2017학년도 수능 수학 가형 해설

01

[풀이]
성분으로 주어진 벡터의 연산에 의하여
$\vec{a}-\vec{b}=(1-5,\ 3-(-6))=(-4,\ 9)$
따라서 구하는 값은 5이다.
답 ⑤

02

[풀이]
함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{6x}-1}{\ln(1+3x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{6x}-1}{6x}\times\frac{1}{\ln(1+3x)^{\frac{1}{3x}}}\times\frac{6x}{3x}$$

$$=1\times\frac{1}{\ln e}\times 2=2$$

답 ②

03

[풀이]
미적분의 기본정리에 의하여

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin x dx=[-2\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}=0-(-2)=2$$

답 ⑤

04

[풀이]
여사건의 확률에 의하여

$$\mathrm{P}(B)=1-\mathrm{P}(B^C)=\frac{2}{3}$$

조건부확률의 정의에 의하여

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{1}{2}$$

이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{2}\times\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$$

독립사건의 필요충분조건에 의하여

$$\therefore\ \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{3}$$

답 ④

05

[풀이]
네 자리의 자연수가 5의 배수이므로 이 자연수의 일의 자리에는 5가 와야 한다.
○○○5
나머지 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는 1, 2, 3, 4, 5에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같다.
따라서 구하는 경우의 수는

$${}_5\Pi_3=5^3=125$$

답 ③

06

[풀이1]
$g(1)=a$로 두면 역함수의 성질에 의하여
$f(a)=1$ 즉, $a^3+a+1=1$
정리하면
$a(a^2+1)=0$
풀면
$a=0$
함수 $f(x)$의 도함수는
$f'(x)=3x^2+1$
역함수의 미분법에 의하여

$$\therefore\ g'(1)=\frac{1}{f'(0)}=1$$

답 ⑤

[풀이2]
$g(1)=a$로 두면 역함수의 성질에 의하여
$f(a)=1$ 즉, $a^3+a+1=1$
정리하면
$a(a^2+1)=0$
풀면
$a=0$ 즉, $g(1)=0$
역함수의 성질에 의하여 $f(g(x))=x$이므로
$\{g(x)\}^3+g(x)+1=x$
양변을 x에 대하여 미분하면
$3\{g(x)\}^2g'(x)+g'(x)=1$
$x=1$을 대입하면
$3\{g(1)\}^2g'(1)+g'(1)=1$
그런데 $g(1)=0$이므로
$\therefore\ g'(1)=1$
답 ⑤

[풀이3]
역함수의 성질에 의하여 $g(f(x))=x$이므로
$g(x^3+x+1)=x$

양변을 x에 대하여 미분하면

$(3x^2+1)\times g'(x^3+x+1)=1$

$x=0$을 대입하면

$\therefore\ g'(1)=1$

답 ⑤

07

[풀이]

주사위를 한 번 던질 때, 4의 눈이 나오는 사건을 A라고 하자.

수학적 확률의 정의에 의하여

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{1}{6}$

여사건의 확률의 정의에 의하여

$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=\dfrac{5}{6}$

구하는 확률을 p라고 하자.

독립시행의 확률의 정의에 의하여

$p={}_3\mathrm{C}_1(\mathrm{P}(A))^1(\mathrm{P}(A^C))^2=3\times\dfrac{1}{6}\times\left(\dfrac{5}{6}\right)^2=\dfrac{25}{72}$

답 ①

08

[풀이]

선분 AB의 3:2 외분점을 C라고 하자.

점 C가 x축 위에 있으므로 점 C의 y좌표와 z좌표는 모두 0이다.

외분점의 공식에 의하여

(점 C의 y좌표)$=\dfrac{3\times2-2\times a}{3-2}=0$

(점 C의 z좌표)$=\dfrac{3\times b-2\times(-6)}{3-2}=0$

a, b에 대한 일차방정식을 풀면

$a=3,\ b=-4$

$\therefore\ a+b=-1$

답 ①

09

[풀이]

로그의 성질에 의하여

$\ln\dfrac{x}{e}=\ln x-\ln e=\ln x-1$

정적분의 성질에 의하여

$\displaystyle\int_1^e\ln\frac{x}{e}dx=\int_1^e\ln x\,dx-\int_1^e 1\,dx$

$=[x\ln x-x]_1^e-[x]_1^e$

($\because$ 정적분의 부분적분법)

$=1-(e-1)=2-e$

답 ②

10

[풀이]

$\dfrac{dx}{dt}=1+\dfrac{2}{t^2},\ \dfrac{dy}{dt}=2-\dfrac{1}{t^2}$이므로

시각 t에서의 점 P의 속도는

$\vec{v}=\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)=\left(1+\dfrac{2}{t^2},\ 2-\dfrac{1}{t^2}\right)$

$t=1$일 때, 점 P의 속도는

$(3,\ 1)$

이므로 $t=1$일 때, 점 P의 속력은

$|(3,\ 1)|=\sqrt{10}$

답 ③

11

[풀이]

x좌표가 x인 점을 지나고 x축에 수직인 평면으로 문제에서 주어진 입체도형을 자른 단면의 넓이를 $S(x)$라고 하자.

사각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$S(x)=y^2=(\sqrt{x}+1)^2=x+2\sqrt{x}+1$

구하는 입체도형의 부피를 V라고 하자.

입체도형의 부피를 구하는 공식에 의하여

$\displaystyle V=\int_0^1 S(x)dx=\int_0^1(x+2\sqrt{x}+1)dx$

$=\left[\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+x\right]_0^1=\dfrac{1}{2}+\dfrac{4}{3}+1=\dfrac{17}{6}$

답 ④

12

[풀이]

평면 $2x+2y-z+5=0$의 법선벡터를

$\overrightarrow{n_1}=(2,\ 2,\ -1)$

xy평면의 법선벡터를

$\overrightarrow{n_2}=(0,\ 0,\ 1)$

로 두자. 두 평면이 이루는 각의 크기를 구하는 공식에 의하여

$\therefore\ \cos\theta = \dfrac{|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|} = \dfrac{1}{3}$

답 ④

13

[풀이]

표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(0,\ \left(\dfrac{4}{3}\right)^2\right)$을 따른다.

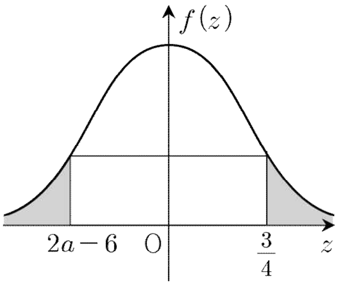
확률변수 $Z = \dfrac{\overline{X} - 0}{\dfrac{4}{3}}$은 정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1^2)$을 따르므로

$\mathrm{P}(\overline{X} \geq 1) = \mathrm{P}\left(Z \geq \dfrac{3}{4}\right)$

표본평균 $\overline{Y}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(3,\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^2\right)$을 따른다.

확률변수 $Z = \dfrac{\overline{Y} - 3}{\dfrac{1}{2}}$은 정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1^2)$을 따르므로

$\mathrm{P}(\overline{Y} \leq a) = \mathrm{P}(Z \leq 2a - 6)$



문제에서 주어진 조건에 의하여

$\mathrm{P}\left(Z \geq \dfrac{3}{4}\right) = \mathrm{P}(Z \leq 2a - 6)$

표준정규분포의 확률밀도함수는 직선 $z = 0$에 대하여 대칭이므로

$2a - 6 + \dfrac{3}{4} = 0$

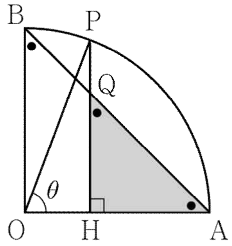
a에 대한 일차방정식을 풀면

$a = \dfrac{21}{8}$

답 ③

14

[풀이]



원의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{OA}} = \overline{\mathrm{OB}}$

이고, 주어진 조건에 의하여

$\angle\mathrm{AOB} = \dfrac{\pi}{2}$

이므로 삼각형 OAB는 직각이등변삼각형이다.

이등변삼각형의 성질에 의하여

$\angle\mathrm{ABO} = \angle\mathrm{BAO} = \dfrac{\pi}{4}$

$\overline{\mathrm{BO}} /\!/ \overline{\mathrm{PH}}$이므로 평행선의 성질에 의하여

$\angle\mathrm{AQH} = \angle\mathrm{ABO} = \dfrac{\pi}{4}$

이등변삼각형이 되는 조건에 의하여

삼각형 AQH는 직각이등변삼각형이다.

한편 직각삼각형 POH에서 삼각비의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{OH}} = \cos\theta$이므로 $\overline{\mathrm{HA}} = \overline{\mathrm{OA}} - \overline{\mathrm{OH}} = 1 - \cos\theta$

이등변삼각형의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{QH}} = \overline{\mathrm{HA}} = 1 - \cos\theta$

삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$S(\theta) = \dfrac{1}{2} \times \overline{\mathrm{QH}} \times \overline{\mathrm{HA}} = \dfrac{1}{2}(1 - \cos\theta)^2$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^4} = \lim_{\theta \to 0+} \frac{1}{2} \times \left(\frac{1 - \cos\theta}{\theta^2}\right)^2$$

$$= \lim_{\theta \to 0+} \frac{1}{2} \times \left\{\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2 \times \frac{1}{1 + \cos\theta}\right\}^2$$

$$= \frac{1}{2} \times \left(1^2 \times \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}$$

답 ①

15

[풀이]

함수 $y = 2e^{-x}$의 도함수는

$y' = -2e^{-x}$

점 P에서의 접선의 방정식은

$y = -2e^{-t}(x - t) + 2e^{-t}$

정리하면

$y = -2e^{-t}x + 2(t+1)e^{-t}$

접선의 방정식에 $x = 0$을 대입하면

$y=2(t+1)e^{-t}$

점 B의 좌표는 $\mathrm{B}(0,\ 2(t+1)e^{-t})$이고,

점 A의 좌표는 $\mathrm{A}(0,\ 2e^{-t})$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=2te^{-t}$

그리고 $\overline{\mathrm{AP}}=t$이므로

삼각형 APB의 넓이를 $f(t)$로 두면

삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$$f(t)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BA}}\times\overline{\mathrm{AP}}=t^2e^{-t}(t>0)$$

함수 $f(t)$의 도함수는

$f'(t)=(2t-t^2)e^{-t}=t(2-t)e^{-t}$

$f'(t)=0$을 풀면 $t=2$

$t=2$의 좌우에서 $f'(t)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(t)$는 $t=2$에서 극댓값을 갖는다.

$$\lim_{t\to 0+}f(t)=0,\ \lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{t\to\infty}\frac{t^2}{e^t}=0$$

이므로 함수 $f(t)$는 $t=2$일 때, 최댓값을 갖는다.

이때, 최댓값은 $f(2)=\dfrac{4}{e^2}$이다.

답 ④

[참고]

이계도함수를 이용하여 $t=2$일 때, $f(t)$가 극댓값을 가짐을 보일 수도 있다.

함수 $f(t)$의 이계도함수는

$f''(t)=(t^2-4t+2)e^{-t}$

$f''(2)=-2e^{-2}<0$이므로 함수 $f(t)$는 $t=2$에서 극댓값을 갖는다.

16

[풀이1]

벡터의 내적의 정의에 의하여

$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2=2$이므로 $|\vec{a}|=\sqrt{2}$

마찬가지의 방법으로

$|\vec{b}|=|\vec{c}|=\sqrt{2}$

벡터의 내적에 대하여 교환법칙이 성립하므로

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}=1,\ \vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{b}=0,$

$\vec{c}\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot\vec{c}=-\sqrt{2}$

벡터의 내적의 성질에 의하여

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2$

$=|\vec{b}-\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{a}+|\vec{a}|^2$

$=2-2\times1+2=2$

$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2$

$=|\vec{c}-\vec{b}|^2=|\vec{c}|^2-2\vec{c}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$=2-2\times0+2=4$

$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2$

$=|\vec{c}-\vec{a}|^2=|\vec{c}|^2-2\vec{c}\cdot\vec{a}+|\vec{a}|^2$

$=2-2\times(-\sqrt{2})+2=4+2\sqrt{2}$

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2<|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2<|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2$

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|>0,\ |\overrightarrow{\mathrm{BC}}|>0,\ |\overrightarrow{\mathrm{AC}}|>0$이므로

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|<|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|<|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}<\overline{\mathrm{BC}}<\overline{\mathrm{AC}}$

답 ②

[풀이2]

벡터의 내적의 정의에 의하여

$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2=2$이므로 $|\vec{a}|=\sqrt{2}$

마찬가지의 방법으로

$|\vec{b}|=|\vec{c}|=\sqrt{2}$

벡터의 내적에 대하여 교환법칙이 성립하므로

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}=1,\ \vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{b}=0,$

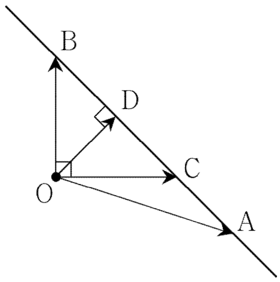
$\vec{c}\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot\vec{c}=-\sqrt{2}$

우선 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있지 않음을 보이자.

$|\vec{b}|=|\vec{c}|=\sqrt{2},\ \vec{b}\cdot\vec{c}=0$이므로

삼각형 OBC는 $\overline{\mathrm{OB}}=\overline{\mathrm{OC}}$인 직각이등변삼각형이다.

이때, 세 점 O, B, C는 한 평면 위에 있다.



점 O에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 D라고 하자.

만약 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으면

두 벡터의 내적 $\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}$의 값은 0이다.

벡터의 내적의 성질에 의하여

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{2}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})$$

($\because$ 내분점의 공식)

$=\dfrac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{a})$

$=\dfrac{1}{2}(|\vec{b}|^2-\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{c}\cdot\vec{b}-\vec{c}\cdot\vec{a})$

$=\dfrac{1}{2}(2-1+0+\sqrt{2})=\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}\neq 0$

이는 가정에 모순이다.

