 에너지 버보존 구간, 그리고 문항에서 주어지는 단서(보통 손실량)으로 맞춰지는 경우가 많다. 또한, 비율을 맞추고 나서 속력 비율을 구할 때 운동 에너지 비율을 그대로 쓰는 실수를 범하는 경우가 간혹 있는데 꼭 에너지 비율에 루트를 씌워 속력 비로 사용하는 것을 잊지 말자.

2.2.4 자유 낙하 운동 가정

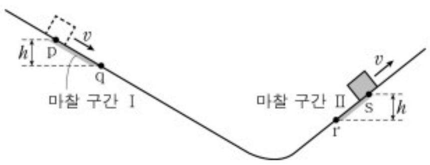
이번 파트에서 자유 낙하 운동이라 함은 중력만 작용하고, 나머지 외력은 작용하지 않는 상황을 의미한다. 그리고, 지금부터 설명할 내용은 풀이법 이라기 보다는 접근 방법에 가깝다. 아래 문장을 읽어보자.

물체 A를 빗면에 가만히 두었더니, 빗면 아랫방향으로 이동하였다.
이 때, 빗면 상에 존재하는 점 p, q사이에서 물체는 마찰을 받는다.
(1) 물체는 마찰 구간에서 가속도가 1/3으로 줄어든다.
(3) 마찰 구간이 끝나는 지점에서 물체의 운동에너지는 ~~~다.

문항을 풀다보면 위처럼 마찰 구간에서 물체의 운동 특성을 서술하는 경우가 많다. 이럴 때 **가상의 상황, 마찰이 없었다면** 어떤 일이 일어났을까?를 떠올려보는 것이다. 예를 들면 **마찰이 없었다면 마찰 구간이 끝나는 점에서 운동 에너지는 XX 였을텐데?** 라는식으로 말이다. 마찰 뿐만이 아니라 A, B가 연결된 채로 운동하는 문항에 대해서 **A가 B와 연결되지 않았었다면?** 라는 식으로 상상하여도 된다. (마찰력 대신 장력이 없었다면? 이니 별반 차이 없다)

사실 위 접근 방식은 엄청 대단한 방법이 아니다. 다만, 단서를 떠올리기 쉬운 접근이다 정도의 내용이다.

18. 그림과 같이 빗면의 마찰 구간 Ⅰ에서 일정한 속력 v로 직선 운동한 물체가 마찰 구간 Ⅱ를 속력 v로 빠져나왔다. 점 p ~ s는 각각 Ⅰ 또는 Ⅱ의 양 끝점이고, p와 q, r과 s의 높이차는 모두 h이다. Ⅰ과 Ⅱ에서 물체의 역학적 에너지 감소량은 p에서 물체의 운동 에너지의 4배로 같다.



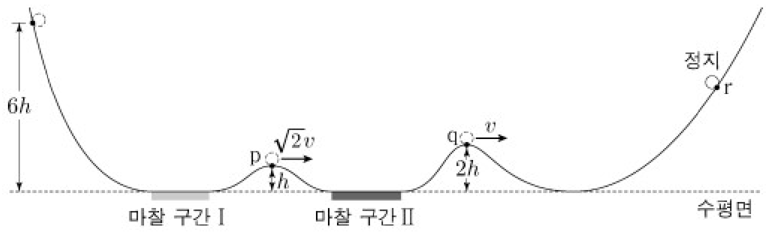
r에서 물체의 속력은? (단, 물체의 크기, 공기 저항, 마찰 구간 외의 모든 마찰은 무시한다.)

① $2v$　② $\sqrt{6}v$　③ $2\sqrt{2}v$　④ $3v$　⑤ $4v$

20230620

I, II에서의 역학적 에너지 감소량은 p에서 물체의 운동에너지의 4배로 같다. 라고 나와있다. 이럴 때 나는 p에서 운동에너지를 1, 그리고 역학적 에너지 감소량을 4 라는 상수로 쓰는 것을 선호한다. q에서의 운동 에너지는 속력이 같으니 1일 것이다. 앞서 말했지만, **역학적 에너지 감소량**이라 함은 **중력만이 작용하였을 때 원래 얻었어야 하는 운동 에너지와의 차이**라고 봐도 무방하다. 그 말은 q에서 원래라면(중력만 있다면) 운동 에너지가 5였어야 하는데 4가 손실되어 1이되었다 라고 해석하는 것이다. 즉, mgh에 해당하는 에너지는 4이다. (원래라면 1에서 5로 늘었어야 하므로) s에서의 운동에너지는 속력이 같으므로 1이다. r,s에서도 손실 에너지는 4인데 이는 s에서 원래라면 운동 에너지가 5였어야 하는데 손실되어 1인것이므로 r에서의 운동에너지는 앞에서 구한 mgh(4)를 5에서 더해준 9이다.
따라서, p와 r에서 운동에너지가 1:9이므로 속력은 1:3으로 r에서는 $3v$가 되겠다.