세 점 A, B, C는 한 직선 위에 있지 않으므로

세 점 A, B, C로 한 평면이 결정된다.
다시 말하면 삼각형 ABC가 결정된다.
세 삼각형 OAB, OBC, OCA에 대하여
$\angle \mathrm{AOB}=\theta_1$, $\angle \mathrm{BOC}=\theta_2$, $\angle \mathrm{COA}=\theta_3$
(단, $0 \le \theta_1 \le \pi$, $0 \le \theta_2 \le \pi$, $0 \le \theta_3 \le \pi$)
로 두자.
두 벡터가 이루는 각의 크기를 구하는 공식에 의하여

$$\cos\theta_1=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{1}{2},\ \cos\theta_2=\frac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{b}||\vec{c}|}=0,$$

$$\cos\theta_3=\frac{\vec{c}\cdot\vec{a}}{|\vec{c}||\vec{a}|}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\theta_1=\frac{\pi}{3}$, $\theta_2=\frac{\pi}{2}$, $\theta_3=\frac{3}{4}\pi$이므로 $\theta_1<\theta_2<\theta_3$이다.
삼각형 OAB에서 각 θ_1에 대응되는 변은 $\overline{\mathrm{AB}}$,
삼각형 OBC에서 각 θ_2에 대응되는 변은 $\overline{\mathrm{BC}}$,
삼각형 OCA에서 각 θ_3에 대응되는 변은 $\overline{\mathrm{AC}}$
이므로

$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}<\overline{\mathrm{BC}}<\overline{\mathrm{AC}}$
답 ②

[참고]
세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있지 않음을 다음과 같이 보여도 좋다.
세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있다고 가정하면
$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$(단, $k\neq 0$)
인 실수 k가 존재한다.
벡터의 내적의 성질에 의하여

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$$(\vec{c}-\vec{a})\cdot(\vec{c}-\vec{a})=k(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{c}-\vec{a})$$

$$k=\frac{|\vec{c}|^2-2\vec{c}\cdot\vec{a}+|\vec{a}|^2}{\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{c}+|\vec{a}|^2}$$

$$=\frac{4+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \qquad \cdots ㉠$$

벡터의 내적의 성질에 의하여

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

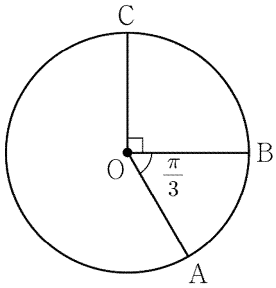
$$(\vec{c}-\vec{a})\cdot(\vec{b}-\vec{a})=k(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{b}-\vec{a})$$

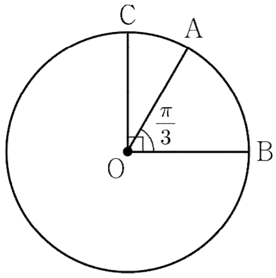
$$k=\frac{\vec{c}\cdot\vec{b}-\vec{c}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{a}|^2}{|\vec{b}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{a}+|\vec{a}|^2}$$

$$=\frac{1+\sqrt{2}}{2} \qquad \cdots ㉡$$

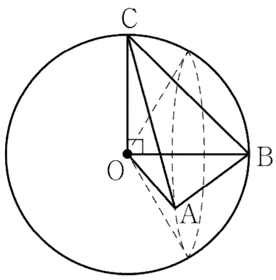
㉠과 ㉡에서 얻은 k의 값이 같지 않으므로 가정에 모순이다.
따라서 세 점 A, B, C는 한 직선 위에 있지 않다.

[참고]
네 점 O, A, B, C가 한 평면 위에 있지 않음을 보이자.
한 직선 위에 있지 않은 세 점 O, B, C로 결정되는 평면 OBC 위에 점 A가 있다고 가정하자.

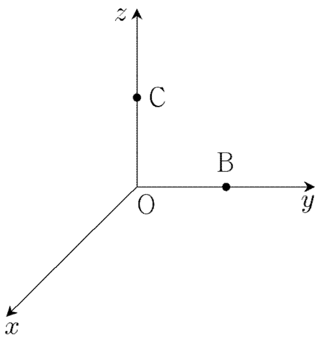




위의 그림에서
$\angle \mathrm{AOC}=\frac{5}{6}\pi$ 또는 $\angle \mathrm{AOC}=\frac{\pi}{6}$
이므로 이는 가정에 모순이다.
따라서 네 점 O, A, B, C는 한 평면 위에 있지 않다.
다시 말하면 사면체 OABC가 결정된다.



[풀이4]
벡터의 내적의 정의에 의하여
$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2=2$이므로 $|\vec{a}|=\sqrt{2}$
마찬가지의 방법으로
$|\vec{b}|=|\vec{c}|=\sqrt{2}$
벡터의 내적에 대하여 교환법칙이 성립하므로
$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}=1$, $\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{b}=0$,
$\vec{c}\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot\vec{c}=-\sqrt{2}$
문제에서 주어진 표에서 $\vec{b}\cdot\vec{c}=0$이므로
삼각형 OBC는 $\overline{\mathrm{OB}}=\overline{\mathrm{OC}}$인 직각이등변삼각형이다.
이제 세 점 O, B, C의 좌표가 각각
O$(0,\ 0,\ 0)$, B$(0,\ \sqrt{2},\ 0)$, C$(0,\ 0,\ \sqrt{2})$
가 되도록 좌표공간을 도입하자.
점 A의 좌표는 A$(p,\ q,\ r)$로 두자.



성분으로 주어진 벡터의 내적을 하면

$\vec{a}\cdot\vec{a}=(p,\ q,\ r)\cdot(p,\ q,\ r)$

$=p^2+q^2+r^2=2 \qquad \cdots ㉠$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=(p,\ q,\ r)\cdot(0,\ \sqrt{2},\ 0)$

$=\sqrt{2}q=1$에서 $q=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cdots ㉡$

$\vec{a}\cdot\vec{c}=(p,\ q,\ r)\cdot(0,\ 0,\ \sqrt{2})$

$=\sqrt{2}r=-\sqrt{2}$에서 $r=-1 \qquad \cdots ㉢$

㉡, ㉢을 ㉠에 대입하면 $p=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

점 A의 좌표는 $A\left(\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{\sqrt{2}}{2},\ -1\right)$이다.

두 점 사이의 거리 공식에 의하여

$\overline{AB}=\sqrt{2},\ \overline{BC}=2,\ \overline{AC}=\sqrt{4+2\sqrt{2}}$

$|\overrightarrow{AB}|^2<|\overrightarrow{BC}|^2<|\overrightarrow{AC}|^2$

$|\overrightarrow{AB}|>0,\ |\overrightarrow{BC}|>0,\ |\overrightarrow{AC}|>0$이므로

$|\overrightarrow{AB}|<|\overrightarrow{BC}|<|\overrightarrow{AC}|$

$\therefore\ \overline{AB}<\overline{BC}<\overline{AC}$

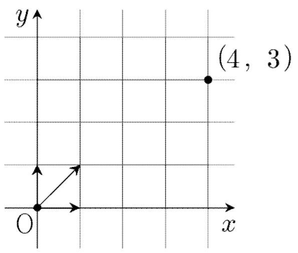
답 ②

17

[풀이]

<과정>

원점에서 한 번 점프하여 이동할 수 있는 점은 아래 그림과 같다.

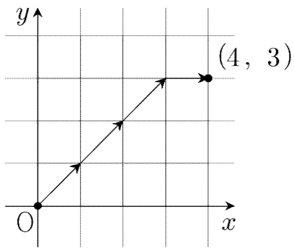


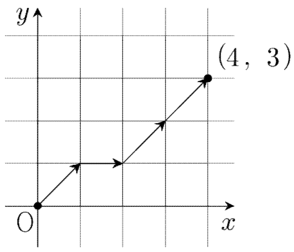
만약 이동 과정에서 ↗ 방향으로의 점프가 4회 이상이면 도착한 점의 y좌표가 4 이상이므로 문제에서 주어진 조건에 모순이다. 따라서 이동 과정에서 ↗ 방향으로의 점프는 3회 이하여야 한다.

↗ 방향으로의 점프가 3회인 경우

: ↗, ↗, ↗, → (4번 이동)

예를 들어





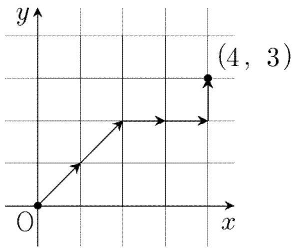
같은 것이 있는 순열의 수에 의하여 경우의 수는

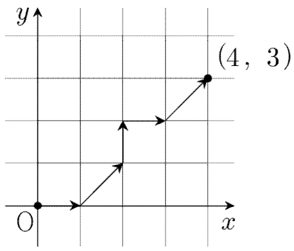
$\dfrac{4!}{3!}$

↗ 방향으로의 점프가 2회인 경우

: ↗, ↗, →, →, ↑ (5번 이동)

예를 들어





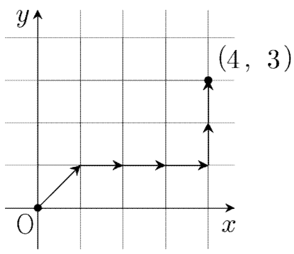
같은 것이 있는 순열의 수에 의하여 경우의 수는

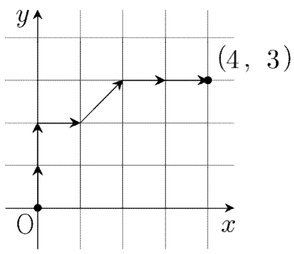
$\dfrac{5!}{2!2!}$

↗ 방향으로의 점프가 1회인 경우

: ↗, →, →, →, ↑, ↑ (6번 이동)

예를 들어





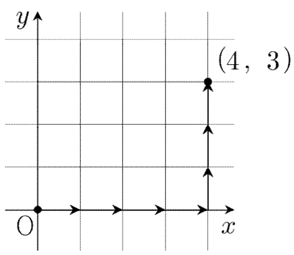
같은 것이 있는 순열의 수에 의하여 경우의 수는

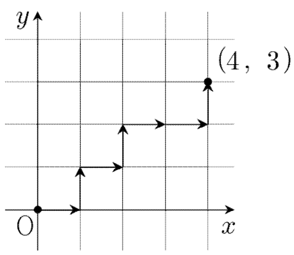
$\dfrac{6!}{3!2!}$

↗ 방향으로의 점프가 0회인 경우

: →, →, →, →, ↑, ↑, ↑ (7번 이동)

예를 들어





같은 것이 있는 순열의 수에 의하여 경우의 수는

$\dfrac{7!}{4!3!}$

점프를 반복하여 점 $(0,\ 0)$에서 점 $(4,\ 3)$까지 이동하는 모든 경우의 수를 N이라 하자. 확률변수 X가 가질 수 있는 값 중 가장 작은 값을 k라 하면 $k=\boxed{4}$이고, 가장 큰 값은 7이다.

$\mathrm{P}(X=k)=\mathrm{P}(X=4)=\dfrac{1}{N}\times\dfrac{4!}{3!}=\dfrac{4}{N}$

$\mathrm{P}(X=k+1)=\mathrm{P}(X=5)=\dfrac{1}{N}\times\dfrac{5!}{2!2!}=\dfrac{30}{N}$

$\mathrm{P}(X=k+2)=\mathrm{P}(X=6)=\dfrac{1}{N}\times\boxed{\dfrac{6!}{3!2!}}$

$\mathrm{P}(X=k+3)=\mathrm{P}(X=7)=\dfrac{1}{N}\times\dfrac{7!}{3!4!}=\dfrac{35}{N}$

이고

$\displaystyle\sum_{i=k}^{k+3}\mathrm{P}(X=i)=\dfrac{4}{N}+\dfrac{30}{N}+\dfrac{60}{N}+\dfrac{35}{N}=\dfrac{129}{N}=1$

이므로 $N=\boxed{129}$이다.

따라서 확률변수 X의 평균 $\mathrm{E}(X)$는 다음과 같다.

$\displaystyle\mathrm{E}(X)=\sum_{i=k}^{k+3}\{i\times P(X=i)\}=\dfrac{257}{43}$

(가): $a=4$ (나): $b=\dfrac{6!}{3!2!}=60$ (다): $c=129$

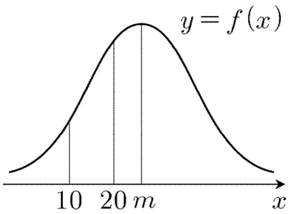
$\therefore\ a+b+c=193$

답 ②

18

[풀이]

○ $m\geq 20$이라고 가정하자.

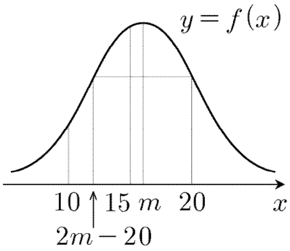


$x\leq m$일 때, $f(x)$는 증가하므로

$f(10)<f(20)$

이는 조건 (가)를 만족시키지 않으므로 가정에 모순이다.

○ $15\leq m<20$이라고 가정하자.



확률밀도함수 $f(x)$는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이므로

$f(2m-20)=f(20)$

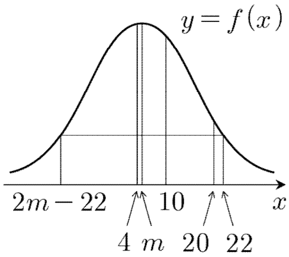
그런데 $10\leq 2m-20<20$이고,

$x\leq m$일 때, $f(x)$는 증가하므로

$f(10)\leq f(20)=f(2m-20)$

이는 조건 (가)를 만족시키지 않으므로 가정에 모순이다.

○ $m\leq 10$이라고 가정하자.



$x\geq m$일 때, $f(x)$는 감소하므로

$f(10)>f(20)$

이는 조건 (가)를 만족시킨다.

확률밀도함수 $f(x)$는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이므로

$f(2m-22)=f(22)$

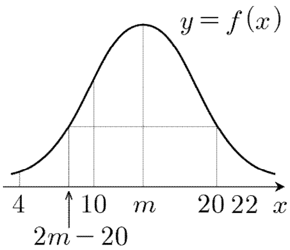
그런데 $2m-22\leq -2<0<4$이고,

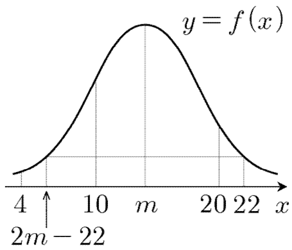
$x\leq m$일 때, $f(x)$는 증가하므로

$f(2m-22)=f(22)<f(4)$

이는 조건 (나)를 만족시키지 않으므로 가정에 모순이다.

따라서 $10<m<15$이다.





확률밀도함수 $f(x)$는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이므로

$f(2m-20)=f(20)$

그런데 $0<2m-20<10$이고,

$x\leq m$일 때, $f(x)$는 증가하므로

$f(2m-20)=f(20)<f(10)$

이는 조건 (가)를 만족시킨다.

확률밀도함수 $f(x)$는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이므로

$f(2m-22)=f(22)$

조건 (나)에 의하여

$f(4)<f(22)=f(2m-22)$

$x \le m$일 때, $f(x)$는 증가하므로

$4<2m-22$ 풀면 $m>13$

m의 범위는 $13<m<15$이고, m은 자연수이므로

$m=14$

(※ 10과 20의 평균은 15, 4와 22의 평균은 13이므로

m의 범위는 $13<m<15$이다.)

확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(14,\ 5^2)$을 따르므로

$Z=\dfrac{X-14}{5}$로 두면

확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1^2)$을 따른다.

$\therefore\ a=\mathrm{P}(17 \le X \le 18)=\mathrm{P}(0.6 \le Z \le 0.8)$

$=\mathrm{P}(0 \le Z \le 0.8)-\mathrm{P}(0 \le Z \le 0.6)$

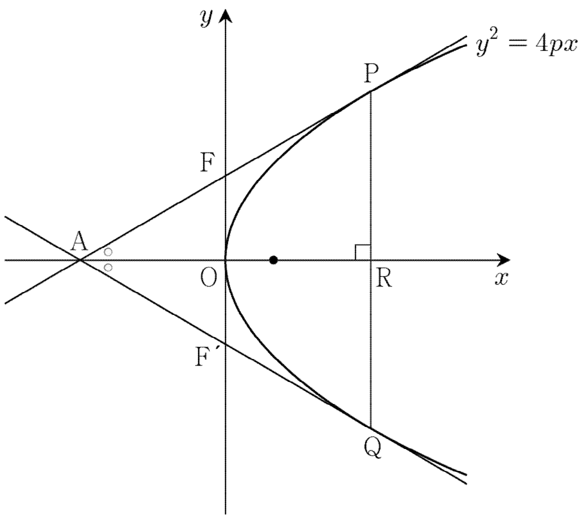
$=0.288-0.226=0.062$

$\therefore\ 1000a=62$

답 62 ※ 가형 답은 ③

19

[풀이1]



점 P의 좌표를 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$으로 두자.

(단, $x_1>0,\ y_1>0$)

점 P는 문제에서 주어진 포물선 위에 있으므로

$y_1^2=4px_1$ …㉠

포물선의 방정식에서 음함수의 미분법에 의하여

$2y\dfrac{dy}{dx}=4p$ 즉, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2p}{y}$ …㉡

포물선 위의 점 P에서의 접선의 방정식은

$y=\dfrac{2p}{y_1}(x-x_1)+y_1$ 즉, $y=\dfrac{2p}{y_1}x+\dfrac{2px_1}{y_1}$

이 접선이 점 $\mathrm{A}(-k,\ 0)$을 지나므로

$0=\dfrac{2p}{y_1}\times(-k)+\dfrac{2px_1}{y_1}$ 즉, $x_1=k$

이를 ㉠에 대입하여 점 P의 좌표를 구하면

$\mathrm{P}(k,\ 2\sqrt{pk})$

마찬가지의 방법으로 점 Q의 좌표를 구하면

$\mathrm{Q}(k,\ 2\sqrt{pk})$이므로 직선 PQ는 x축에 수직이다.

직선 PQ가 x축과 만나는 점을 R이라고 하면

두 직각삼각형 APR, AQR은 서로 합동이므로

$\angle \mathrm{PAR}=\angle \mathrm{QAR}=\dfrac{\pi}{6}$

포물선 위의 점 P에서의 접선이 x축의 양의 방향과 이루는 예각의 크기는 $\dfrac{\pi}{6}$이므로

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2p}{y_1}=\tan\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ($\because$ ㉡)

$y_1=2\sqrt{pk}$이므로 대입하여 정리하면

$k=3p$ …㉢

포물선 위의 점 P에서의 접선의 방정식에

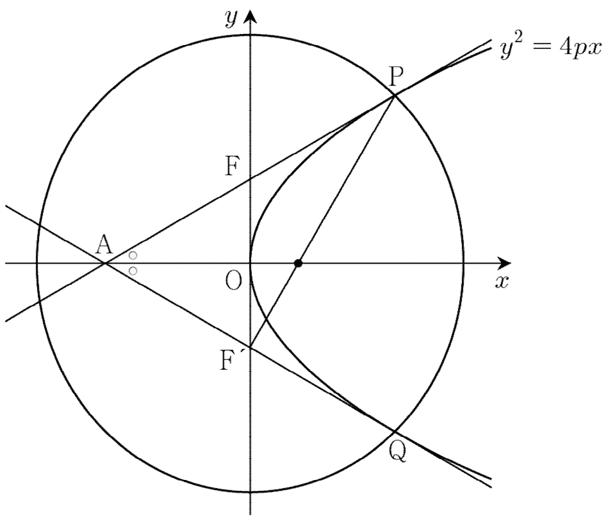
$x=0$을 대입하면

$y=\dfrac{2px_1}{y_1}=\dfrac{2pk}{2\sqrt{pk}}=\sqrt{pk}$이므로

점 F의 좌표는 $\mathrm{F}(0,\ \sqrt{pk})$이다.

두 점 F, F′은 원점에 대하여 대칭이므로

점 F′의 좌표는 $\mathrm{F'}(0,\ -\sqrt{pk})$이다.



두 점 사이의 거리 공식에 의하여

$\overline{\mathrm{PF}}=\sqrt{k^2+pk}$, $\overline{\mathrm{PF'}}=\sqrt{k^2+9pk}$

㉢을 위의 식에 대입하면

$\overline{\mathrm{PF}}=2\sqrt{3}p$, $\overline{\mathrm{PF'}}=6p$

타원의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=2\sqrt{3}p+6p=4\sqrt{3}+12$

풀면

$p=2$

이를 ㉢에 대입하면

$k=6$

$\therefore\ k+p=8$

답 ①

[참고1]

포물선 위의 점 P에서의 접선의 방정식을 구할 때, 아래의 공식을 이용해도 좋다.

문제에서 주어진 포물선 $y^2=4px$ 위의

점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$y_1y=2p(x+x_1)$ 즉, $y=\dfrac{2p}{y_1}x+\dfrac{2px_1}{y_1}$

[참고2]

k, p 사이의 관계식을 다음과 같이 구해도 좋다.

※ 포물선 $y^2=4px$의 기울기가 m인 접선의 방정식은

$y=mx+\dfrac{p}{m}(m\neq 0)$(교과과정 외의 공식)

주어진 포물선 위의 점 P에서의 접선의 기울기는

$\tan\dfrac{\pi}{6}$이므로 접선의 방정식은

$y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+\sqrt{3}p$

이 접선이 점 $\mathrm{A}(-k,\ 0)$을 지나므로

$0=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\times(-k)+\sqrt{3}p$

정리하면

$\therefore\ k=3p$

[참고3]

k, p 사이의 관계식을 다음과 같이 구해도 좋다.

점 $\mathrm{A}(-k,\ 0)$을 지나고 기울기가 $\tan\dfrac{\pi}{6}$인 직선의 방정식은

$y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x+k)$

이 직선은 포물선 위의 점 P에서의 접선과 일치하므로

이 직선의 방정식과 포물선의 방정식을 연립하면

$y^2=4p(\sqrt{3}y-k)$

정리하면

$y^2-4\sqrt{3}py+4pk=0$

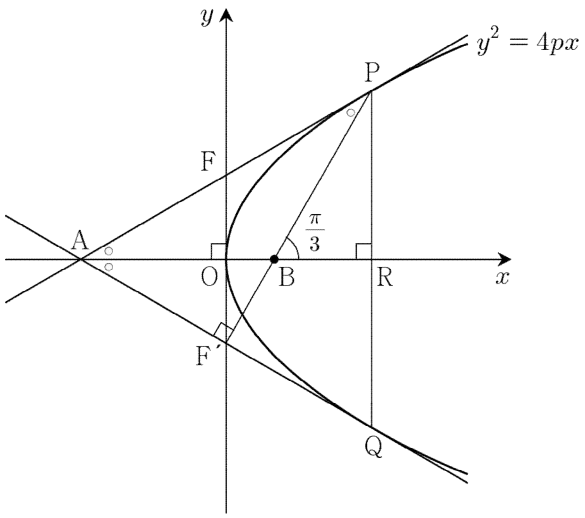
이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$D/4=(-2\sqrt{3}p)^2-4pk=0$

정리하면

$\therefore\ k=3p$

[풀이2]



포물선의 축이 x축이므로 포물선은 x축에 대하여 대칭이다.

따라서 x축 위의 점 A에서 포물선의 그은 두 접선은 x축에 대하여 대칭이고 두 접점 P, Q도 x축에 대하여 대칭이다.

$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{AQ}}$이고 $\angle\mathrm{PAQ}=\dfrac{\pi}{3}$이므로

삼각형 PAQ는 정삼각형이다.

문제에서 주어진 포물선의 초점을 $\mathrm{B}(p,\ 0)$,

점 P의 좌표를 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$으로 두자.

(단, $x_1>0$, $y_1>0$)

포물선 위의 점 P에서의 접선의 방정식은

$y_1y=2p(x+x_1)$

이 접선이 점 $\mathrm{A}(-k,\ 0)$을 지나므로

$y_1\times 0=2p(-k+x_1)$ 즉, $x_1=k$

점 P의 x좌표는 k이므로 점 Q의 x좌표는 k이다.

x축 위의 점 $(k,\ 0)$을 R이라고 하자.

서로 닮음인 두 직각삼각형 AOF′, ARQ에 대하여

$\overline{\mathrm{AO}}:\overline{\mathrm{AR}}=1:2=\overline{\mathrm{AF'}}:\overline{\mathrm{AQ}}$

이므로 F′는 선분 AQ의 중점이다.

정삼각형 PAQ에서 $\overline{\mathrm{PF'}}\perp\overline{\mathrm{AQ}}$이므로

삼각형 PAF′는 직각삼각형이다.

삼각형 PAF′의 세 내각의 합은 π이므로

$\angle\mathrm{BPA}=\pi-\angle\mathrm{PAF'}-\angle\mathrm{AF'P}=\dfrac{\pi}{6}$

$\angle\mathrm{BAP}=\angle\mathrm{BPA}$이므로

삼각형 ABP는 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BP}}$인 이등변삼각형이다.

삼각형 ABP의 각 $\angle B$에 대한 외각은

$\angle PBR = \frac{\pi}{3}$

직각삼각형 PBR에서 특수각의 삼각비에 의하여

$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{\overline{PB}}{\overline{BR}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BR}}$ 즉, $\frac{1}{2} = \frac{p-(-k)}{k-p}$

정리하면

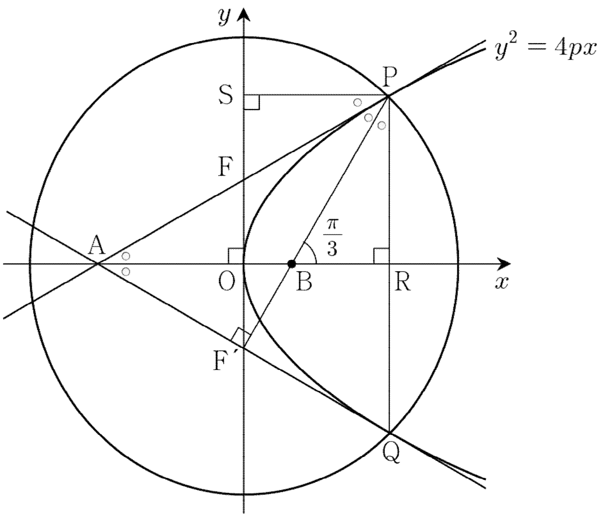
$k = 3p$ $\cdots$ ㉠

점 P의 좌표는 $P(3p,\ 2\sqrt{3}p)$이므로

점 F의 좌표는 $F(0,\ \sqrt{3}p)$이다.

왜냐하면 점 F는 선분 AP의 중점이기 때문이다.

점 P에서 y축에 내린 수선의 발을 S라고 하자.



$\overline{SP} // \overline{AR}$이므로 평행선의 성질에 의하여

$\angle FPS = \frac{\pi}{6} = \angle PAR$(엇각)

직각삼각형 FPS에서 특수각의 삼각비에 의하여

$\overline{PF} = \frac{\overline{SP}}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{\overline{OR}}{\cos\frac{\pi}{6}} = 2\sqrt{3}p$

직각삼각형 F′PS에서 특수각의 삼각비에 의하여

$\overline{PF'} = \frac{\overline{SP}}{\cos\frac{\pi}{3}} = \frac{\overline{OR}}{\cos\frac{\pi}{3}} = 6p$

타원의 정의에 의하여

$\overline{PF} + \overline{PF'} = 2\sqrt{3}p + 6p = 4\sqrt{3} + 12$

풀면

$p = 2$

이를 ㉠에 대입하면

$k = 6$

$\therefore\ k + p = 8$

답 ①

[참고4]

k, p 사이의 관계식을 다음과 같이 구해도 좋다.

점 F′는 선분 AQ의 중점이고,

점 R은 선분 PQ의 중점이므로

두 선분 PF′, AR의 교점인 B는

정삼각형 PAQ의 무게중심이다.

삼각형의 무게중심의 좌표를 구하는 공식에 의하여

(점 B의 x좌표)$=\frac{1}{3}\times$(세 점 A, P, Q의 x좌표의 합)

대입하면

$p = \frac{-k+k+k}{3}$

정리하면

$\therefore\ k = 3p$

20

[풀이]

ㄱ. (참)

$f(\sqrt{\pi}) = e^{-\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{\pi}} \sin(t^2)dt$

$s = t^2$으로 두면

t가 닫힌구간 $[0,\ \sqrt{\pi}]$에 속하는 실수일 때,

s는 닫힌구간 $[0,\ \pi]$에 속하는 실수이다.

닫힌구간 $[0,\ \sqrt{\pi}]$에서 $\sin(t^2) = \sin s \geq 0$이므로

$\int_0^{\sqrt{\pi}} \sin(t^2)dt \geq 0$

이때, $\int_0^{\sqrt{\pi}} \sin(t^2)dt$의 값이 0은 아니다.

왜냐하면 열린구간 $(0,\ \sqrt{\pi})$에서 $\sin(t^2) > 0$이기 때문이다.

$e^{-\sqrt{\pi}} > 0$, $\int_0^{\sqrt{\pi}} \sin(t^2)dt > 0$이므로

$\therefore\ f(\sqrt{\pi}) > 0$

ㄴ. (참)

○ 함수 $f(x)$의 $x = 0$, $x = \sqrt{\pi}$에서의 함숫값

$f(\sqrt{\pi}) = p(>0)$로 두자.

$f(0) = e^0\int_0^0 \sin(t^2)dt = 1\times 0 = 0$

○ $f(x)$의 연속성과 미분가능성

적분과 미분의 관계에 의하여

$\frac{d}{dx}\int_0^x \sin(t^2)dt = \sin(x^2)$이므로

함수 $\int_0^x \sin(t^2)dt$는 실수 전체의 집합에서 미분가능

하다.

두 함수 e^{-x}, $\int_0^x \sin(t^2)dt$는 각각 x에 대하여 미분가능하므로 함수 $f(x)$는 미분가능한 함수이다.
함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로
함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
○ 평균값의 정리
닫힌구간 $[0,\ \sqrt{\pi}]$에서 함수 $f(x)$가 연속이고
열린구간 $(0,\ \sqrt{\pi})$에서 함수 $f(x)$가 미분가능하므로
평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(\sqrt{\pi})-f(0)}{\sqrt{\pi}-0}=\frac{p}{\sqrt{\pi}}=f'(a)$$

인 a가 열린구간 $(0,\ \sqrt{\pi})$에 적어도 하나 존재한다.
그런데 $\frac{p}{\sqrt{\pi}}>0$이므로 주어진 명제는 참이다.