19. 그림은 높이 $6h$인 점에서 가만히 놓은 물체가 궤도를 따라 운동하여 마찰 구간 Ⅰ, Ⅱ를 지나 최고점 r에 도달하여 정지한 순간의 모습을 나타낸 것이다. 점 p, q의 높이는 각각 h, $2h$이고, p, q에서 물체의 속력은 각각 $\sqrt{2}v$, v이다. 마찰 구간에서 손실된 역학적 에너지는 Ⅱ에서가 Ⅰ에서의 2배이다.



r의 높이는? (단, 물체의 크기, 공기 저항, 마찰 구간 외의 모든 마찰은 무시한다.) [3점]

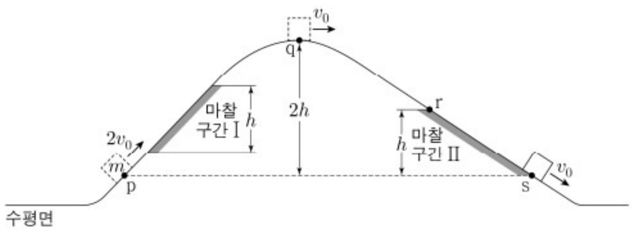
① $\frac{19}{5}h$ ② $4h$ ③ $\frac{21}{5}h$ ④ $\frac{22}{5}h$ ⑤ $\frac{23}{5}h$

20230919

앞에서 다뤘던 예제를 여기서도 다뤄보겠다. 만약, 마찰을 안받았다면 p, q에서의 운동에너지는 몇 대 몇이겠는가? 운동 에너지는 내려온 높이에 비례할테니 5:4였어야 한다. 그런데 마찰에 의한 손실을 Ⅰ ,Ⅱ에서 1:2로 받았으니 p, q까지 가는데에 손실된 총 역학적 에너지는 1:3이되겠다. 5:4에서 1:3을 빼주었더니 운동에너지 2:1이 되었다.

5:4와 1:3에 대한 비례상수를 맞춰주면 5-k:4-3k=2:1, k=0.6이다. 즉, 5:4에서 0.6:1.8을 빼서 4.4:2:2 가 된 것이다. 5:4의 5는 5h에 해당하는 에너지이므로 처음 역학적 에너지는 6이다. 1.8이 손실되었으므로 나중 역학적 에너지는 4.2이고 이는 $\frac{21}{5}h$에 해당한다.

20. 그림과 같이 수평면에서 운동하던 질량이 m인 물체가 언덕을 따라 올라갔다가 내려온다. 높이가 같은 점 p, s에서 물체의 속력은 각각 $2v_0$, v_0이고, 최고점 q에서의 속력은 v_0이다. 높이 차가 h로 같은 마찰 구간 Ⅰ, Ⅱ에서 물체의 역학적 에너지 감소량은 Ⅱ에서가 Ⅰ에서의 2배이다.



점 r에서 물체의 속력은? (단, 마찰 구간 외의 모든 마찰과 공기 저항, 물체의 크기는 무시한다.)

① $\frac{\sqrt{5}}{2}v_0$ ② $\frac{\sqrt{7}}{2}v_0$ ③ $\sqrt{2}v_0$ ④ $\frac{3}{2}v_0$ ⑤ $\sqrt{3}v_0$

20230620

만약, 마찰을 안받았다면 s에서 물체의 속력은 p와 같아야한다. p, q, s에서의 운동 에너지를 4:1:10이라 해보자.

원래대로라면 s에서 운동에너지는 4였어야 한다. 그런데, I, II에서 손실량이 1:2이다. 즉, 이 때 손실량은 각각 1과 2임을 알 수 있다. 따라서 p높이에서의 퍼텐셜 에너지를 0이라 하면 처음 역학적 에너지는 4다. 그런데, 첫 마찰 구간에서 1을 손실하였으니 역학적 에너지는 3이다. q에서 운동에너지가 1이므로 위치에너지는 2이므로 2h에 해당하는 퍼텐셜 에너지는 2이다. 따라서 r로 내려왔을 때 운동에너지는 2가 되어야 한다.
r, s의 운동 에너지는 2:1이므로 속력은 $\sqrt{2}:1$이므로 r에서의 속력은 $\sqrt{2}v_0$가 되어야 한다.

재미있지 않은가? 앞서 다룬 내용들처럼 역학적 에너지는 다양한 개념들을 혼합하면 다양하게 풀 수 있다. 변화량 방정식, 각 힘의 해석, 표를 이용한 비례상수 맞추기 등등처럼 말이다. 그리고 이러한 풀이가 익숙해진다면 점점 공통 문자들은 미리 생략하고 상수로만 풀이에 점점 가까워질 것이다.

다만, 이러한 풀이에 익숙해지기 위해서는 **비례식의 사용, 문자의 생략** 등이 익숙해져야한다. 아직 익숙하지 않다면 무리해서 생략하지 말고, 앞에서 설명한 풀이를 따라가되 숫자 생략만 자제하도록 하자.