ㄷ. (참)
함수 $f(x)$의 도함수는

$$f'(x)=e^{-x}\left(\sin(x^2)-\int_0^x \sin(t^2)dt\right)$$

세 함수 e^{-x}, $\sin(x^2)$, $\int_0^x \sin(t^2)dt$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로
함수 $f'(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
그러므로 실수 전체의 집합에서 $f'(x)$는 연속이다.
닫힌구간 $[0,\ \sqrt{\pi}]$에서 함수 $f(x)$가 연속이고

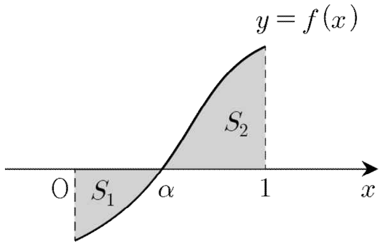
$$f'(a)=\frac{p}{\sqrt{\pi}}>0,$$

$$f'(\sqrt{\pi})=-e^{-\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{\pi}}\sin(t^2)dt<0$$이므로

사이값 정리에 의하여 $f'(b)=0$을 만족시키는
b가 열린구간 $(0,\ \sqrt{\pi})$에 적어도 하나 존재한다.
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.
답 ⑤

21

[풀이]
닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 $f(x)\le 0$이면
$\int_0^1 f(x)dx \le 0$이므로 문제에서 주어진 조건에 모순이다.
닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 $f(x)>0$이면
$\int_0^1 |f(x)|dx=\int_0^1 f(x)dx$이므로 문제에서 주어진 조건에 모순이다.
따라서 사이값 정리에 의하여 $f(\alpha)=0$인 α가 열린구간 $(0,\ 1)$에 적어도 하나 존재한다. 그런데 $f(x)$는 증가함수이므로 α의 값을 유일하게 결정된다.



$\int_0^\alpha |f(x)|dx=S_1$, $\int_\alpha^1 |f(x)|dx=S_2$로 두자.
문제에서 주어진 조건에 의하여

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^\alpha f(x)dx+\int_\alpha^1 f(x)dx$$

$$=-S_1+S_2=2$$

$$\int_0^1 |f(x)|dx=\int_0^\alpha |f(x)|dx+\int_\alpha^1 |f(x)|dx$$

$$=S_1+S_2=2\sqrt{2}$$

S_1, S_2에 대한 연립방정식을 풀면
$S_1=\sqrt{2}-1$, $S_2=\sqrt{2}+1$
함수 $F(x)$는

$$F(x)=\int_0^x |f(t)|dt\,(0\le x\le 1) \qquad \cdots(*)$$

적분과 미분의 관계에 의하여

$$F'(x)=|f(x)|=\begin{cases}-f(x) & (0\le x\le \alpha)\\ f(x) & (\alpha<x\le 1)\end{cases}$$

정적분의 치환적분법에 의하여

$$\int_0^1 f(x)F(x)dx$$

$$=\int_0^\alpha \{-F'(x)F(x)\}dx+\int_\alpha^1 F'(x)F(x)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{2}(F(x))^2\right]_0^\alpha+\left[\frac{1}{2}(F(x))^2\right]_\alpha^1$$

$$=\frac{1}{2}(F(0))^2+\frac{1}{2}(F(1))^2-(F(\alpha))^2 \qquad \cdots㉠$$

$(*)$에 $x=0$, $x=1$, $x=\alpha$를 대입하면

$$F(0)=\int_0^0 |f(t)|dt=0$$

$$F(1)=\int_0^1 |f(t)|dt=2\sqrt{2}$$

$$F(\alpha)=\int_0^\alpha |f(t)|dt=\sqrt{2}-1$$

이를 ㉠에 대입하여 정리하면

$$\int_0^1 f(x)F(x)dx=1+2\sqrt{2}$$

답 ④

[참고1]
정적분의 치환적분법에 의한 계산을 풀어쓰면 다음과 같다.
$F(x)=s$로 두면 $F'(x)dx=ds$이고
$x=0$일 때 $s=F(0)$, $x=\alpha$일 때 $s=F(\alpha)$
$$\int_0^\alpha \{-F'(x)F(x)\}dx=\int_{F(0)}^{F(\alpha)}(-s)ds$$
$$=\left[-\frac{1}{2}s^2\right]_{F(0)}^{F(\alpha)}=\frac{1}{2}(F(0))^2-\frac{1}{2}(F(\alpha))^2$$
$F(x)=s$로 두면 $F'(x)dx=ds$이고
$x=\alpha$일 때 $s=F(\alpha)$, $x=1$일 때 $s=F(1)$
$$\int_\alpha^1 F'(x)F(x)dx=\int_{F(\alpha)}^{F(1)}sds$$
$$=\left[\frac{1}{2}s^2\right]_{F(\alpha)}^{F(1)}=\frac{1}{2}(F(1))^2-\frac{1}{2}(F(\alpha))^2$$

[참고2]
정적분의 부분적분법을 이용하여 계산할 수도 있다.
정적분의 부분적분법에 의하여
$$\int_0^\alpha \{-F'(x)F(x)\}dx$$
$$=\left[-(F(x))^2\right]_0^\alpha-\int_0^\alpha\{-F(x)F'(x)\}dx$$
정리하면
$$\int_0^\alpha \{-F'(x)F(x)\}dx=\frac{1}{2}\left[-(F(x))^2\right]_0^\alpha$$
$$=\frac{1}{2}(F(0))^2-\frac{1}{2}(F(\alpha))^2$$
정적분의 부분적분법에 의하여
$$\int_\alpha^1 F'(x)F(x)dx$$
$$=\left[(F(x))^2\right]_\alpha^1-\int_\alpha^1 F'(x)F(x)dx$$
정리하면
$$\int_\alpha^1 F'(x)F(x)dx=\frac{1}{2}\left[(F(x))^2\right]_\alpha^1$$
$$=\frac{1}{2}(F(1))^2-\frac{1}{2}(F(\alpha))^2$$

22

[풀이]
중복조합의 수에 의하여
$${}_4\mathrm{H}_2={}_{4+2-1}\mathrm{C}_2={}_5\mathrm{C}_2=\frac{5\times4}{1\times2}=10$$
답 10

23

[풀이]
지수법칙에 의하여
$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-5}=2^{5-x}$, $4=2^2$이므로
문제에서 주어진 부등식은
$2^{5-x}\ge 2^2$
밑이 1 보다 크므로
$5-x\ge 2$
부등식을 풀면
$x\le 3$
x는 자연수이므로 문제에서 주어진 부등식의 해집합은
$\{1,\ 2,\ 3\}$
따라서 구하는 값은 6이다.
답 6

24

[풀이]
문제에서 주어진 평면과 구를 각각 α, S라고 하자.
구 S의 방정식을 정리하면
S: $x^2+(y+1)^2+z^2=4$
구 S의 중심을 C, 반지름의 길이를 r이라고 하면
C$(0,\ -1,\ 0)$, $r=2$
평면 α가 구 S에 접하므로
(점 C에서 평면 α까지의 거리)$=r$
점과 평면 사이의 거리 공식에 의하여
$$\frac{|0+8\times(-1)-4\times0+k|}{\sqrt{1^2+8^2+(-4)^2}}=2$$
정리하면
$|k-8|=18$
이므로
$k-8=18$ 또는 $k-8=-18$
풀면
$k=26$ 또는 $k=-10$
따라서 구하는 값은 16이다.
답 16

25

[풀이]
$\cos^2=1-\sin^2x$이므로 주어진 방정식은
$\sin^2x+\sin x=0$
좌변을 인수분해하면

$\sin x(\sin x+1)=0$
풀면
$\sin x=0$ 또는 $\sin x=-1$
$\sin x=0$이면 $x=\pi$
$\sin x=-1$이면 $x=\frac{3}{2}\pi$
$\frac{q}{p}\pi=\pi+\frac{3}{2}\pi=\frac{5}{2}\pi$에서 $p=2,\ q=5$
$\therefore\ p+q=7$
답 7

26

[풀이]
1, 2, 3, 4에서 서로 다른 두 개의 숫자를 선택하여 더할 때, 나올 수 있는 값을 모두 쓰면 다음과 같다. 이때, 가장 작은 값은 3(=1+2)이고, 가장 큰 값은 7(=3+4)이다.
$3=1+2$
$4=1+3$
$5=1+4=2+3$
$6=2+4$
$7=3+4$
갑이 가진 두 장의 카드에 적힌 수의 합을 a, 을이 가진 두 장의 카드에 적힌 수의 합을 b라고 하자.
(1) $a=b=3$인 경우
갑이 1이 적힌 카드와 2가 적힌 카드를 꺼낼 확률은
수학적 확률의 정의에 의하여
$\frac{{}_2C_2}{{}_4C_2}=\frac{1}{6}$
을이 1이 적힌 카드와 2가 적힌 카드를 꺼낼 확률은
수학적 확률의 정의에 의하여
$\frac{{}_2C_2}{{}_4C_2}=\frac{1}{6}$
이 경우의 확률은 확률의 곱셈정리에 의하여
$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$
(2) $a=b=4$인 경우
(1)과 마찬가지의 방법으로 이 경우의 확률은 $\frac{1}{36}$이다.
(3) $a=b=5$인 경우
갑이 1이 적힌 카드와 4가 적힌 카드를 꺼내거나
갑이 2가 적힌 카드와 3이 적힌 카드를 꺼낼 확률은
확률의 덧셈정리에 의하여
$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$
을이 1이 적힌 카드와 4가 적힌 카드를 꺼내거나
을이 2가 적힌 카드와 3이 적힌 카드를 꺼낼 확률은
확률의 덧셈정리에 의하여
$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$
이 경우의 확률은 확률의 곱셈정리에 의하여
$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$
(4) $a=b=6$인 경우
(1)과 마찬가지의 방법으로 이 경우의 확률은 $\frac{1}{36}$이다.
(5) $a=b=7$인 경우
(1)과 마찬가지의 방법으로 이 경우의 확률은 $\frac{1}{36}$이다.
(1)~(5)는 동시에 발생하지 않으므로
구하는 확률은 확률의 덧셈정리에 의하여
$\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{9}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}=\frac{2}{9}$
$p=9,\ q=2$
$\therefore\ p+q=11$
답 11

[참고]
갑이 1이 적힌 카드와 2가 적힌 카드를 꺼낼 확률은
확률의 곱셈정리와 덧셈정리에 의하여
(갑이 1→2의 순서대로 카드를 꺼낼 확률)
×(갑이 2→1의 순서대로 카드를 꺼낼 확률)
$=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

[풀이2]
1, 2, 3, 4에서 서로 다른 두 개의 숫자를 선택하여 더할 때, 나올 수 있는 값을 모두 쓰면 다음과 같다. 이때, 가장 작은 값은 3(=1+2)이고, 가장 큰 값은 7(=3+4)이다.
$3=1+2$
$4=1+3$
$5=1+4=2+3$
$6=2+4$
$7=3+4$
갑이 가진 두 장의 카드에 적힌 수의 합을 a, 을이 가진 두 장의 카드에 적힌 수의 합을 b라고 하자.
(1) $a=b=3$인 경우

갑		을	
1	2	1	2
1	2	2	1
2	1	1	2
2	1	2	1

경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$2\times2=4$

(2) $a=b=4$인 경우

(1)과 마찬가지로 경우의 수는 $2\times2=4$이다.

(3) $a=b=5$인 경우

갑		을		갑		을	
1	4	1	4	2	3	1	4
1	4	4	1	2	3	4	1
1	4	2	3	2	3	2	3
1	4	3	2	2	3	3	2
4	1	1	4	3	2	1	4
4	1	4	1	3	2	4	1
4	1	2	3	3	2	2	3
4	1	3	2	3	2	3	2

경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$4\times4=16$

(4) $a=b=6$인 경우

(1)과 마찬가지로 경우의 수는 $2\times2=4$이다.

(5) $a=b=7$인 경우

(1)과 마찬가지로 경우의 수는 $2\times2=4$이다.

(1)~(5)는 동시에 발생하지 않으므로

합의 법칙에 의하여 $a=b$일 경우의 수는

$4+4+16+4+4=32$

수학적 확률의 정의에 의하여 구하는 확률은

$$\frac{32}{(4\times3)\times(4\times3)}=\frac{2}{9}$$

$p=9,\ q=2$

$\therefore\ p+q=11$

답 11

27

[풀이1]

지수법칙에 의하여

$2^a\times4^b=2^a\times2^{2b}=2^{a+2b}$

조건 (나)에 의하여 2^{a+2b}은 8의 배수이므로

$a+2b\geq3$

이제 $a,\ b,\ c$에 대한 식을 모두 쓰면

$a+b+c=7$ (단, $a\geq0,\ b\geq0,\ c\geq0$) …㉠

$a+2b\geq3$ …㉡

㉠을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는 $a,\ b,\ c$ 중에서 중복을 허용하여 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_7={}_{3+7-1}C_7={}_9C_7={}_9C_2=\frac{9\times8}{1\times2}=36$$

㉠은 만족시키지만, ㉡을 만족시키지 않는

즉, $a+2b<3$인 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$는

$(2,\ 0,\ 5),\ (1,\ 0,\ 6),\ (0,\ 1,\ 6),\ (0,\ 0,\ 7)$

이므로 구하는 경우의 수는

$36-4=32$

답 32

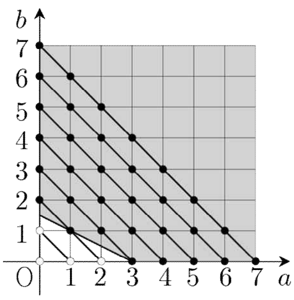
[참고1]

부등식의 영역의 관점에서 순서쌍의 개수를 구할 수도 있다.

$a+b=7-c$ (단, $0\leq c\leq7$)

$a\geq0,\ b\geq0,\ a+2b\geq3$

이를 좌표평면에 나타내면



위의 그림에서 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는

$$\frac{1+8}{2}\times8-4=32$$

[풀이2]

지수법칙에 의하여

$2^a\times4^b=2^a\times2^{2b}=2^{a+2b}$

조건 (나)에 의하여 2^{a+2b}은 8의 배수이므로

$a+2b\geq3$

이제 $a,\ b,\ c$에 대한 식을 모두 쓰면

$a+b+c=7$ (단, $a\geq0,\ b\geq0,\ c\geq0$) …㉠

$a+2b\geq3$ …㉡

(1) $b=0$인 경우

㉠, ㉡을 다시 쓰면

$a+c=7$ (단, $a\geq3,\ c\geq0$)

$a-3=a'$로 두면

$a'+c=4$ (단, $a'\geq0,\ c\geq0$)

순서쌍 $(a',\ 0,\ c)$의 개수는 $a',\ c$ 중에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_2H_4={}_{2+4-1}C_4={}_5C_4=5$

(2) $b=1$인 경우

㉠, ㉡을 다시 쓰면

$a+c=6$ (단, $a\ge 1$, $c\ge 0$)

$a-1=a'$로 두면

$a'+c=5$ (단, $a'\ge 0$, $c\ge 0$)

순서쌍 $(a',\ 1,\ c)$의 개수는 a', c 중에서 중복을 허용하여 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_2H_5={}_{2+5-1}C_5={}_6C_5={}_6C_1=6$

(3) $b=k(2\le k\le 7)$인 경우

㉠, ㉡을 다시 쓰면

$a+c=7-k$ (단, $a\ge 0$, $c\ge 0$)

순서쌍 $(a,\ k,\ c)$의 개수는 a, c 중에서 중복을 허용하여 $7-k$개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_2H_{7-k}={}_{2+7-k-1}C_{7-k}={}_{8-k}C_{7-k}={}_{8-k}C_1=8-k$

(1), (2), (3)은 동시에 발생하지 않으므로

합의 법칙에 의하여 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는

$$5+6+\sum_{k=2}^{7}(8-k)=5+6+\frac{1+6}{2}\times 6=32$$

답 32

[참고2]

a의 값을 기준으로 순서쌍의 개수를 구할 수도 있다.

$a+b+c=7$ (단, $a\ge 0$, $b\ge 0$, $c\ge 0$) $\cdots$㉠

$a+2b\ge 3$ $\cdots$㉡

(1) $a=0$인 경우

㉠, ㉡을 다시 쓰면

$b+c=7$ (단, $b\ge 2$, $c\ge 0$)

$b-2=b'$로 두면

$b'+c=5$ (단, $b'\ge 0$, $c\ge 0$)

순서쌍 $(0,\ b',\ c)$의 개수는 b', c 중에서 중복을 허용하여 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_2H_5={}_{2+5-1}C_5={}_6C_5={}_6C_1=6$

(2) $a=1$인 경우

㉠, ㉡을 다시 쓰면

$b+c=6$ (단, $b\ge 1$, $c\ge 0$)

$b-1=b'$로 두면

$b'+c=5$ (단, $b'\ge 0$, $c\ge 0$)

순서쌍 $(1,\ b',\ c)$의 개수는 b', c 중에서 중복을 허용하여 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_2H_5={}_{2+5-1}C_5={}_6C_5={}_6C_1=6$

(3) $a=2$인 경우

㉠, ㉡을 다시 쓰면

$b+c=5$ (단, $b\ge 1$, $c\ge 0$)

$b-1=b'$로 두면

$b'+c=4$ (단, $b'\ge 0$, $c\ge 0$)

순서쌍 $(2,\ b',\ c)$의 개수는 b', c 중에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_2H_4={}_{2+4-1}C_4={}_5C_4={}_5C_1=5$

(4) $a=k(3\le k\le 7)$인 경우

㉠, ㉡을 다시 쓰면

$b+c=7-k$ (단, $b\ge 0$, $c\ge 0$)

순서쌍 $(k,\ b,\ c)$의 개수는 b, c 중에서 중복을 허용하여 $7-k$개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_2H_{7-k}={}_{2+7-k-1}C_{7-k}={}_{8-k}C_{7-k}={}_{8-k}C_1=8-k$

(1)~(4)는 동시에 발생하지 않으므로

합의 법칙에 의하여 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는

$$6+6+5+\sum_{k=3}^{7}(8-k)=6+6+5+\frac{1+5}{2}\times 5=32$$

답 32

[참고3]

c의 값을 기준으로 순서쌍의 개수를 구할 수도 있다.

$a+b+c=7$ (단, $a\ge 0$, $b\ge 0$, $c\ge 0$) $\cdots$㉠

$a+2b\ge 3$ $\cdots$㉡

$c=7$을 ㉠에 대입하면 $a=b=0$이다.

그런데 이는 ㉡을 만족시키지 않으므로 c는 7이 아니다.

$c=6$을 ㉠에 대입하면

$a=1$, $b=0$ 또는 $a=0$, $b=1$이다.

그런데 이는 ㉡을 만족시키지 않으므로 c는 6이 아니다.

(1) $c=5$인 경우

㉠, ㉡을 다시 쓰면

$a+b=2$ (단, $a\ge 0$, $b\ge 0$)

$a+2b\ge 3$

순서쌍 $(a,\ b,\ c)$는 $(1,\ 1,\ 5)$, $(0,\ 2,\ 5)$이다.

(2) $c=k(0\le k\le 4)$인 경우

㉠, ㉡을 다시 쓰면

$a+b=7-k$ (단, $a\ge 0$, $b\ge 0$)

$a+2b\ge 3$

위의 두 식을 연립하면

$a+b=7-k$ (단, $a\ge 0$, $b\ge 0$)

순서쌍 $(a,\ b,\ k)$의 개수는 a, b 중에서 중복을 허용하여 $7-k$개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_2H_{7-k}={}_{2+7-k-1}C_{7-k}={}_{8-k}C_{7-k}$

$={}_{8-k}C_1=8-k$

(1), (2)는 동시에 발생하지 않으므로

합의 법칙에 의하여 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는

$$2+\sum_{k=0}^{4}(8-k)=2+\frac{4+8}{2}\times 5=32$$

답 32

28

[풀이]

주어진 쌍곡선의 두 초점이 x축 위에 있으므로 쌍곡선의 방정식을 다음과 같이 두자.

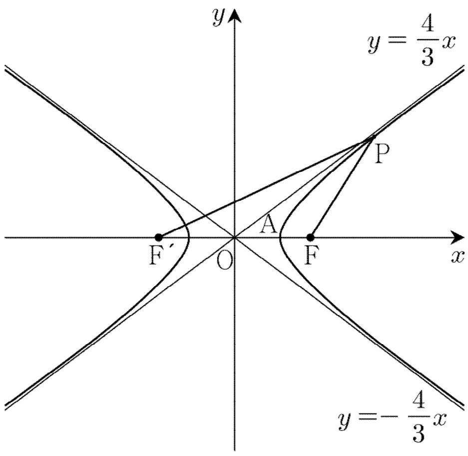
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$(단, $a>0$, $b>0$)

이 쌍곡선의 점근선의 방정식을 유도하면

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$에서 $y=\pm\frac{b}{a}x$

문제에서 주어진 조건에 의하여 $\frac{b}{a}=\frac{4}{3}$이므로

$a=3k$, $b=4k$로 두자.(단, $k>0$)



쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{(3k)^2}-\frac{y^2}{(4k)^2}=1 \qquad \cdots ㉠$$

쌍곡선의 초점 F에 대하여

$c=\sqrt{a^2+b^2}=5k$

㉠에 $y=0$을 대입하여 점 A의 좌표를 구하면

$\mathrm{A}(3k,\ 0)$

조건 (나)에 의하여

$$\overline{\mathrm{AF}}=\overline{\mathrm{OF}}-\overline{\mathrm{OA}}=5k-3k=2k=(\text{자연수}) \qquad \cdots ㉡$$

쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=(\text{주축의 길이})=6k$

이므로

$\overline{\mathrm{PF}}=30-6k$

조건 (가)에 의하여

$16\le 30-6k\le 20$

정리하면

$\frac{10}{3}\le 2k\le\frac{14}{3}$

㉡에서 $2k$는 자연수이므로

$2k=4$ 즉, $k=2$

쌍곡선의 주축의 길이는

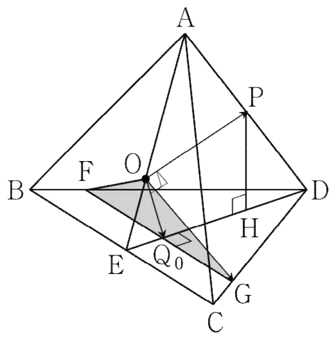
$\therefore\ 6k=12$

답 12

29

[풀이1]

선분 BC의 중점을 E, 점 P에서 선분 DE에 내린 수선의 발을 H라고 하자. 이때, 선분 PH는 평면 BCD에 수직이다.



○ 점 O를 지나고 직선 OP에 수직인 평면을 찾자.

문제에서 주어진 조건에 의하여

$\overline{\mathrm{OP}}\perp\overline{\mathrm{OQ}}$

이므로 직선과 평면의 수직에 대한 정의에 의하여

점 Q는 점 O를 지나고 직선 OP에 수직인 평면 위에 있다.

이때, 이 평면을 α라고 하자.

$\overline{\mathrm{OP}}\perp\overline{\mathrm{OF}}$가 되도록 선분 BD 위에 점 F를 잡고,

$\overline{\mathrm{OP}}\perp\overline{\mathrm{OG}}$가 되도록 선분 CD 위에 점 G를 잡자.

직선과 평면의 수직에 대한 정의에 의하여

평면 OFG는 직선 OP에 수직이므로

평면 OFG는 평면 α이다.

○ 두 직선 BC, FG가 서로 평행함을 보이자.

$\overline{\mathrm{BC}}\perp\overline{\mathrm{EA}}$, $\overline{\mathrm{BC}}\perp\overline{\mathrm{ED}}$

이므로 직선과 평면의 수직에 대한 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{BC}}\perp\mathrm{AED}$

평면 AED에 포함된 직선 OP에 대하여

직선과 평면의 수직에 대한 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{OP}}\perp\overline{\mathrm{BC}}$이므로 $\overline{\mathrm{BC}}/\!/\alpha$

평면 α와 평면 BCD의 교선 FG에 대하여

$\overline{\mathrm{BC}}/\!/\overline{\mathrm{FG}}$

두 선분 DE와 FG의 교점을 $\mathrm{Q_0}$이라고 하면

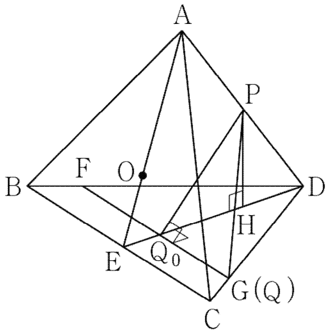
$\overline{\mathrm{HQ_0}}\perp\overline{\mathrm{Q_0G}}$ 즉, $\angle\mathrm{HQ_0G}=\frac{\pi}{2}$

○ 점 Q가 점 G(혹은 점 F)에 오면 선분 PQ의 길이가 최대가 됨을 보이자.

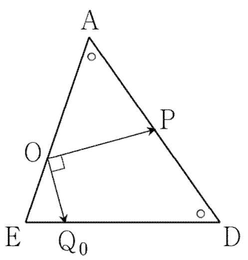
점 Q는 평면 α와 평면 BCD의 교선 FG 위에 있다.

그런데 점 Q는 삼각형 BCD의 내부 혹은 경계 위에

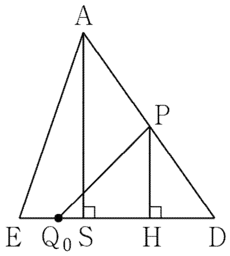
있으므로
점 Q는 선분 FG 위에 있다.



$\overline{PH} \perp BCD$, $\overline{HQ_0} \perp \overline{FG}$
이므로 삼수선의 정리에 의하여
$\overline{PQ_0} \perp \overline{FG}$
직각삼각형 PHQ_0에서 피타고라스의 정리에 의하여
$\overline{PQ_0}^2 = \overline{PH}^2 + \overline{HQ_0}^2$
직각삼각형 PQ_0Q에서 피타고라스의 정리에 의하여
$\overline{PQ}^2 = \overline{PQ_0}^2 + \overline{Q_0Q}^2$
위의 두 등식에서 아래의 등식을 얻는다.
$\overline{PQ}^2 = \overline{PH}^2 + \overline{HQ_0}^2 + \overline{Q_0Q}^2$
(이는 $\overline{PH}$, $\overline{HQ_0}$, $\overline{Q_0Q}$를 각각 세 모서리로 하는 직육면체의 대각선의 길이를 구하는 식이다.)
두 선분 PH, HQ_0의 길이는 일정하므로
선분 Q_0Q의 길이가 최대일 때, 선분 PQ의 길이는 최대가 된다.
다시 말하면 점 Q가 점 G(혹은 점 F) 위에 올 때, 선분 PQ의 길이는 최대가 된다.
○ 선분 PG의 길이를 구하자.
점 G가 선분 CD의 $t:(1-t)$ 내분점이라고 하면
점 Q_0은 선분 ED의 $t:(1-t)$ 내분점이다.
(단, $0<t<1$)



$\overrightarrow{EA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{ED} = \vec{b}$라고 하면
$|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2\sqrt{3}$ (∵ 정삼각형의 높이)
두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 θ_0라고 하자.
이면각의 정의에 의하여
두 평면 ABC, BCD가 이루는 각의 크기는 θ_0이므로
$\cos\theta_0 = \frac{1}{3}$
벡터의 뺄셈의 정의에 의하여
$\overrightarrow{AD} = \vec{b} - \vec{a}$
벡터의 뺄셈의 정의에 의하여
$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$
$= \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}) - \frac{2}{3}(-\vec{a}) = \frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$
벡터의 덧셈의 정의에 의하여
$\overrightarrow{OQ_0} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EQ_0} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE} + t\overrightarrow{ED}$
$= \frac{1}{3}(-\vec{a}) + t\vec{b} = -\frac{1}{3}\vec{a} + t\vec{b}$
벡터의 내적의 성질에 의하여
$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ_0} = \left(\frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\vec{a} + t\vec{b}\right)$
$= -\frac{1}{18}|\vec{a}|^2 + \frac{t-1}{6}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{t}{2}|\vec{b}|^2$
$= -\frac{1}{18}|\vec{a}|^2 + \frac{t-1}{6}|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta_0 + \frac{t}{2}|\vec{b}|^2$
$= -\frac{1}{18}(2\sqrt{3})^2 + \frac{t-1}{6}(2\sqrt{3})^2\frac{1}{3} + \frac{t}{2}(2\sqrt{3})^2$
$= \frac{20}{3}t - \frac{4}{3} = 0$에서 $t = \frac{1}{5}$
점 G는 선분 CD의 $1:4$ 내분점이므로
$\overline{Q_0G} = \overline{EC} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{5}$
점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 S라고 하자.



위의 그림에서 세 선분 ES, SH, HD는 모두 길이가 같다.
왜냐하면 점 S는 삼각형 BCD의 무게중심이고
점 H는 선분 SD의 중점이기 때문이다.
두 직각삼각형 ASD, PHD의 닮음비는 $2:1$이므로
$\overline{PH} = \frac{1}{2}\overline{AS} = \frac{1}{2} \times$(정사면체 ABCD의 높이)
$= \frac{1}{2} \times \frac{4\sqrt{6}}{3} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$
$\overline{Q_0H} = \overline{ED} - \overline{EQ_0} - \overline{HD}$

$=\overline{\mathrm{ED}}-\frac{1}{5}\overline{\mathrm{ED}}-\frac{1}{3}\overline{\mathrm{ED}}=\frac{7}{15}\overline{\mathrm{ED}}=\frac{14\sqrt{3}}{15}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{PQ}}^2 \le \overline{\mathrm{PH}}^2+\overline{\mathrm{HQ_0}}^2+\overline{\mathrm{Q_0G}}^2$

$=\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2+\left(\frac{14\sqrt{3}}{15}\right)^2+\left(\frac{8}{5}\right)^2=\frac{196}{25}$

(단, 등호는 점 Q가 점 G 위에 있을 때 성립한다.)

따라서 $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$의 최댓값은 $\frac{14}{5}$이다.

$p=5$, $q=14$이므로 $p+q=19$

답 19

[참고1]

벡터의 내적의 성질에 의하여

$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2$

$=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2$

$=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2(\because \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=0)$

$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$의 값은 일정하므로 $|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$의 값이 최대일 때,

$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$는 최댓값을 갖는다.

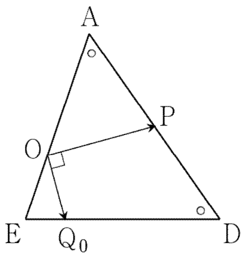
위의 풀이와 마찬가지의 방법으로

점 Q가 점 F 또는 점 G 위에 있을 때,

$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$ 그리고 $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$는 최대가 됨을 보일 수 있다.

[참고2]

t의 값을 다음과 같은 방법으로 구해도 좋다.



$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\vec{c}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$라고 하면

$|\vec{c}|=2\sqrt{3}$ ($\because$ 정삼각형의 높이), $|\vec{d}|=4$

두 벡터 $\vec{c}$, $\vec{d}$가 이루는 각의 크기를 θ_1이라고 하자.

정사면체에서 한 모서리와 이 모서리를 포함하지 않는 면이 이루는 각의 크기에 대한 코사인 값은 $\frac{\sqrt{3}}{3}$이므로

$\cos\theta_1=\frac{\sqrt{3}}{3}$

벡터의 뺄셈의 정의에 의하여

$\overrightarrow{\mathrm{ED}}=\vec{d}-\vec{c}$

벡터의 뺄셈의 정의에 의하여

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AE}}$

$=\frac{1}{2}\vec{d}-\frac{2}{3}\vec{c}$

벡터의 덧셈의 정의에 의하여

$\overrightarrow{\mathrm{OQ_0}}=\overrightarrow{\mathrm{OE}}+\overrightarrow{\mathrm{EQ_0}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AE}}+t\overrightarrow{\mathrm{ED}}$

$=\frac{1}{3}\vec{c}+t(\vec{d}-\vec{c})=\frac{1-3t}{3}\vec{c}+t\vec{d}$

벡터의 내적의 성질에 의하여

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ_0}}=\left(\frac{1}{2}\vec{d}-\frac{2}{3}\vec{c}\right)\cdot\left(\frac{1-3t}{3}\vec{c}+t\vec{d}\right)$

$=\frac{6t-2}{9}|\vec{c}|^2+\frac{1-7t}{6}\vec{c}\cdot\vec{d}+\frac{t}{2}|\vec{d}|^2$

$=\frac{6t-2}{9}|\vec{c}|^2+\frac{1-7t}{6}|\vec{c}||\vec{d}|\cos\theta_1+\frac{t}{2}|\vec{d}|^2$

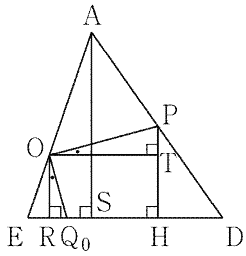
$=\frac{6t-2}{9}(2\sqrt{3})^2+\frac{1-7t}{6}\times 2\sqrt{3}\times 4\times\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{t}{2}4^2$

$=\frac{20t-4}{3}=0$에서 $t=\frac{1}{5}$

[참고3]

다음과 같은 방법으로 t의 값을 구해도 좋다.

점 O에서 선분 PH와 평면 BCD에 내린 수선의 발을 각각 T, R이라고 하자.



$\angle\mathrm{POT}+\angle\mathrm{TOQ_0}=\frac{\pi}{2}$

$\angle\mathrm{TOQ_0}+\angle\mathrm{Q_0OR}=\frac{\pi}{2}$

위의 두 식을 변변히 빼서 정리하면

$\angle\mathrm{POT}=\angle\mathrm{Q_0OR}$

두 직각삼각형 POT, $\mathrm{Q_0OR}$은 닮음이다.

$\overline{\mathrm{OR}}=\frac{1}{3}\overline{\mathrm{AS}}=\frac{1}{3}\times\frac{4\sqrt{6}}{3}=\frac{4\sqrt{6}}{9}$

$\overline{\mathrm{RQ_0}}=\overline{\mathrm{EQ_0}}-\overline{\mathrm{ER}}=t\overline{\mathrm{ED}}-\frac{1}{9}\overline{\mathrm{ED}}$

$=\left(t-\frac{1}{9}\right)\overline{\mathrm{ED}}=\frac{18\sqrt{3}t-2\sqrt{3}}{9}$

$\overline{\mathrm{PT}}=\overline{\mathrm{PH}}-\overline{\mathrm{TH}}=\overline{\mathrm{PH}}-\overline{\mathrm{OR}}$

$=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AS}}-\frac{1}{3}\overline{\mathrm{AS}}=\frac{1}{6}\overline{\mathrm{AS}}$

$=\frac{1}{6}\times$(정사면체 ABCD의 높이)

$= \dfrac{1}{6} \times \dfrac{4\sqrt{6}}{3} = \dfrac{2\sqrt{6}}{9}$

$\overline{OT} = \overline{RH} = \overline{ED} - \overline{ER} - \overline{HD}$

$= \overline{ED} - \dfrac{1}{9}\overline{ED} - \dfrac{1}{3}\overline{ED}$

$= \dfrac{5}{9}\overline{ED} = \dfrac{5}{9} \times 2\sqrt{3} = \dfrac{10\sqrt{3}}{9}$

서로 닮음인 두 직각삼각형 POT, Q_0OR에 대하여

$\overline{OR} : \overline{RQ_0} = \overline{OT} : \overline{TP}$

대입하면

$\dfrac{4\sqrt{6}}{9} : \dfrac{18\sqrt{3}t - 2\sqrt{3}}{9} = \dfrac{10\sqrt{3}}{9} : \dfrac{2\sqrt{6}}{9}$

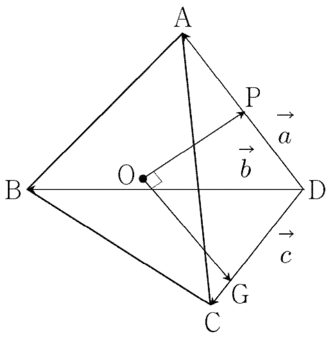
정리하여 t에 대하여 일차방정식을 풀면

$\therefore\ t = \dfrac{1}{5}$

[참고4]

다음과 같은 방법으로 t의 값을 구해도 좋다.

$\overrightarrow{DA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{c}$로 두자.



점 O는 삼각형 ABC의 무게중심이므로

$\overline{DO} = \dfrac{1}{3}\vec{a} + \dfrac{1}{3}\vec{b} + \dfrac{1}{3}\vec{c}$

벡터의 덧셈의 정의에 의하여

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DP} = -\overline{DO} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{DA}$

$= \dfrac{1}{6}\vec{a} - \dfrac{1}{3}\vec{b} - \dfrac{1}{3}\vec{c}$

$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DG} = -\overline{DO} + (1-t)\overrightarrow{DC}$

$= -\dfrac{1}{3}\vec{a} - \dfrac{1}{3}\vec{b} + \left(\dfrac{2}{3} - t\right)\vec{c}$

벡터의 내적의 성질에 의하여

$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OG}$

$= \left(\dfrac{1}{6}\vec{a} - \dfrac{1}{3}\vec{b} - \dfrac{1}{3}\vec{c}\right) \cdot \left(-\dfrac{1}{3}\vec{a} - \dfrac{1}{3}\vec{b} + \left(\dfrac{2}{3} - t\right)\vec{c}\right)$

$= -\dfrac{1}{18}|\vec{a}|^2 + \dfrac{1}{9}|\vec{b}|^2 + \left(\dfrac{t}{3} - \dfrac{2}{9}\right)|\vec{c}|^2$

$+ \dfrac{1}{18}\vec{a} \cdot \vec{b} + \left(\dfrac{t}{3} - \dfrac{1}{9}\right)\vec{b} \cdot \vec{c} + \left(-\dfrac{t}{6} + \dfrac{2}{9}\right)\vec{c} \cdot \vec{a}$

$= \dfrac{20}{3}t - \dfrac{4}{3} = 0$

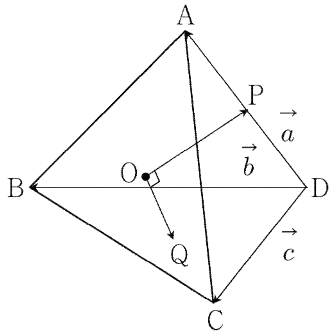
$(\because |\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 4,\ \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 8)$

$\therefore\ t = \dfrac{1}{5}$

[참고5]

점 Q의 자취를 다음과 같은 방법으로 찾을 수 있다.

$\overrightarrow{DA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{c}$로 두자.



영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{b}$, $\vec{c}$에 대하여

(1) 두 벡터 $\vec{b}$, $\vec{c}$는 평면 BCD에 포함된다.

(2) 두 벡터 $\vec{b}$, $\vec{c}$는 서로 평행하지 않다.

위의 두 조건이 모두 성립하므로

$\overrightarrow{DQ} = k\vec{b} + l\vec{c}$ $\cdots(*)$

인 실수 k, l이 존재한다.

(단, $k \geq 0$, $l \geq 0$, $k + l \leq 1$)

점 O는 삼각형 ABC의 무게중심이므로

$\overline{DO} = \dfrac{1}{3}\vec{a} + \dfrac{1}{3}\vec{b} + \dfrac{1}{3}\vec{c}$

벡터의 덧셈의 정의에 의하여

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DP} = -\overline{DO} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{DA}$

$= \dfrac{1}{6}\vec{a} - \dfrac{1}{3}\vec{b} - \dfrac{1}{3}\vec{c}$

$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DQ} = -\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DQ}$

$= -\dfrac{1}{3}\vec{a} + \left(k - \dfrac{1}{3}\right)\vec{b} + \left(l - \dfrac{1}{3}\right)\vec{c}$

벡터의 내적의 성질에 의하여

$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$

$= \left(\dfrac{1}{6}\vec{a} - \dfrac{1}{3}\vec{b} - \dfrac{1}{3}\vec{c}\right) \cdot \left(-\dfrac{1}{3}\vec{a} + \left(k - \dfrac{1}{3}\right)\vec{b} + \left(l - \dfrac{1}{3}\right)\vec{c}\right)$

$= -\dfrac{1}{18}|\vec{a}|^2 + \left(\dfrac{1}{9} - \dfrac{k}{3}\right)|\vec{b}|^2 + \left(\dfrac{1}{9} - \dfrac{l}{3}\right)|\vec{c}|^2$

$+ \left(\dfrac{k}{6} + \dfrac{1}{18}\right)\vec{a} \cdot \vec{b} + \left(\dfrac{2}{9} - \dfrac{k+l}{3}\right)\vec{b} \cdot \vec{c} + \left(\dfrac{l}{6} + \dfrac{1}{18}\right)\vec{c}$

$\cdot\ \vec{a}$

$= -\dfrac{20}{3}(k + l) + \dfrac{16}{3} = 0$

$(\because |\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=4,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=8)$
풀면

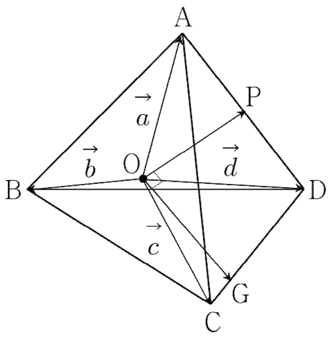
$k+l=\frac{4}{5}$ 즉, $l=\frac{4}{5}-k$

이를 (*)에 대입하여 정리하면

$\overrightarrow{DQ}=\frac{4}{5}\vec{c}+k(\vec{b}-\vec{c})$ (단, $0\le k\le \frac{4}{5}$)

선분 CD의 1:4 내분점을 C′,
점 C′를 지나고 직선 BC에 평행한 직선과
선분 BD의 교점을 B′라고 하면
점 Q는 선분 B′C′ 위에 있다.

[참고6]
다음과 같은 방법으로 t의 값을 구해도 좋다.
$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{OD}=\vec{d}$로 두자.



사면체 ABCD는 정사면체이고,
점 O는 삼각형 ABC의 무게중심이므로
점 D에서 평면 ABC에 내린 수선의 발은 O이다.
그리고 직선 OD는 평면 ABC에 수직이므로
직선과 평면의 수직에 대한 정의에 의하여
$\vec{a}\perp\vec{d}$, $\vec{b}\perp\vec{d}$, $\vec{c}\perp\vec{d}$
벡터의 덧셈의 정의에 의하여

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DP}=\overrightarrow{OD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$

$=\vec{d}+\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{d})=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{d}$

$\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{OD}+(1-t)\overrightarrow{DC}$

$=\vec{d}+(1-t)(\vec{c}-\vec{d})=(1-t)\vec{c}+t\vec{d}$

벡터의 내적의 성질에 의하여

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OG}=\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{d}\right)\cdot\left((1-t)\vec{c}+t\vec{d}\right)$

$=\frac{1-t}{2}\vec{a}\cdot\vec{c}+\frac{t}{2}\vec{a}\cdot\vec{d}+\frac{1-t}{2}\vec{d}\cdot\vec{c}+\frac{t}{2}|\vec{d}|^2$

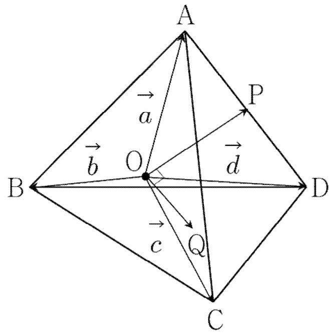
$=\frac{20}{3}t-\frac{4}{3}=0$

$(\because \vec{a}\cdot\vec{c}=-\frac{8}{3},\ \vec{a}\cdot\vec{d}=\vec{d}\cdot\vec{c}=0,\ |\vec{d}|=\frac{4\sqrt{6}}{3})$

풀면

$\therefore\ t=\frac{1}{5}$

[참고7]
점 Q의 자취를 다음과 같은 방법으로 찾을 수 있다.
$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{OD}=\vec{d}$로 두자.



사면체 ABCD는 정사면체이고,
점 O는 삼각형 ABC의 무게중심이므로
점 D에서 평면 ABC에 내린 수선의 발은 O이다.
그리고 직선 OD는 평면 ABC에 수직이므로
직선과 평면의 수직에 대한 정의에 의하여
$\vec{a}\perp\vec{d}$, $\vec{b}\perp\vec{d}$, $\vec{c}\perp\vec{d}$
점 O는 정삼각형 ABC의 무게중심이므로

$\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}=\vec{0}$ 즉, $\vec{c}=-\vec{a}-\vec{b}$

영벡터가 아닌 두 벡터 $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$에 대하여
(1) 두 벡터 $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$는 평면 BCD에 포함된다.
(2) 두 벡터 $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$는 서로 평행하지 않다.
위의 두 조건이 모두 성립하므로

$\overrightarrow{DQ}=k\overrightarrow{DB}+l\overrightarrow{DC}$ $\cdots(*)$

인 실수 k, l이 존재한다.
(단, $k\ge 0$, $l\ge 0$, $k+l\le 1$)
벡터의 뺄셈의 정의에 의하여

$\overrightarrow{DB}=\vec{b}-\vec{d}$, $\overrightarrow{DC}=\vec{c}-\vec{d}=-\vec{a}-\vec{b}-\vec{d}$

이를 (*)에 대입하여 정리하면

$\overrightarrow{DQ}=-l\vec{a}+(k-l)\vec{b}-(k+l)\vec{d}$

벡터의 덧셈의 정의에 의하여

$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DQ}=-l\vec{a}+(k-l)\vec{b}-(k+l-1)\vec{d}$

(단, $k\ge 0$, $l\ge 0$, $k+l\le 1$)
벡터의 덧셈의 정의에 의하여

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DP}=\overrightarrow{OD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$

$=\vec{d}+\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{d})=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{d}$

벡터의 내적의 성질에 의하여

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$

$=\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{d}\right)\cdot(-l\vec{a}+(k-l)\vec{b}-(k+l-1)\vec{d})$

$=-\frac{l}{2}|\vec{a}|^2+\frac{k-l}{2}\vec{a}\cdot\vec{b}-\frac{k+l-1}{2}\vec{a}\cdot\vec{d}$

$-\frac{l}{2}\vec{d}\cdot\vec{a}+\frac{k-l}{2}\vec{d}\cdot\vec{b}-\frac{k+l-1}{2}|\vec{d}|^2$

$=-\frac{20}{3}(k+l)+\frac{16}{3}=0$

$(\because\ |\vec{a}|=\frac{4\sqrt{3}}{3},\ |\vec{d}|=\frac{4\sqrt{6}}{3},$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{8}{3},\ \vec{a}\cdot\vec{d}=\vec{b}\cdot\vec{d}=0)$

정리하면

$k+l=\frac{4}{5}$ 즉, $l=\frac{4}{5}-k$

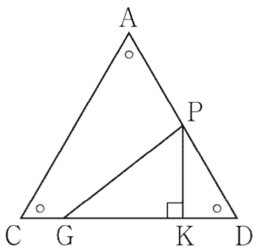
이를 (*)에 대입하여 정리하면

$\overrightarrow{DQ}=\frac{4}{5}\overrightarrow{DC}+k\overrightarrow{CB}$ (단, $0\le k\le\frac{4}{5}$)

선분 CD의 1:4 내분점을 C′,
점 C′를 지나고 직선 BC에 평행한 직선과
선분 BD의 교점을 B′라고 하면
점 Q는 선분 B′C′ 위에 있다.

[참고8]

선분 PG의 길이를 다음과 같이 구해도 좋다.
점 P에서 선분 CD에 내린 수선의 발을 K라고 하자.



직각삼각형 PDK에서 특수각의 삼각비에 의하여

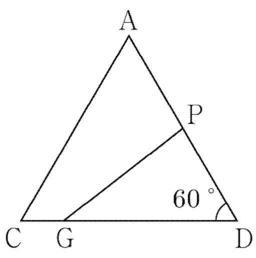
$\overline{DK}=1$

직각삼각형 PGK에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{PG}=\sqrt{\overline{PK}^2+\overline{KG}^2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+\left(\frac{11}{5}\right)^2}=\frac{14}{5}$

[참고9]

선분 PG의 길이를 다음과 같이 구해도 좋다.



삼각형 PGD에서 코사인법칙에 의하여

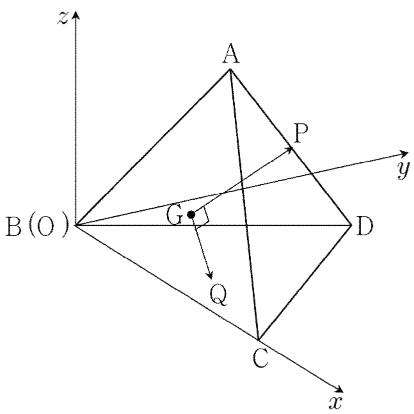
$\overline{PG}^2=\overline{PD}^2+\overline{DG}^2-2\overline{PD}\,\overline{DG}\cos\frac{\pi}{3}$

$=2^2+\left(\frac{16}{5}\right)^2-2\times2\times\frac{16}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{196}{25}$

$\therefore\ \overline{PG}=\frac{14}{5}$

[풀이2]

※ 좌표공간을 도입하기 위하여 문제에서 주어진 점 O를 점 G로 바꾸자.
세 점 B, C, D의 좌표가 각각
B(0, 0, 0), C(4, 0, 0), D(2, $2\sqrt{3}$, 0)
이고, 점 A의 z좌표가 양수가 되도록 좌표공간을 도입하자.



점 A에서 xy평면에 내린 수선의 발은 삼각형 BCD의 무게중심이므로

(점 A의 x좌표)

$=\frac{1}{3}\times$(세 점 B, C, D의 x좌표)$=2$

(점 A의 y좌표)

$=\frac{1}{3}\times$(세 점 B, C, D의 y좌표)$=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

한 모서리의 길이가 4인 정사면체의 높이는 $\frac{4\sqrt{6}}{3}$이므로

(점 A의 z좌표)$=\frac{4\sqrt{6}}{3}$

점 A의 좌표는 $\left(2,\ \frac{2\sqrt{3}}{3},\ \frac{4\sqrt{6}}{3}\right)$이다.

점 P는 선분 AD의 중점이므로 내분점의 공식에 의하여

$P\left(2,\ \frac{4\sqrt{3}}{3},\ \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$

점 G는 삼각형 ABC의 무게중심이므로
내분점의 공식에 의하여

$\mathrm{G}\left(2,\ \frac{2\sqrt{3}}{9},\ \frac{4\sqrt{6}}{9}\right)$

xy평면 위의 점 Q의 좌표를 $\mathrm{Q}(a,\ b,\ 0)$으로 두자.
점 Q는 삼각형 BCD의 내부 혹은 경계 위의 점이므로

$b \geq 0,\ \sqrt{3}a - b \geq 0,\ \sqrt{3}a + b - 4\sqrt{3} \leq 0 \quad \cdots ㉠$

성분으로 주어진 벡터의 연산에 의하여

$\overrightarrow{\mathrm{GP}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OG}} = \left(0,\ \frac{10\sqrt{3}}{9},\ \frac{2\sqrt{6}}{9}\right)$

$\overrightarrow{\mathrm{GQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OG}} = \left(a-2,\ b-\frac{2\sqrt{3}}{9},\ -\frac{4\sqrt{6}}{9}\right)$

성분으로 주어진 벡터의 내적을 하면

$\overrightarrow{\mathrm{GP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{GQ}}$

$= \left(0,\ \frac{10\sqrt{3}}{9},\ \frac{2\sqrt{6}}{9}\right) \cdot$

$\left(a-2,\ b-\frac{2\sqrt{3}}{9},\ -\frac{4\sqrt{6}}{9}\right)$

$= \frac{10\sqrt{3}}{9}b - \frac{36}{27} = 0$ 즉, $b = \frac{2\sqrt{3}}{5}$

점 Q의 좌표는 $\mathrm{Q}\left(a,\ \frac{2\sqrt{3}}{5},\ 0\right)$이다.

㉠에 $b = \frac{2\sqrt{3}}{5}$을 대입하여 a의 범위를 구하면

$\frac{2}{5} \leq a \leq \frac{18}{5}$

두 점 사이의 거리 공식에 의하여

$\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{(2-a)^2 + \left(\frac{14}{15}\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2}$

$\leq \sqrt{\left(\frac{8}{5}\right)^2 + \left(\frac{14}{15}\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2} = \frac{14}{5}$

(단, 등호는 $a = \frac{2}{5}$ 또는 $a = \frac{18}{5}$일 때 성립한다.)

따라서 $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$의 최댓값은 $\frac{14}{5}$이다.

$p = 5,\ q = 14$이므로 $p + q = 19$

답 19

[참고10]

점 Q의 좌표를 다음과 같이 구할 수도 있다.

※ 좌표공간을 도입하기 위하여 문제에서 주어진 점 O를 점 G로 바꾸자.

문제에서 주어진 조건에 의하여

$\overline{\mathrm{GP}} \perp \overline{\mathrm{GQ}}$

이므로 직선과 평면의 수직에 대한 정의에 의하여
점 Q는 점 G를 지나고 직선 GP에 수직인 평면 위에 있다.
이때, 이 평면을 α라고 하자.

평면 α의 법선벡터를

$\vec{n} = \overrightarrow{\mathrm{GP}} = \left(0,\ \frac{10\sqrt{3}}{9},\ \frac{2\sqrt{6}}{9}\right)$

평면 α의 방정식은

$5y + \sqrt{2}z - 2\sqrt{3} = 0$

점 $\mathrm{Q}(a,\ b,\ 0)$은 평면 α 위에 있으므로

$5b + \sqrt{2} \times 0 - 2\sqrt{3} = 0$ 즉, $b = \frac{2\sqrt{3}}{5}$

점 Q의 좌표는 $\mathrm{Q}\left(a,\ \frac{2\sqrt{3}}{5},\ 0\right)$이다.

30

[풀이1]

평행이동의 관점에서 $a = 0$으로 두어도 풀이의 일반성을 잃지 않는다.
다시 말하면 a가 0이 아닌 실수라고 해도 아래와 동일한 결과를 얻는다.
문제에서 주어진 조건에서 $\beta - \alpha = 6\sqrt{3}$(양수)이고,
조건 (나)에서 $\alpha,\ \beta$는 모두 양수이므로 $0 < \alpha < \beta$이다.
조건 (가)에 의하여

$f(x) = \frac{g(x)}{x}$ (단, $x > 0$)

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x) = \frac{xg'(x) - g(x)}{x^2}$ (단, $x > 0$) $\quad \cdots (*)$

조건 (나)에 의하여
양의 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 $x = \alpha$와 $x = \beta$에서 극값을 가지므로

$f'(\alpha) = \frac{\alpha g'(\alpha) - g(\alpha)}{\alpha^2} = 0,\quad f'(\beta) = \frac{\beta g'(\beta) - g(\beta)}{\beta^2} = 0$

위의 두 식을 정리하면

$g'(\alpha) = \frac{g(\alpha)}{\alpha},\ g'(\beta) = \frac{g(\beta)}{\beta} \quad \cdots ㉠$

조건 (나)에 의하여 함수 $f(x)$가 $x = \alpha$와 $x = \beta$에서 동일한 값 M을 가지므로

$f(\alpha) = \frac{g(\alpha)}{\alpha} = M,\ f(\beta) = \frac{g(\beta)}{\beta} = M \quad \cdots ㉡$

㉠, ㉡에 의하여

$g'(\alpha) = M,\ g'(\beta) = M \quad \cdots ㉢$

㉠, ㉢에 의하여

$g'(\alpha) = \frac{g(\alpha) - 0}{\alpha - 0} = M = \frac{g(\beta) - 0}{\beta - 0} = g'(\beta)$

두 점 $(0,\ 0),\ (\alpha,\ g(\alpha))$를 잇는 직선의 기울기와

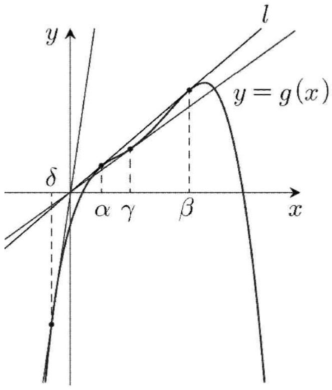
두 점 $(0,\ 0)$, $(\beta,\ g(\beta))$를 잇는 직선의 기울기는
M으로 같으므로, 세 점
$(0,\ 0)$, $(\alpha,\ g(\alpha))$, $(\beta,\ g(\beta))$
는 한 직선 위에 있다. 이 직선을 l이라고 하자.
곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(\alpha,\ g(\alpha))$에서의 접선의 기울기와
두 점 $(0,\ 0)$, $(\alpha,\ g(\alpha))$를 잇는 직선의 기울기는
M으로 같으므로, 원점은 곡선 $y=g(x)$ 위의 점
$(\alpha,\ g(\alpha))$에서의 접선 위에 있다. 이때, 접선은 l이다.
마찬가지의 이유로 점 $(\beta,\ g(\beta))$에서의 접선은 l이다.
따라서 직선 l은 두 점 $(\alpha,\ g(\alpha))$, $(\beta,\ g(\beta))$에서
곡선 $y=g(x)$에 각각 접한다.
한편 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[\alpha,\ \beta]$에서 연속이고
함수 $f(x)$는 열린구간 $(\alpha,\ \beta)$에서 미분가능하고
$f(\alpha)=f(\beta)(=M)$이므로 롤의 정리에 의하여
$f'(\gamma)=0$ (단, $\alpha<\gamma<\beta$)
인 γ가 적어도 하나 이상 존재한다.
방정식 $f'(x)=0$과 필요충분조건은
사차방정식 $xg'(x)-g(x)=0$(즉, ((*)의 분자)$=0$)
이므로 인수정리에 의하여 (*)는

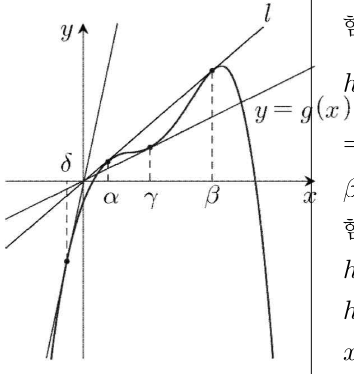
$$f'(x)=\frac{-3(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}{x^2}\ (\text{단},\ x>0)$$

(단, $0<\alpha<\gamma<\beta$, δ는 0이 아닌 실수이다.)
$f'(\gamma)=0$, $f'(\delta)=0$이므로 (*)에서

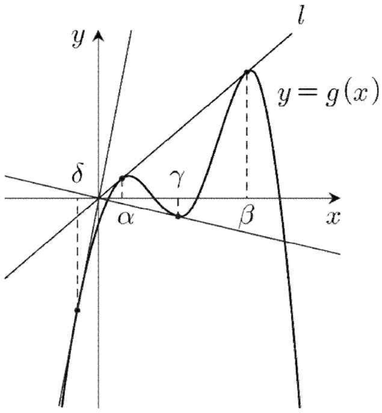
$$g'(\gamma)=\frac{g(\gamma)-0}{\gamma-0},\ g'(\delta)=\frac{g(\delta)-0}{\delta-0}$$

곡선 $y=g(x)$ 위의 두 점 $(\gamma,\ g(\gamma))$, $(\delta,\ g(\delta))$에서의
각각의 접선은 모두 원점을 지난다.
최고차항의 계수가 음수인 사차함수 $g(x)$의 그래프의
개형으로 아래의 2가지의 경우가 가능하다.
(경우1) 함수 $g(x)$가 극소점을 갖지 않는 경우





(경우2) 함수 $g(x)$가 극소점을 갖는 경우



위의 두 경우 모두에 대해서 δ는 음수이다.
$f'(\gamma)=0$, $f''(\gamma)>0$($\leftarrow$[참고2])
이므로 함수 $f(x)$는 $x=\gamma$에서 극솟값을 갖는다.
함수 $f(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수는 3이므로
사차함수 $g(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수는 1이다.
따라서 (경우2)는 제외된다.
(경우1)에서 직선 l은 두 점 $(\alpha,\ g(\alpha))$, $(\beta,\ g(\beta))$에서
곡선 $y=g(x)$에 각각 접하므로
$Mx-g(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$
정리하면
$g(x)=-(x-\alpha)^2(x-\beta)^2+Mx$
함수 $g(x)$의 도함수는

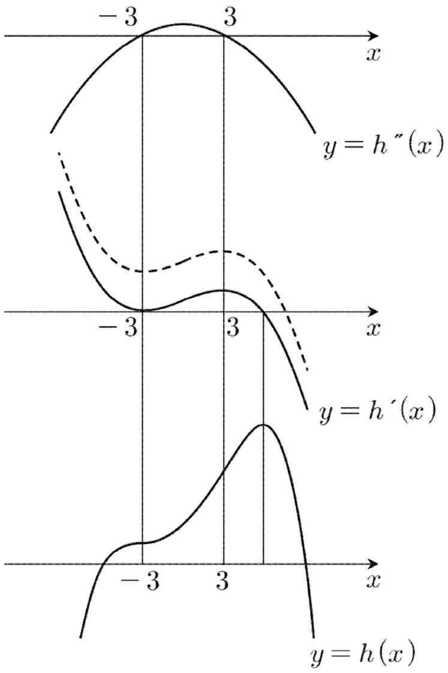
$$g'(x)=-4(x-\alpha)(x-\beta)\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+M$$

계산을 줄이기 위하여 함수 $g(x)$의 그래프를
x축의 방향으로 $-\dfrac{\alpha+\beta}{2}$만큼 평행이동시켜서
함수 $h(x)$의 그래프와 일치한다고 하자.
함수 $g(x)$가 극대점만을 가지므로
함수 $h(x)$도 극대점만을 가지면 된다.
함수 $h(x)$의 도함수는

$$h'(x)=-4x\left(x+\frac{\beta-\alpha}{2}\right)\left(x-\frac{\beta-\alpha}{2}\right)+M$$

$=-4x(x+3\sqrt{3})(x-3\sqrt{3})+M$ ($\because$ $\beta-\alpha=6\sqrt{3}$)
함수 $h(x)$의 이계도함수는
$h''(x)=-12(x+3)(x-3)$
$h''(x)=0$이면 $x=-3$ 또는 $x=3$
$x=-3$의 좌우에서 $h''(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $h'(x)$는 $x=-3$에서 극솟값을 갖는다.
$x=3$의 좌우에서 $h''(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $h'(x)$는 $x=3$에서 극댓값을 갖는다.
조건 (다)를 만족시키는 세 함수

$h(x)$, $h'(x)$, $h''(x)$
의 그래프는 다음과 같다.



함수 $h(x)$가 극대점만을 가지기 위해서는
$h'(-3)=-216+M\geq 0$
$\therefore\ M\geq 216$
답 216

[참고1]
곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(\alpha,\ g(\alpha))$에서의 접선을 l_1이라고 하면
l_1: $y=g'(\alpha)(x-\alpha)+g(\alpha)$
조건 (나)에서 $g(\alpha)=M\alpha$, $g'(\alpha)=M$이므로
l_1: $y=M(x-\alpha)+M\alpha$
정리하면
l_1: $y=Mx$ (원점을 지난다.)
곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(\beta,\ g(\beta))$에서의 접선을 l_2라고 하면 마찬가지의 방법으로
l_2: $y=Mx$ (원점을 지난다.)
두 직선 l_1, l_2가 일치하므로 세 점
$(0,\ 0)$, $(\alpha,\ g(\alpha))$, $(\beta,\ g(\beta))$
는 한 직선 위에 있다.
그리고 직선 l_1(그리고 l_2)는 두 점
$(\alpha,\ g(\alpha))$, $(\beta,\ g(\beta))$
에서 곡선 $y=g(x)$에 각각 접한다.

[참고2]

$$f'(x)=\frac{-3(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}{x^2}$$
(단, $0<\alpha<\gamma<\beta$, $\delta<0$)
$\ln|f'(x)|=\ln 3+\ln|x-\alpha|+\ln|x-\beta|+$
$\ln|x-\gamma|$
$+\ln|x-\delta|-2\ln|x|$
양변을 미분하면
$$\frac{f''(x)}{f'(x)}=\frac{1}{x-\alpha}+\frac{1}{x-\beta}+\frac{1}{x-\gamma}+\frac{1}{x-\delta}-\frac{2}{x}$$
정리하면
$$f''(x)=\frac{-3(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}{x^2}-$$
$$\frac{3(x-\alpha)(x-\gamma)(x-\delta)}{x^2}$$
$$-\frac{3(x-\alpha)(x-\beta)(x-\delta)}{x^2}-$$
$$\frac{3(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)}{x^2}$$
$$+\frac{6(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}{x^3}$$
$$f''(\gamma)=\frac{-3(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(\gamma-\delta)}{\gamma^2}>0$$
$f'(\gamma)=0$, $f''(\gamma)>0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=\gamma$에서 극솟값을 갖는다. 혹은 $x=\gamma$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$가 $x=\gamma$에서 극솟값을 갖는다고 해도 좋다.

[참고3]
M의 범위를 다음과 같이 구해도 좋다.
함수 $g(x)$의 도함수는
$$g'(x)=-4(x-\alpha)(x-\beta)\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+M$$
계산을 줄이기 위하여 $\dfrac{\alpha+\beta}{2}=k$로 두자.
문제에서 주어진 식 $\beta-\alpha=6\sqrt{3}$과 연립하면
$\alpha=k-3\sqrt{3}$, $\beta=k+3\sqrt{3}$
함수 $g(x)$의 도함수는
$g'(x)=-4(x-k+3\sqrt{3})(x-k-3\sqrt{3})(x-k)+M$
함수 $g(x)$의 이계도함수는
$g''(x)=-12(x-k-3)(x-k+3)$
$g''(x)=0$에서 $x=k+3$ 또는 $x=k-3$
$g'(k-3)=-216+M\geq 0$
$\therefore\ M\geq 216$

[참고4]
M의 범위를 다음과 같이 구해도 좋다.
함수 $g(x)$의 도함수는

$g'(x) = -4(x-\alpha)(x-\beta)\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+M$

$g'(x) = -4(x-\alpha)(x-\alpha-6\sqrt{3})(x-\alpha-3\sqrt{3})+M$

$(\because \beta = \alpha+6\sqrt{3})$

함수 $g(x)$의 이계도함수는

$g''(x) = -12(x-\alpha-3\sqrt{3}+3)(x-\alpha-3\sqrt{3}-3)$

$g''(x) = 0$에서 $x = \alpha+3\sqrt{3}-3$ 또는 $x = \alpha+3\sqrt{3}+3$

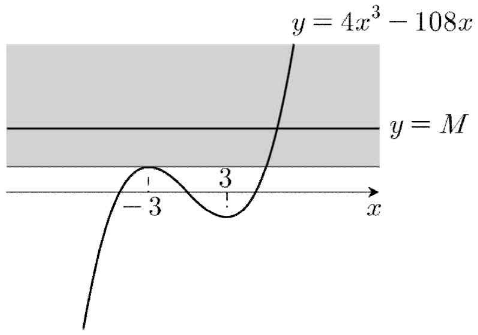
$g'(\alpha+3\sqrt{3}-3) = -216+M \geq 0$

$\therefore\ M \geq 216$

[참고5]

$h'(x) = -4x(x+3\sqrt{3})(x-3\sqrt{3})+M$에 대하여 방정식 $h'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 1이므로

곡선 $y=4x(x+3\sqrt{3})(x-3\sqrt{3})$과 직선 $y=M$의 교점의 개수가 1 또는 2인 M의 범위를 구해도 좋다.



위의 그림에서 색칠된 부분에 직선 $y=M$이 포함되면 된다.

(단, 경계포함) $M \geq 216$

[풀이2]

평행이동의 관점에서 $a=0$으로 두어도 풀이의 일반성을 잃지 않는다. 다시 말하면 a가 0이 아닌 실수라고 해도 아래와 동일한 결과를 얻는다.

문제에서 주어진 조건에서 $\beta-\alpha = 6\sqrt{3}$ (양수)이고, 조건 (나)에서 α, β는 모두 양수이므로 $0<\alpha<\beta$이다.

조건 (가)에 의하여

$f(x) = \frac{g(x)}{x}$ (단, $x>0$) …

(*1)

조건 (나)에 의하여 함수 $f(x)$가 $x=\alpha$와 $x=\beta$에서 동일한 값 M을 가지므로

$f(\alpha) = f(\beta) = M$ 즉, $M-f(\alpha) = M-f(\beta) = 0$

인수정리에 의하여

$M-f(x)$의 분자는 $x-\alpha$와 $x-\beta$를 인수로 가지므로

$M-f(x) = \frac{Mx-g(x)}{x} = \frac{(x-\alpha)(x-\beta)Q(x)}{x}$

(단, $Q(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차식이다.)

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x) = -\frac{(x-\alpha)(x-\beta)Q(x)}{x}+M$(단, $x>0$)

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x) = -\frac{2x-\alpha-\beta}{x}Q(x)-\frac{(x-\alpha)(x-\beta)}{x}Q'(x)$
$+\frac{(x-\alpha)(x-\beta)}{x^2}Q(x)$ …㉠

조건 (나)에 의하여 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=\alpha$와 $x=\beta$에서 극값을 가지므로

$f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$

이를 ㉠에 대입하면

$f'(\alpha) = -\frac{\alpha-\beta}{\alpha}Q(\alpha) = 0$ 즉, $Q(\alpha)=0$

$f'(\alpha) = -\frac{\beta-\alpha}{\beta}Q(\beta) = 0$ 즉, $Q(\beta)=0$

인수정리에 의하여 함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x) = -\frac{(x-\alpha)^2(x-\beta)^2}{x}+M$(단, $x>0$) …

(*2)

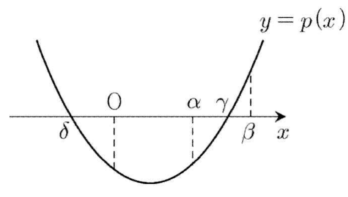
함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x) = -\frac{(x-\alpha)(x-\beta)(3x^2-(\alpha+\beta)x-\alpha\beta)}{x^2}$ (단, $x>0$)

$p(x) = 3x^2-(\alpha+\beta)x-\alpha\beta$로 두자.

$p(0) = -\alpha\beta<0$, $p(\alpha) = 2\alpha(\alpha-\beta)<0$,

$p(\beta) = 2\beta(\beta-\alpha)>0$이므로 이차함수 $p(x)$의 그래프는 다음과 같다.



사이값 정리에 의하여 $p(\gamma) = p(\delta) = 0$인 γ, δ가 존재한다.

(단, $\alpha<\gamma<\beta$, $\delta<0$)

함수 $f'(x)$의 방정식은

$f'(x) = -\frac{3(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}{x^2}$ (단, $x>0$)

$f'(\gamma)=0$, $f''(\gamma)>0$(←[참고2])

이므로 함수 $f(x)$는 $x=\gamma$에서 극솟값을 갖는다.

함수 $f(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수는 3이므로

사차함수 $g(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수는 1이다.

$(*1)$, $(*2)$에 의하여

$$\frac{g(x)}{x}=-\frac{(x-\alpha)^2(x-\beta)^2}{x}+M(\text{단, } x>0)$$

정리하면 $g(x)=-(x-\alpha)^2(x-\beta)^2+Mx$

함수 $g(x)$의 도함수는

$$g'(x)=-4(x-\alpha)(x-\beta)\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+M$$

계산을 줄이기 위하여 함수 $g(x)$의 그래프를

x축의 방향으로 $-\dfrac{\alpha+\beta}{2}$만큼 평행이동시켜서

함수 $h(x)$의 그래프와 일치한다고 하자.

함수 $g(x)$가 극대점만을 가지므로 함수 $h(x)$도 극대점만을 가지면 된다. 함수 $h(x)$의 도함수는

$$h'(x)=-4x\left(x+\frac{\beta-\alpha}{2}\right)\left(x-\frac{\beta-\alpha}{2}\right)+M$$

$=-4x(x+3\sqrt{3})(x-3\sqrt{3})+M(\because \beta-\alpha=6\sqrt{3})$

함수 $h(x)$의 이계도함수는

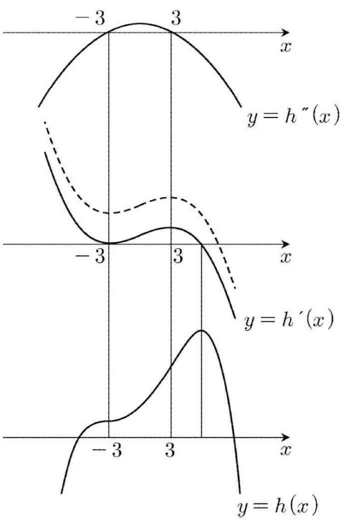
$h''(x)=-12(x+3)(x-3)$

$h''(x)=0$이면 $x=-3$ 또는 $x=3$

$x=-3$의 좌우에서 $h''(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $h'(x)$는 $x=-3$에서 극솟값을 갖는다.

$x=3$의 좌우에서 $h''(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $h'(x)$는 $x=3$에서 극댓값을 갖는다.

조건 (다)를 만족시키는 세 함수 $h(x)$, $h'(x)$, $h''(x)$의 그래프는 다음과 같다.



함수 $h(x)$가 극대점만을 가지기 위해서는

$h'(-3)=-216+M\geq 0$

$\therefore\ M\geq 216$

답 216

[참고6]

함수 $g(x)$의 극점의 개수가 1임을 다음과 같이 보여도 좋다.

함수 $f(x)$의 도함수는

$$f'(x)=\frac{xg'(x)-g(x)}{x^2}(\text{단, } x>0)$$

방정식 $f'(x)=0$의 필요충분조건은

방정식 $xg'(x)-g(x)=0$이다.

이제 $k(x)=xg'(x)-g(x)$로 두자.(단, $x>0$)

함수 $k(x)$의 도함수는

$k'(x)=xg''(x)$

x는 양수이므로 방정식 $k'(x)=0$과 필요충분조건은

방정식 $g''(x)=0$이다.

이차방정식 $g''(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수의

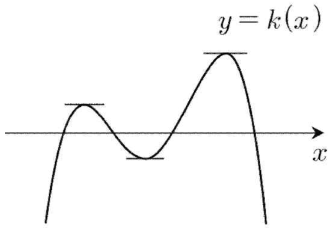
최댓값은 2이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow k(x)=0$

$k'(x)=0 \Leftrightarrow g''(x)=0$

사차방정식 $k(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 4라고 가정하자.



함수 $k(x)$의 극점의 개수는 3이므로

방정식 $k'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

그런데 이차방정식 $g''(x)=0$은 서로 다른 3개의 실근을

가질 수 없으므로 이는 가정에 모순이다.

따라서 방정식 $k(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3 이하이다.

필요충분조건에 의하여

방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3 이하이다.

함수 $f(x)$의 극점의 개수가 3 이하이므로

조건 (다)에 의하여 사차함수 $g(x)$의 극점의 개수는 1이다.